Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Základy optimalizace [1]

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

[1] v současnosti Základy spojité optimalizace

Garant: doc. RNDr. Libuše Grygarová, DrSc.
E-mail: Libuse.Grygarova@mff.cuni.cz

Anotace: Přehledová přednáška pokrývající základní oblasti optimalizace, včetně výpočetních metod. Na úlohy spadající pod tuto problematiku vede nesčetné množství problémů z téměř všech oborů lidské činnosti. Má velmi široké možnosti použití. Úvod k dalším přednáškám specializovaným na řešení jednotlivých tříd optimalizačních úloh.

ZÁKLADY OPTIMALIZACE – SYLABUS.

1. Lineární programování.
   J. Plesnik, J. Dupačová, M. Vlach : Lineárne programovanie. Bratislava, Alfa, 1988.
   V. Chvátal: Linear Progamming. W. H. Freeman and Copany. 1983.

   Degenerace u simplexové metody, konečnost a výpočetní složitost. Množina všech optimálních řešení úlohy lineárního programování. Duální simplexová metoda. Další metody řešení úlohy LP.

2. Celočíselné programování.
   A.A. Korbut, J.J. Finkelstein : Discrete Optimization. Akademie – Verlag, Berlin. 1971. (Existuje slovenský překlad.)

   Metody sečných nadrovin. Lexikografie, I – metoda. 1. Gomoryho algoritmus. Metoda Branch and Bound Landa a Doiga.

3. Parametrické programování
   L. Grygarová : Úvod do parametrického programování. Karolinum, 1994.

   1 – parametrická lineární úloha. Obor řešitelnosti, obory stability, funkce řešitelnosti. Algoritmus založený na SM.

4. Nelineární programování
   A. Martos : Nonlinear Programming. Akademiai Kiado. 1975.

   Konvexní množina. Konvexní, kvazikonvexní, explicitně kvazikonvexní, pseudokonvexní funkce, kritéria.Věty o existenci globálního minima. Kuhn – Tuckerovy podmínky. Dualita. Klasifikace metod řešení. Gradientní metoda Franka a Wolfa.

5. Vícekriteriální optimalizace
   L. Grygarová : Základy vícekriteriálního programování. Karolinum. 1996. Ching – Lai Hwang, Abu Syed Md. Masud : Multiple Objektive Decision Making – Methods and Applications.Springer – Verlag. 1979.

   Eficientní řešení, vlastní eficientní řešení, parametrický skalární ekvivalent. Algoritmy dialogu. Kompromisní řešení, 4 typy metod řešení.

6. Dynamické programování
   F. Nožička : Dynamické programování I. SPN, 1977.

   Stavové a rozhodovací proměnné. N – stupňový diskrétní deterministický proces. Separabilní cílová funkce. Matematická formulace Bellmanova principu optimality. Optimalizace vzhledem k počátečnímu stavu.

7. Teorie her.
   M. Maňas : Teorie her a optimální rozhodování. SNTL. 1974.

   Maticové hry. Cena hry. Čistá, smíšená a optimální strategie. Nalezení optimálních strategii dvou hráčů. Souvislost s teorii duality v LP.

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DELENIE OPTIMALIZAČNÝCH DISCIPLÍN

DEFINÍCIA: ÚLOHY $\min_{x \in M}$ ($\max_{x \in M}$) $f(x)$, KDE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ NAZÝVAME ÚLOHAMI MATEMATICKEJ OPTIMALIZÁCIE (MATEMATICKÉHO PROGRAMOVANIA)

f JE CIEĽOVÁ, ÚČELOVÁ, OBJEKTÍVNA FUNKCIA

M JE MNOŽINA PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ

I. KRITÉRIUM

a) SPOJITÁ OPTIMALIZÁCIA, M JE NEKONEČNÁ, MÔŽEME SA PO NEJ SPOJITO POHYBOVAŤ

b) DISKRÉTNA OPTIMALIZÁCIA

II. KRITÉRIUM

a) DETERMINISTICKÁ OPTIMALIZÁCIA

b) STOCHASTICKÁ OPTIMALIZÁCIA – VSTUPUJE NAVIAC PRAVDEPODOBNOSŤ, NÁHODNÁ VELIČINA

III. KRITÉRIUM

a) VOĽNÝ EXTRÉM: HĽADANIE NA CELOM $\mathbb{R}^n$, V PRAXI MÁLO ČASTÉ

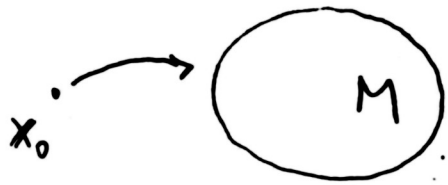
PENALIZAČNÉ ALEBO BARIÉROVÉ METÓDY

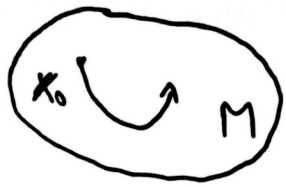
PENALIZÁCIE SÚ NENACHÁDZANIE SA V M

$\min \{ f(x) + r_i \, p(x) \}$

BARIÉRA ZNEMOŽŇUJÚCA OPUSTENIE M

$\min \{ f(x) + r_i \, b(x) \}$





$r_i \to 0$

DEFINÍCIA: OPTIMÁLNYM RIEŠENÍM OPTIMALIZAČNEJ ÚLOHY ROZUMIEME $x_0 \in M$ TAKÉ, ŽE PLATÍ:

a) $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in M$ (PRE min ÚČELOVEJ FUNKCIE)

b) $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in M$ (PRE max —"—)

JEDNOTLIVÉ METÓDY NÁJDU VŽDY JEDNO OPTIMÁLNE RIEŠENIE, ALE MÔŽEME TIEŽ NÁJSŤ VŠETKY OPT. RIEŠENIA.

HĽADÁME GLOBÁLNE EXTRÉMY, LOKÁLNE EXTRÉMY NÁS ČASTO NEZAUJÍMAJÚ.

ÚLOHA MÁ VIAZANÝ EXTRÉM

$\min_{x \in M} f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, KDE

$M = \{x \in N \mid g_i(x) \leq 0 \text{ PRE } \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

$N \subseteq \mathbb{R}^n$, $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

a) LINEÁRNE PROGRAMOVANIE:

$f(x) = c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$ (LINEÁRNA ÚČELOVÁ FUNKCIA)

$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

TEÓRIA: EXISTENČNÁ VETA:

MÔŽME SA ZAMERAŤ NA KONEČNÝ POČET ŠPECIÁLNYCH BODOV

PRINCÍP DUALITY: $m \leftrightarrow n$

METÓDY: SIMPLEXOVÁ METÓDA

DUÁLNA SIMPLEXOVÁ METÓDA

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

b) NELINEÁRNE PROGRAMOVANIE
ASPOŇ JEDNA Z FUNKCIÍ f A g_i NIE JE LINEÁRNA

α) KONVEXNÉ A ZOVŠEOBECNENÉ KONVEXNÉ PROGRAMOVANIE (ŠPEC. PRÍKLAD: KVADRATICKÉ PROG.)
MNOŽINU PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ NEMA VYTVORIŤ TAK, ABY BOLA KONVEXNÁ
LOKÁLNY EXTRÉM JE AJ GLOBÁLNYM (f, g_i SÚ KONVEXNÉ)

β) NEKONVEXNÉ PROGRAMOVANIE

c) PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE
V DATACH SÚ NAVIAC PARAMETRE,
DATA SÚ FUNKCIAMI PARAMETROV
NAPR. INTERVALOVÁ ANALÝZA

d) CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVANIE

e) VIACKRITERIÁLNE (VEKTOROVÉ) PROGRAMOVANIE
OPTIMALIZUJE SA PODĽA VIAC KRITÉRIÍ,
FUNKCIA f JE VEKTOROVÁ
EFICIENTNÉ RIEŠENIE
KOMPROMISNÉ RIEŠENIE - FCIA. JE KONVERTOVANÁ NA SKALÁRNU FUNKCIU

f) DYNAMICKÉ PROGRAMOVANIE - ROZHODOVACIE PROCESY
DISKRÉTNE VS. SPOJITÉ: SPOJITÉ KONV. NA DISKR.
BELLMANOV PRINCÍP OPTIMA: „KAŽDÁ PODSTRATÉGIA OPTIMÁLNEJ STRATÉGIE JE OPTIMÁLNA
PONTRJAGINOV PRINCÍP

g) TEÓRIA HIER - NAVIAC PROTIHRÁČ

h) SEMIINFINITNÉ PROGRAMOVANIE - NEKONEČNE VEĽA PODMIENOK

DOPRAVNÝ PROBLÉM A JEHO MODIFIKÁCIE

1. KLASICKÝ DOPRAVNÝ PROBLÉM

JE DANÝCH m VÝROBNÍ $v_1, \dots, v_m$, KTORÉ VYRÁBAJÚ JEDEN VÝROBOK V MNOŽSTVÁCH $a_i > 0$ (V ROVNAKÝ ČAS)

JE DANÝCH n SPOTREBITEĽOV $s_1, \dots, s_n$, KTORÍ POŽADUJÚ TENTO VÝROBOK V MNOŽSTVE $b_j > 0$

SÚ DANÉ $c_{ij} \geq 0$ CENA ZA DOPRAVU JEDNOTKY Z v_i DO s_j.

PREDPOKLAD: NÁKLADY NA DOPRAVU RASTÚ LINEÁRNE

NEZNÁME x_{ij} : MNOŽSTVO VÝROBKU, KTORÉ DODÁ VÝROBCA v_i SPOTREBITEĽOVI s_j

MNOŽINA PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ

$$M = \left\{ X \in \mathbb{R}^{m \times n} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,,\; \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,,\; x_{ij} \geq 0 \right\}$$

CHCEME TIEŽ, ABY BOLA SPLNENÁ PODMIENKA EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

AK NIE JE SPLNENÁ, VYTVORÍME FIKTÍVNEHO VÝROBCU ALEBO SPOTREBITEĽA A NASTAVÍME c_{ij} TAK, ABY SA NEVYSKYTOL V OPT. RIEŠENÍ

CIEĽOVÁ FUNKCIA $f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

A RIEŠIME ÚLOHU $\min_{X \in M} f(X)$

SIMPLEXOVÁ METÓDA JE PRÍLIŠ ZLOŽITÁ, MÁ VLASTNÚ METÓDU.

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

2. DOPRAVNÝ PROBLÉM S NELINEÁRNYMI CENAMI (ÚLOHA NELINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA)

$$c_{ij}(x_{ij}) = d_{ij} + e_{ij} x_{ij}$$

CIEĽOVÁ FUNKCIA $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} x_{ij} + e_{ij} x_{ij}^2)$

(KVADRATICKÁ ÚLOHA)

3. DOPRAVNÝ PROBLÉM S PODMIENKAMI CELOČÍSELNOSTI

ROVNAKÁ FORMULÁCIA, ALE $\mathbf{X} \in \mathbb{N}_0^{m \times n}$

4. DOPRAVNÝ PROBLÉM PARAMETRICKÝ (PARAM. PROG.)

ROVNAKÁ FORMULÁCIA, ALE NAMIESTO a_i JE

$$a_i + \lambda a_i', \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

POTOM $M(\lambda) = \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i + \lambda a_i', \; x_{ij} \geq 0 \}$

ÚLOHA: $\min_{\mathbf{X} \in M(\lambda)} f(\mathbf{X})$

5. DOPRAVNÝ PROBLÉM AKO ÚLOHA VIACKRITERIÁLNEHO PR.

MÁME DVE CIEĽOVÉ FUNKCIE

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \quad g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

ÚLOHA: $\min_{\mathbf{X} \in M} \left(f(\mathbf{X}), -g(\mathbf{X}) \right)$

6. DOPRAVNÝ PROBLÉM AKO ÚLOHA DYNAMICKÉHO PR.

$\mathbf{0} \leq \mathbf{X}_j \leq \mathbf{a}$, POČIATOČNÝ STAV $\mathbf{X}_1 = \mathbf{a}$

x_{ij} KOĽKO MÁM ESTE K DISPOZÍCII V j-TOM KROKU

$\min \sum_{ij} c_{ij}(x_{ij})$ STAVOVÉ PREMENNÉ

ROZHODOVACIA PREMENNÁ

PREHĽAD VÝSLEDKOV LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA (LP)

DEFINÍCIA: MNOŽINU $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{a} \neq \mathbf{0}\}$ (PRE NENULOVÉ) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ A $b \in \mathbb{R}$ NAZÝVAME UZAVRETÝM POLOPRIESTOROM V $\mathbb{R}^n$ DIMENZIE n

MNOŽINU $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ NAZÝVAME NADROVINOU DIM $n-1$

PRIENIK KONEČNÉHO POČTU NADROVÍN A UZAVRETÝCH POLOPRIESTOROV NAZÝVAME KONVEXNÝM POLYÉDROM

DEFINÍCIA: ÚLOHOU LP V ROVNICOVOM TVARE ROZUMIEME:

$$\min_{\mathbf{x} \in M} \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \text{KDE } M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

KDE $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

SIMPLEXOVÁ METÓDA

POŽADUJEME:
1) ÚLOHU LP V ROVNICOVOM TVARE
2) $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
3) EXISTUJE JEDNOTKOVÁ PODMATICA V $\mathbf{A}$
4) $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$
5) $1 \leq m < n$

Z KNIHY

J. MATOUŠEK: LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ A LINEÁRNÍ ALGEBRA PRO INFORMATIKY

NAŠTUDOVAŤ VŠETKO O LIN. PROGRAMOVANÍ A SIMPLEXOVEJ METÓDE...

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

Z PREDPOKLADU $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) = m$ PLYNIE, ŽE EXISTUJE KONEČNÝ POČET REGULÁRNYCH PODMATÍC $\mathbb{A}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ MATICE $\mathbb{A}$. VYBERME JEDNU, BÚNO $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_B, \mathbb{A}_N)$.
$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$ POTOM PREPÍŠEME NA
$\mathbb{A}_B \mathbb{x}_B + \mathbb{A}_N \mathbb{x}_N = \mathbb{b}$, KDE $\mathbb{x} = (\mathbb{x}_B, \mathbb{x}_N)$, $\mathbb{c} = (\mathbb{c}_B, \mathbb{c}_N)$.

