Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Základy optimalizace
BONUS [1]

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

[1] v současnosti Základy spojité optimalizace

Garant: doc. RNDr. Libuše Grygarová, DrSc.
E-mail: Libuse.Grygarova@mff.cuni.cz

Anotace: Přehledová přednáška pokrývající základní oblasti optimalizace, včetně výpočetních metod. Na úlohy spadající pod tuto problematiku vede nesčetné množství problémů z téměř všech oborů lidské činnosti. Má velmi široké možnosti použití. Úvod k dalším přednáškám specializovaným na řešení jednotlivých tříd optimalizačních úloh.

25.06.2008 We
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

ÚLOHA LIN. PROGRAMOVANIA:

$\max c^T x$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

$Ax \leq b$, $x \geq 0$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$.

V ROVNICOVOM TVARE

$\max c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$

PRIČOM RIADKY A SÚ LINEÁRNE NEZÁVISLÉ

BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x JE PRÍP. RIEŠENIE TAKÉ, ŽE
$\exists$ PRÍPUSTNÁ BÁZA $B \in \binom{\{1,\dots,n\}}{m}$ (A_B JE REG.):
$j \notin B \Rightarrow x_j = 0$

JE NAJVIAC JEDNO PRE DANÉ B: $x_B = A_B^{-1} b$

NECH x_0 JE ĽUBOVOĽNÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE,
TJ. $Ax_0 = b$, $x_0 \geq 0$, + ÚLOHA JE OHRANIČENÁ.
POTOM EXISTUJE BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE $\tilde{x}$
TAKÉ, ŽE $c^T \tilde{x} \geq c^T x_0$.

Z MNOŽINY VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH x TAKÝCH,
ŽE $c^T x \geq c^T x_0$, VYBERME $\tilde{x}$ S NAJVÄČŠÍM
POČTOM NÚL, NECH K SÚ NENULOVÉ INDEXY $\tilde{x}$.

PRE SPOR NECH SÚ STĹPCE A_K LIN. ZÁVISLÉ
$\Rightarrow \exists w_K \neq 0 : A_K w_K = 0$, $Aw = 0$

PREDPOKLADAJME, ŽE
a) $c^T w \geq 0$
b) $\exists j \in \{1,\dots,n\} : w_j < 0$

OZNAČME $\mathbb{x}(t) = \tilde{\mathbb{x}} + t \cdot \mathbb{w}$

$\mathbb{c}^T \mathbb{x}(t) = \mathbb{c}^T \tilde{\mathbb{x}} + t \cdot \mathbb{c}^T \mathbb{w} \geq \mathbb{c}^T \tilde{\mathbb{x}} \geq \mathbb{c}^T \mathbb{x}_0$

$\mathbb{A}\mathbb{x}(t) = \mathbb{A}\tilde{\mathbb{x}} + t \cdot \mathbb{A}\mathbb{w} = \mathbb{A}\tilde{\mathbb{x}} = \mathbb{b}$

PRE VHODNÉ $t > 0$ DOSTANEME $\mathbb{x}(t) \geq 0$
S VIAC NULAMI AKO $\tilde{\mathbb{x}}$, SPOR. ↯

AK $\mathbb{w} \geq \mathbb{0}$ A $\mathbb{c}^T \mathbb{w} \leq 0$, STAČÍ VZIAŤ $-\mathbb{w}$
NECH TEDA $\mathbb{c}^T \mathbb{w} > \mathbb{0}$ A $\mathbb{w} \geq \mathbb{0}$.
POTOM JE ÚLOHA ZREJME NEOHRANIČENÁ, SPOR. ↯ □

NECH B JE PRÍPUSTNÁ BÁZA. SIMPLEXOVÁ TABUĽKA
$\mathcal{T}(B)$ JE SCHÉMA:

$$\mathbb{x}_B = \mathbb{p} + \mathbb{Q}\,\mathbb{x}_N$$
$$z = z_0 + \mathbb{r}^T \mathbb{x}_N$$

KTORÁ JE EKVIVALENTNÁ SO SÚSTAVOU:

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$$
$$z = \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$

$$\mathbb{A}_B \mathbb{x}_B + \mathbb{A}_N \mathbb{x}_N = \mathbb{b} \Rightarrow \mathbb{x}_B = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} - \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N \mathbb{x}_N$$

$$\mathbb{c}^T \mathbb{x} = \mathbb{c}_B \mathbb{x}_B + \mathbb{c}_N^T \mathbb{x}_N = \mathbb{c}_B \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} - \mathbb{c}_B \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N \mathbb{x}_N + \mathbb{c}_N^T \mathbb{x}_N$$

$\mathbb{p} = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b}$, $\mathbb{Q} = -\mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N$, $z_0 = \mathbb{c}_B \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b}$, $\mathbb{r}^T = \mathbb{c}_N^T - \mathbb{c}_B \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N$

JEDNOZNAČNOSŤ $\mathbb{p}$, $\mathbb{Q}$, z_0, $\mathbb{r}$ JE ZREJMÁ.

2/3

25.06.2008

PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

(P): $\max c^T x$, $Ax \le b$, $x \ge 0$

(D): $\min b^T y$, $A^T y \ge c$, $y \ge 0$

SLABÁ VETA O DUALITE:

ZREJME AK x JE PRÍP. RIEŠ. (P) A y JE PRÍP. RIEŠ. (D), POTOM

$$\left.\begin{array}{l} x^T A^T \le b^T \Rightarrow x^T A^T y \le b^T y \\ A^T y \ge c \Rightarrow x^T A^T y \ge x^T c = c^T x \end{array}\right\} \underline{\underline{c^T x \le b^T y}}.$$

SILNÁ VETA O DUALITE:

(1) (P) JE NEPRÍPUSTNÁ, (D) JE NEPRÍPUSTNÁ

(2) (P) JE NEPRÍPUSTNÁ, (D) JE PRÍPUSTNÁ NEOHRANIČENÁ

(3) (P) JE PRÍPUSTNÁ NEOHRANIČENÁ, (D) JE NEPRÍPUSTNÁ

(4) (P), (D) SÚ PRÍPUSTNÉ OHRANIČENÉ

PRE OPTIMÁLNE x^*, y^* PLATÍ $c^T x^* = b^T y^*$.

ZO SLABEJ VETY O DUALITE: AK (P) (RESP. (D)) JE PRÍPUSTNÁ NEOHRANIČENÁ, POTOM (D) (RESP. (P)) JE NEPRÍPUSTNÁ.

ZOSTÁVA VYLÚČIŤ PRÍPADY:

(P) (RESP. (D)) JE PRÍPUSTNÁ OHRANIČENÁ, (D) (RESP. (P)) JE NEPRÍPUSTNÁ

NECH (P) JE PRÍPUSTNÁ OHRANIČENÁ.

UVAŽUJME $\bar{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots, 0)^T$,
$\bar{A} \in R^{m \times (n+m)}$ $\bar{A} = (A, I_m)$

A ÚLOHU V ROVNICOVOM TVARE

$$\max \bar{c}^T \bar{x}, \quad \bar{A}\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0, \qquad (\bar{P})$$

KTORÁ JE EKVIVALENTNÁ S (P).

SIMPLEXOVÁ METÓDA NÁM NÁJDE OPTIMÁLNE RIEŠENIE $(\bar{P})$.
NECH $T(B)$ JE POSLEDNÁ TABUĽKA,

$$\bar{x}_B = p + Q\bar{x}_N$$
$$z = z_0 + r^T \bar{x}_N$$

KDE $p = \bar{A}_B^{-1} b$, $Q = -\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N$, $z_0 = \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} b$, $r^T = \bar{c}_N^T - \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} A_N$,
A $r \leq 0$.

POLOŽME $y^T = \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1}$. DOKÁŽME, ŽE
y JE OPTIMÁLNE PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE DUÁLNEJ ÚLOHY,

OPTIMALITA: $c^T x = \bar{c}^T \bar{x} = \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} b = y^T b = \underline{\underline{b^T y}}$.

PRÍPUSTNOSŤ: TJ. $A^T y \geq c$, $y \geq 0$
SA DÁ VYJADRIŤ AKO $\bar{A}^T y \geq \bar{c}$, TJ. $y^T \bar{A} \geq \bar{c}^T$

1) $(y^T \bar{A})_B = y^T \bar{A}_B = \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} A_B = \bar{c}_B$

2) $(y^T \bar{A})_N = y^T \bar{A}_N = \bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} A_N = \bar{c}_N^T - r \geq c_N^T$, KEĎŽE $r \leq 0$.

$\Rightarrow \underline{\underline{y^T \bar{A} \geq \bar{c}^T}}$. $\square$

VIDÍME TIEŽ, ŽE AK (P) (RESP. (D)) JE PRÍPUSTNÁ, OHRANIČENÁ, JE (D) (RESP. (P)) NUTNE PRÍPUSTNÁ.
($\Rightarrow$ AJ OHRANIČENÁ)

25.06.2008 We
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

FARKASOVA LEMMA: NECH $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$.

POTOM NASTANE PRÁVE JEDNA Z MOŽNOSTÍ:

(F1) $\exists x \in \mathbb{R}^n \; x \geq \mathbb{0} : \mathbb{A}x = \mathbb{b}$.

(F2) $\exists \boxed{y \in \mathbb{R}^m} : y^T \mathbb{A} \geq \mathbb{0}^T \;\&\; y^T \mathbb{b} < 0$.

OBE MOŽNOSTI PLATIŤ NEMÔŽU:

$y^T A \geq \mathbb{0} \Rightarrow y^T \mathbb{A} x \geq 0$ PRE $x \geq 0$ (ĽUBOVOĽNÉ)

KDEŽTO $y^T \mathbb{b} < 0$, TAKŽE $\mathbb{A}x \neq \mathbb{b}$.

FARKASOVA LEMMA (VARIANTA): NECH $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$.

POTOM: $\exists x \in \mathbb{R}^n : x \geq \mathbb{0}, \; \mathbb{A}x \leq \mathbb{b} \Leftrightarrow$

$\forall y \in \mathbb{R}^m \boxed{y \geq \mathbb{0}} : y^T \mathbb{A} \geq \mathbb{0}^T \Rightarrow y^T \mathbb{b} \geq 0$

POLOŽME $\bar{\mathbb{A}} = (\mathbb{A}, I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$.

POTOM $\exists x \in \mathbb{R}^n : x \geq \mathbb{0}, \; \mathbb{A}x \leq \mathbb{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m} : \bar{x} \geq \mathbb{0}, \; \bar{\mathbb{A}}\bar{x} = \mathbb{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m : y^T \bar{\mathbb{A}} \geq \mathbb{0}^T \Rightarrow y^T \mathbb{b} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m, \; y \geq \mathbb{0} : y^T \mathbb{A} \geq \mathbb{0}^T \Rightarrow y^T \mathbb{b} \geq 0$. $\square$

SILNÁ VETA O DUALITE:

NECH (P) JE PRÍPUSTNÁ, OHRANIČENÁ

$\Rightarrow$ EXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE x^*.

OZNAČME $\vartheta = c x^*$

SÚSTAVA $\mathbb{A}x \le \mathbb{b}$, $c^T x \ge \vartheta + \varepsilon$ MÁ NEZÁPORNÉ RIEŠENIE PRE $\varepsilon = 0$, KDEŽTO PRE $\varepsilon > 0$ UŽ NEMÁ.

OZNAČME $\bar{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ -c^T \end{pmatrix}$, $\bar{\mathbb{b}}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbb{b} \\ -\vartheta - \varepsilon \end{pmatrix}$.

$\exists x \in \mathbb{R}^n, x \ge \mathbb{0} : \bar{\mathbb{A}} x \le \bar{\mathbb{b}}_0 \Rightarrow$ (FARKASOVA LEMMA)

$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^{m+1}\ \bar{y} \ge \mathbb{0} : \bar{y}^T \bar{\mathbb{A}} \ge \mathbb{0} \Rightarrow \bar{y}^T \mathbb{b}_0 \ge 0$.

NA DRUHEJ STRANE $\neg\exists x \in \mathbb{R}^n, x \ge \mathbb{0} : \bar{\mathbb{A}} x \le \bar{\mathbb{b}}_\varepsilon$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists \bar{y} = \begin{pmatrix} u \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1} : \bar{y} \ge \mathbb{0}$, $\bar{y}^T \bar{\mathbb{A}} \ge \mathbb{0}$ & $\bar{y}^T \mathbb{b}_\varepsilon < 0$.

$(u^T, z) \begin{pmatrix} \mathbb{A} \\ -c^T \end{pmatrix} \ge \mathbb{0}$ MÔŽME TIEŽ ZAPÍSAŤ AKO:

$u^T \mathbb{A} - z \cdot c^T \ge \mathbb{0}$, T.J. $\boxed{u^T \mathbb{A} \ge z \cdot c^T}$

$(u^T, z) \begin{pmatrix} \mathbb{b} \\ -\vartheta - \varepsilon \end{pmatrix} < 0$ MÔŽME ZAPÍSAŤ AKO:

$u^T \mathbb{b} - z(\vartheta + \varepsilon) < 0$, T.J. $\boxed{u^T \mathbb{b} < z(\vartheta + \varepsilon)}$

PRIČOM $\bar{y} \ge 0$, T.J. $\boxed{u \ge \mathbb{0}}$, $\boxed{z \ge 0}$

KEĎŽE $\bar{y}^T \mathbb{A} \ge 0$, NUTNE $\bar{y}^T \mathbb{b}_0 \ge 0$, T.J.

$\boxed{u^T \mathbb{b} \ge z \cdot \vartheta.}$

IHNEĎ VIDÍME, ŽE $\boxed{z > 0}$.

POLOŽME $v := \frac{1}{z} \cdot u$.

MÁME $v \ge \mathbb{0}$, $v^T \mathbb{A} \ge c^T$, T.J. $\mathbb{A}^T v \ge c$

A $\vartheta \le \mathbb{b}^T v < \vartheta + \varepsilon$.

JEDNAK VIDÍME, ŽE v JE PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE (D) A JEDNAK SA NEMÉ ĽUBOVOĽNE BLÍZKO PRIBLÍŽIŤ OPTIMU ϑ ÚLOHY (P) $\Rightarrow$ (D) JE OHRANIČENÁ

$\Rightarrow$ EXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE y^* ÚLOHY (D).

A MUSÍ BYŤ $\mathbb{b}^T y^* = \vartheta$.

26.06.2008Th
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

$\min c^T x, \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \qquad c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

rank $A = m$

NECH B JE PRÍPUSTNÁ BÁZA.

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$x_B = \boxed{A_B^{-1} b} - \boxed{A_B^{-1} A_N} x_N$$

$$c = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \boxed{c_B^T A_B^{-1} b} + (c_N^T - \boxed{c_B^T A_B^{-1} A_N}) x_N$$

OZNAČME $d_0 = A_B^{-1} b$, $D = A_B^{-1} A_N$, $c_0 = c_B^T A_B^{-1} b$

TABUĽKA SIMPLEXOVEJ METÓDY

$$
\begin{array}{cc|cccc|c|c|}
 & & & c_B^T & & & c_N^T & \\
 & & & x_B^T & & & x_N^T & \\
\hline
 & & 1 & 0 & \dots & 0 & & \\
 & & 0 & 1 & \dots & 0 & & \\
c_B & x_B & & \dots & & & D & d_0 \\
 & & 0 & 0 & \dots & 1 & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & \dots & 0 & c_N^T - z_N^T & -c_0 \\
\hline
\end{array}
$$

STĹPEC PRAVÝCH STRÁN (NULTÝ STĹPEC)

KRITERIÁLNY RIADOK

$z_N^T = c_B^T \cdot D$

$c = c_0 + (c_N^T - z_N^T) x_N$

VIDÍME, ŽE PLATÍ:

$$(I_m, D) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = d_0$$

$$(0_m^T, c_N^T - z_N^T) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = -c_0 + c$$

A TAKISTO:

$$c_B^T - c_B^T I_m = 0_m^T$$

$$c_N^T - c_B^T D = c_N^T - z_N^T$$

$$0 - c_B^T d_0 = -c_0$$

$d_0 \geq 0$ .. PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE

$d_0 > 0$ .. <u>NEDEGENEROVANÉ</u> PRÍP. BÁZ. RIEŠENIE

$$
\begin{array}{cc|cccc|c|c|c|c|}
 & & & \mathbb{c}_B^T & & & \mathbb{c}_N^T & & & \\
 & & & \mathbb{x}_B^T & & & \mathbb{x}_N^T & & & \mathbb{d}_0 \\
\hline
 & & 1 & 0 & \dots & 0 & & d_{1r} & & d_{10} \\
 & & 0 & 1 & \dots & 0 & & d_{2r} & & d_{20} \\
\mathbb{c}_B & \mathbb{x}_B & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbb{D} & \vdots & & \\
 & & 0 & 0 & \dots & 1 & & d_{mr} & & d_{m0} \\
\hline
 & & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{c}_N^T - \mathbb{z}_N^T & c_r - z_r & & -c_0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\mathbb{x}_B = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} - \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N\mathbb{x}_N =$$
$$\underline{\underline{= \mathbb{d}_0 - \mathbb{D}\mathbb{x}_N}}$$
$$c = \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} + (\mathbb{c}_N^T - \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N)\mathbb{x}_N =$$
$$\underline{\underline{= c_0 + (\mathbb{c}_N^T - \mathbb{z}_N^T)\mathbb{x}_N}}$$

NECH $\mathbb{x}_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\mathbb{x}_N = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$

$$\boxed{\begin{array}{l} B = \{1, \dots, m\} \\ N = \{m+1, \dots, n\} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \forall i \in B : x_i = d_{i0} - \textstyle\sum_{j\in N} d_{ij} x_j$$
$$\underline{\underline{c = c_0 + \textstyle\sum_{j\in N} (c_j - z_j) x_j}}$$

1. VETA SM: AK $\mathbb{c}_N - \mathbb{z}_N \geq \mathbb{0}$, POTOM c_0 JE OPTIMÁLNE
2. VETA SM: AK $\exists j \in N : c_j - z_j < 0$, $\forall i \in B\ d_{ij} \leq 0 \Rightarrow$ NEOHRANIČENOSŤ
3. VETA SM: NECH $c_j - z_j < 0$.

(OSTATNÉ $x_{j'} = 0$)

ZVOĽME NEJAKÉ $x_j > 0$. POTOM SA c ZREJME ZMENŠÍ

MUSÍ VŠAK BYŤ $x_i = d_{i0} - d_{ij} x_j \geq 0 \quad \forall i \in B$.

D. PRE $d_{ij} > 0$ $\quad x_j \leq \frac{d_{i0}}{d_{ij}}$. $\Rightarrow$ <u>KĽÚČOVÝ RIADOK</u> $\frac{d_{s0}}{d_{sj}}$

26.06.2008 Th
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

MAJME ZVOLENÉ $r \in N : c_r - z_r < 0$, A NECH

$s \in B : d_{sr} > 0, \ \frac{d_{s0}}{d_{sr}} = \min\limits_{i \in B,\, d_{ir} > 0} \frac{d_{i0}}{d_{ir}}$

URČUJE KĽÚČOVÝ RIADOK.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c|c|c|c|}
 & R & & s & & & & & r & & \\
\hline
 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & d_{1r} & & d_{10} \\
 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & & d_{2r} & & d_{20} \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
\hline
s & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & d_{sr} & & d_{s0} \\
\hline
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & d_{mr} & & d_{m0} \\
\hline
 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & c_r - z_r & & -c_0 \\
\hline
\end{array}
$$

d_{sr} JE <u>PIVOT</u>. TRANSFORMÁCIA ST:

S-TÝ RIADOK VYDELÍME ČÍSLOM d_{sr}, TJ. $\boxed{R'_{s\cdot} := \frac{1}{d_{sr}} \cdot R_{s\cdot}}$

PRE $j \in N$ JE $d'_{sj} = \frac{1}{d_{sr}} \cdot d_{sj}$, ŠPECIÁLNE $d'_{sr} = 1$.

$d'_{s0} = \frac{1}{d_{sr}} \cdot d_{s0}$

PRE $i \neq s$ JE $\boxed{R'_{i\cdot} := R_{i\cdot} - d_{ir} \cdot \frac{1}{d_{sr}} \cdot R_{s\cdot}}$

TAKŽE $d'_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{ir}}{d_{sr}} \cdot d_{sj}$, $d'_{i0} = d_{i0} - \frac{d_{ir}}{d_{sr}} \cdot d_{s0} \geq 0$

ŠPECIÁLNE $d'_{ir} = d_{ir} - \frac{d_{ir}}{d_{sr}} \cdot d_{sr} = 0$. TAKISTO $c'_r - z'_r = 0$

ŠPECIÁLNE $-c'_0 = -c_0 - (c_r - z_r) \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$

PRE DEGENEROVANÉ DLO BY PRE $d_{s0} = 0$ VYŠLO $-c'_0 = -c_0$.

		s			j		r		
	$1 \ 0 \ \dots$ $0 \ 1 \ \dots$		0 0	$\dots$		$\dots$		$\dots$	
i		$-\frac{d_{ir}}{d_{sr}}$			$d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$		0		$d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$
	$\dots \quad \dots$		$\vdots$	$\dots$		$\dots$		$\dots$	
s		$\frac{1}{d_{sr}}$			$\frac{d_{sj}}{d_{sr}}$		1		$\frac{d_{s0}}{d_{sr}}$
	$0 \ 0 \ \dots$		1	$\dots$		$\dots$		$\dots$	
		$-\frac{c_r - z_r}{d_{sr}}$			$(c_j - z_j) - (c_r - z_r)\frac{d_{sj}}{d_{sr}}$		0		$-c_0 - (c_r - z_r)\frac{d_{s0}}{d_{sr}}$

$\forall i \in B: \quad x_i + \sum_{j \in N} d_{ij} x_j = d_{i0}$

$-c^T\cancel{x} + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j = -c_0$

1/2

27.06.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

ZMENA TRANSFORMÁCIE ST, KEĎ VYNIECHÁME I_m.

T:

	x_N	x_r, $r \in N$		
	$\mathbb{D}$	$\vdots$		$\mathbb{d}_0$
x_B: x_s, $s \in B$	$\dots$	d_{sr}	$\dots$	d_{s0}
		$\vdots$		
	$c_N - z_N$	$c_r - z_r$		$-c_0$

T':

$B' = B \setminus \{s\} \cup \{r\}$
$N' = N \setminus \{r\} \cup \{s\}$

		x_j $j \in N'$ ~~x_j $j \in N$~~		x_s $s \in N'$ ~~x_r $r \in N$~~		
	$\mathbb{D}'$	$\vdots$		$\vdots$		$\mathbb{d}_0'$
x_i $i \in B'$ ~~x_i $i \in B$, $i \neq s$~~	$\dots$	$d'_{ij} = d_{ij} - d_{ir}\frac{d_{sj}}{d_{sr}}$	$\dots$	$d'_{is} = -\frac{d_{ir}}{d_{sr}}$	$\dots$	$d'_{i0} = d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_r $r \in B'$ ~~x_s $s \in B$~~	$\dots$	$d'_{rj} = \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$	$\dots$	$d'_{rs} = \frac{1}{d_{sr}}$	$\dots$	$d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$
		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$c_{N'} - z_{N'}$	$(c_j - z_j) - (c_r - z_r)\frac{d_{sj}}{d_{sr}}$		$-\frac{c_r - z_r}{d_{sr}}$		$-c_0' = -c_0 - (c_r - z_r)\frac{d_{s0}}{d_{sr}}$

T :

			C_j		C_r		C_0
			x_j		x_r , $r \in N$		
		$\mathbb{D}$					dl_0
R_i	x_i		d_{ij}		d_{ir}		d_{i0}
R_s	x_s		d_{sj}		d_{sr}		d_{s0}
	$s \in B$						
R_0		$\widetilde{dl}_0$	$\tilde{d}_{0j}$		$\tilde{d}_{0r}$		d_{00}

			C'_j		C'_s		C'_0
			x_j		x_s , $s \in N'$		
		$\mathbb{D}'$					dl'_0
R'_i	x_i		d'_{ij}		d'_{is}		d'_{i0}
R'_r	x_r		d'_{rj}		d'_{rs}		d'_{r0}
	$r \in B'$						
R'_0		$\widetilde{dl}'_0$	$\tilde{d}'_{0j}$		$\tilde{d}'_{0s}$		d'_{00}

$B' = B \setminus \{s\} \cup \{r\}$

$N' = N \setminus \{r\} \cup \{s\}$

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \qquad i \neq r,\ j \neq s$$

$$d'_{is} = -\frac{d_{ir}}{d_{sr}} \qquad i \neq r$$

$$d'_{i0} = d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \qquad i \neq r$$

$$d'_{rj} = \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \qquad j \neq s$$

$$d'_{rs} = \frac{1}{d_{sr}}$$

$$d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$$

$$\tilde{d}'_{0j} = \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \qquad j \neq s$$

$$\tilde{d}'_{0s} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}}$$

$$d'_{00} = d_{00} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$$

27.06.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

VIEME, ŽE V TABUĽKE T PLATÍ:

$\forall i \in B \quad x_i + \sum_{j \in N} d_{ij} x_j = d_{i0}$ $\qquad x_B + D x_N = d_0$

$-c^T x + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j = -c_0.$ $\qquad -c^T x + (c_N^T - c_B^T D) x_N = -c_0$

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE PO TRANSFORMÁCII DO T' PLATÍ:

$\forall i \in B' \quad x_i + \sum_{j \in N'} d'_{ij} x_j = d'_{i0}$ $\qquad x_{B'} + D' x_{N'} = d'_0$

$-c^T x + \sum_{j \in N'} (c_j - z_j)' x_j = -c'_0$ $\qquad -c^T x + (\text{KRIT. RIAD.})' \cdot x_N = -c'_0$

PRIČOM $(c_j - z_j)' = \begin{cases} (c_j - z_j) - (c_r - z_r) d_{sj}/d_{sr} & \text{PRE } j \in N', j \neq s \\ -(c_r - z_r)/d_{sr} & \text{PRE } j = s. \end{cases}$

MUSÍME VŠAK EŠTE NAHLIADNUŤ, ŽE: (KRIT. RIADOK)' =

$= (c_{N'}^T - z_{N'}^T)' = \underline{\underline{c_{N'}^T - c_{B'}^T D'}}$

PRE $j \in N'$, $j \neq s$ MÁME:

$$(*) = c_j - \sum_{i \in B'} c_i \cdot d'_{ij} = c_j - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} c_i \cdot \left(d_{ij} - d_{ir} \frac{d_{sj}}{d_{sr}}\right)\right] - c_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

PRIČOM VIEME, ŽE $c_j - z_j = c_j - \sum_{i \in B} c_i \cdot d_{ij} =$

$= c_j - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} c_i \cdot d_{ij}\right] - c_s \cdot d_{sj}. \quad \forall j \in N.$

$$(*) = c_j - \left[\left(\sum_{i \in B', i \neq r} c_i \cdot d_{ij}\right) - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot \left(\sum_{i \in B', i \neq r} c_i \cdot d_{ir}\right)\right] - c_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

KEĎŽE $j \in N'$, $j \neq s$, NUTNE $j \in N$. (AVŠAK $j \neq r$).

$$\Rightarrow (*) = c_j - \left[\left(c_j - (c_j - z_j) - c_s \cdot d_{sj}\right) - \frac{d_{sj}}{d_{sr}}\left(c_r - (c_r - z_r) - c_s \cdot d_{sr}\right)\right] - c_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} =$$

$$= c_j - \left[z_j - \cancel{c_s d_{sj}} - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} z_r + \cancel{\frac{d_{sj}}{d_{sr}} c_s d_{sr}}\right] - c_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} =$$

$$= c_j - z_j - (c_r - z_r) d_{sj}/d_{sr} = (c_j - z_j)' \quad \square$$

PRE $j \in N'$, $j = s$ MÁME

$$(\bar{*}) = c_s - \sum_{i\in B'} c_i \cdot d'_{is} = c_s - \left[\sum_{i\in B', i\neq r} c_i \cdot \left(-\frac{d_{ir}}{d_{sr}}\right)\right] - c_r \cdot \frac{1}{d_{sr}}$$