DOSTÁVAME: $\mathbb{x}_B = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} - \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N \mathbb{x}_N =$
$= \mathbb{d}_0 - \mathbb{D}\mathbb{x}_N$, KDE $\mathbb{d}_0 = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b}$, $\mathbb{D} = \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N$

$$f(\mathbb{x}) = \mathbb{c}_B^T \mathbb{x}_B + \mathbb{c}_N^T \mathbb{x}_N = \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} - \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N \mathbb{x}_N + \mathbb{c}_N^T \mathbb{x}_N =$$
$$= c_0 + (\mathbb{c}_N - \mathbb{z}_N)^T \cdot \mathbb{x}_N$$

KDE $c_0 = \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{b} = \mathbb{c}_B^T \cdot \mathbb{d}_0$
$\mathbb{z}_N = \mathbb{c}_B^T \mathbb{A}_B^{-1}\mathbb{A}_N = \mathbb{c}_B^T \cdot \mathbb{D}$.

POZNÁMKA: V SM JE VŽDY $\mathbb{A}_B = \mathbb{I} = \mathbb{A}_B^{-1}$.

DEFINÍCIA: $\mathbb{x}_B$ NAZVEME VEKTOROM BÁZICKÝCH PREMENNÝCH, $\mathbb{x}_N$ VEKTOROM NEBÁZICKÝCH PREM., $(\mathbb{x}_B, \mathbb{x}_N) = (\mathbb{d}_0, \mathbb{0})$ NAZÝVAME BÁZICKÝM RIEŠENÍM. KEĎ JE NAVIAC $\mathbb{d}_0 \geq \mathbb{0}$, HOVORÍME O PRÍPUSTNOM BÁZICKOM RIEŠENÍ, A KEĎ JE $\mathbb{d}_0 > \mathbb{0}$, POTOM HOVORÍME O NEDEGENEROVANOM PRÍP. BÁZ. RIEŠENÍ.

HODNOTA CIEĽOVEJ FUNKCIE V PRÍP. BÁZ. RIEŠENÍ JE c_0.

TABUĽKA SIMPLEXOVEJ METÓDY (SM)

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & & \mathbb{c}_B & & \mathbb{c}_N & & \\
 & & \mathbb{x}_B & & \mathbb{x}_N & & \\
\hline
\mathbb{c}_B & \mathbb{x}_B & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{matrix} & & \mathbb{D} & & \mathbb{d}_0 \\
\hline
\text{KRITERIÁLNY RIADOK} & & 0 \;\; \cdots \;\; 0 & & \mathbb{c}_N - \mathbb{z}_N & & -c_0 \\
\hline
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \mathbb{c}_B^T \mathbb{D} & & -\mathbb{c}_B^T \mathbb{d}_0
\end{array}
$$

← STĹPEC PRAVÝCH STRÁN (NULTÝ STĹPEC)

1. VETA SM: KEĎ V TABUĽKE SM PLATÍ $\mathbb{c}_N - \mathbb{z}_N \geq \mathbb{0}$, POTOM JE PRÍSLUŠNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE $(\mathbb{x}_B, \mathbb{x}_N) = (\mathbb{d}_0, \mathbb{0})$ OPTIMÁLNE.

2. VETA SM: KEĎ EXISTUJE V TABUĽKE SM STĹPEC k TAKÝ, ŽE $c_k - z_k < 0$, $d_{ik} \leq 0 \;\; \forall i \in B$, POTOM NEEXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY.

3. VETA SM: KEĎ NIE SÚ SPLNENÉ PREDPOKLADY VIET 1. ANI 2., POTOM VYKONÁME TRANSFORMÁCIU ST: 1) URČÍME KĽÚČOVÝ STĹPEC r AKO:

$$c_r - z_r = \min_{j \in N} (c_j - z_j)$$

2) KĽÚČOVÝ RIADOK s URČÍME AKO:

$$\frac{d_{s0}}{d_{sr}} = \min_{i \in B,\, d_{ir} > 0} \left(\frac{d_{i0}}{d_{ir}} \right)$$

3) VYKONÁME TRANSFORMÁCIU ST S PIVOTOM d_{sr}.

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

POZNÁMKA: BLANDOVO PRAVIDLO POŽADUJE

$$r = \min \{ i \in N : c_i - z_i < 0 \}$$

DEFINÍCIA: MNOŽINU $M_{OPT} = \{ x^0 \in M \mid \min_{x \in M} c^T x = c^T x^0 \}$

NAZVEME MNOŽINOU VŠETKÝCH OPT. RIEŠENÍ ÚLOHY LP.

DEGENERÁCIA, CYKLUS

DEFINÍCIA: HOVORÍME, ŽE V SM NASTÁVA DEGENERÁCIA, KEĎ ASPOŇ 1 PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE JE DEGENEROVANÉ.

ÚVAHA: AK JE PRÍP. BÁZICKÉ RIEŠENIE $(x_B, x_N) = (d_{i0}, 0)$ DEGENEROVANÉ, POTOM $\exists i \in B : d_{i0} = 0$

KEĎ JE ŠPECIÁLNE $i = s$, POTOM PO TRANSFORMÁCII $-c_0' = -c_0 - \frac{(c_r - z_r) d_{s0}}{d_{sr}} = -c_0$

$\Rightarrow$ NEMENÍ SA HODNOTA CIEĽOVEJ FUNKCIE

$\Rightarrow$ SM BY SA MOHLA ZACYKLIŤ.

VZNIK DEGENERÁCIE:

1) ZADANIE ($b_i = 0$ ASPOŇ PRE 1 $i \in \{1, \dots, m\}$)
2) NEJEDNOZNAČNOSŤ VÝBERU KĽÚČOVÉHO RIADKU

VETA: PRI POUŽITÍ BLANDOVHO PRAVIDLA NENASTÁVA CYKLUS.

ODSTRÁNENIE DEGENERÁCIE
(ε - MODIFIKOVANÁ ÚLOHA LP)

PRE ÚLOHU LP:

$$\min_{M} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad M = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b},\ \mathbb{x} \geq \mathbb{0} \}$$

UVAŽUJEME PRE KAŽDÉ $\varepsilon > 0$ ÚLOHU

$$\min_{M(\varepsilon)} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad M(\varepsilon) = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b} + P(\varepsilon),\ \mathbb{x} \geq \mathbb{0} \}$$

KEĎ JE $\mathbb{A} = (\mathbb{I}, \mathbb{A}_N)$, POTOM POSLEDNÝ STĹPČEK TABUĽKY JE TVARU

$$(\mathbb{I}\ \mathbb{A}_N)\,\mathbb{\varepsilon}, \quad \text{KDE} \quad \mathbb{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n)^T.$$

KĽÚČOVÝ RIADOK JE POTOM RIADOK URČENÝ JEDNOZNAČNE.

POZNÁMKA: SM JE KONEČNÁ, POKIAĽ NENASTANE CYKLUS, PRETOŽE JE IBA KONEČNÝ POČET PRÍPUSTNÝCH BÁZ. RIEŠENÍ.

VÝPOČTOVÁ ZLOŽITOSŤ SM:

1) NAJVÄČŠÍ POČET KROKOV (BEZ CYKLU) $\binom{n}{m}$
2) PRI PRECHODE SA CIEĽ. FCIA MENÍ $-c_0' = -c_0 - \frac{c_r - z_r}{d_{sr}} d_{s0}$
3) TEORETICKÁ HRANICA - EXPONENCIÁLNA

22.02.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

INÉ METÓDY: 1) ELIPSOIDOVÁ METÓDA (CHAČIAN, 1979), JE POLYNOMIÁLNA
2. KARMARKEROVA PROJEKTÍVNA METÓDA (1984) TIEŽ POLYNOMIÁLNA

PRINCÍP DUALITY:

DEFINÍCIA: MAJME ÚLOHU LP V NORMÁLNOM TVARE:

(P) $\max\limits_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, $M_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$,

KDE $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

DUÁLNA ÚLOHA JE POTOM

(D) $\min\limits_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y}$, $M_2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$

LEMMA 1: AK $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$, POTOM

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in M_1 \ \forall \mathbf{y} \in M_2$$

DÔKAZ: $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$

$\Leftrightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{x}^T\mathbf{c}$. $\square$

LEMMA 2: AK $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$, POTOM

$$\sup_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x} < \infty, \quad \inf_{M_2} \mathbf{b}^T\mathbf{y} < \infty.$$

LEMMA 3: $M_1 \neq \emptyset$ A $\exists m_1 = \sup\limits_{M_1} \mathbf{c}^T\mathbf{x}$,

POTOM $\exists \mathbf{y}^0 \in M_2 : \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 \leq m_1$.

PODOBNE AK $M_2 \neq 0$ A $\exists\, m_2 = \inf \mathbb{b}^T \mathbb{y}$,
POTOM $\exists\, \mathbb{x}^0 \in M_1 : \mathbb{c}^T \mathbb{x}^0 \geq m_2$.

VETA (PRINCÍP DUALITY):

KEĎ JE $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$, POTOM
$\exists$ OPT. RIEŠENIE $\mathbb{x}^0$ ÚLOHY (P) A
$\exists$ OPT. RIEŠENIE $\mathbb{y}^0$ ÚLOHY (D) A $\mathbb{c}^T \mathbb{x}^0 = \mathbb{b}^T \mathbb{y}^0$.

DÔKAZ: L2: $\exists\, m_1, m_2$

L3: $\exists\, \mathbb{x}^0 \in M_1$ $\exists\, \mathbb{y}^0 \in M_2$ $\mathbb{c}^T \mathbb{x}^0 \geq m_2$, $\mathbb{b}^T \mathbb{y}^0 \leq m_1$

$$\mathbb{c}^T \mathbb{x}^0 \geq m_2 \underset{(L1)}{\geq} m_1 \geq \mathbb{b}^T \mathbb{y}^0 \underset{(L1)}{\geq} \mathbb{c}^T \mathbb{x}^0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{c}^T \mathbb{x}^0 = m_2 = m_1 = \mathbb{b}^T \mathbb{y}^0. \quad \square$$

DÔSLEDKY:

(1) AK MÁ JEDNA Z ÚLOH (P), (D) OPT. RIEŠENIE, MÁ HO AJ DRUHÁ A FUNKČNÉ OPTIMA SA ROVNAJÚ

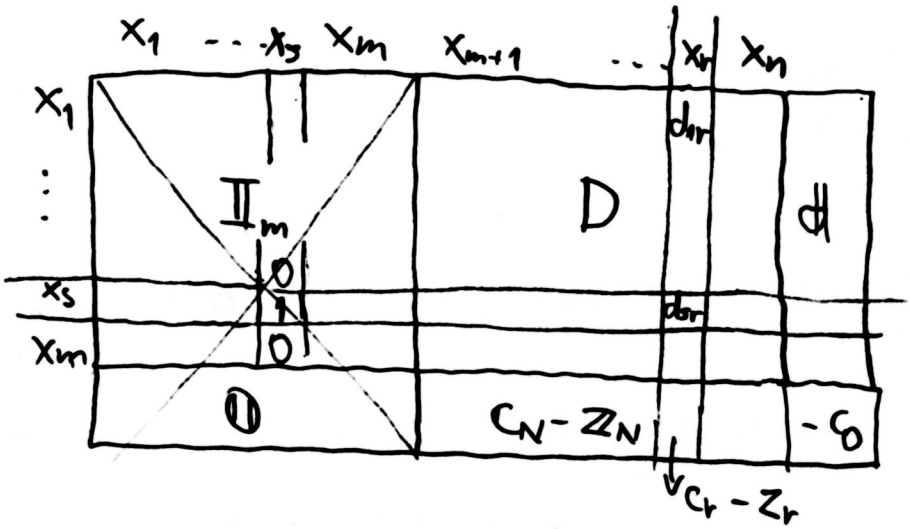
(2) AK $\mathbb{c}^T \mathbb{x}$ JE ZHORA NEOHR. $\Rightarrow M_2 = \emptyset$
AK $\mathbb{b}^T \mathbb{y}$ JE ZDOLA NEOHR. $\Rightarrow M_1 = \emptyset$

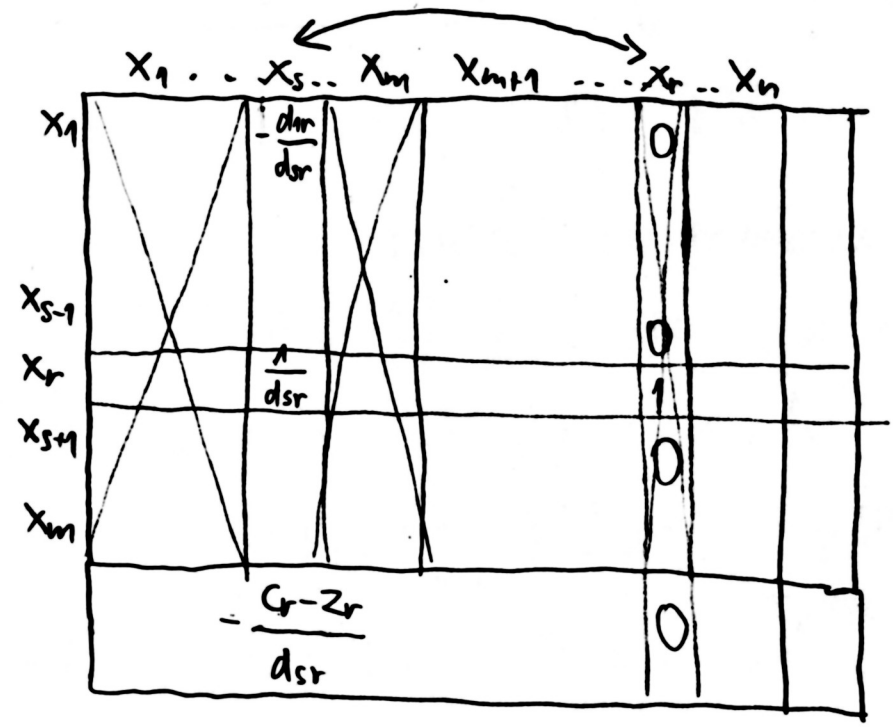
21. 03. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKL. OPTIMALIZÁCIE

POZNÁMKA: (ZMENA TRANSFORMÁCIE S. TABUĽKY, KEĎ VYNECHÁME II)

NECH ST MÁ TVAR:





PRAVIDLO: NAJSKÔR TRANSFORMUJEME KĽÚČOVÝ STĹPEC TAK, ŽE NA MIESTE PIVOTA JE JEHO PREVRÁTENÁ HODNOTA A OSTATNÉ PRVKY KĽ. STĹPCA DELÍME – pivotom.

OSTATNÉ PRVKY TABUĽKY SA TRANSFORMUJÚ OBVYKLÝM SPÔSOBOM.