PRITOM $c_r - z_r = c_r - \sum_{i\in B} c_i \cdot d_{ir} =$

$$= c_r - \left[\sum_{i\in B', i\neq r} c_i \, d_{ir}\right] - c_s \cdot d_{sr} .$$

$$(\bar{*}) = c_s - \left[-\frac{1}{d_{sr}} \cdot \left(c_r - (c_r - z_r) - c_s \cdot d_{sr}\right)\right] - c_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} =$$

$$= c_s + \frac{1}{d_{sr}}\left(z_r - c_s \cdot d_{sr}\right) - c_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} = -\frac{c_r - z_r}{d_{sr}} = (c_s - z_s)' . \quad \square$$

DOKÁZALI SME, ŽE PO TRANSFORMÁCII JE (KRITERIÁLNY RIADOK)$' = \mathbb{C}^T_{N'} - \mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathbb{D}'$

TAKISTO:

$$\mathbb{X}_{B'} + \mathbb{D}' \cdot \mathbb{X}_{N'} = \mathrm{d}\mathrm{l}'_0 ,$$

$$(\mathbb{C}^T_{N'} - \mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathbb{D}') \cdot \mathbb{X}_{N'} = \mathbb{C}^T\mathbb{X} - c'_0$$

POSLEDNÚ VEC, KTORÚ CHCEME NAHLIADNUŤ JE, ŽE $0 - \mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathrm{d}\mathrm{l}'_0 = -c'_0$:

$$\mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathrm{d}\mathrm{l}'_0 = \mathbb{C}^T_{B'} \cdot (\mathbb{X}_{B'} + \mathbb{D}' \cdot \mathbb{X}_{N'}) =$$

$$= \mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathbb{X}_{B'} + \mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathbb{D}' \cdot \mathbb{X}_{N'} =$$

$$= \underbrace{\mathbb{C}^T_{B'} \cdot \mathbb{X}_{B'} + \mathbb{C}^T_{N'} \cdot \mathbb{X}_{N'} - \mathbb{C}^T\mathbb{X}}_{0} + c'_0 = c'_0 . \quad \square$$

28.06.2008 Sa
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

DUÁLNA SIMPLEXOVÁ METÓDA

$$(P) \quad \max_{M_1} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad M_1 = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b} , \mathbb{x} \geq \mathbb{0} \}$$

$$(D) \quad \min_{M_2} \mathbb{b}^T \mathbb{y} \qquad M_2 = \{ \mathbb{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbb{A}^T \mathbb{y} \geq \mathbb{c} , \mathbb{y} \geq \mathbb{0} \}$$

$$(P') \quad \max_{M_1'} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad M_1' = \{ \binom{\mathbb{x}}{\mathbb{x}'} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b} , \binom{\mathbb{x}}{\mathbb{x}'} \geq \mathbb{0} \}$$

$$(D') \quad \min_{M_2'} \mathbb{b}^T \mathbb{y} \qquad M_2' = \{ \binom{\mathbb{y}'}{\mathbb{y}} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid -\mathbb{A}^T \mathbb{y} + \mathbb{y}' = -\mathbb{c} , \binom{\mathbb{y}'}{\mathbb{y}} \geq \mathbb{0} \}$$

1.ST:

	$\mathbb{y}' = \bar{\mathbb{y}}_N$, $\mathbb{x} = \bar{\mathbb{x}}_N$	
$\mathbb{y} = \bar{\mathbb{y}}_B$, $\mathbb{x}' = \bar{\mathbb{x}}_B$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{b}$
	$-\mathbb{c}^T$	0

$B = \{ n+1, n+2, \dots, n+m \}$
$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$

$\bar{\mathbb{x}} = \binom{\mathbb{x}}{\mathbb{x}'}$, $\bar{\mathbb{y}} = \binom{\mathbb{y}'}{\mathbb{y}}$

$\bar{\mathbb{c}} = \binom{+\mathbb{c}}{\mathbb{0}}$ $\bar{\mathbb{b}} = \binom{\mathbb{0}}{\mathbb{b}}$

$$\bar{\mathbb{x}}_B + \mathbb{A} \bar{\mathbb{x}}_N = \mathbb{b}$$
$$(-\mathbb{c}^T) \cdot \bar{\mathbb{x}}_N = +0 - \bar{\mathbb{c}}^T \bar{\mathbb{x}}$$
$$\bar{\mathbb{y}}_N^T - \bar{\mathbb{y}}_B^T \mathbb{A} = -\mathbb{c}^T$$
$$\bar{\mathbb{y}}_B^T \mathbb{b} = +0 + \bar{\mathbb{b}}^T \bar{\mathbb{y}}$$

KEĎ POLOŽÍME $\bar{\mathbb{x}}_N = \mathbb{0}$, DOSTANEME BÁZICKÉ RIEŠENIE (P') $\mathbb{x} = \mathbb{0}, \mathbb{x}' = \mathbb{b}$

KEĎ POLOŽÍME $\bar{\mathbb{y}}_B = \mathbb{0}$, DOSTANEME BÁZICKÉ RIEŠENIE (D') $\mathbb{y} = \mathbb{0}, \mathbb{y}' = -\mathbb{c}$

\+ ÚČELOVÉ FCIE. (P'), RESP. (D') V $\mathbb{x}^*$, RESP. $\mathbb{y}^*$ $= d_{00}$.

KEĎ $\mathbb{c} \leq \mathbb{0}$, POTOM JE TO BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE

MAJME ST V k-TOM KROKU:

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \bar{y}_N & \\
 & & \bar{x}_N & \\
\hline
\bar{y}_B & \bar{x}_B & D & dl_0 \\
\hline
 & & \tilde{dl}_0^T \geq 0 & d_{00} \\
\hline
\end{array}
$$

PRIČOM:

$\bar{x}_B + D\,\bar{x}_N = dl_0$ (1a)
$\bar{c}^T\bar{x} = d_{00} - \tilde{dl}_0^T\,\bar{x}_N$ (1b)

SÚ EKVIVALENTNÉ S $Ax + x' = b$

$\bar{y}_N^T - \bar{y}_B^T D = \tilde{dl}_0^T$ (2a)
$b^T\bar{y} = d_{00} + \bar{y}_B^T . dl_0$ (2b)

SÚ EKVIVALENTNÉ S $-A^T y + y' = -c$

(1c) KEĎ POLOŽÍME $\bar{x}_N = 0$, DOSTANEME BÁZICKÉ RIEŠENIE (P') $(\bar{x}_B, \bar{x}_N)^* = (dl_0, 0)$

(2c) KEĎ POLOŽÍME $\bar{y}_B = 0$, DOSTANEME PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE (D') $(\bar{y}_B, \bar{y}_N)^* = (0, \tilde{dl}_0)$.

(3) ÚČELOVÁ FUNKCIA (P') V BODE x^* = HODNOTE ÚČELOVEJ FUNKCII (D') V BODE $y^* = d_{00}$.

UVEDENÉ TVRDENIA ZREJME PLATIA V 1. ST. DSM.

28.06.2008 So
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

1. VETA DSM: AK $\mathbb{d}_0 \geq \mathbb{0}$, POTOM $(\bar{x}_B, \bar{x}_N)^*$, $(\bar{y}_B, \bar{y}_N)^*$ SÚ OPTIMÁLNYMI RIEŠENÍM (P'), (D').

2. VETA DSM: AK $\exists s \in B : d_{s0} < 0$ A $\forall j \in N \; d_{sj} \geq 0$, POTOM NEEXISTUJE OPT. RIEŠENIE (P'), ANI (D').

$$x_s = d_{s0} - \sum_{j \in N} d_{sj} x_j < 0 \quad \text{PRE } \forall \bar{x} \in M_1' \Rightarrow M_1' = \emptyset$$

$\Rightarrow$ (D') JE BUĎ NEOHRANIČENÁ, ALEBO NEPRÍPUSTNÁ.

3. VETA DSM: NECH $s \in B$, $d_{s0} < 0$ A $r \in N$: $\dfrac{\tilde{d}_{0r}}{|d_{sr}|} = \min_{j \in N, d_{sj} < 0} \left(\dfrac{\tilde{d}_{0j}}{|d_{sj}|} \right)$

KEĎ TRANSFORMUJEME TABUĽKU PODĽA PIVOTA d_{sr} DOSTANEME TABUĽKU:

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \bar{y}_{N'} & \\
 & & \bar{x}_{N'} & \\
\hline
\bar{y}_{B'} & \bar{x}_{B'} & \mathbb{D}' & \mathbb{d}_0' \\
\hline
 & & \tilde{\mathbb{d}}_0' \geq \mathbb{0} & d_{00}' \\
\hline
\end{array}$$

KDE $B' = B \setminus \{s\} \cup \{r\}$
$N' = N \setminus \{r\} \cup \{s\}$.

A PLATÍ, ŽE: $\tilde{\mathbb{d}}_0' \geq \mathbb{0}$,

$$\bar{x}_{B'} + \mathbb{D}' x_{N'} = \mathbb{d}_0' \quad (1a') \sim (1a)$$
$$\bar{c}^T \bar{x} = d_{00}' - \tilde{\mathbb{d}}_0'^T \bar{x}_{N'} \quad (1b') \sim (1b)$$
$$\bar{y}_{N'}^T - \bar{y}_{B'}^T \mathbb{D}' = \tilde{\mathbb{d}}_0'^T \quad (2a') \sim (2a)$$
$$\mathbb{b}^T \bar{y} = d_{00}' + \bar{y}_{B'}^T \cdot \mathbb{d}_0' \quad (2b') \sim (2b)$$

$d_{00}' \leq d_{00}$
A AK NENASTÁVA DEGENERÁCIA, TAKTIEŽ $d_{00}' < d_{00}$.

$\Rightarrow$ DÔSLEDKY: (1c'), (2c'), (3').

(1a') ~ (1a) PLYNIE Z TOHO, ŽE PRI TRANSFORMÁCII ROBÍME EKVIVALENTNÉ RIADKOVÉ ÚPRAVY

(1b') ~ (1b) ≡ $\bar{c}^T \bar{x} + \tilde{d}_0'^T \bar{x}_{N'} = d_{00}' \sim \bar{c}^T \bar{x} + \tilde{d}_0^T x_N = d_{00}$

PLYNIE Z TOHO, ŽE K PÔVODNÉMU RIADKU (1b) IBA PRIPOČÍTAVAME IDENTITY $L = R$.

AUTOMATICKY HNEĎ DOSTÁVAME (1c') AKO DÔSLEDOK (1a'), (1b').

(2a') ~ (2a), TJ. $\bar{y}_{N'}^T - \bar{y}_{B'}^T D' = \tilde{d}_0'^T \sim \bar{y}_N^T - \bar{y}_B^T D = \tilde{d}_0$.

NECH $i \in B, i \neq s$ $(\Rightarrow i \in B')$, $j \in N, j \neq r$ $(\Rightarrow j \in N')$.

TRANSFORMAČNÉ VZORCE DÁVAJÚ:

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \quad \text{PRE } i \neq r,\ j \neq s$$

$$d'_{is} = -\frac{d_{ir}}{d_{sr}} \quad \text{PRE } i \neq r$$

$$d'_{i0} = d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \quad \text{PRE } i \neq r$$

$$d'_{rj} = \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \quad \text{PRE } j \neq s$$

$$d'_{rs} = \frac{1}{d_{sr}}$$

$$d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$$

$$\tilde{d}'_{0j} = \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \quad \text{PRE } j \neq s$$

$$\tilde{d}'_{0s} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}}$$

$$d'_{00} = d_{00} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$$

28.06.2008
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

NAJSKÔR NAHLIADNIME, ŽE $\tilde{d}_0^{\prime} \geq 0$

PRE $j \in N'$, $j \neq s$ JE

$$\tilde{d}'_{0j} = \underbrace{\tilde{d}_{0j}}_{\geq 0} - \underbrace{\tilde{d}_{0r}}_{\geq 0} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}\}<0} \quad \begin{cases} d_{sj} \geq 0 \Rightarrow \tilde{d}'_{0j} \geq 0 \\ d_{sj} < 0, \text{ POTOM} \\ \tilde{d}_{0j} \geq \tilde{d}_{0r} \cdot \dfrac{d_{sj}}{d_{sr}} \end{cases}$$

PRETOŽE $\dfrac{\tilde{d}_{0r}}{|d_{sr}|} \leq \dfrac{\tilde{d}_{0j}}{|d_{sj}|}$

$$\tilde{d}'_{0s} = -\frac{\tilde{d}_{0r}\}\geq 0}{d_{sr}\}<0} \geq 0 \,. \quad \square$$

ĎALEJ $d'_{00} = d_{00} - \underbrace{\tilde{d}_{0r}}_{\geq 0} \cdot \dfrac{d_{s0}\}<0}{d_{sr}\}<0} \leq d_{00}$

AK NENASTÁVA DEGENERÁCIA, JE $\tilde{d}_{0r} > 0 \Rightarrow d'_{00} < d_{00}$. $\square$

ROZPÍŠME SI TERAZ DO ZLOŽIEK VZŤAH $\overline{Y}_{N'}^T - \overline{Y}_{B'}^T \mathbb{D}' = \tilde{d}_0^{\prime T}$:

$$\forall j \in N': \; Y_j - \sum_{i \in B'} Y_i \cdot d'_{ij} = \tilde{d}'_{0j} \,.$$

TJ. PRE $j \in N'$, $j \neq s$:

$$\alpha)\quad Y_j - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} Y_i \cdot \left(d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}\right)\right] - Y_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} = \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

A PRE $j = s$:

$$\beta)\quad Y_s - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} Y_i \cdot \left(-\frac{d_{ir}}{d_{sr}}\right)\right] - Y_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}}$$

α) $j \in N'$, $j \neq s$, $(\Rightarrow j \in N, j \neq r)$

$$(*) = y_j - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot \left(d_{ij} - d_{ir}\frac{d_{sj}}{d_{sr}}\right)\right] - y_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} = \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

ZO VZŤAHU $\tilde{Y}_N^T - \tilde{Y}_B^T \mathbb{D} = \tilde{\mathbb{d}}_0^T$ VIEME, ŽE PRE $\forall j \in N$ PLATÍ:

$$y_j - \sum_{i \in B} y_i \cdot d_{ij} = \tilde{d}_{0j}, \quad \text{TJ.}$$

$$y_j - \left(\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot d_{ij}\right) - y_s \cdot d_{sj} = \tilde{d}_{0j}$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot d_{ij} = y_j - \tilde{d}_{0j} - y_s \cdot d_{sj} \qquad (\text{AJ PRE } j = r)$$

TAKŽE $(*) = y_j - \left[y_j - \tilde{d}_{0j} - y_s \cdot d_{sj} - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot \left(y_r - \tilde{d}_{0r} - y_s \cdot d_{sr}\right)\right] - y_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} =$

$$= \tilde{d}_{0j} + y_s \cdot d_{sj} + \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot y_r - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \tilde{d}_{0r} - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot y_s \cdot d_{sr} - y_r \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} =$$

$$= \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}.$$

ĽAHKO BY SME VEDELI ÍSŤ AJ OPAČNÝM SMEROM (2a') ⇝ (2a)
(ROBILI SME IBA EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY)

β) $j \in N'$, $j = s$

$$(\bar{*}) = y_s - \left[\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \left(-\frac{d_{ir}}{d_{sr}}\right)\right] - y_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}}$$

$$(\bar{*}) = y_s - \left(-\frac{1}{d_{sr}}\right) \cdot \left(y_r - \tilde{d}_{0r} - y_s \cdot d_{sr}\right) - y_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} =$$

$$= y_s + \frac{y_r}{d_{sr}} - \frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}} - \frac{y_s \cdot d_{sr}}{d_{sr}} - y_r \cdot \frac{1}{d_{sr}} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}}.$$

OPÄŤ TAKTIEŽ PLATÍ (2a') ⇝ (2a)

28.06.2008 Sa
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

NAKONIEC EŠTE MUSÍME UKÁZAŤ $(2a')+(2b') \sim (2a)+(2b)$

ROZPÍŠME $\bar{b}^T \bar{y} = d'_{00} + \bar{y}^T_{B'} \cdot d'_0$ DO ZLOŽIEK:

$$(\tilde{*}) \quad \bar{b}^T \bar{y} = d'_{00} + \sum_{i \in B'} y_i \cdot d'_{i0} =$$
$$= d'_{00} + \left(\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot d'_{i0}\right) + y_r \cdot d'_{r0}$$

Z $\bar{b}^T \bar{y} = d_{00} + \bar{y}^T_B \cdot d_0$ VIEME, ŽE

$$\bar{b}^T \bar{y} = d_{00} + \sum_{i \in B} y_i \cdot d_{i0} =$$
$$= d_{00} + \left(\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot d_{i0}\right) + y_s \cdot d_{s0}$$
$$\Rightarrow \sum_{i \in B', i \neq r} y_i d_{i0} = \bar{b}^T \bar{y} - d_{00} - y_s \cdot d_{s0}.$$

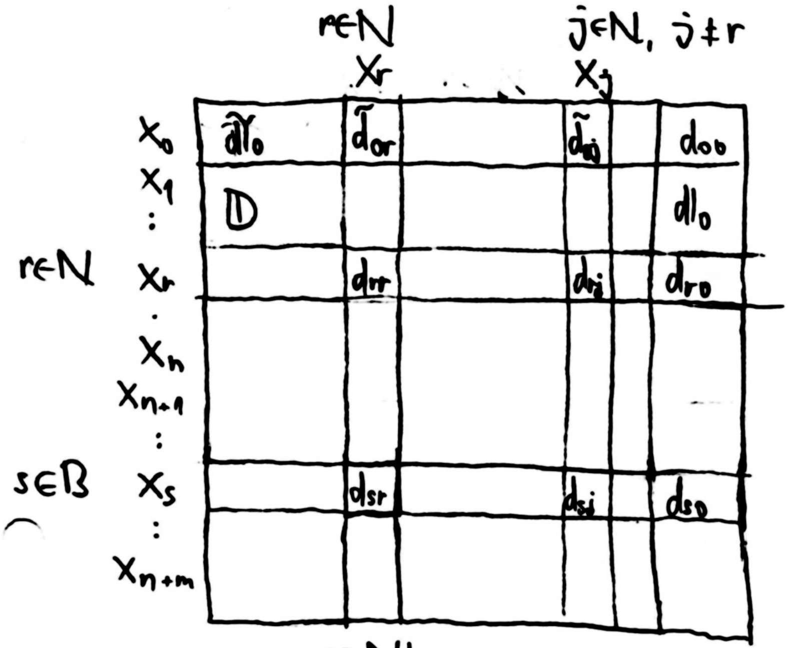
$$(\tilde{*}) = d'_{00} + \left[\sum_{i \in B', i \neq r} y_i \cdot \left(d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}\right)\right] + y_r \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} =$$
$$= d'_{00} + \left(\bar{b}^T \bar{y} - d_{00} - y_s \cdot d_{s0}\right) -$$
$$- \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \cdot \left(y_r - \tilde{d}_{0r} - y_s \cdot d_{sr}\right) + y_r \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} =$$
$$= \cancel{d_{00}} \cancel{- \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}} + \bar{b}^T \bar{y} \cancel{- d_{00}} \cancel{- y_s \cdot d_{s0}} -$$
$$\cancel{- \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \cdot y_r} \cancel{+ \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}} \cancel{+ y_s \cdot d_{sr} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}} \cancel{+ y_r \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}}}$$
$$= \underline{\underline{\bar{b}^T \bar{y}}}. \quad \square$$

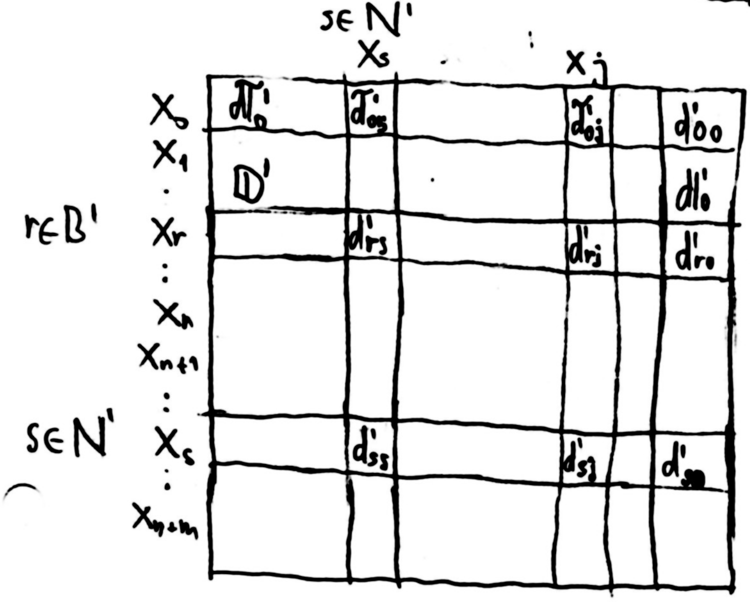
OPAČNÝ SMER $(2a')+(2b') \rightsquigarrow (2b)$ TAKISTO FUNGUJE.

29. 06. 2008 Su
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

ℓ-TABUĽKA





$$d'_{rs} = \frac{1}{d_{sr}}, \quad d'_{rj} = \frac{d_{sj}}{d_{sr}}, \quad d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}}$$

$$d'_{ss} = -1, \quad d'_{sj} = 0, \quad d'_{s0} = 0$$

TJ. S-TÝ RIADOK JE:

$$(0, 0, \ldots, \underset{\uparrow}{-1}, \ldots, 0, 0)$$

K PREMENNEJ x_s

PRE $i \in B$, $i \neq s$, $i \neq r$ PLATIA PÔVODNÉ TRANS. VZŤAHY

PODOBNE PRE $\tilde{d}'_0$, d'_{00}

RIADKY $i \in N$, $i \neq s$, $i \neq r$ ZOSTÁVAJÚ ZACHOVANÉ

ŠPECIÁLNE NULTÝ STĹPEC:

$$d'_{00} = d_{00} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \qquad d'_{i0} = d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \quad i \in B, i \neq s, i \neq r$$

$$d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}} = \underbrace{d_{r0}}_{0} - \underbrace{d_{rr}}_{-1} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \qquad d_{i0} = 0 = d_{i0} - d_{ir} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \quad i \in N, i \neq s, i \neq r$$

$$d'_{s0} = 0 = d_{s0} - d_{sr} \cdot \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \quad \Rightarrow \text{VIDÍME, ŽE } \boxed{R'_0 = R_0 - \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \cdot R_r}$$

ŠPECIÁLNE PRE j-TY STĹPEC, KDE $j \in N$, $j \neq r$ ($\Rightarrow j \neq s$)

$$\tilde{d}'_{0j} = \tilde{d}_{0j} - \tilde{d}_{0r} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

$$d'_{rj} = \frac{d_{sj}}{d_{sr}} = \underbrace{d_{rj}}_{0} - \underbrace{d_{rr}}_{-1} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

$$d'_{sj} = 0 = d_{sj} - d_{sr} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}}$$

$$d'_{ij} = d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \qquad i \in B,\ i \neq s,\ i \neq r$$

$$d'_{ij} = -\delta_{ij} = d_{ij} - d_{ir} \cdot \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \qquad i \in N,\ i \neq s,\ i \neq r$$

a) $i = j$, POTOM $d_{ij} = d_{ii} = -1$, $d_{ir} = 0$

b) $i \neq j$, POTOM $d_{ij} = d_{ir} = 0$

TRANSFORMÁCIU V TOMTO TVARE MÁME POPÍSANÚ VZŤAHMI:

$$\boxed{\begin{aligned} R'_j &= R_j - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot R_r \\ R'_0 &= R_0 - \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \cdot R_r \\ R'_s &= -\frac{1}{d_{sr}} \cdot R_r \end{aligned}} \qquad j \in N,\ j \neq r\ (\Rightarrow j \neq s)$$

PRE R'_s JE TOTIŽ:

$$\tilde{d}'_{0s} = -\frac{\tilde{d}_{0r}}{d_{sr}} \qquad d'_{is} = -\frac{d_{ir}}{d_{sr}} \qquad i \in B,\ i \neq s,\ i \neq r$$

$$d'_{rs} = \frac{1}{d_{sr}} = -\frac{d_{rr}}{d_{sr}} \qquad d'_{is} = 0 = -\frac{d_{ir}}{d_{sr}} \qquad i \in N,\ i \neq s,\ i \neq r$$

$$d'_{ss} = -1 = -\frac{d_{sr}}{d_{sr}} \qquad \Rightarrow \qquad R'_s = -\frac{1}{d_{sr}} \cdot R_r$$

30. 06. 2008 Mo
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

ÚLOHA CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVANIA

$$\max_M f(x) \qquad M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \le 0,\ i \in \{1, \dots, m\},\ \forall \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} : x_\alpha \in \mathbb{Z} \}$$

ČISTÁ ÚLOHA AK $C = \{1, \dots, n\}$

ÚLOHA LINEÁRNEHO CELOČÍSELNÉHO PROGR.

$$\max_M c^T x \qquad M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0,\ \forall \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} : x_\alpha \in \mathbb{Z} \}$$

RIEŠIME ČISTÚ ÚLOHU LIN. CELOČ. PROG. V TVARE

$$(1) \qquad \max_M c^T x \qquad M'_C = \{ \binom{x}{x'} \in \mathbb{Z}^{n+m} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \ge 0 \}$$

MYŠLIENKA 1. GOMORIHO ALGORITMU

ÚLOHU (1) PREVEDIEME NA SPOJITÚ, TJ. $\binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m}$ A RIEŠIME POMOCOU DUÁLNEJ SIMPL. METÓDY (PREDPOKLADÁME $c < 0$)

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \bar{x}_N & & \\ \hline \bar{x}_B & D & d_0 & \ge 0 \\ \hline & d_0^T \ge 0 & d_{00} & \end{array}$$

Z POSL. TABUĽKY (TJ. $d_0 \ge 0$) AK $(\bar{x}_B, \bar{x}_N) = (d_0, 0) \in M'_C$, MÁME OPT. RIEŠENIE, INAK NECH $d_{k0} \notin \mathbb{Z}$, $k \in B$

PLATÍ $\bar{x}_B + D \bar{x}_N = d_0$, TJ ŠPECIÁLNE

$$x_k + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j = d_{k0}$$

PRE REÁLNE $x \in \mathbb{R}$ NECH $[x] = \lfloor x \rfloor$, $\boxed{x} = x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0, 1)$

DEFINUJME DELIACU NADROVINU

$$H = \{ \binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j = 0 \}$$

POTOM $\bar{x}^* \in H^-$ A $M'_C \subseteq \bar{H}^+$

PRE $\bar{x}^* = (\bar{x}_B, \bar{x}_N) = (d|_0, 0)$ JE $\bar{x}_N = 0$

$\Rightarrow$ (KEĎŽE $d_{k0} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{d_{k0}} > 0$)

$$-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j = -\boxed{d_{k0}} < 0$$

NA DRUHEJ STRANE PRE $\bar{x} \in M'_C$ JE

$$x_k + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j = d_{k0}$$

$$\Rightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{x_k}} + \underbrace{\sum_{j \in N} [d_{kj}] x_j}_{\in \mathbb{Z}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j = \underbrace{\lfloor d_{k0} \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + \boxed{d_{k0}}$$

$$\Rightarrow -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \underbrace{\boxed{d_{kj}}}_{\geq 0} \underbrace{x_j}_{\geq 0} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j \geq -\boxed{d_{k0}} > -1$$

$$\Rightarrow -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j \geq 0. \Rightarrow \bar{x} \in \bar{H}^+$$