DUÁLNA SIMPLEXOVÁ METÓDA

MÁME (P) $\max\limits_{M_1} c^T x$ $\quad M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$,

KDE: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ $\quad$ SÚ K SEBE DUÁLNE

ĎALEJ (D) $\min b^T y$ $\quad M_2 = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid A^T y \geq c,\ y \geq 0 \}$

ZOSTAVME EKVIVALENTNÉ ÚLOHY

(P') $\max\limits_{M_1'} c^T x$, $\quad M_1' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; Ax + x' = b,\ x, x' \geq 0,\ x' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T \right\}$

UŽ K SEBE NIESÚ DUÁLNE

(D') $\min\limits_{M_2'} b^T y$ $\quad M_2' = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \;\middle|\; A^T y - y' = c,\ y, y' \geq 0,\ y' = (y_{m+1}, \dots, y_{m+n})^T \right\}$

21.03.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKL. OPTIMALIZÁCIE

PRIDÁME PREDPOKLAD: $\mathbb{c} \leq 0$.

VÝCHODZIE BÁZICKÉ RIEŠENIA ÚLOH (P') A (D').

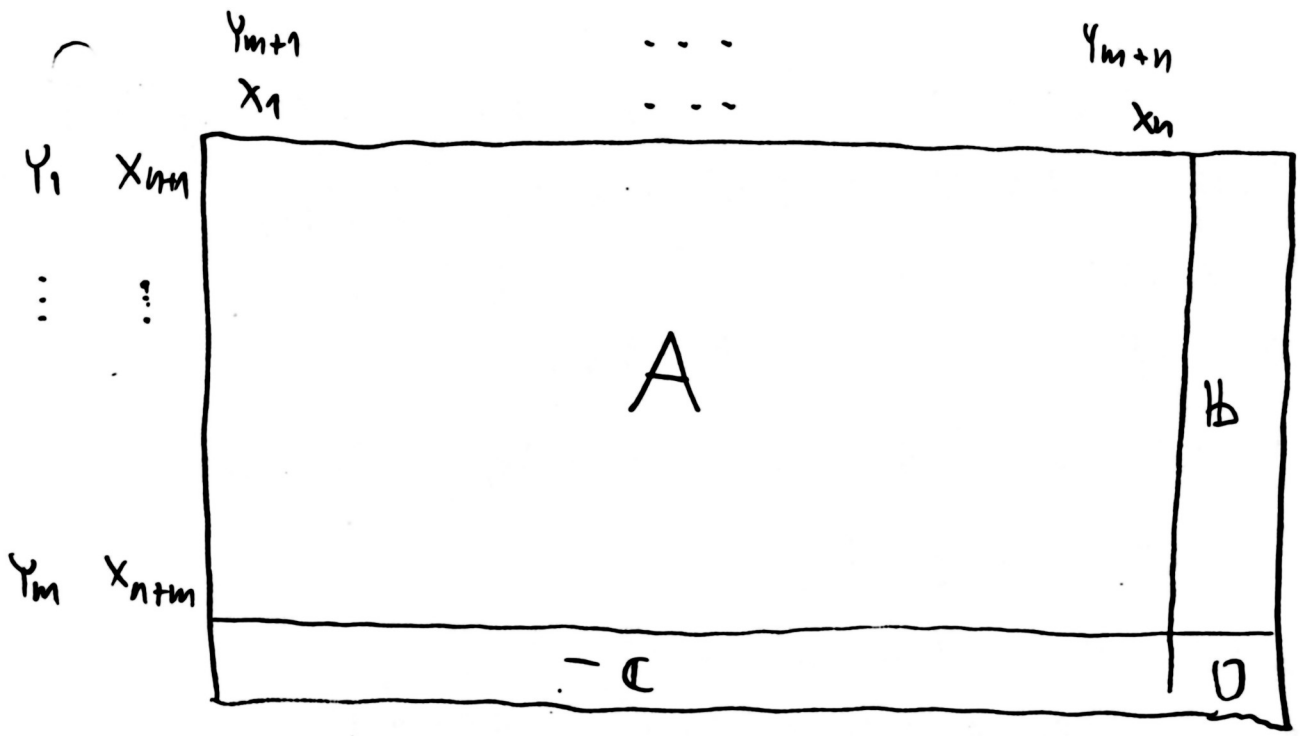
$(\mathbb{x}, \mathbb{x}')^0 \qquad \mathbb{x}^0 = \mathbb{0}, \quad \mathbb{x}'^0 = \mathbb{b}$ NEMUSÍ BYŤ PRÍPUSTNÉ (NEVIEME ZNAMIENKO U $\mathbb{b}$)

$(\mathbb{y}, \mathbb{y}')^0 \qquad \mathbb{y}^0 = \mathbb{0}, \quad \mathbb{y}'^0 = -\mathbb{c} \geq \mathbb{0}$ JE PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE

MÁME ROVNAKÚ HODNOTU CIEĽOVÝCH FUNKCIÍ

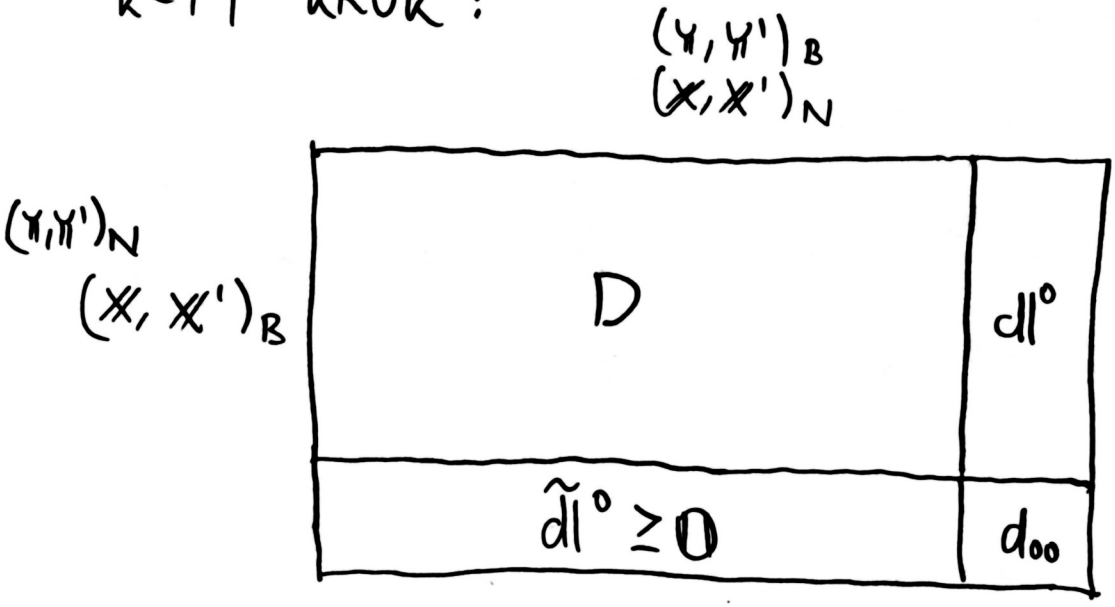
$\mathbb{c}^T\mathbb{x} = 0, \quad \mathbb{b}^T\mathbb{y} = 0$

VÝCHODZIA TABUĽKA



OBE ÚLOHY ZAPÍSANÉ POMOCOU 1 TABUĽKY BEZ I_n MATÍC!

k-TÝ KROK:



1. VETA DSM: KEĎ PLATÍ V k-TOM KROKU DSM $d^0 \geq 0$, POTOM $(x, x')_B = d^0$, $(x, x')_N = 0$ JE OPT. RIEŠENÍM (P') S HODNOTOU CIEĽOVEJ FUNKCIE d_{00} A PRÍSLUŠNÁ ČASŤ (x_B, x_N) JE OPT. RIEŠENÍM ÚLOHY (P).

ĎALEJ $(y, y')_B = \tilde{d}^0$, $(y, y')_N = 0$ JE OPT. RIEŠENÍM ÚLOHY (D'), PRIČOM PRÍSLUŠNÁ ČASŤ (y_B, y_N) JE OPTIMÁLNYM RIEŠENÍM ÚLOHY (D) S OPT. HODNOTOU CIEĽOVEJ FUNKCIE d_{00}.

DÔKAZ: PRETOŽE $[(x, x')_B, (x, x')_N] \in M_1'$ A $[(y, y')_B, (y, y')_N] \in M_2'$

$\Rightarrow$ $(x_B, x_N) \in M_1$, $(y_B, y_N) \in M_2$, PLYNIE $c^T x = b^T y = d_{00}$ (PODĽA DOSLEDKU PD), OPTIMALITA x, RESP. y PRE (P), RESP. (D).

21.03.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKL. OPTIMALIZÁCIE

2. VETA DSM: KEĎ EXISTUJE $s \in B$ (PRE (P')) TAK, ŽE $d_s^0 < 0$ A SÚČASTNE $\forall j \in N$ $d_{sj} \geq 0$, POTOM NEEXISTUJE RIEŠENIE ÚLOH (P) A (D).

DÔKAZ: s-TÝ RIADOK POSLEDNEJ TABUĽKY ZAPÍŠEME AKO:

$$x_s \text{ (RSP. } x_s') = \underbrace{d_s^0}_{<0} - \underbrace{\sum_{j \in N} d_{sj}}_{\geq 0} \underbrace{(x, x')_j}_{\geq 0} < 0,$$

ALE M_1' MÁ $(x_s, x_s') \geq 0 \Rightarrow M_1' = \emptyset$

$\Rightarrow$ (Z EKVIVALENCIE ÚLOH) $M_1 = \emptyset$

$\Rightarrow$ NEEXISTUJE RIEŠENIE ÚLOHY (P)

$\Rightarrow$ (Z PRINCÍPU DUALITY) NEXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY (D).

3. VETA DSM: NECH NIE SÚ SPLNENÉ PREDPOKLADY 1. ANI 2. VETY DSM.

OZNAČME $\min \{ i \in B \mid d_i^0 < 0 \} \equiv d_s^0$,

ĎALEJ UTVORME $\left\{ \min_{j,\, d_{sj} < 0} \left\{ \frac{d_j^0}{|d_{sj}|} \right\} = \frac{d_v^0}{|d_{sv}|} \right\}$

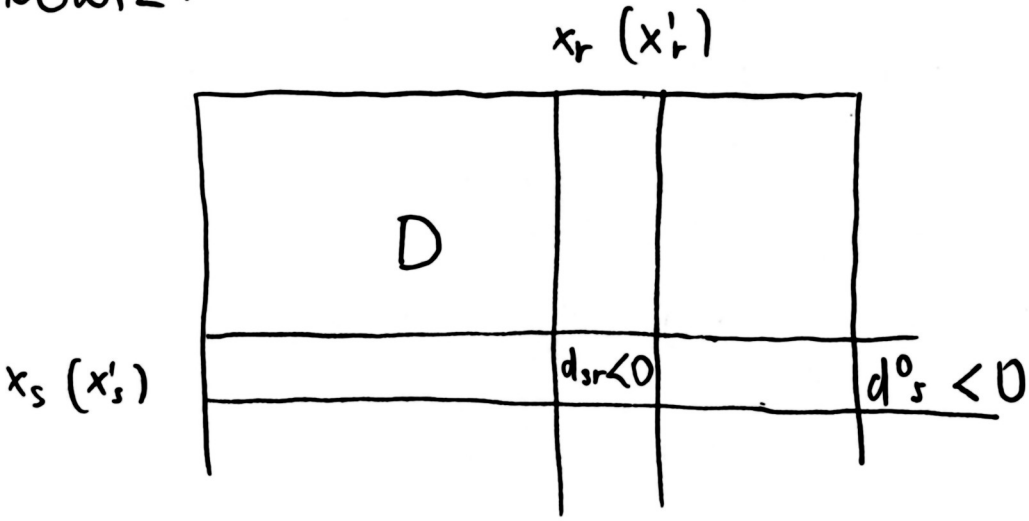
A VIBERME PRVOK $\frac{d_r}{|d_{sr}|}$ S MINIMÁLNYM r

PO TRANSFORMÁCII TABUĽKY (S DODATOČNÝM PRAVIDLOM, ŽE II CHÝBA), DOSTANEME PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE $(y, y')^*$ ÚLOHY (D') A OBECNÉ BÁZICKÉ RIEŠ. $(x, x')^*$ ÚLOHY (P'), PRIČOM CIEĽOVÉ FCIE SÚ ROVNAKÉ V NICH.

$$d_{00}^* = d_{00} - \frac{\tilde{d}_r^0 \cdot d_s^0}{d_{sr}}$$

A PLATÍ $d_{00}^* \leq d_{00}$. AK NENASTÁVA DEGENERÁCIA, PLATÍ $d_{00}^* < d_{00}$.

DÔKAZ:



OVERUJEME PRÍPUSTNOSŤ:

$(\mathcal{X}, \mathcal{X}')^*$:

$$\tilde{d}_j^{0*} = \underbrace{\tilde{d}_j^0}_{\geq 0} - \frac{d_{sj} \cdot \overbrace{\tilde{d}_r^0}^{\geq 0}}{\underbrace{d_{sr}}_{<0}}$$

KEĎ $d_{sj} \geq 0$ $\Rightarrow \tilde{d}_j^{0*} \geq 0$

KEĎ $d_{sj} < 0 \Rightarrow$ PODĽA DEFINÍCIE INDEXU r,

V (D') $j \in N \setminus \{r\}$

ZE $\dfrac{\tilde{d}_j^0}{\underbrace{|d_{sj}|}_{<0}} \geq \dfrac{\tilde{d}_r^0}{\underbrace{|d_{sr}|}_{<0}} \Rightarrow \dfrac{\tilde{d}_j^0}{d_{sj}} \leq \dfrac{\tilde{d}_r^0}{d_{sr}}$

$$\Rightarrow \tilde{d}_j^0 \geq \frac{\tilde{d}_r^0 \cdot d_{sj}}{d_{sr}} \Rightarrow \tilde{d}_j^{0*} \geq 0.$$

ĎALEJ $\tilde{d}_r^{0*} = \dfrac{\tilde{d}_r^0}{-d_{sr}} \geq 0. \Rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X}')^* \in M_2'$.

21.03.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKL. OPTIMALIZÁCIE

ĎALEJ

PODĽA TRANSFORMAČNÝCH VZORCOV JE

$$d_{00}^* = d_{00} - \frac{\tilde{d}_r^0 \cdot d_s^0}{\underbrace{d_{sr}}_{<0}} \leq d_{00}$$

$\tilde{d}_r^0 > 0$, $d_s^0 < 0$

AK NENASTÁVA DEGENERÁCIA ($d_i^0 > 0 \Rightarrow \tilde{d}_i^0 > 0$)

$\Rightarrow d_{00}^* < d_{00}$. ∎

METÓDA JE KONEČNÁ (BLANDOVO PRAVIDLO)

MÁME KONEČNÝ POČET PRÍPUSTNÝCH BÁZICKÝCH RIEŠENÍ ÚLOHY

MÁME ÚLOHU $\max \mathbb{c}^T \mathbb{x}$ $M = \{\mathbb{x} \mid A\mathbb{x} \leq \mathbb{b}, \mathbb{x} \geq 0\}$

DSM SA OPLATÍ AŽ KEĎ $\mathbb{c} \leq \mathbb{0}$, $\mathbb{b} \leq \mathbb{0}$.

28. 03. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVANIE

DEF.: ÚLOHA $\max_{x \in M} f(x)$, KDE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0 \ (j = 1 \dots m),$$
$$x_\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} \} \qquad g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \forall j$$

NAZÝVAME VŠEOBECNOU ÚLOHOU CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVANIA

KEĎ $C = \{1, \dots, n\}$, HOVORÍME O ČISTEJ ÚLOHE

KEĎ $C \subset \{1, \dots, n\}$, HOVORÍME O ZMIEŠANEJ ÚLOHE CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVANIA

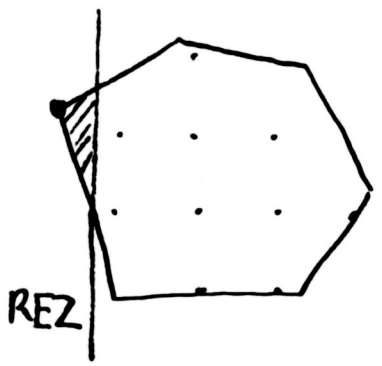
METÓDY DELÍME:

1) SEČNÝCH NADROVÍN (METÓDY REZU)
2) KOMBINATORICKÉ METÓDY
3) PRIBLIŽNÉ METÓDY
4) ŠPECIÁLNE METÓDY PRE ŠPECIÁLNE ÚLOHY

1) SEČNÉ NADROVINY

GOMORIHO ALGORITMY

1., 2., 3.



2) KOMBINATORICKÉ METÓDY

BRANCH & BOUND

FINKELSTEIN:
DISKRÉTNE PROGRAMOVANIE

DEFINÍCIA: ÚLOHU

(1) $\max\limits_{M_c} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$, $\mathbb{c} \in \mathbb{R}^n$ $\quad M_c = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b}, \mathbb{x} \geq \mathbb{0}$
$x_\alpha \in \mathbb{Z}$ $\alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\}$,
$\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m \}$

NAZÝVAME ÚLOHOU CELOČÍSELNÉHO LINEÁRNEHO

a) ČISTÉHO (PRE $C = \{1, \dots, m+n\}$)

b) ZMIEŠANÉHO (PRE $C = \{1, \dots, m+n\}$)

KDE NEROVNOSTI $\mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b}$ NAHRADZUJEME

$\mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b}$

KDE POŽADUJEME $\mathbb{x}' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T \geq \mathbb{0}$

DEFINÍCIA: ÚLOHU

(2) $\max\limits_{M} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$

KDE $M = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{A}\mathbb{x} \leq \mathbb{b}, \mathbb{x} \geq 0 \}$

NAZÝVAME SPOJITOU ÚLOHOU PRIRADENOU K ÚLOHE (1)

BUDEME RIEŠIŤ EKVIVALENTNÚ ÚLOHU S ÚLOHOU (2)

(2') $\max\limits_{M'} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$, $M' = \{ \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{x}' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b}, \mathbb{x}, \mathbb{x}' \geq 0 \}$

28.03.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

MYŠLIENKA 1. GOMORIHO ALGORITMU
RIEŠI ČISTÚ ÚLOHU LIN. CELOČÍS. PROG.

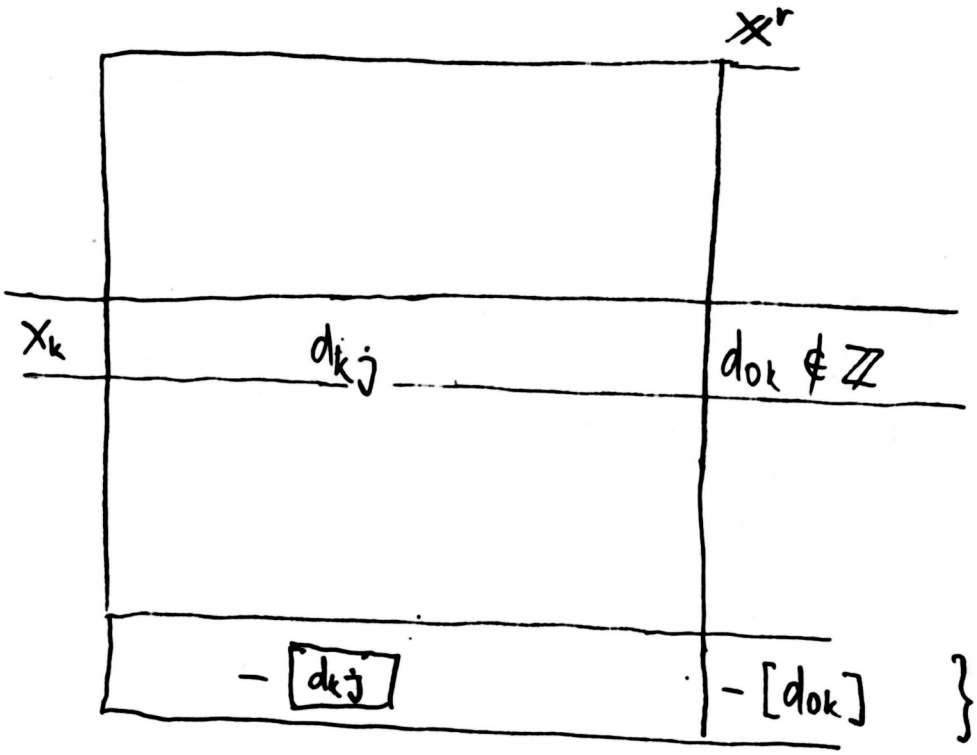
NECH V r-TOM KROKU MÁME OPTIMÁLNE RIEŠENIE x^r ÚLOHY (2').

KEĎ $(x, x')^r \in M'$, POTOM JE x^r OPTIMÁLNE RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY (1).

AK TOMU TAK NIE JE, ZAVEDIEME REZ M':
NECH $x_k^r \notin \mathbb{Z}$

Z POPISU M' VYPLÝVA, ŽE

$$x_k = x_k^r - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j,$$ KDE d_{kj} A $x_k^r = d_{0k}$
SÚ HODNOTY Z POSLEDNEJ TABUĽKY (k-TY RIADOK)



} ⇒ TÝMTO SA DOSTÁVAME DO $M' \cap H^+$

ZAVEDIEME PRE $t \in \mathbb{R}$ $t = [t] + \boxed{t}$,
KDE $[t] = \lfloor t \rfloor$, $\boxed{t} \in \langle 0, 1)$

MÔŽEME PÍSAŤ:

$$x_k = [d_{0k}] + \boxed{d_{0k}} \circledast - \sum_{j \in N} [d_{kj}] x_j - \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j$$

VETA 1: MNOŽINA

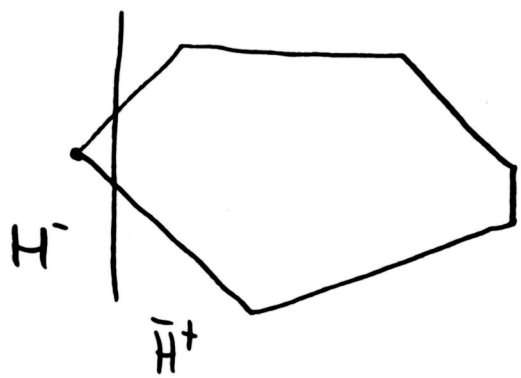
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; -\boxed{d_{0k}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j = 0 \right\}$$

JE SEČNOU NADROVINOU, KDE

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^r \in H^-, \quad M_c' \subseteq \bar{H}^+$$

$$H^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; -\boxed{d_{0k}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} x_j < 0 \right\}$$

$$\bar{H}^+ = \quad \text{—}\|\text{—} \quad \geq 0$$



DÔKAZ: PRE $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^r$ PLATÍ $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^r_B = d_{0k}$, $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^r_N = 0$

TEDA PO DOSADENÍ $(x, x')^r$

$$-\boxed{d_{0k}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}} \cdot 0 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^r \in H^-$$

28.03.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

ZVOLME ĽUBOVOĽNÉ $\binom{x}{x'} \in M_c'$.

PRE k-TU ROVNICU:

$$\cdot\ \overset{\in\mathbb{Z}}{x_k} = d_{0k} - \sum_{j\in N} d_{kj} \overset{\in\mathbb{Z}}{x_j} = \overset{\in\mathbb{Z}}{[d_{0k}]} + \boxed{d_{0k}} -$$

$$- \sum_{j\in N} \underbrace{[d_{kj}]\, x_j}_{\in\mathbb{Z}} - \sum_{j\in N} \boxed{d_{kj}}\, \underset{\in\mathbb{Z}}{x_j} \quad \Rightarrow$$

$$\cdot\ -\boxed{d_{0k}} + \sum_{j\in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j \in \mathbb{Z}$$

$$\cdot\ \underbrace{-\boxed{d_{0k}} + \sum_{j\in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j}_{\Rightarrow\ \geq 0} \geq -\boxed{d_{0k}} > -1$$

$$\Rightarrow M_c' \subseteq \bar{H}^+.$$

$\square$

POKRAČUJEME V RIEŠENÍ ÚLOHY

$$\max c^T x$$
$$M' \cap \bar{H}^+$$

PRE DÔKAZ KONEČNOSTI 1. GOMORIHO ALGORITMU BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE a) $c^T x \in \mathbb{Z}$ PRE $\forall x \in M$.

V PRAXI SA PRACUJE S RACIONÁLNYMI ČÍSLAMI

b) ĎALEJ PREDPOKLADÁME, ŽE M JE OHRANIČENÁ

c) BUDEME PRACOVAŤ S LEXIKOGRAFICKY OPT. RIEŠENÍM (L-OPTIMÁLNYM)

JEDNOTLIVÝCH ÚLOH $\max_{M' \cap \bar{H}_1^+ \cap \dots \cap \bar{H}_r^+} c^T x$.

d) POSLEDNÝ PREDPOKLAD JE, ŽE $M_c \neq \emptyset$.

DEFINÍCIA: VEKTOR $x \in \mathbb{R}^n$ NAZVEME L-KLADNÝ, KEĎ PLATÍ $x_k > 0$, PRE

$$k = \min \{ i \in \{1, \dots, m+n\} \mid x_i \neq 0 \}$$

NAPR. $(0, \dots, 0, 2, -10, \dots, 15)$ JE L-KLADNÝ V.

(OZNAČENIE $x \succ 0$)

x JE L-NEZÁPORNÝ, AK $x = 0 \vee x \succ 0$.

DEFINÍCIA: HOVORÍME, ŽE x JE LEXIKOGRAFICKY VÄČŠÍ AKO y, KEĎ $x - y \succ 0$.

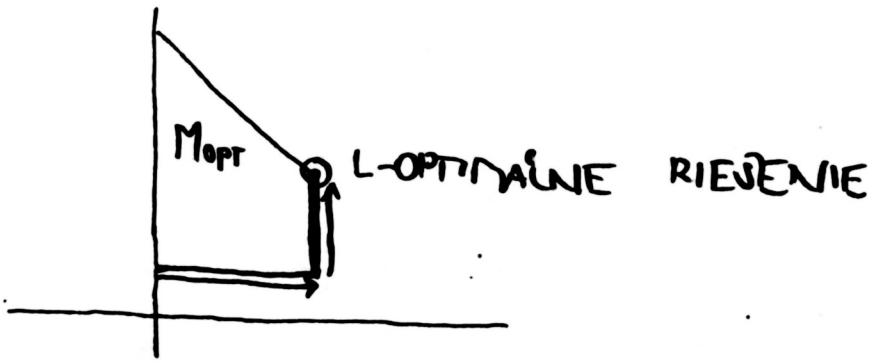
OZNAČENIE: PRE KAŽDÉ $x \in M'$ BUDEME ZNAČIŤ $x_0 = c^T x$

RESP. PRE $\begin{pmatrix} x \\ x_1 \end{pmatrix} \in M'$: $x_0 = c^T x$

PREČÍSLUJEME PREMENNÉ TAK, ABY:

x_1 BOLA NAJDÔLEŽITEJŠIA Z x_i $i \in \{1, \dots, n\}$

...



28.03.2008 FF
PETER ČERNO

NOPT 046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

VETA 2: KEĎ JE MNOŽINA M OHRANIČENÁ A $M_{OPT} \neq \emptyset$, POTOM EXISTUJE L-OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY $\max\limits_{M} c^T x$.

DÔKAZ: $M_{OPT} = \{x \in M \mid x_j = 0,\ j \in J_1\}$,

KDE $J_1 = \{j \in N \mid c_j - z_j < 0\}$

HODNOTY POSLEDNEJ TABUĽKY

$M_{OPT} \neq \emptyset$, OHRANIČENÁ A JE TO KONVEXNÝ POLYÉDER.

KEĎ JE $M_{OPT} \neq \{x^{OPT}\}$, POTOM PRE $x \in M_{OPT}$ RIEŠIM ÚLOHU $\max\limits_{M_{OPT}} x_1$

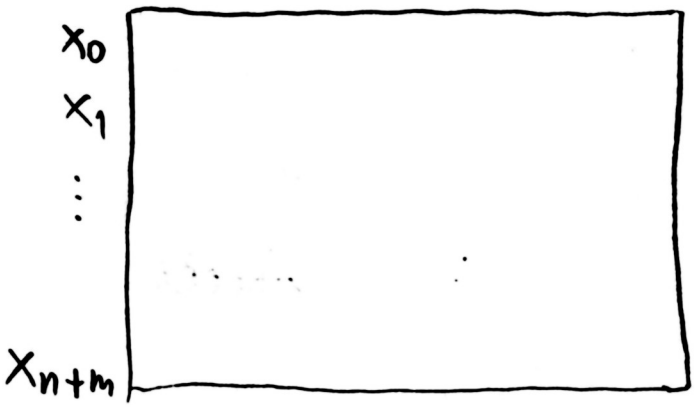
OZNAČME RIEŠENIE M^1_{OPT}.