TÚTO DELIACU NADROVINU MÔŽME ZAVIESŤ DO TABUĽKY TAK, ŽE PRIDÁME NOVÝ RIADOK

z	$-\boxed{d_{kj}}$	$-\boxed{d_{k0}}$

NOVÁ PREMENNÁ $z = -\boxed{d_{k0}} - \sum_{j \in N} (-\boxed{d_{kj}}) x_j$

MUSÍ SPĹŇAŤ $z \geq 0$

$\Rightarrow$ ZÚŽIME OBOR PRÍP. RIEŠENÍ NA $M'_C \cap \bar{H}^+$

01.07.2008 Tu
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

ℓ-METÓDA (LEXIKOGRAFICKÁ DUÁLNA METÓDA)

RIEŠIME $\max\limits_{M} c^T x$ $\quad M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$

TJ. $\max\limits_{M'} c^T x$ $\quad M' = \{\binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax + x' = b,\ x, x' \ge 0\}$

PRIČOM PREDPOKLADÁME $c < 0$, M (TJ. M') OHRANIČENÉ, NEDEGENEROVANOSŤ

+ ZAVEDIEME NOVÚ PREMENNÚ $x_0 = c^T x$

POČIATOČNÁ ℓ-TABUĽKA:

$$
\begin{array}{c|ccc|c|}
 & x_1 & x_2 \ \dots & x_n & \\
\hline
x_0 & & -c & & 0 \\
\hline
x_1 & & & & \\
\vdots & & -I & & 0 \\
x_n & & & & \\
\hline
x_{n+1} & & & & \\
\vdots & & A & & b \\
x_{n+m} & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$\bar{x} = \binom{x}{x'}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$\bar{c} = \binom{c}{0}$ $\quad x' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$

$B = \{n+1, \dots, n+m\}$

$N = \{1, \dots, n\}$

VO VŠEOBECNOM k-TOM KROKU MÁME ℓ-TABUĽKU:

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & \bar{x}_N & \\
\hline
x_0 & d_0^T \ge 0 & d_{00} \\
\hline
x_1 & & \\
\vdots & D & \\
x_n & & d_0 \\
x_{n+1} & & \\
\vdots & & \\
x_{n+m} & & \\
\hline
\end{array}
$$

PLATÍ:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \bar{c}^T \bar{x} + d_0^T \bar{x}_N = d_{00} \\ \bar{x} &+ D \bar{x}_N = d_0 . \end{aligned}}$$

OD TABUĽKY DSM SA LÍŠI TÝM, ŽE POSLEDNÝ RIADOK JE PRVÝ (x_0) A D OBSAHUJE MATICU $-I$.

DÁ SA NAHLIADNUŤ, ŽE TRANSFORMÁCIA l-TABUĽKY PODĽA PIVOTA d_{sr} SA RIADI VZŤAHMI

$$R'_s = \frac{-1}{d_{sr}} \cdot R_r, \quad R'_j = R_j - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} R_r \ (j \in N, j \neq r), \quad R'_0 = R_0 - \frac{d_{s0}}{d_{sr}} R_r .$$

l-TABUĽKU NAZÝVAME l-NORMÁLNOU $\Leftrightarrow$
$\forall j \in N : R_j \succ \mathbb{0}$.

PLATÍ VETA (*): BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ NEDEGEN. RIEŠENIE JE l-OPTIMÁLNE $\Leftrightarrow$ PRÍSLUŠNÁ TABUĽKA JE l-NORMÁLNA.

KEĎŽE PRE $\forall \bar{x} \in M'$: $\quad \bar{c}^T \bar{x} = d_{00} - \tilde{\mathbb{d}}_0^T \bar{x}_N$

PRE KAŽDÉ $\bar{x} \in M'_{OPT}$ PLATÍ $\quad x_j = 0 \quad \forall j \in N : \tilde{d}_{0j} > 0$

TJ. $M'_{OPT} = M' \cap \left\{ \binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x_j = 0 \quad \forall j \in N : \tilde{d}_{0j} > 0 \right\}$

$\Leftarrow$) PREDPOKLADÁME, ŽE TABUĽKA JE l-NORMÁLNA

NECH PRE NEJAKÉ $\bar{x}^\circ \in M'_{OPT}$ PLATÍ $\bar{x}^\circ \succ \bar{x}^*$,
KDE $(\bar{x}^*_B, \bar{x}^*_N) = (\mathbb{d}_0, \mathbb{0})$, $\quad \mathbb{d}_0 > \mathbb{0}$ (NEDEGENEROVANOSŤ)
MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE $\bar{x}^\circ$ JE BÁZICKÉ, PRETOŽE SA DÁ DOKÁZAŤ, ŽE V M'_{OPT} SA NACHÁDZA l-OPTIMÁLNE BÁZICKÉ RIEŠENIE. (M' JE OHRANIČENÁ)

$\boxed{?}$

01.07.2008 Tu
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE

(1) $\min_{M(\nu)} F(x, \lambda)$, $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ $\quad M(\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\lambda \in \mathbb{R}^l,\ \nu \in \mathbb{R}^m$ .. PARAMETRE

<u>OBOR RIEŠITEĽNOSTI</u> $\mathcal{a}_{\lambda,\nu} = \{ (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^{l \times m} \mid$ (1) MÁ RIEŠENIE $\}$

AK PRE NEJAKÉ λ^0, ν^0 JE $\min_{M(\nu^0)} F(x, \lambda^0) = F(x^0, \lambda^0)$

POTOM $\mathcal{a}^0_{\lambda,\nu} = \{ (\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^{l \times m} \mid \min_{M(\nu)} F(x, \lambda) = F(x^0, \lambda) \}$

NAZÝVAME <u>OBOROM STABILITY</u> RIEŠENIA x^0.

<u>FUNKCIA RIEŠITEĽNOSTI</u> $\varphi: \mathcal{a}_{\lambda,\nu} \to \mathbb{R}$

JE DEFINOVANÁ AKO $\varphi(\lambda, \nu) = \min_{M(\nu)} F(x, \lambda)$.

ÚLOHA LINEÁRNEHO 1-PARAMETRICKÉHO PROGRAMOVANIA S PARAMETROM V CIEĽOVEJ FUNKCII.

$$\min_{M} (c^T + \lambda c'^T)\, x \qquad M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \}$$

	x_B	x_N	
x_B		D	d_b
	0	$c_N^T(\lambda) - z_N^T(\lambda)$	$-c_{00}$

$c_N^T(\lambda) - z_N^T(\lambda) =$
$= c_N + \lambda c'_N -$
$(c_B + \lambda c'_B)^T D =$
$= \mu + \lambda \nu$

1. VETA LPP : KEĎ PRE λ^0 $\exists$ OPTIMÁLNE RIEŠENIE x^0, POTOM $\exists$ $\underline{\lambda}^0$, $\overline{\lambda}^0$ TAKÉ, ŽE
PRE $\forall \lambda \in \langle \underline{\lambda}^0, \overline{\lambda}^0 \rangle$ JE x_0 OPT. RIEŠ.
$\lambda^0 \in \langle \underline{\lambda}^0, \overline{\lambda}^0 \rangle$

PRI NEDEG. RIEŠENÍ MÁME OBOR STABILITY RIEŠENIA x^0

2. VETA LPP : KEĎ PRE λ^0 $\neg\exists$ OPT. RIEŠ.,
POTOM $\exists\infty$ (KONVEXNÝ) OTVORENÝ INT. J
$\forall \lambda \in J$ NEEXISTUJE OPT. RIEŠ.,
$\lambda^0 \in J$

DÔSLEDOK : OBOR RIEŠITEĽNOSTI LPP Ω JE KONVEXNÁ UZAVRETÁ MN.

NECH x^i SÚ VRCHOLY M. T.J. BÁZICKÉ PRÍP. RIEŠENIA
$\Omega = \bigcup_{i \in P} \Omega^i$

3. VETA LPP :
AK $\langle \underline{\lambda}^1, \overline{\lambda}^1 \rangle$ JE OBOR STABILITY x^1. $\underbrace{\text{POTOM BUĎ}}_{\overline{\lambda}^1 \text{ JE KONEČNÉ}}$

a) $\forall \lambda > \overline{\lambda}^1$ ÚLOHA NEMÁ OPT. RIEŠ., ALEBO
b) $\exists$ SUS. x^2 S OBOROM $\langle \underline{\lambda}^2, \overline{\lambda}^2 \rangle$, PRIČOM $\overline{\lambda}^1 = \underline{\lambda}^2$

FUNKCIA $\varphi(\lambda) = \min_M (c^T + \lambda c'^T) x$
JE KONKÁVNA (+ PO ČASTIACH LIN. ASPOŇ RAZ)

$$\lambda_3 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2, \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1$$

$$\varphi(\lambda_3) = \min_M \left(c^T + (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) c'^T \right) x =$$

$$= \min_M \left(\alpha (c^T + \lambda_1 c'^T) x + \beta (c^T + \lambda_2 c'^T) x \right) \geq$$

$$\geq \alpha \varphi(\lambda_1) + \beta \varphi(\lambda_2).$$

02.07.2008 We
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

LEMMA: $F(x)$, KTORÁ MÁ 1. PARC. DERIVÁCIE
(L) NA OTVORENEJ KONVEXNEJ MNOŽINE M
JE KONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $F(x^2)-F(x^1) \geq \nabla F(x^1)^T (x^2-x^1)$.

VETA: $f \in C^2(M)$, M OTVORENÁ KONVEXNÁ,
JE KONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x)$ JE POZITÍVNE SEMIDEF. NA M.

PODĽA TAYLOROVEJ VETY $\forall x^1, x^2 \in M$:

$$f(x^2) = f(x^1) + \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) + $$
$$+ (x^2-x^1)^T \nabla^2 f(x^1 + \Theta(x^2-x^1))(x^2-x^1)$$

$\Rightarrow$) (1) PRE $\forall x^1, x^2 \in M$ JE $(x^2-x^1)^T \nabla^2 f(x^1+\Theta(x^2-x^1))(x^2-x^1) \geq 0$
PRE SPOR NECH $\exists x^0 \in M$ A v: $v^T \nabla^2 f(x^0) v < 0$.
ZO SPOJITOSTI $\nabla^2 f$ $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$: $U(x^0, \varepsilon) \subseteq M$
A $\forall x \in U(x^0, \varepsilon)$: $v^T \nabla^2 f(x) v < 0$
NECH $\tilde{x} \in U(x^0, \varepsilon)$ TAKÉ, ŽE $\tilde{x} - x^0 = \rho v$ PRE $\rho > 0$.
POTOM $\forall x \in U(x^0, \varepsilon)$: $(\tilde{x}-x^0)^T \nabla^2 f(x) (\tilde{x}-x^0) < 0$,
ČO JE SPOR S (1).
$\Leftarrow$) ZREJMÉ.

f NA $\boxed{\text{OTVORENEJ KONVEXNEJ } M}$ JE
KVAZIKONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $\forall x^1, x^2 \in M$ $\forall \alpha, \beta \geq 0$ $\alpha + \beta = 1$
$f(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}$

EXPLICITNE KVAZIKONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ KVAZIKONVEXNÁ &
$f(x^1) \neq f(x^2) \Rightarrow \forall \alpha, \beta > 0$ $\alpha+\beta = 1$: $f(\alpha x^1 + \beta x^2) < \max\{f(x^1), f(x^2)\}$

KONVEXNÁ $\Rightarrow$ EXPLICITNE KVAZIKONVEXNÁ $\Rightarrow$ KVAZIKONV.
$f(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \alpha f(x^1) + \beta f(x^2) \leq (\alpha + \beta) \max\{f(x^1), f(x^2)\}$.

! f JE KVAZIKONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $A_\alpha = \{x \in M \mid f(x) \leq \alpha\}$ JE KONV. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

VETA: LOKÁLNE MINIMUM EXPLICITNE KVAZIKONV. FUNKCIE JE ABSOLÚTNE.

DIFERENCIOVATEĽNÁ f JE

LOKÁLNE PSEUDOKONVEXNÁ V BODE $x^0 \in M$

$$f(x) \leq f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \leq 0$$

$$f(x) < f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) < 0$$

PSEUDOKONVEXNÁ, KEĎ JE LOK. PSEUDOKONV. $\forall x^0 \in M$

ÚČINNÉ MINIMUM $\nabla f(x^0)^T (x - x^0) \geq 0 \quad \forall x \in M$

$\Rightarrow$ ABSOLÚTNE MINIMUM

STACIONÁRNY BOD $\Rightarrow$ ÚČINNÉ MINIMUM

KONVEXNÁ $\Rightarrow$ PSEUDOKONVEXNÁ (z $\mathcal{L}$)

(DEF. PSEUDOKONKÁVNA, PSEUDOLINEÁRNA)

04.07.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

MÁME ÚLOHU [ÚLOHA KONVEXNÉHO PROGR.]