AK JE $M^1_{OPT} = \{x^{OPT}\}$, POTOM JE x^{OPT} L-OPT. RIEŠ.

V OPAČNOM PRÍPADE RIEŠIME ÚLOHU $\max\limits_{M^1_{OPT}} x_2$ ...

VZHĽADOM KU KONEČNÉMU POČTU PREMENNÝCH NÁJDEME L-OPTIMÁLNE RIEŠENIE. □

POZNÁMKA: CHCEME PRACOVAŤ S TABUĽKOU V KAŽDOM KROKU!



PRE VÝCHODZIU TABUĽKU MÁME:

$\mathbb{x}' = \mathbb{b}$ BÁZICKÉ PREMENNÉ,

$\mathbb{x} = \mathbb{0}$ NEBÁZICKÉ

$$\mathbb{x}' = \mathbb{b} - \mathbb{A}\mathbb{x}$$

$$\mathbb{x} = \mathbb{0} - (-\mathbb{x})$$

$$\mathbb{c}^T\mathbb{x} = 0 - (-\mathbb{c}^T\mathbb{x})$$

	$\mathbb{x}$	
x_0	$-\mathbb{c}$	0
x_1 ⋮ x_n	$-\mathbb{I}$	$\mathbb{0}$
x_{n+1} ⋮ x_{n+m}	$\mathbb{A}$	$\mathbb{b}$

VÝCHODZÍ PREDPOKLAD: $\mathbb{c} < \mathbb{0}$.

04.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

l-METÓDA (LEXIKOGRAFICKÁ DUÁLNA METÓDA)

RIEŠIME ÚLOHU

$$\max_{M'} \mathbb{c}^T \mathbb{x}, \quad M' = \{ (\mathbb{x}, \mathbb{x}') \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbb{A}\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b},\ \mathbb{x}, \mathbb{x}' \geq \mathbb{0},\ \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbb{b} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbb{c} \in \mathbb{R}^n \}$$

$\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
$\mathbb{x}' = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T$

VÝCHODZIA TABUĽKA (l-TABUĽKA)

CIEĽOVÁ FKIA: $\mathbb{c}^T \mathbb{x} = x_0$

	R_1	R_j	R_n	R_0
	x_1	...	x_n	
x_0	$-\mathbb{c}$			0
x_1				
$\vdots$	$-\mathbb{I}$			$\mathbb{0}$
x_n				
x_{n+1}				
$\vdots$	$\mathbb{A}$			$\mathbb{b}$
x_{n+m}				

PRIDALI SME VZŤAHY
$\mathbb{x} = \mathbb{0} - (-\mathbb{x})$

l-TAB. SA LÍŠI OD SIM. TAB. PRE DUÁLNU ÚLOHU IBA PREHODENÍM POSLEDNÉHO RIADKU NA 1. RIADOK A PRIDANÍM VZŤAHU $\mathbb{x} = \mathbb{0} - (-\mathbb{x})$.

V STĹPCOCH MÁME IBA NEBÁZICKÉ PREMENNÉ $x_1, \dots, x_n$

PLATIA 1. A 2. VETA DSM.

OZNAČME STĹPCE ℓ-TABUĽKY R_j $j \in N$
A POSLEDNÝ STĹPEC AKO R_0

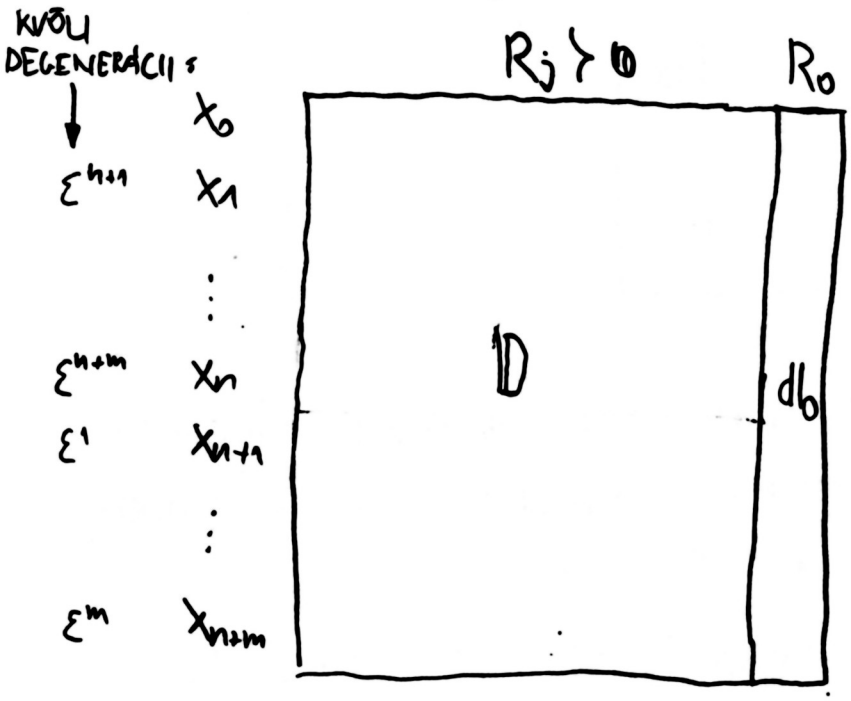
<u>PREDPOKLADÁME $c < 0$</u>

DEFINÍCIA: ℓ-TABUĽKU NAZÝVAME ℓ-NORMÁLNU, KEĎ PLATÍ, ŽE $R_j > 0$ PRE $\forall j \in N$.
(TJ. PRVÁ NENULOVÁ HODNOTA JE KLADNÁ V KAŽDOM STĹPCI)

POZNÁMKA: VÝCHODZIA ℓ-TABUĽKA JE ℓ-NORMÁLNA (VZHĽADOM K PREDPOKLADU $c < 0$)

(x) VETA: PRÍPUSTNÉ NEDEGENEROVANÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE JE ℓ-OPTIMÁLNE $\Leftrightarrow$ KEĎ JE JEMU PRÍSLUŠNÁ ℓ-TABUĽKA ℓ-NORMÁLNA.

DÔKAZ: VO ÚSEDBECNOM KROKU ℓ-METÓDY MÁME TABUĽKU:



$(d_0)_B > 0$

$(d_0)_N = 0$

$\mathbb{D}$ V SEBE OBSAHUJE MATICU $-\mathbb{I}$

PREDPOKLADÁME NEDEGENEROVANÉ PRÍP. RIEŠENIE! TJ. $(d_0)_B > 0$

04.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

PODĽA 1. VETY DSM MÁME OPTIMÁLNE RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY.

ĎALŠIE OPTIMÁLNE RIEŠENIA DOSTANEME TRANSFORMÁCIOU TABUĽKY S KLADNÝM PIVOTOM $d'_{r0} = \frac{d_{s0}}{d_{sr}} > 0$

NEZÁLEŽÍ NA VÝBERE KĽÚČOVÉHO RIADKU A STĹPCA

PRE ĽUBOVOĽNÝ PIVOT $d_{sr} > 0$ BY PO TRANSFORMÁCII TABUĽKY PLATILO:

$$R'_0 = R_0 - \frac{R_r}{\underset{>0}{d_{sr}}} \cdot \underset{>0}{d_{os}}$$

a) KEĎ JE ℓ-TABUĽKA ℓ-NORMÁLNA

$\Rightarrow R_r > 0 \Rightarrow R'_0 < R_0$

TO ALE ZNAMENÁ, ŽE MÁME ℓ-OPTIMÁLNE RIEŠENIE, TJ. $(x_0, x) = d_{l0}$

b) KEĎ JE $(x_0, x) = d_{l0}$ ℓ-OPTIMÁLNYM RIEŠENÍM, POTOM KAŽDÉ ĎALŠIE OPT. RIEŠENIE ZÍSKAME TRANSFORMÁCIOU TABUĽKY

TJ $R'_0 = R_0 - \frac{R_r}{\underset{>0}{d_{sr}}} \underset{>0}{d_{os}} < R_0 \Rightarrow R_r > 0$

PRE ĽUBOVOĽNÉ r. $\square$

1. VETA ℓ-METÓDY: KEĎ JE V ℓ-TABUĽKE $d_{l0} = ((d_{l0})_B > 0, (d_{l0})_N = 0)$ A TABUĽKA JE ℓ-NORMÁLNA, POTOM SME ZÍSKALI ℓ-OPTIMÁLNE RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY.

DOKAZ PLYNIE Z 1. VETY DSM A Z PREDCHÁDZAJÚCEJ VETY. (*)

2. VETA ℓ-METÓDY: KEĎ EXISTUJE V ℓ-TABUĽKE RIADOK S TAK: $d_{s0} < 0$, $d_{sj} \geq 0$ $\forall j \in N$, POTOM NEEXISTUJE RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY.

DOKAZ PLYNIE Z 2. VETY DSM.

3. VETA ℓ-METÓDY: KEĎ NIE SÚ SPLNENÉ PREDPOKLADY 1. ANI 2. VETY ℓ-METÓDY, POTOM $s = \min \{ i \in \{1, \dots, n+m\} \mid d_{i0} < 0 \}$

$$\ell : \underset{j \in N : d_{sj} < 0}{\text{LEX. MINIMUM}} \left\{ \frac{R_j}{|d_{sj}|} \right\} = \frac{R_\ell}{|d_{s\ell}|}$$

ℓ JE URČENÁ JEDNOZNAČNE, KVÔLI $-I$ MATICI V D

VYKONÁME TRANSFORMÁCIU ℓ-TABUĽKY S PIVOTOM $d_{s\ell} < 0$.

DOSTANEME OPÄŤ ℓ-NORMÁLNU TABUĽKU.

DOKAZ:

04.04.2008 Tr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

ZREJME $R'_l = \dfrac{\overset{>0}{R_l}}{\underset{>0}{-d_{sl}}} > 0$.

PRE OSTATNÉ $R'_j = \underset{>0}{R_j} - \dfrac{\overset{>0}{R_l} \cdot d_{sj}}{\underset{<0}{d_{sl}}}$ PRE $j \in N \setminus \{l\}$.

1) AK $d_{sj} \geq 0$
$\Rightarrow R'_j > 0$

2) $d_{sj} < 0$, POTOM PODĽA DEFINÍCIE INDEXU l

$$\frac{R_l}{|d_{sl}|} < \frac{R_j}{|d_{sj}|} \Rightarrow \frac{R_l}{d_{sl}} > \frac{R_j}{d_{sj}} \Rightarrow R_j > \frac{R_l}{d_{sl}} \cdot d_{sj}$$

$\Rightarrow R'_j > 0$.

$\Rightarrow$ OPÄŤ MÁME l-NORMÁLNU TABUĽKU.

ĎALEJ $R'_0 = R_0 - \dfrac{\overset{>0}{R_l} \cdot \overset{<0}{d_{0s}}}{\underset{<0}{d_{sl}}} \not< R_0$. $\square$

POZNÁMKA: JEDINÝ ROZDIEL OPROTI DSM JE:
V DSM SME NEMALI MATICU $-\mathbb{I}$ V $\mathbb{D}$
$\Rightarrow$ ROZDIEL JE V TOM, ŽE KĽÚČOVÝ RIADOK NAHRADÍME RIADKOM:

$$\boxed{0 \;\cdots\; \underset{\substack{\downarrow \\ R_s}}{-1} \;\cdots\; 0 \,|\, 0}$$

POZNÁMKA: ℓ-METÓDA JE KONEČNÁ, PRETOŽE BÁZICKÝCH RIEŠENÍ JE KONEČNE VEĽA A NEMÔŽEME SA VRACAŤ VZHĽADOM K NEROVNOSTI $R_0' < R_0$.

1. GOMORIHO ALGORITMUS

RIEŠ ÚLOHU $\max\limits_{M'_C} \mathbb{c}^T \mathbb{x}$ $\quad M'_C = \{ (\mathbb{x}, \mathbb{x}') \in \mathbb{R}^{n+m} \mid A\mathbb{x} + \mathbb{x}' = \mathbb{b},\ \mathbb{x}, \mathbb{x}' \geq 0 \}$

$x_1, \dots, x_{n+m} \in \mathbb{Z}$

PREDPOKLADY:

1) $\mathbb{c}^T \mathbb{x} = x_0 \in \mathbb{Z}$
2) M JE OHRANIČENÁ
3) V ŽIADNOM KROKU NENASTÁVA DEGENERÁCIA.
4) $\mathbb{c} < \mathbb{0}$

1. KROK: ℓ-METÓDOU RIEŠIME ÚLOHU

$$\max_{M'} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad (1)$$

r-TÝ KROK: ℓ-METÓDOU RIEŠIME ÚLOHU

$$\max_{M' \cap \overline{H}_1^+ \cap \dots \cap \overline{H}_{r-1}^+} \mathbb{c}^T \mathbb{x} \qquad (r)$$

a) NEEXISTUJE RIEŠENIE (r) ÚLOHY

$\Rightarrow M' \cap \overline{H}_1^+ \cap \dots \cap \overline{H}_{r-1}^+ = \emptyset \Rightarrow M'_C = \emptyset$

b) EXISTUJE ℓ-OPT. $(\mathbb{x}, \mathbb{x}')^{OPT} \in M'_C$ RIEŠ. ÚLOHY (r)

$\Rightarrow$ MÁME OPT. RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY

04.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

c) EXISTUJE L-OPT. RIEŠ. $(x, x')^{OPT} \notin M'_C$ ÚL. (r)

OZNAČME $k = \min \{ i \in \{0, \dots, n+m\} \mid d_{i0} \notin \mathbb{Z} \}$

Z POSLEDNEJ TABUĽKY VIBERIEME k-TÝ RIADOK

x_k	d_{kj}	d_{k0}

A UTVORÍME:

$$-\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j \geq 0$$

ĎALEJ PREPÍŠEME NA TVAR: (ZAVEDIEME $x_{n+m+r+1}$)

$$x_{n+m+r+1} = -\boxed{d_{k0}} + \sum_{j \in N} \boxed{d_{kj}}\, x_j$$

A K POSLEDNEJ TABUĽKE PRIDÁME RIADOK (NA KONIEC TABUĽKY):

$x_{n+m+r+1}$	$-\boxed{d_{kj}}$	$-\boxed{d_{k0}}$

A RIEŠIME ÚLOHU:

$$\max c^T x$$
$$M' \cap \overline{H_1^+} \cap \dots \cap \overline{H_{r-1}^+} \cap \overline{H_r^+}$$

L-METÓDOU.

ZREJME POSLEDNÝ RIADOK JE KĽÚČOVÝ, PRETOŽE $-\boxed{d_{k0}}$ JE JEDINÝ ZÁPORNÝ ČLEN V POSLEDNOM STĹPCI.

PO JEDNEJ TRANSFORMÁCII TABUĽKY PRIDANÝ POSLEDNÝ RIADOK VYHODÍME.
(DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE TENTO REZ SA UŽ NEVYSKYTNE)

POLOŽÍME $r := r+1$ A SKOČÍME NA r-TÝ KROK.

KONEČNOSŤ: ZA UVEDENÝCH PREDPOKLADOV JE 1. GOMORIHO ALGORITMUS KONEČNÝ
$\Rightarrow$ VIŽ FINKELSTEIN.

11.04.2008 Fr
PETER ČERNO

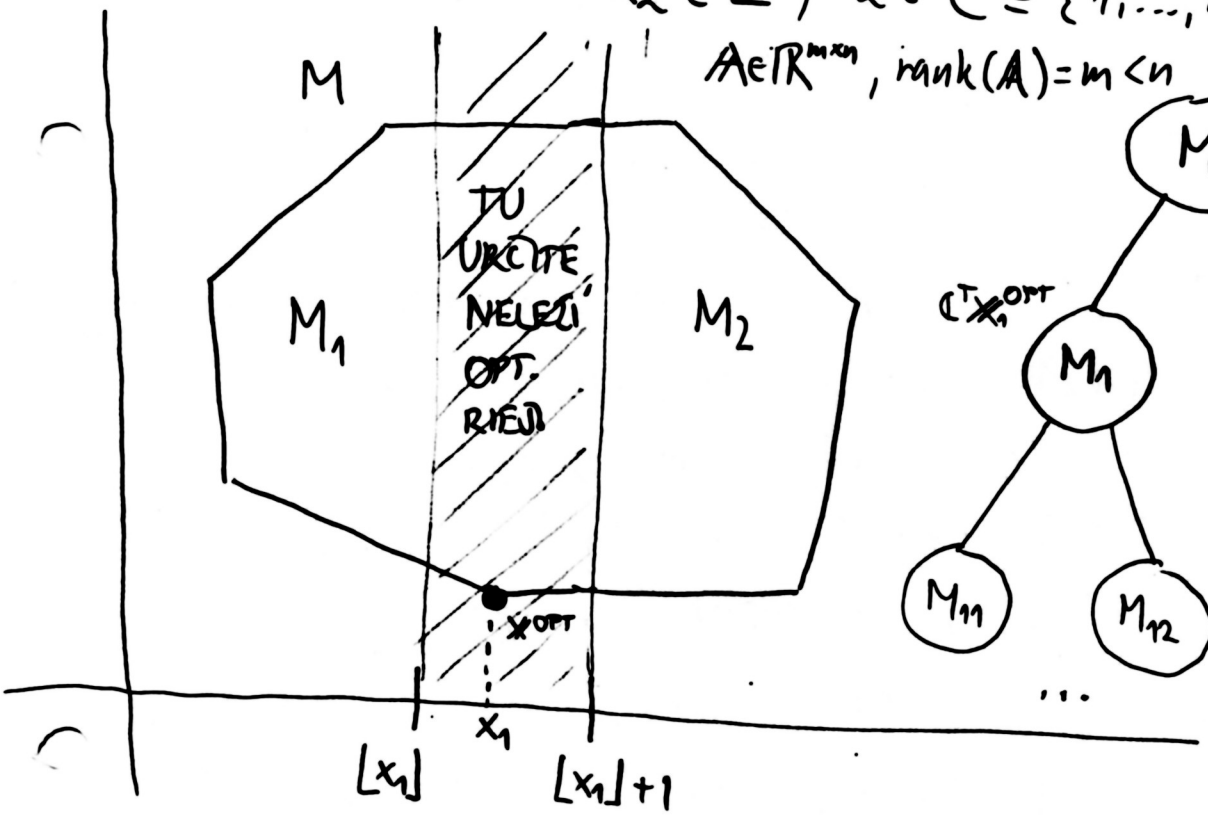
NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

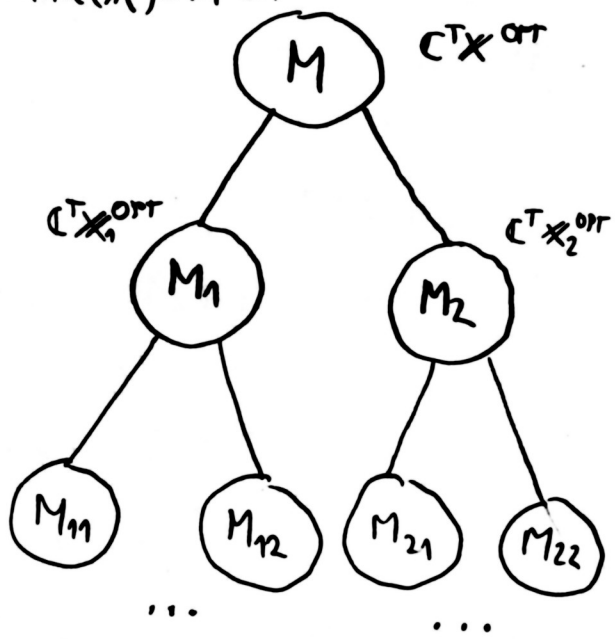
KOMBINATORICKÉ METÓDY

METÓDA BRANCH & BOUND, LANDA A DOIGA

RIEŠIME $\max_{M_C} c^T x$ $\quad M_C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0,\ x_\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \in C \subseteq \{1, \dots, n\} \}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = m < n$





1. KROK : RIEŠIME ÚLOHU SPOJITÚ

$\max_M c^T x$

- NEEX. RIEŠENIE, PRTOŽE $M = \emptyset$ $\Rightarrow M_C = \emptyset$
- NEEX. RIEŠENIE, PRETOŽE $c^T x$ JE ZHORA NEOHR. NA M $\Rightarrow$ NIE JE MOŽNÉ TÚTO METÓDU POUŽIŤ!! $\Rightarrow$ PREDPOKLADÁME, ŽE M JE <u>OHRANIČENÁ</u>
- EXISTUJE $x^{OPT} \in M_C \Rightarrow$ MÁME RIEŠENIE ZADANEJ ÚLOHY
- EXISTUJE $x^{OPT} \notin M_C \Rightarrow$ POTOM <u>KROK 2</u>

2. KROK: URČÍME PRVÚ SÚRADNICU, KTORÁ NESPĽŇA PODMIENKU CELOČÍSELNOSTI: $k = \min\{\alpha \in C \mid x_\alpha^{OPT} \notin \mathbb{Z}\}$

DEFINUJEME MNOŽINY $M_1 = \{x \in M \mid x_k \leq [x_k^{OPT}]\}$

$M_2 = \{x \in M \mid x_k \geq [x_k^{OPT}] + 1\}$

M_1 A M_2 SÚ OPÄŤ KONVEXNÉ POLYÉDRE

RIEŠIME 2 ÚLOHY:

(a) $\max\limits_{M_1} c^T x$, (b) $\max\limits_{M_2} c^T x$

a) $M_1 = \emptyset$ α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow M_C = \emptyset \Rightarrow$ NEEX. RIEŠ. KONIEC

β) $M_2 \neq \emptyset$ $\exists x^2$ OPT. RIEŠENIE ÚLOHY (b)

$x^2 \in M_C \Rightarrow x^2$ JE OPT $\Rightarrow$ KONIEC

γ) $M_2 \neq \emptyset$ $\exists x^2$ OPT. ÚLOHY (b), ALE $x^2 \notin M_C$

$\Rightarrow M := M_2$ A IDEME NA KROK 2

b) $M_1 \neq \emptyset$ EXISTUJE OPT. RIEŠENIE x^1 OPT. R. ÚLOHY (a)

$x^1 \in M_C$. α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow x^1$ JE OPT., KONIEC

β) $M_2 \neq \emptyset$. $\exists x^2$ OPT. (b), $x^2 \in M_C$

POTOM POROVNÁME $c^T x^1$ A $c^T x^2$.

γ) $M_2 \neq \emptyset$ $\exists x^2$ OPT. (b), $x^2 \notin M_C$

OPÄŤ POROVNÁME $c^T x^1$ A $c^T x^2$

AK JE $c^T x^1 < c^T x^2$, POTOM ULOŽÍME x^1

A ZAVOLAME ALGORITMUS REKURZÍVNE NA $M = M_2$

c) $M_1 \neq \emptyset$ $\exists x^1$ OPT. (a), $x^1 \notin M_C$

α) $M_2 = \emptyset \Rightarrow M := M_1$ A 2. KROK

11. 04. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT 046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

B) $M_2 \neq \emptyset$ $\exists\, x^2$ OPT. (b), $x^2 \in M_C$

AK $c^T x^1 \leq c^T x^2$, JE x^2 OPTIMÁLNY A KONIEC

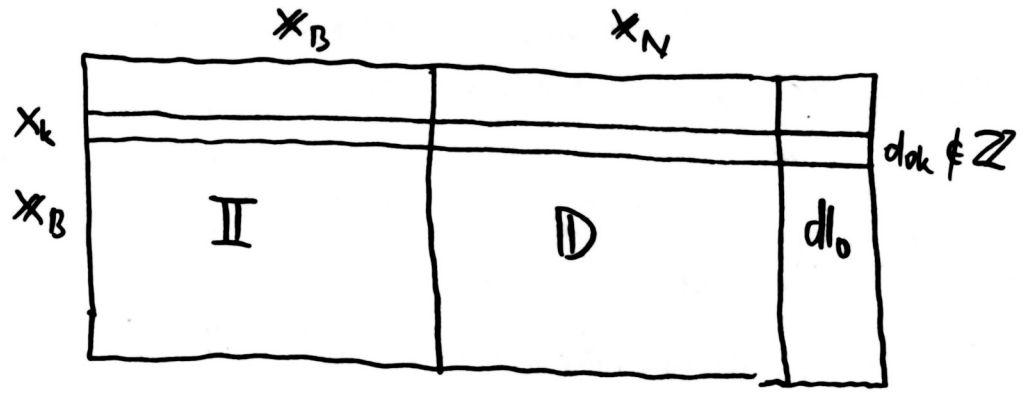
AK $c^T x^1 > c^T x^2$, ULOŽÍME x^2 A ZAVOLÁME ALGORITMUS ~~REKURZÍVNE~~ NA $M := M_1$

2) $M_2 \neq \emptyset$ $\exists\, x^2$ OPT. (b) $x^2 \notin M_C$

ALGORITMUS ZAVOLÁME ~~REKURZÍVNE~~ NA $M = M_1$, $M = M_2$ A POROVNÁME VRÁTENÉ VÝSLEDKY.

POZNÁMKA: ALGORITMUS IDE PO HĽADINÁCH (PREHĽADÁVANIE DO ŠÍRKY)

METÓDA BRANCH & BOUND JE POUŽITEĽNÁ NAJMÄ PRE MALÉ $|C|$, $|C| = 2, 3$.



$$x_k = d_{0k} - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$$

V PRÍPADE M_1 PRIDÁME ROVNICU

$$x_k + \xi = [d_{0k}] \Rightarrow \xi = \underbrace{[d_{0k}] - d_{0k}}_{<0} + \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$$

$\Rightarrow$ NAMIESTO TOHTO RIADKU PRIDÁME $\longrightarrow$ TOTO NEPRICHÁDZA DO ÚVAHY V KLAS. SIMPL. NEBÓDE!

$$\mu = -[d_{0k}] + d_{0k} - \xi - \sum_{j \in N} d_{kj} x_j$$

TJ. MÁME NOVÝ RIADOK PRE μ
A DVA NOVÉ STĹPCE PRE μ A ξ.

PODOBNE PRE M_2.

PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE

DEFINÍCIA: OBECNOU ÚLOHOU PARAM. PROGRAMOVANIA ROZUMIEME ÚLOHU $\min\limits_{M(\mathbf{v})} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ (1)

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, $M(\mathbf{v}) \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$

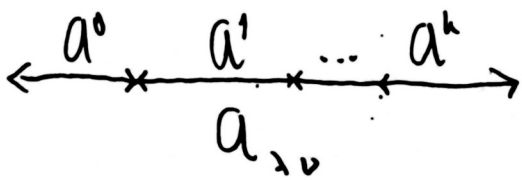
$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ NAZÝVAME PARAMETRY

DEFINÍCIA: OBOROM RIEŠITEĽNOSTI ÚLOHY (1) ROZUMIEME MNOŽINU $a_{\lambda, v} = \{(\lambda, v) \in \mathbb{R}^{l+m} \mid (1) \text{ MÁ RIEŠ.}\}$

DEFINÍCIA: KEĎ JE $\mathbf{x}^0$ OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY (1) PRI PEVNEJ VOĽBE $\boldsymbol{\lambda}^0$, $\mathbf{v}^0$, POTOM OBOROM STABILITY RIEŠENIA $\mathbf{x}^0$

$$a^0_{\lambda v} = \{(\lambda, v) \in \mathbb{R}^{l+m} \mid \min_{M(v)} F(\mathbf{x}, \lambda) = F(\mathbf{x}^0, \lambda)\}$$

DEFINÍCIA: FUNKCIOU RIEŠITEĽNOSTI ÚLOHY (1) ROZUMIEME $\Psi(\lambda, v) = \min\limits_{M(v)} F(\mathbf{x}, \lambda)$ $(\lambda, v) \in a_{\lambda v}$