(1) $\min_M f(x) \qquad M = \{x \in N \mid g(x) \leq 0\}$

KDE $N \subseteq \mathbb{R}^n$ JE KONVEXNÁ $\overbrace{}^{\text{OTVORENÁ}}$ $g = (g_1, \dots, g_m)^T$

f, g_i SÚ KONVEXNÉ A $\underbrace{\text{DIFERENCOVATEĽNÉ}}_{\text{SPOJITO}}$ NA N

$\Rightarrow$ M JE KONVEXNÁ

– LAGRANGEOVA FUNKCIA PRIRADENÁ K (1) JE

$$\phi(x, u) = f(x) + u^T g(x) \qquad x \in N,\ u \in \mathbb{R}^m$$

BOD (x_0, u_0) SPĹŇA KUHN–TUCKEROVE PODMIENKY (JE K-T STACIONÁRNY) $\Leftrightarrow$

(1) $x_0 \in N,\ u_0 \geq 0$
(2) $\nabla_u \phi(x_0, u_0) \leq 0$
(3) $\nabla_x \phi(x_0, u_0) = 0$
(4) $\nabla_u \phi(x_0, u_0)^T u_0 = 0$

–

$\phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot g_i(x)$

$\Rightarrow \nabla_u \phi(x_0, u_0) = g(x_0)\ ,\quad \nabla_x \phi(x_0, u_0) = \nabla_x f(x_0) + \overbrace{\sum_{i=1}^m u_i \nabla_x g_i(x_0)}^{\nabla g(x_0)^T u_0}$

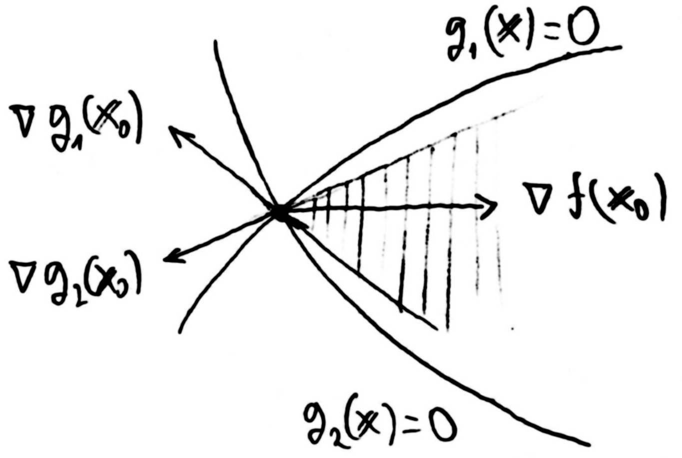
Z (2) $\Rightarrow g(x_0) \leq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 \in M$

(4) $\Rightarrow \underset{\leq 0}{g(x_0)^T}\ \underset{\geq 0}{u_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [m]\ g_i(x_0) = 0 \vee u_i = 0$

OZNAČME $J = \{i \in [m] : g_i(x_0) = 0\}$

TZV. MNOŽINA INDEXOV AKTÍVNYCH PODMIENOK

(3) $\Rightarrow \boxed{\nabla f(x_0)} = -\sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x_0) = \boxed{-\sum_{i \in J} u_i \nabla g_i(x_0)}$



NECH N JE KONVEXNÁ OTVORENÁ $\subseteq \mathbb{R}^n$,
f, g_i SÚ SPOJITO DIFERENCOVATEĽNÉ A KONVEXNÉ NA N,
(x_0, u_0) JE K-T STACIONÁRNY BOD.
POTOM x_0 JE OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY (1)

KONVEXITA f: $f(x) - f(x_0) \geq \nabla_x f(x_0)^T (x - x_0)$
KONVEXITA g_i: $g_i(x) - g_i(x_0) \geq \nabla_x g_i(x_0)^T (x - x_0) \quad \forall i$

$$f(x) - f(x_0) \geq -u_0^T \nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) \geq$$
$$\geq -u_0^T (g(x) - g(x_0)) = -u_0^T g(x) + \overbrace{u_0^T g(x_0)}^{=0}$$

KEĎŽE $x \in M \Rightarrow x \in N \;\&\; g(x) \leq 0$
$(1) \Rightarrow u_0 \geq 0$
$\Big\}\; -u_0^T g(x) \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

04.07.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

DUALITA NIE JE JEDNOZNAČNE DEFINOVANÁ

LAGRANGEOVA DUALITA

(2) $\max_{K} \phi(x, u)$ $K = \{ x \in N, u \geq 0 \mid \nabla_x \phi(x, u) = 0 \}$

SLABÁ VETA O DUALITE:

$$\inf_M f(x) \geq \sup_K \phi(x, u)$$

$M = \emptyset \vee K = \emptyset \Rightarrow$ TVRDENIE PLATÍ.

NECH $x^1 \in M$, $(x^2, u^2) \in K$. DOKÁŽME, ŽE $f(x^1) \geq \phi(x^2, u^2)$.

KONVEXITA f: $f(x^1) - f(x^2) \geq \nabla f(x^2)^T (x^1 - x^2)$

KONVEXITA g_i: $g_i(x^1) - g_i(x^2) \geq \nabla g_i(x^2)^T (x^1 - x^2)$ $\forall i$

$$\phi(x, u) = f(x) + u^T g(x)$$

Z $(x^2, u^2) \in K \Rightarrow \nabla f(x^2)^T + u^{2T} \nabla g(x^2) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla f(x^2)^T = -u^{2T} \nabla g(x^2)}}$$

$$f(x^1) - f(x^2) \geq -u^{2T} \nabla g(x^2)(x^1 - x^2) \geq -u^{2T}(g(x^1) - g(x^2))$$
$$= -u^{2T} g(x^1) + u^{2T} g(x^2)$$

KEĎŽE $u^2 \geq 0$ A $g(x^1) \leq 0$

$$\Rightarrow f(x^1) \geq f(x^2) + u^{2T} g(x^2)$$

METÓDA FRANKA A WOLFA

$$\min_M f(x) \qquad M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$$

PREDPOKLADÁME, ŽE f JE PSEUDOKONVEXNÁ NA M

ĎALEJ PREDPOKLADÁME, ŽE $x^T \nabla f(x^r)$ JE OHRANIČENÁ NA M PRE $\forall x^r \in M$.

ALGORITMUS:

1. KROK: RIEŠIME $\min_M 0$ $\Rightarrow$ DOSTANEME VÝCHODZIE $x^1 \in M$.
2. KROK: MÁME $x^r \in M$, RIEŠIME $\min_M x^T \nabla f(x^r)$

$\Rightarrow$ DOSTANEME $\hat{x}^r \in M$. $\Rightarrow \forall x \in M: (\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0$

1. VETA F&W: AK $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) = 0$, POTOM JE x^r OPTIMÁLNE RIEŠENIE.

$$\hat{x}^r - x = \hat{x}^r + x^r - x^r - x$$

$$(\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) = (\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) + (x^r - x)^T \nabla f(x^r) =$$
$$= (x^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0 \qquad \forall x \in M$$

AK BY $f(x^0) < f(x^r)$ $\Rightarrow$ Z PSEUDOKONVEXITY BY BOLO $\nabla f(x^r)^T (x^r - x^0) < 0$

$\Rightarrow$ NUTNE PRE $\forall x \in M$: $f(x) \geq f(x^r)$.

05.07.2008 So
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

VIACKRITERIÁLNA OPTIMALIZÁCIA

(1) $\max\limits_{M} f(x) \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$

$f = (f_1, \dots, f_s)^T, \quad g = (g_1, \dots, g_m)^T$

a) IDEÁLNE RIEŠENIE $x^* \in M : \forall x \in M : f(x) \leq f(x^*)$

b) DOMINANTNÉ RIEŠENIE : $\exists i_0 \in \{1, \dots, s\}$

RIEŠIŤ (1) ZNAMENÁ RIEŠIŤ $\max\limits_{M} f_{i_0}(x)$

c) EFICIENTNÉ RIEŠENIE

x^* NAZÝVAME EFICIENTNÝM RIEŠENÍM (1)

$\Leftrightarrow \neg\exists x \in M : f(x) > f(x^*)$ .. PRÍSL. MN. OZN. $\mathcal{E}$

VLASTNÝM EFICIENTNÝM RIEŠENÍM

$\Leftrightarrow \exists \beta > 0 : \forall x \in M \quad \forall i \quad f_i(x) > f_i(x^*)$

$\Rightarrow \exists k : f_k(x) < f_k(x^*) \quad :$

$f_i(x) - f_i(x^*) \leq \beta\left(f_k(x^*) - f_k(x)\right)$

d) KOMPROMISNÉ RIEŠENIE f PREVÁDZAME NA SKALÁRNU F

PRE $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^s \mid \lambda > 0\}$ PARAMETRICKÝ SKALÁRNY EKVIVALENT

OZNAČME $M_{OPT}(\lambda_0) = \{x^* \in M \mid \lambda_0^T f(x^*) = \max\limits_{M} \lambda_0^T f(x)\}$

PLATÍ $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} M_{OPT}(\lambda_0) \subseteq \mathcal{E}$.

NECH $x^* \in \bigcup$ TJ. $\exists \lambda_0 > 0 : \forall x \in M : \lambda_0^T\left(f(x^*) - f(x)\right) \geq 0$

AK x^* NIE JE EFIC. $\Rightarrow \exists x \in M : f(x^*) - f(x) < 0$. ↯

AD c)

ALGORITMY DIALÓGU (1. A 2.)

AD d)

(1) METÓDA GLOBÁLNEJ CIEĽOVEJ FUNKCIE
(2) METÓDA FUNKCIE ÚŽITKU.
(3) POROVNÁVANIE 2 FUNKCIÍ
(4) ...

06. 07. 2008 Su
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

DYNAMICKÉ PROGRAMOVANIE

SYSTÉM

$x^1 \quad u^1 \quad x^2 \quad u^2 \quad x^3 \quad u^3 \quad \ldots \quad x^N \quad u^N \quad x^{N+1}$

$t' = t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \ldots \quad t_N = t''$ VOPRED DANÉ DELENIE $\langle t', t'' \rangle$

$x^{i+1} = T_i(x^i, u^i)$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ MNOŽINA PRÍPUSTNÝCH STAVOV
$U \subseteq \mathbb{R}^m$ MNOŽINA PRÍPUSTNÝCH ROZHODNUTÍ

DISKRÉTNY DETERMINISTICKÝ ROZHODOVACÍ PROCES
$x^1 \in X$
$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \; x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X$

$(u^1, \ldots, u^N)$ JE PRÍPUSTNÁ STRATÉGIA
MNOŽINA PRÍP. STRATÉGIÍ $\mathcal{U}(x^1)$

ABY SME DOSTALI ÚLOHU DYN. PROGRAMOVANIA, POTREBUJEME CIEĽOVÚ FUNKCIU

$f_1(x^1, u^1), \; f_2(x^1, x^2, u^1, u^2), \; \ldots, \; f_N(x^1, \ldots, x^N, u^1, \ldots, u^N)$

A CHCEME $\max\limits_{\mathcal{U}(x^1)} f_N(x^1, \ldots, x^N, u^1, \ldots, u^N)$

MARKOVOVA VLASTNOSŤ:

$$f_N(x^1, \ldots, x^N, u^1, \ldots, u^N) = \Phi\left(f_{N-1}(x^1, \ldots, x^{N-1}, u^1, \ldots, u^{N-1}), \; \varphi_N(x^N, u^N) \right)$$

NECH $f_N(x^1, \ldots, x^N, u^1, \ldots, u^N) = \varphi_1(x^1, u^1) \oplus \ldots \oplus \varphi_N(x^N, u^N)$.

BELLMANOV PRINCÍP OPTIMALITY:
KAŽDÁ PODSTRATÉGIA OPTIMÁLNEJ STRATÉGIE JE OPT.

OZNAČME $\mathcal{U}_N(x^1) = \{ (u^1, \dots, u^N)$ PRÍP. STRATÉGIE OD $x^1 \}$

$\mathcal{U}_{N-1}(x^2) = \{ (u^2, \dots, u^N)$ PRÍP. STR. OD $x^2 \}$

$$F_N(x^1) = \max_{\mathcal{U}(x^1)} \varphi_1(x^1, u^1) + \dots + \varphi_N(x^N, u^N)$$

$$F_{N-1}(x^2) = \max_{\mathcal{U}(x^2)} \varphi_2(x^2, u^2) + \dots + \varphi_N(x^N, u^N)$$

POTOM $F_N(x^1) = \max_{u^1 \in U} \varphi(x^1, u^1) + F_{N-1}(T_1(x^1, u^1))$

X	$\hat{u}^1$	$F_N(x^1)$	$\hat{u}^2$	$F_{N-1}(x^2)$		$\hat{u}^N$	$F_1(x^N)$
x						$\hat{u}^N$	$F_1(x^N)$

$$F_1(x^N) = \max_{u^N \in U} \varphi_N(x^N, u^N) = \varphi_N(x^N, \hat{u}^N)$$

$$F_2(x^{N-1}) = \max_{\substack{u^{N-1} \in U \\ T_{N-1}(x^{N-1}, u^{N-1}) \in X}} \varphi_{N-1}(x^{N-1}, u^{N-1}) + F_1(T_{N-1}(x^{N-1}, u^{N-1}))$$

...

06.07.2008 Su
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

TEÓRIA HIER

MATICOVÁ HRA 2 HRÁČOV S 0 SÚČTOM

STRATÉGIA PRVÉHO HRÁČA $i \in \{1, \dots, n\}$

STRATÉGIA DRUHÉHO HRÁČA $j \in \{1, \dots, m\}$

OZNAČME: $[X] = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \mathbb{1}^T x = 1 \}$,
$[Y] = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y \geq 0, \mathbb{1}^T y = 1 \}$.

$x^* \in [X]$, $y^* \in [Y]$ JE OPTIMÁLNA STRATÉGIA PRVÉHO, DRUHÉHO HRÁČA, AK PRE $\forall x \in [X], y \in [Y]$ PLATÍ

$$x^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y .$$

VETA 1: AK (x^*, y^*), $(\tilde{x}, \tilde{y})$ SÚ 2 OPTIMÁLNE STRATÉGIE, POTOM $x^{*T} A y^* = \tilde{x}^T A \tilde{y}$.

$$x^{*T} A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A y^* \leq x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A \tilde{y} .$$

OZNAČME $\alpha = 1 - \min_{i,j} a_{ij}$. POTOM $\bar{A} = A + \alpha I > 0$, KDE $I = \mathbb{1}_n \cdot \mathbb{1}_m^T$.

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \alpha \geq \min a_{ij} + \alpha = 1 > 0 .$$

VETA 2: NECH JE DANÁ $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. RIEŠME

(P) $\max_M \mathbb{1}^T y \qquad M = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \bar{A} y \leq \mathbb{1}, y \geq 0 \}$

(D) $\min_N \mathbb{1}^T x \qquad N = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}^T x \geq \mathbb{1}, x \geq 0 \}$

NECH x_0, y_0 SÚ PRÍSLUŠNÉ OPT. RIEŠENIA. POTOM $x^* = \frac{x_0}{\mathbb{1}^T x_0}$, $y^* = \frac{y_0}{\mathbb{1}^T y_0}$ SÚ OPT. STRATÉGIE.

$0 \in M$ A KEĎŽE $\bar{A} > 0$, JE M OHRANIČENÁ $\Rightarrow$ EXISTUJE OPT. RIEŠENIE y_0, A Z PRINCÍPU DUALITY EXISTUJE AJ OPT. RIEŠ. x_0 ÚLOHY (D).

$\forall x \in [X]$ JE $x^T \bar{A} y_0 \leq \mathbb{1}^T x = 1 \Rightarrow x^T \bar{A} y^* \leq \frac{1}{\mathbb{1}^T y^0}$

$\forall y \in [Y]$ JE $x_0^T \bar{A} y \geq \mathbb{1}^T y = 1 \Rightarrow x^{*T} \bar{A} y \geq \frac{1}{\mathbb{1}^T x_0}$

A KEĎŽE $\mathbb{1}^T x^0 = \mathbb{1}^T y^0 \Rightarrow$

$$x^T \bar{A} y^* \leq x^{*T} \bar{A} y \quad \forall x \in [X], y \in [Y]$$

$\square$

07.07.2008 Mo
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

1. LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

ÚLOHA LIN. PROG. : $\max_M c^T x \quad M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$ (1)

SIMPLEXOVÁ METÓDA VYŽADUJE ROVNICOVÝ TVAR
$\max_{M'} c^T x \quad M' = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$ (1')
PRIČOM $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, RIADKY SÚ LIN NEZÁVISLÉ

BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x (ÚLOHY (1'))
x JE PRÍPUSTNÉ, $\exists B \in \binom{\{1,\dots,n\}}{m}$: A_B JE REG. A $x_N = 0$.

LEMMA: PRÍPUSTNÉ x JE BÁZICKÉ $\Leftrightarrow$ STĹPCE A_K SÚ LIN. NEZÁVISLÉ, KDE $K = \{ j \in \{1,\dots,n\} : x_j > 0 \}$ (STEINITZ.)

LEMMA: KEĎ JE ÚČELOVÁ FCIA (1') OHRANIČENÁ NA M', POTOM PRE KAŽDÉ PRÍP. x_0 $\exists$ BÁZICKÉ PRÍP. $\tilde{x}$: $c^T \tilde{x} \geq c^T x_0$.

DEGENEROVANÁ ÚLOHA : JEDNÉMU BÁZICKÉMU PRÍPUSTNÉMU RIEŠENIU ZODPOVEDÁ VIAC PRÍPUSTNÝCH BÁZÍ
(PIVOTOVACÍ KROK NEMENÍ HODNOTU ÚČELOVEJ FUNKCIE, NULTÝ STĹPEC NUTNE OBSAHUJE 0 PRVOK)

SIMPLEXOVÁ TABUĽKA $T(B)$, B PRÍP. BÁZA JE
$$x_B = p + Q x_N \qquad \text{EKVIVAL. S} \qquad Ax = b$$
$$z = z_0 + r^T x_N \qquad\qquad\qquad z = c^T x$$
PRE KAŽDÚ PRÍP. BÁZU B EXISTUJE PRÁVE JEDNA $T(B)$.

KEĎ JE $r \leq 0$, POTOM JE PRÍSL. BÁZ. PRÍP. RIEŠ. OPTIMÁLNE

PIVOTOVACIE PRAVIDLÁ: NAJVÄČŠÍ KOEFICIENT,
NAJVÄČŠÍ PRÍRASTOK,
NAJSTRMŠIA HRANA : $\max \dfrac{c^T (x_{NEW} - x_{OLD})}{\|c\| \cdot \|x_{NEW} - x_{OLD}\|}$ NAJMENŠÍ UHOL S c
NAJMENŠÍ INDEX = BLANDOVO PRAVIDLO

DUALITA LIN. PROG.

(P) $\max_{M} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$ $\quad M = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b}, \mathbb{x} \geq \mathbb{0}\}$

(D) $\min_{N} \mathbb{b}^T \mathbb{y}$ $\quad N = \{\mathbb{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbb{A}^T \mathbb{y} \geq \mathbb{c}, \mathbb{y} \geq \mathbb{0}\}$

SLABÁ VETA O DUALITE LIN. PROG.:

$\mathbb{x} \in M, \mathbb{y} \in N \Rightarrow \mathbb{c}^T \mathbb{x} \leq \mathbb{b}^T \mathbb{y}$

ŠPECIÁLNE: (P) NEOHRANIČENÁ $\Rightarrow$ (D) NEPRÍPUSTNÁ
(D) —‖— $\Rightarrow$ (P) —‖—

SILNÁ VETA O DUALITE: PRE ÚLOHY (P), (D)

NASTANE PRÁVE JEDNA Z MOŽNOSTÍ:

(1) (P) NEPRÍPUSTNÁ, (D) NEPRÍPUSTNÁ
(2) (P) NEOHRANIČENÁ, (D) NEPRÍPUSTNÁ
(3) (P) NEPRÍPUSTNÁ, (D) NEOHRANIČENÁ
(4) (P) AJ (D) PRÍPUSTNÉ OHRANIČENÉ,
PRE OPTIMÁLNE RIEŠENIA $\mathbb{x}^*, \mathbb{y}^*$ PLATÍ: $\mathbb{c}^T \mathbb{x}^* = \mathbb{b}^T \mathbb{y}^*$.

FARKASOVA LEMMA: $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$.

POTOM NASTANE PRÁVE JEDNA Z MOŽNOSTÍ:

(F1): $\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{x} \geq \mathbb{0}: \quad \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$

(F2): $\exists \mathbb{y} \in \mathbb{R}^m: \mathbb{y}^T \mathbb{A} \geq \mathbb{0}^T \;\&\; \mathbb{y}^T \mathbb{b} < 0$

FARKASOVA LEMMA (VARIANTA): $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$

$\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{x} \geq \mathbb{0}, \mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b} \iff$

$\forall \mathbb{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbb{y} \geq \mathbb{0}; \mathbb{y}^T \mathbb{A} \geq \mathbb{0}^T \Rightarrow \mathbb{y}^T \mathbb{b} \geq 0.$

07.07.2008 Mb
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

TABUĽKA SIMPLEXOVEJ METÓDY Z NOPT046

$$\min_{M} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$

$$M = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{b},\ \mathbb{x} \geq \mathbb{0}\}$$

$$\begin{array}{cc|ccc|c|c}
 & & & \mathbb{c}_B & & \mathbb{c}_N & \\
 & & & \mathbb{x}_B & & \mathbb{x}_N & \\
\hline
 & & 1 & 0 \ \ldots & 0 & \mathbb{D} & \mathbb{d}_0 \\
\mathbb{c}_B & \mathbb{x}_B & 0 & 1 \ \ldots & 0 & & \\
 & & & \ldots\ldots & & & \\
 & & 0 & 0 \ \ldots & 1 & & \\
\hline
 & & 0 & 0 \ \ldots & 0 & \mathbb{c}_N^T - \mathbb{z}_N^T & -c_0
\end{array}$$

$$\mathbb{z}_N^T = \mathbb{c}_B^T \cdot \mathbb{D}$$

$$\mathbb{c}_B^T \mathbb{d}_0 = c_0$$

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ JE EKVIV. S: $(\mathbb{I}_m, \mathbb{D}) \begin{pmatrix} \mathbb{x}_B \\ \mathbb{x}_N \end{pmatrix} = \mathbb{d}_0$

$c = \mathbb{c}^T \mathbb{x}$ $\qquad (\mathbb{0}_m^T, \mathbb{c}_N^T - \mathbb{z}_N^T) \begin{pmatrix} \mathbb{x}_B \\ \mathbb{x}_N \end{pmatrix} = -c_0 + c$

TABUĽKA DUÁLNEJ SIMPLEXOVEJ METÓDY Z NOPT046

(P') $\max_{M'} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$ $\qquad M' = \{ \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{x}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid A\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b},\ \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{x}' \end{pmatrix} \geq \mathbb{0} \}$

(D') $\min_{N'} \mathbb{b}^T \mathbb{y}$ $\qquad N' = \{ \begin{pmatrix} \mathbb{y}' \\ \mathbb{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid -A^T \mathbb{y} + \mathbb{y}' = -\mathbb{c},\ \begin{pmatrix} \mathbb{y}' \\ \mathbb{y} \end{pmatrix} \geq \mathbb{0} \}$

1.S.T.DSM:

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & \mathbb{y}'^T = \overline{\mathbb{y}}_N^T & \\
 & & \mathbb{x}'^T = \overline{\mathbb{x}}_N^T & \\
\hline
\mathbb{y} = \overline{\mathbb{y}}_B & \mathbb{x}' = \overline{\mathbb{x}}_B & A & \mathbb{b} \\
\hline
 & & -\mathbb{c}^T & 0
\end{array}$$

$$B = \{n+1, \ldots, n+m\}$$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\overline{\mathbb{x}} = \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{x}' \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbb{y}} = \begin{pmatrix} \mathbb{y}' \\ \mathbb{y} \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbb{c}} = \begin{pmatrix} \mathbb{c} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overline{\mathbb{b}} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{b} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbb{x}}_B + A\overline{\mathbb{x}}_N = \mathbb{b}$$

$$(-\mathbb{c}^T)\overline{\mathbb{x}}_N = +0 - \overline{\mathbb{c}}^T \overline{\mathbb{x}}$$

JE EKVIV. S: $\quad A\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b}$

$$-A^T \mathbb{y} + \mathbb{y}' = -\mathbb{c}$$

$$\overline{\mathbb{y}}_N^T - \mathbb{y}_B^T A = -\mathbb{c}^T$$

$$\mathbb{y}_B^T \mathbb{b} = -0 + \overline{\mathbb{b}}^T \overline{\mathbb{y}}$$

V k-TOM KROKU:

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \mathbb{y}_N^T & \\
 & & \mathbb{x}_N^T & \\
\hline
\mathbb{y}_B & \mathbb{x}_B & \mathbb{D} & dl_0 \\
\hline
 & & \tilde{dl}_0^T \geq \mathbb{0}^T & d_{00} \\
\hline
\end{array}
$$

$\bar{\mathbb{x}}_B + \mathbb{D}\,\bar{\mathbb{x}}_N = dl_0$ JE EKVIV. S: $\mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b}$, $\max \bar{\mathbb{c}}^T \bar{\mathbb{x}}$

$\bar{\mathbb{c}}^T \bar{\mathbb{x}} = d_{00} - \tilde{dl}_0^T \bar{\mathbb{x}}_N$

$\bar{\mathbb{y}}_N^T - \bar{\mathbb{y}}_B^T \mathbb{D} = \tilde{dl}_0^T$ JE EKVIV. S: $-\mathbb{A}^T\mathbb{y} + \mathbb{y}' = -\mathbb{c}$, $\min \mathbb{b}^T \mathbb{y}$

$\mathbb{b}^T \bar{\mathbb{y}} = d_{00} + \mathbb{y}_B^T dl_0$

(1) KEĎ POLOŽÍME $\bar{\mathbb{x}}_N = \mathbb{0}$, DOSTANEME BÁZICKÉ RIEŠENIE (P'): $(\bar{\mathbb{x}}_B, \bar{\mathbb{x}}_N)^* = (dl_0, \mathbb{0})$

(2) KEĎ POLOŽÍME $\bar{\mathbb{y}}_B = \mathbb{0}$, DOSTANEME BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE (D') : $(\bar{\mathbb{y}}_B, \bar{\mathbb{y}}_N)^* = (\mathbb{0}, \tilde{dl}_0)$.

(3) PLATÍ $\bar{\mathbb{c}}^T \bar{\mathbb{x}}^* = \bar{\mathbb{b}}^T \bar{\mathbb{y}}^*$.

1. VETA DSM: AK $dl_0 \geq \mathbb{0}$, POTOM $\mathbb{x}^*, \mathbb{y}^*$ SÚ OPT R. $(P'), (D')$.
2. VETA DSM: AK $\exists s \in B : d_{s0} < 0 \wedge \forall j \in N : d_{sj} \geq 0$, POTOM NEEXISTUJE OPT. R. (P') ANI (D').
3. VETA DSM: $s \in B$, $d_{s0} < 0$, $r \in N$: $\dfrac{\tilde{d}_{0r}}{|d_{sr}|} = \min\limits_{j \in N,\, d_{sj} < 0} \dfrac{\tilde{d}_{0j}}{|d_{sj}|}$ (KVÔLI $\tilde{dl}_0^T \geq \mathbb{0}^T$)

   PO TRANSFORMÁCII S PIVOTOM d_{sr} DOSTANEME TABUĽKU, V KTOREJ SÚ ZACHOVANÉ VŠETKY VYŠŠIE UVEDENÉ VZŤAHY, $d_{00}' \leq d_{00}$, AK NEDOCHÁDZA K DEGENERÁCII, TAK $d_{00}' < d_{00}$.

DSM SA OPLATÍ AŽ KEĎ NA ZAČIATKU $\mathbb{c} \leq \mathbb{0}$, $\mathbb{b} \leq \mathbb{0}$

07.07.2008 Po
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

l-TABUĽKA

(P') $\max_{M'} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad M' = \{ \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{x}'} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid A\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{b},\ \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{x}'} \geq \mathbf{0} \}$

1. l-T.:

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{x} & \\
\hline
x_0 & -\mathbf{c}^T & 0 \\
\hline
x_1, \dots, x_n & -\mathbb{I} & \mathbf{0} \\
\hline
x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & A & \mathbf{b}
\end{array}$$

$B = \{n+1, \dots, n+m\}$
$N = \{1, 2, \dots, n\}$
$\bar{\mathbf{x}} = \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{x}'}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \binom{\mathbf{c}}{\mathbf{0}}$

PREDPOKLADÁME $\mathbf{c} < \mathbf{0}$!

V k-TOM KROKU:

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \bar{\mathbf{x}}_N & \\
\hline
x_0 & \tilde{\mathbf{d}}_0^T \geq \mathbf{0} & d_{00} \\
\hline
x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & \mathbb{D} & \mathbf{d}_0
\end{array}$$

PLATIA TIE ISTÉ VZŤAHY AKO V DSM

$\mathbb{D}$ V SEBE NAVIAC OBSAHUJE PODMATICU $-\mathbb{I}$, T VZŤAHY

$\bar{\mathbf{x}}_N + (-\mathbb{I})\,\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$

A $x_0 = \bar{\mathbf{c}}^T \bar{\mathbf{x}} = d_{00} - \tilde{\mathbf{d}}_0^T \bar{\mathbf{x}}_N$

DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE TRANSFORMÁCIA PODĽA PIVOTA d_{sr}, KDE $s \in B$, $r \in N$ SA RIADI VZŤAHMI

$$R'_s = -\frac{1}{d_{sr}} \cdot R_r$$

$$R'_j = R_j - \frac{d_{sj}}{d_{sr}} \cdot R_r \qquad j \in N', j \neq s$$

$$R'_0 = R_0 - \frac{d_{s0}}{d_{sr}} \cdot R_r$$

$B' = B \setminus \{s\} \cup \{r\}$
$N' = N \setminus \{r\} \cup \{s\}$

LEMMA: PRÍPUSTNÉ NEDEGENEROVANÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE JE ℓ-OPTIMÁLNE $\Leftrightarrow$ JEMU PRÍSLUŠNÁ ℓ-TABUĽKA JE ℓ-NORMÁLNA.