11.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DELENIE I: 1) JEDNOPARAMETRICKÉ
2) VIACPARAMETRICKÉ

DELENIE II: 1) LINEÁRNE
2) NELINEÁRNE

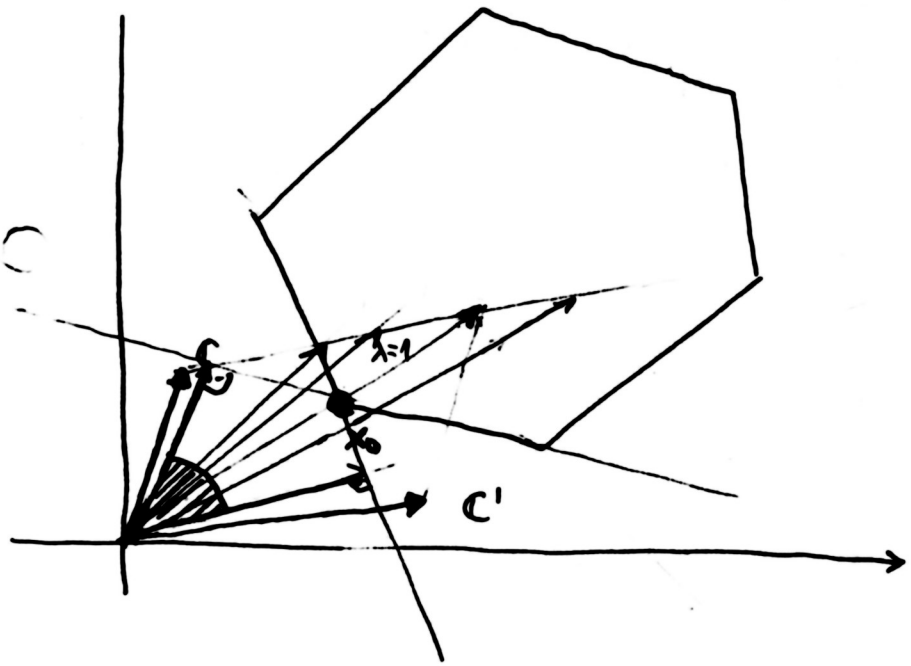
MY SA BUDEME ZAOBERAŤ IBA NAJJEDNODUCHŠÍM PRÍPADOM:
ÚLOHA LINEÁRNEHO JEDNOPARAMETRICKÉHO PROGRAMOVANIA S PARAMETROM V CIEĽOVEJ FUNKCII

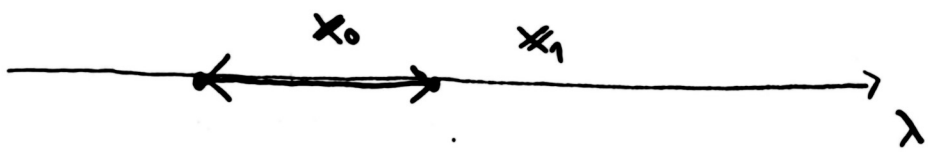
$$\min_{M} (\mathbf{c} + \lambda \mathbf{c}')^T \mathbf{x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$$

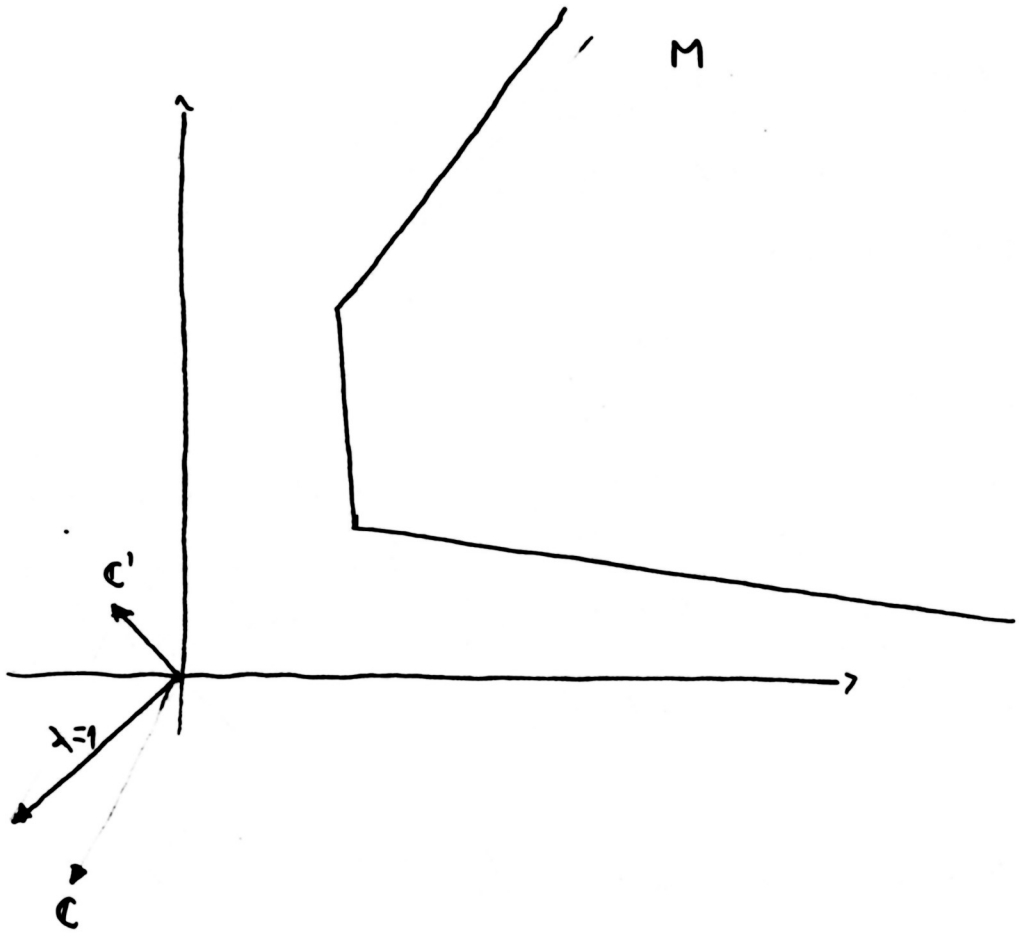
KDE:

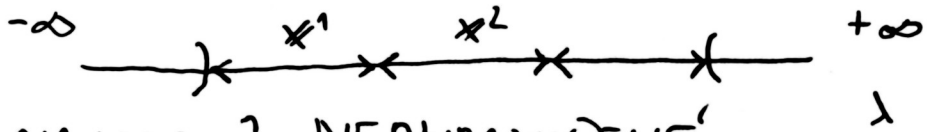
$$M = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

PREDPOKLADÁME $M \neq \emptyset$.









NAJVIAC 2 NEOHRANICENE
OBORY NERIESITELNOSTI

$$\varphi(\lambda) = (c + \lambda c')^T x^i$$

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

(1) $\min\limits_{M} (c+\lambda c')^T x \qquad M = \{ x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$

1. VETA L1PP (LINEÁRNE 1-PARAMETRICKÉHO PROGR.).

KEĎ PRE PEVNÉ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ EXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE x^1 ÚLOHY (1), POTOM $\exists\ \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1$ TAK, ŽE: $(\underline{\lambda}_1 \leq \overline{\lambda}_1)$

1) PRE $\lambda \in \langle \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1 \rangle$ ZOSTÁVA OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY (1) NEZMENENÉ $= x^1$
2) $\lambda_1 \in \langle \underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1 \rangle$
3) KEĎ NIE JE x^1 DEGENEROVANÉ, POTOM SME ZÍSKALI OBOR STABILITY RIEŠENIA PRÍSLUŠNÝ x^1.

DÔKAZ:

PRE PEVNÉ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ MÁME ÚLOHU LIN. PROG. A TÚ RIEŠIME SIMPLEXOVOU METÓDOU.

POSLEDNÁ TABUĽKA:

		$c_B + \lambda_1 c_B'$	$c_N + \lambda_1 c_N'$	
		x_B	x_N	
$c_B + \lambda_1 c_B'$	x_B	$\mathbb{I}$	$\mathbb{D}$	d_0
		$\mathbb{0}$	$c_N + \lambda_1 c_N' - z_N > 0$	

$d_0 > 0$

KDE: $z_N(\lambda_1) = (c_B + \lambda_1 c_B')^T \mathbb{D}$

PODĽA 1 VETY SM PRE $\lambda \in \mathbb{R}$, PRE KTORÉ

$(\mathbf{c}_N + \lambda \mathbf{c}_N')^T - (\mathbf{c}_B + \lambda \mathbf{c}_B')^T \mathbb{D} \geq \mathbf{0}$ JE TOTO

PRÍPUSTNÉ $(d|_0, \mathbf{0})$ OPTIMÁLNE.

$$\underbrace{\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbb{D}}_{\mu} + \lambda \underbrace{(\mathbf{c}_N'^T - \mathbf{c}_B'^T \mathbb{D})}_{\nu} = \mu + \lambda \nu \geq \mathbf{0}$$

OZNAČME $I_1 = \{\alpha \in N \mid \nu_\alpha > 0\}$

$I_2 = \{ \qquad < 0\}$

$I_3 \{ \qquad = 0\}$

SUPRÉMUM KVÔLI TOMU, ŽE I_1 MÔŽE BYŤ $\emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha \in I_1 \Rightarrow \lambda \geq -\dfrac{\mu_\alpha}{\nu_\alpha} \\ \alpha \in I_2 \Rightarrow \lambda \leq -\dfrac{\mu_\alpha}{\nu_\alpha} \end{array}\right\} \alpha \in \Big\langle \underbrace{\sup_{\alpha \in I_1} \frac{\mu_\alpha}{\nu_\alpha}}_{\underline{\lambda}_1}, \underbrace{\inf_{\alpha \in I_2} \frac{\mu_\alpha}{\nu_\alpha}}_{\overline{\lambda}_1} \Big\rangle$$

$\alpha \in I_3$ NÁM NEDÁ ŽIADNU PODMIENKU

POZNÁMKA: V PRÍPADE DEGENERÁCIE x^1 DOSTANEME IBA ČASŤ OBORU STABILITY.

K DÔKAZU SA POUŽÍVA ε-MODIFIKOVANÁ ÚLOHA. $\square$

ÚMLUVA: PREDPOKLADÁME NAĎALEJ, ŽE PRI VÝPOČTE SIMPLEXOVOU METÓDOU NIKDY NENASTÁVA DEGENERÁCIA.

DÔSLEDOK 1: OBORY STABILITY SÚ KONVEXNÉ UZAVRETÉ MNOŽINY, A JE ICH IBA KONEČNÝ POČET.

DÔKAZ: OB. ST. SÚ $\langle \underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i \rangle$ A SÚ JEDNOZNAČNE PRIRADENÉ VRCHOLOM $x^i \in M$, KTORÝCH JE IBA KONEČNÝ POČET.

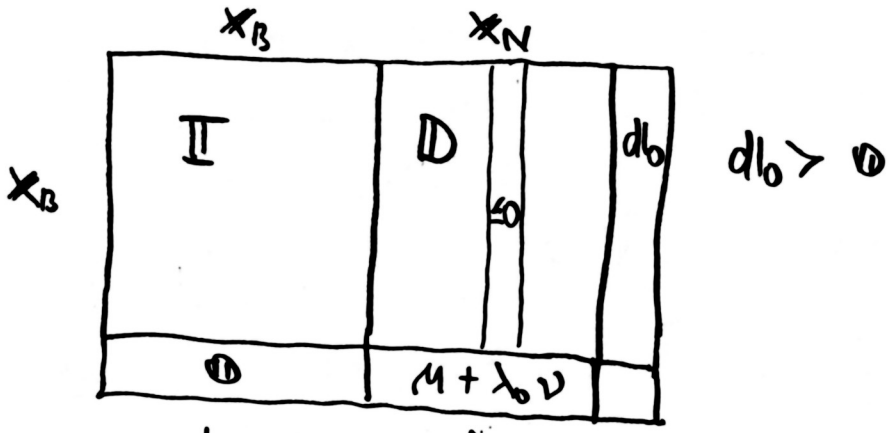
18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

2. VETA LIPP: KEĎ PRE PEVNÉ $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ NEEXISTUJE RIEŠENIE ÚLOHY (1) A $M \neq \emptyset$, POTOM $\exists$ ∞ OTVORENÝ INTERVAL J TAK, ŽE:

1) $\lambda \in J$ NEEXISTUJE RIEŠENIE ÚLOHY (1)
2) $\lambda_0 \in J$.

DOKAZ: PODĽA SM DOJDEME K TABUĽKE SM:



PODĽA 2.V.SM: EXISTUJE INDEX $j \in N$: $\mu_j + \lambda_0 \nu_j < 0$ A $\forall i \in B$: $d_{ij} \leq 0$.

PRETOŽE d_{ij} $i \in B$ NEZÁVISÍ NA λ
$\Rightarrow$ PRE λ, PRE KTORÉ $\mu_j + \lambda \nu_j < 0$ NEEXISTUJE RIEŠ.

MÔŽU NASTAŤ MOŽNOSTI:

a) $\nu_j > 0 \Rightarrow \lambda < -\frac{\mu_j}{\nu_j} \Rightarrow J = (-\infty; -\frac{\mu_j}{\nu_j})$.

b) $\nu_j < 0 \Rightarrow \lambda > -\frac{\mu_j}{\nu_j} \Rightarrow J = (-\frac{\mu_j}{\nu_j}, +\infty)$

c) $\nu_j = 0 \Rightarrow \mu_j < 0 \Rightarrow J = \mathbb{R}$.

ZREJME $\lambda_0 \in J$. $\square$

DÔSLEDOK 2: OBOR RIEŠITEĽNOSTI ÚLOHY (1)

$$\mathcal{A} = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (1) \text{ MÁ RIEŠENIE} \}$$

JE KONVEXNÁ MNOŽINA, PRE KTORÚ

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i , \overline{\lambda}_i \rangle$$

KDE P JE MNOŽINA INDEXOV VRCHOLOV KONVEXNÉHO POLYÉDRU M.

DÔKAZ: ZVOLME ĽUBOVOĽNÉ $\lambda \in \mathcal{A}$ PEVNE.
PODĽA 1. VETY LP, MUSÍ OPTIMÁLNE RIEŠENIE NASTAŤ ASPOŇ V JEDNOM VRCHOLE KONV. POLYEDRU M.

$$\Rightarrow \exists i \in P \mid \lambda \in \langle \underline{\lambda}_i , \overline{\lambda}_i \rangle \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i , \overline{\lambda}_i \rangle .$$

ZVOLME $\lambda \in \bigcup_{i \in P} \langle \underline{\lambda}_i , \overline{\lambda}_i \rangle \Rightarrow \exists i \in P : \lambda \in \langle \underline{\lambda}_i , \overline{\lambda}_i \rangle$,
PRIČOM OPT. RIEŠENIE JE x^i, TJ. RIEŠENIE (1) EX.
$\Rightarrow j \in \mathcal{A}$.

ZVOLME $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$. DEFINUJME

$$\lambda_3 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \quad , \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1 .$$

AK $\alpha_3 \notin \mathcal{A} \Rightarrow$ PRE λ_3 $\nexists$ OPT. RIEŠENIE (1)
$\Rightarrow$ PODĽA 2. VETY LPP $\exists \infty$ INTERVAL J:
$\alpha_3 \in J$, KDE RIEŠENIE TAKTIEŽ NEEXISTUJE
$\Rightarrow \lambda_1 \in J \vee \lambda_2 \in J$, ČO JE SPOR.