1\. VETA ℓ-METÓDY: AK $(d|_0)_B > 0$ A TAB. JE ℓ-NORMÁLNA $\Rightarrow$ MÁME ℓ-OPT. RIEŠENIE.

2\. VETA ℓ-METÓDY: AK $d_{s0} < 0$, $d_{sj} \geq 0$ $\forall j \in N$, NEEXISTUJE RIEŠ. ZADANEJ ÚLOHY

3\. VETA ℓ-METÓDY: $d_{s0} < 0$,

$$\frac{R_\ell}{|d_{s\ell}|} = \underset{j \in N,\, d_{sj} < 0}{\text{LEX. MINIMUM}} \frac{R_j}{|d_{sj}|}$$

ℓ JE URČENÉ JEDNOZNAČNE, KVÔLI -II

PO TRANSFORMÁCII DOSTANEME OPÄŤ ℓ-TABUĽKU

07.07.2008 Mo
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

1. GOMORIHO ALGORITMUS

RIEŠIME ÚLOHU:

$$\max_{M'_c} c^T x \qquad M'_c = \left\{ \binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; Ax + x' = b,\ \binom{x}{x'} \geq 0,\ x_1, \dots, x_{n+m} \in \mathbb{Z} \right\}$$

ZA PREDPOKLADOV:

1) $c^T x \in \mathbb{Z} \quad \forall \binom{x}{x'} \in M'_c$
2) M' JE OHRANIČENÁ
3) V ŽIADNOM KROKU NENASTÁVA DEGENERÁCIA
4) $c < 0$

1. KROK: l-METÓDOU RIEŠIME $\max_{M'} c^T x$

r-TÝ KROK: l-METÓDOU RIEŠIME

$$\max_{M' \cap \bar{H}_1^+ \cap \dots \cap \bar{H}_{r-1}^+} c^T x$$

a) $M' \cap \bar{H}_1^+ \cap \dots \cap \bar{H}_{r-1}^+ = \emptyset \Rightarrow M'_c = \emptyset$
b) AK $\binom{x}{x'}^* \in M'_c$, NAŠLI SME OPTIMÁLNE RIEŠENIE
c) EXISTUJE OPT. RIEŠENIE, ALE $\binom{x}{x'}^* \notin M'_c$

NECH V POSLEDNEJ TABUĽKE l-METÓDY JE $i \in B$ PRVÝ INDEX TAKÝ, ŽE $d_{i0} \notin \mathbb{Z}$

$$H = \left\{ \binom{x}{x'} \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; -\boxed{d_{i0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{ij}}\, x_j = 0 \right\}$$

DEFINUJE SEČNÚ NADROVINU, $M'_c \subseteq \bar{H}^+$, $\binom{x}{x'}^* \in H^-$.

ZAVEDIEME $x_{n+m+r} = -\boxed{d_{i0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{ij}}\, x_j$, TJ. PRIDÁME RIADOK

x_{n+m+r}	$-\boxed{d_{ij}}$	$-\boxed{d_{i0}}$

METÓDA BRANCH & BOUND

RIEŠME ÚLOHU:

$\max_{M_C} c^T x \qquad M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0,$
$x_\alpha \in \mathbb{Z}$ PRE $\alpha \in C \subset \{1, \dots, n\} \}$

PREDPOKLADÁME, ŽE
$c^T x$ JE OHRANIČENÁ NA M

1. KROK: RIEŠME SPOJITÚ ÚLOHU $\max_M c^T x$
   a) $M = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset$
   b) $x^* \in M_C$, MÁME OPT. RIEŠENIE
   c) $x^* \notin M_C$

NECH $k \in C$ JE PRVÝ INDEX TAKÝ, ŽE $x_k^* \notin \mathbb{Z}$

DEFINUJEME $M_1 = \{ x \in M \mid x_k \leq [x_k^*] \}$,
$M_2 = \{ x \in M \mid x_k \geq [x_k^*] + 1 \}$

A IDEME NA 2. KROK

2. KROK: RIEŠME

(a) $\max_{M_1} c^T x$ (b) $\max_{M_2} c^T x$

A ROZOBERIEME JEDNOTLIVÉ PRÍPADY, KTORÉ MÔŽU NASTAŤ

V PRÍPADE M_1 ZAVÁDZAME PREMENNÚ ξ:

$x_k + \xi = [x_k^*] = [d_{k0}]$

PRIČOM $x_k = d_{k0} - \sum_{j \in N} d_{kj} \cdot x_j$

T.J. $\xi = [d_{k0}] - d_{k0} + \sum_{j \in N} d_{kj} \cdot x_j$

07.07.2008 Po
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE

$$\min_{M(\nu)} F(x, \lambda), \quad F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R},$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^l, \ \nu \in \mathbb{R}^m, \ M(\nu) \subseteq \mathbb{R}^n$$

OBOR RIEŠITEĽNOSTI $\mathcal{O}_{\lambda\nu}$

OBOR STABILITY $\mathcal{O}^0_{\lambda\nu}$ RIEŠENIA x^0

FUNKCIA RIEŠITEĽNOSTI $\psi(\lambda, \nu) = \min_{M(\nu)} F(x, \lambda)$

ÚLOHA LINEÁRNEHO 1-PARAMETRICKÉHO PROGRAMOVANIA S PARAMETROM V CIEĽOVEJ FUNKCII

$$\min_{M} (c + \lambda c')^T x, \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

1. VETA L1PP : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, EXISTUJE OPT. x^1
$\Rightarrow \exists \underline{\lambda}_1 < \overline{\lambda}_1$:
(1) PRE $\lambda \in \langle \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1 \rangle$ JE x^1 OPT. RIEŠ.
(2) $\lambda_1 \in \langle \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1 \rangle$
(3) AK x^1 NIE JE DEG., POTOM SME ZÍSKALI OBOR STABILITY

2. VETA L1PP : $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, NEEXISTUJE OPT. RIEŠ.
$\Rightarrow \exists \infty$ OTV. INTERVAL $\mathcal{J}$:
(1) PRE $\lambda \in \mathcal{J}$ NEEXIST. OPT. RIEŠ.
(2) $\lambda_0 \in \mathcal{J}$

3. VETA L1PP : $\overline{\lambda}_1$ JE KONEČNÉ, POTOM BUĎ
(1) $\lambda > \overline{\lambda}_1$ NEEXISTUJE OPT. RIEŠ.
(2) EXISTUJE SUSEDNÝ x^2 A $\langle \underline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_2 \rangle$

4. VETA L1PP : $\varphi(\lambda) = \min_M (c + \lambda c')^T x$ JE PO ČASTIACH LINEÁRNA, SPOJITÁ A KONKÁVNA.

NELINEÁRNE PROGRAMOVANIE

(L): $f(x)$, ktorá má 1. parciálne derivácie
na otvorenej konvexnej M
je konvexná $\Leftrightarrow$ $f(x^2) - f(x^1) \geq \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1)$

VETA: $f \in C^2(M)$ M otvorená konvexná
f je konvexná $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f$ je poz. semidefinitná na M

KVAZIKONVEXNÁ FCIA.
EXPLICITNE KVAZIKONV. FCIA.

VYŽADUJE KONVEXNÚ OTVORENÚ M

f je kvazikonv. $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $A_\alpha = \{x \in M \mid f(x) \leq \alpha\}$ konv.

PSEUDOKONVEXNÁ FCIA.
ÚČINNÉ MINIMUM

VYŽADUJE DIFERENC. FUNKCIE

ÚLOHA KONVEXNÉHO PROGRAMOVANIA

$\min_M f(x)$ $M = \{x \in N \mid g(x) \leq 0\}$ (1)
f, g_i sú konvexné na N, N je konv. $\subseteq \mathbb{R}^n$

PREDPOKLADÁME, ŽE :
N je konvexná, otvorená
f, g_i sú konv., spojito diferencovateľné na N

!

07.07.2008 Po
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE - SKÚŠKA

KUHN-TUCKEROVÉ PODMIENKY

DEFINUJME LAGRANGEOVU FUNKCIU K (1)

$\Phi(x, u) = f(x) + u^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot g_i(x)$

BOD (x_0, u_0) JE K-T STACIONÁRNY $\Leftrightarrow$

(1) $x_0 \in N,\ u_0 \geq 0$

(2) $\nabla_u \Phi(x_0, u_0) \leq 0$

(3) $\nabla_x \Phi(x_0, u_0) = 0$

(4) $\nabla_u \Phi(x_0, u_0)^T \cdot u_0 = 0$

(2) $\Rightarrow g(x_0) \leq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_0 \in M$

(3) $\Rightarrow \nabla f(x_0)^T + u^T \nabla g(x_0) = 0$

(4) $\Rightarrow \underbrace{g(x_0)^T}_{\leq 0} \cdot \underbrace{u_0}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}: g_i(x_0) = 0 \vee u_i = 0$

PODMIENKA KOMPLEMENTARITY

$J = \{ j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(x_0) = 0 \}$ MNOŽINA INDEXOV AKTÍVNYCH PODMIENOK

$\nabla f(x_0) = - \sum_{j \in J} u_j \nabla g_j(x_0)$.

LAGRANGEOVA DUALITA

K (1) DEFINUJME

$\max_K \Phi(x, u)$, $K = \{ (x, u) \mid x \in N,\ u \geq 0,\ \nabla_x \Phi(x, u) = 0 \}$

PLATÍ: $\inf_M f(x) \geq \sup_K \Phi(x, u)$

METÓDA FRANKA-WOLFA

! $\min\limits_{M} f(x) \qquad M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ (1)

f JE PSEUDOKONVEXNÁ NA M

$M \neq \emptyset$, $x^T \nabla f(x^r)$ JE ZDOLA OHR. NA M PRE $\forall x^r \in M$.

1. KROK: RIEŠME $\min\limits_{M} 0$. AK $M \neq \emptyset$, DOSTANEME VÝCHODZIE $x^1 \in M$.

2. KROK: MÁME $x^r \in M$ A RIEŠME

$$\boxed{\min_{M} x^T \nabla f(x^r)}$$

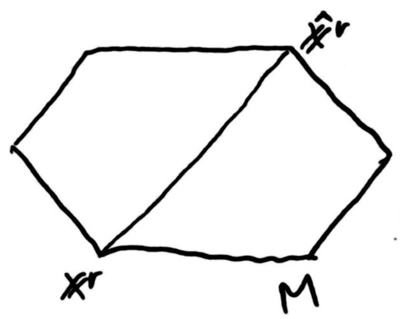
NÁJDEME $\hat{x}^r$ OPT. RIEŠ. $\Rightarrow (\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0 \ \forall x$

1. VETA F&W: $(\hat{x}^r - x^r) \nabla f(x^r) = 0$
$\Rightarrow x^r$ JE OPT. RIEŠ (1)

2. VETA F&W: $(\hat{x}^r - x^r) \nabla f(x^r) < 0$,
$(\hat{x}^r - x^r) \nabla f(\hat{x}^r) \leq 0$, POTOM $x^{r+1} := \hat{x}^r$, $f(x^{r+1}) < f(x^r)$

3. VETA F&W: $(\hat{x}^r - x^r) \nabla f(x^r) < 0$,
$(\hat{x}^r - x^r) \nabla f(\hat{x}^r) > 0$, POTOM RIEŠME

$$\min_{\lambda \in \langle 0,1 \rangle} f\left(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r)\right)$$



07.07.2008 Mo
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE – SKÚŠKA

VIACKRITERIÁLNE PROGRAMOVANIE

$\max_M f(x) \quad M = \{x \mid g(x) \leq 0\}$

a) IDEÁLNE RIEŠENIE
b) DOMINANTNÉ RIEŠENIE
c) EFICIENTNÉ RIEŠENIE (KLASICKÉ) .. $\mathcal{E}$
d) KOMPROMISNÉ RIEŠENIE $f \to F$

$M_{OPT}(\lambda) = \{x^0 \in M \mid \max_M \lambda f(x) = \lambda^T f(x^0)\} \quad \lambda > 0$

$\bigcup_{\lambda > 0} M_{OPT}(\lambda) \subset \mathcal{E}$

1. ALGORITMUS DIALÓGU

$\lambda_0, \lambda_1 > 0, \quad x^0 \in M_{OPT}(\lambda_0), \quad x^1 \in M_{OPT}(\lambda_1)$

RIEŠIME ÚLOHU 1-PAR. PROGRAMOVANIA:

$\max_x (\lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0))^T f(x)$

2. ALGORITMUS DIALÓGU

1. NAJSKÔR SA POUŽIJE 1. ALG. DIALÓGU $\Rightarrow x^*$
2. DEF. K KDE CHCEME ZLEPŠIŤ $f_i(x^*)$ O $\mu_i > 0$
3. DEF. $M(K, \mu) = \{x \in M \mid f_i(x) \geq f_i(x^*) + \mu_i\}$
4. RIEŠIME $\max_{M(K,\mu)} \sum_{i \notin K} \lambda_i f_i(x)$ 1. ALG. DIAL.

d) KOMPROMISNÉ RIEŠENIE:

(1) INFO O PREF. UŽÍV. NEDOSTANENÉ

METÓDA GLOBÁLNEJ CIEĽOVEJ FUNKCIE

$$\min_{n} \sum \left(\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} \right)^p \qquad \max_{n} f_i$$

(2) INFO DOSTANENÉ

FUNKCIA ÚŽITKU $w^T f$

(3) INFO POČAS VÝPOČTU

(4) INFO AŽ PO UKONČENÍ VÝPOČTU