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

3. VETA LIPP: KEĎ $\bar{\lambda}_1$ Z 1. VETY LIPP JE KONEČNÉ, POTOM PRE $\lambda > \bar{\lambda}_1$ NASTANE JEDNA Z MOŽNOSTÍ:

a) PRE $\lambda > \bar{\lambda}_1$ NEEXISTUJE OPT. RIEŠ. ÚLOHY (1)

b) EXISTUJE x_2 SÚSEDNÝ VRCHOL K VRCHOLU x_1 A K NEMU $\langle \underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2 \rangle$ TAK, ŽE PRE $\lambda \in \langle \underline{\lambda}_2, \bar{\lambda}_2 \rangle$ ZOSTÁVA OPT. RIEŠENIE x^2 A NAVIAC $\bar{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2$.

[ANALOGICKÁ VETA PLATÍ PRE PRÍPAD $\underline{\lambda}_1$ KONEČNÉ]

DÔKAZ NIE JE SKÚŠANÝ. □

DEFINÍCIA: FUNKCIU $\varphi(\lambda) = \min_M \{(c + \lambda c')^T x, \ \lambda \in a\}$ SA NAZÝVA FUNKCIA RIEŠITEĽNOSTI ÚLOHY (1).

4. VETA LIPP: FUNKCIA RIEŠ. $\varphi(\lambda)$ JE NA a PO ČASTIACH LINEÁRNA, SPOJITÁ A KONKÁVNA.

DÔKAZ: NAD KAŽDÝM OBOROM STABILITY $\langle \underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i \rangle$ PLATÍ $\varphi(\lambda) = (c + \lambda c')^T x^i \ \forall i$, ČO JE LINEÁRNA FUNKCIA.

PRETOŽE $a = \bigcup \langle \underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i \rangle$ A PODĽA 3. VETY LIPP JE VŽDY $\bar{\lambda}_i = \underline{\lambda}_{i+1}$, TJ. φ JE PO ČASTIACH LINEÁRNA A SPOJITÁ.

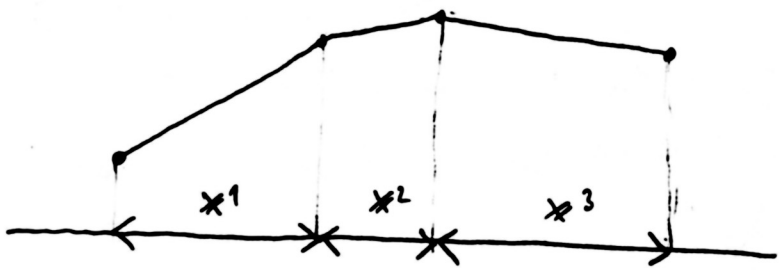
ZVOLME $\lambda_1, \lambda_2 \in a$, $\lambda_3 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$, $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

$\varphi(\lambda_3) = \min_M \{(c + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) c')^T x\} =$

$$= \min_M \left\{ \left((\alpha+\beta)\, c + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) c' \right)^T x \right\} \geq$$

$$\geq \alpha \min_M \left\{ (c+\lambda_1 c')^T x \right\} + \beta \min_M \left\{ (c+\lambda_2 c')^T x \right\} =$$

$$= \alpha\, \varphi(\lambda_1) + \beta\, \varphi(\lambda_2) \,. \quad \square$$



POZNÁMKA: KEĎ $\lambda \in I$, KDE I JE PEVNÝ KONVEXNÝ OHRANIČENÝ INTERVAL, POTOM

$$\min_{M \times I} (c + \lambda c')^T x \quad \text{EXISTUJE}$$

A DOSTANEME λ^{OPT}, x^{OPT}.

18. 04. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

ZÁKLADY NELINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

(KONVEXNÉ, ZOVŠEOBECNENÉ KONVEXNÉ)
→ VIĎ MARTOŠ

VETA 1 : MNOŽINA $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0$
$j = 1, \dots, m$, $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ KONVEXNÉ $\}$
JE KONVEXNÁ. (PRE KONKÁVNE NUTNÉ ≥ 0)

DÔKAZ : $x^1, x^2 \in M$, $x^3 = \alpha x^1 + \beta x^2$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

$$g_j(\alpha x^1 + \beta x^2) \leq \alpha g_j(x^1) + \beta g_j(x^2) \leq 0. \quad \square$$

VETA 2 : KAŽDÉ LOKÁLNE MINIMUM KONVEXNEJ FUNKCIE JE MINIMUM GLOBÁLNYM. (V KONV. MN.)

DÔKAZ: NECH x^0 JE LOKÁLNE MINIMUM
$\Rightarrow \exists U(x^0, \varepsilon) \cap M$: $\forall x$ Z TOHTO OKOLIA $f(x) \geq f(x^0)$
PRE SPOR NECH $\exists x^1 \in M$: $f(x^1) < f(x^0)$.
Z KONVEXITY M $\forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ $\alpha x^1 + \beta x^0 \in M$

$$f(\alpha x^1 + \beta x^0) \leq \alpha f(x^1) + \beta f(x^0) < (\alpha + \beta) f(x^0)$$

PRE $\alpha, \beta > 0$!!!

STAČÍ ZVOLIŤ $\alpha, \beta > 0$ TAK, ABY $\alpha x^1 + \beta x^0 \in U(x^0, \varepsilon)$
A DOSTANEME SPOR. $\square$

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

LEMMA: FUNKCIA $F(x)$, KTORÁ MÁ 1. PARCIÁLNE DERIVÁCIE NA OTVORENEJ KONVEXNEJ MNOŽINE M JE KONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $F(x^2) - F(x^1) \geq \underbrace{\nabla F(x^1)}_{\text{GRADIENT}}{}^T (x^2 - x^1)$ PRE $\forall x^1, x^2 \in M$ $(\mathcal{L})$

VETA 3: KEĎ JE $f(x) \in C^2$ NA OTVORENEJ KONVEXNEJ MNOŽINE M, POTOM JE KONVEXNÁ NA M $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f(x) = H(x) = \left(\cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdots \right)$ JE POZITÍVNE SEMIDEFINITNÁ.

DÔKAZ: TAYLOROVA VETA:

$$f(x^2) = f(x^1) + \nabla f(x)^T (x^2 - x^1) + \frac{1}{2} (x^2 - x^1)^T \nabla^2 f\left(x^1 + \Theta(x^2 - x^1)\right)(x^2 - x^1). \quad (1)$$

1) $f(x)$ JE KONVEXNÁ $\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}$ $f(x^2) \geq f(x^1) + \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $(x^2 - x^1)^T \nabla^2 f\left(x^1 + \Theta(x^2 - x^1)\right)(x^2 - x^1) \geq 0 \quad (2)$

PRE DÔKAZ SPOROM PREDPOKLADÁME, ŽE $\nabla^2 f(x)$ NIE JE POZITÍVNE SEMIDEFINITNÁ NA M $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x^0 \in M,\ v \neq 0$ TAK, ŽE $v^T \nabla^2 f(x^0) v < 0$.

PRETOŽE 2. PARCIÁLNE DERIVÁCIE SÚ SPOJITÉ $\exists U(x^0, \varepsilon) \subset M$ TAK, ŽE $v^T \nabla^2 f(x) v < 0 \quad \forall x \in U(x^0, \varepsilon)$

V $U(x^0, \varepsilon)$ $\exists \tilde{x}$ TAK, ŽE $v = \rho(\tilde{x} - x^0)$, $\rho > 0$

POTOM $\rho^2 (\tilde{x} - x^0)^T \nabla^2 f(x) (\tilde{x} - x^0) < 0$, ČO JE SPOR S (2).

2) NECH $\nabla^2 f(x)$ JE POZ. SEMIDEFINITNÁ, $x \in M$.
PRE ĽUBOVOĽNÉ $x^1, x^2 \in M$ PLATÍ:

$$(x^2 - x^1)^T \nabla^2 f(x) (x^2 - x^1) \geq 0$$

$\Rightarrow$ PRE $x = x^1 + \Theta(x^2 - x^1)$ DOSTÁVAME Z (1) $\mathcal{L}$. $\square$

ZOVŠEOBECNENÉ KONVEXNÉ FUNKCIE

I. ZACHOVÁVAME KONVEXNÝ DEF. OBOR

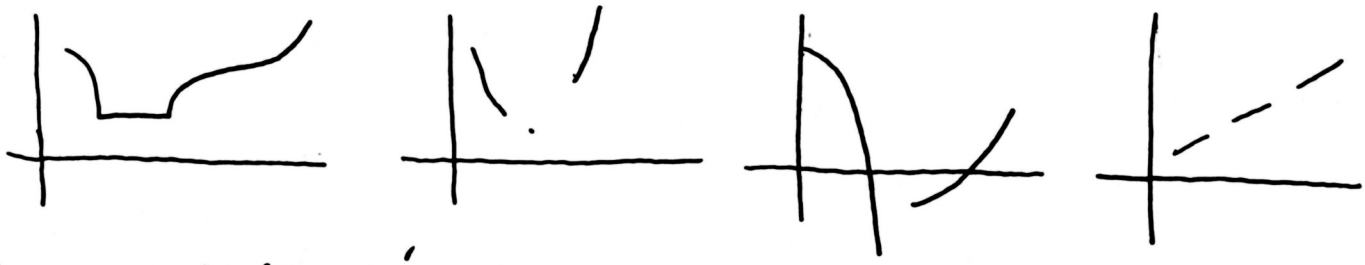
DEFINÍCIA 2: FUNKCIU $f(x)$ DEFINOVANÚ NA KONVEXNEJ MNOŽINE M NAZÝVAME KVAZIKONVEXNOU, KEĎ PRE ĽUBOVOĽNÉ $x^1, x^2 \in M$ A $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ PLATÍ

$$f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}.$$

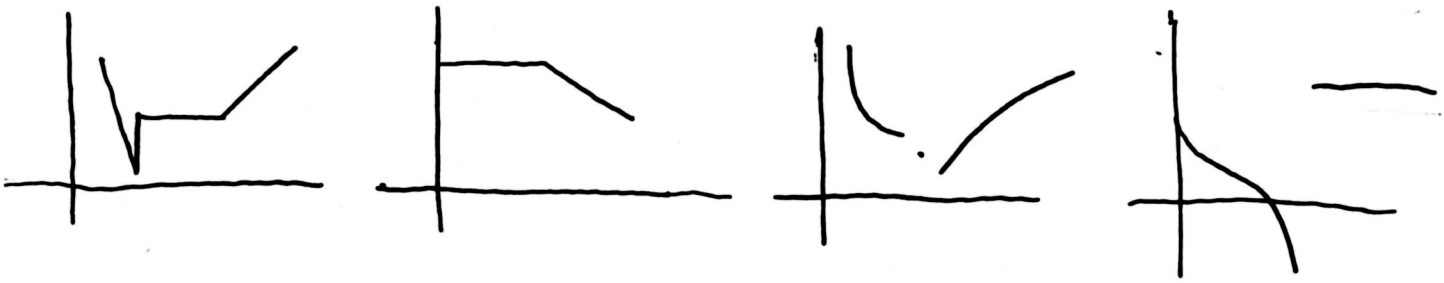
FUNKCIA $f(x)$ JE EXPLICITNE KVAZIKONVEXNÁ NA M, KEĎ JE TU KVAZIKONVEXNÁ A ĎALEJ PLATÍ PRE ĽUBOVOĽNÉ $x^1, x^2 \in M$ A $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$f(x^1) \neq f(x^2) \Rightarrow f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) < \max\{f(x^1), f(x^2)\}.$$

PRÍKLAD: EXPLICITNE KVAZIKONVEXNÉ (ÚSEČKA $\parallel$ S OSOU x JE MINIMÁLNA)



KVAZIKONVEXNÉ



VETA 4: KEĎ PLATÍ NA KONVEXNEJ MNOŽINE M, ŽE f JE KONVEXNÁ $\Rightarrow$ f JE EXPLICITNE KVAZIKONVEXNÁ $\Rightarrow$ f JE KVAZIKONVEXNÁ.

DÔKAZ: $\forall x^1, x^2 \in M$ $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Z KONVEXITY $f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) \leq \lambda_1 f(x^1) + \lambda_2 f(x^2) \leq$

$\leq \lambda_1 \max\{f(x_1), f(x_2)\} + \lambda_2 \max\{f(x_1), f(x_2)\} = \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

AK $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, POTOM
$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.
A ZREJME EXPL. KVAZIKONV. $\Rightarrow$ KVAZIKONVEX. $\square$

VETA 5: FUNKCIA $f(x)$ DEFINOVANÁ NA KONVEXNEJ MNOŽINE M JE KVAZIKONVEXNÁ $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ PLATÍ, ŽE $A_\alpha = \{x \in M \mid f(x) \leq \alpha\}$ JE KONVEXNÁ.

DOKAZ. 1) f JE KVAZIKONVEXNÁ, ZVOLME $\alpha \in \mathbb{R}$ A $x^1, x^2 \in A_\alpha$ ĽUBOVOĽNE. UTVORME $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $x \in A_\alpha$.
PRETOŽE M JE KONVEXNÁ, NUTNE $x \in M$.
$f(x) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\} \leq \alpha \Rightarrow x \in A_\alpha$, TJ.
A_α JE KONVEXNÁ.

2) NECH A_α JE KONVEXNÁ PRE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
ZVOLME $x^1, x^2 \in M$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ A DEFINUJME
$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, $\alpha^0 = \max\{f(x^1), f(x^2)\}$.
PLATÍ $f(x^1) \leq \alpha^0$, $f(x^2) \leq \alpha^0 \Rightarrow x^1, x^2 \in A_{\alpha^0}$
A KEĎŽE A_{α^0} JE KONVEXNÁ, NUTNE $x \in A_{\alpha^0}$.
$\Rightarrow x \in M$ & $f(x) \leq \alpha^0 = \max\{f(x^1), f(x^2)\}$
$\Rightarrow f$ JE KVAZIKONVEXNÁ. $\square$

DOSLEDOK: MNOŽINA $L = \{x \in M \mid f_i(x) \leq b_i \ (i = 1, \dots, n)\}$, KDE M JE KONVEXNÁ, $b_i \in \mathbb{R}$, f_i KVAZIKONVEXNÁ NA M, JE KONVEXNÁ.

VETA 6: KAŽDÉ LOKÁLNE MINIMUM EXPLICITNE KVAZIKONVEXNEJ FUNKCIE $f(x)$ V $\mathbb{R}^n$ JE ABSOLÚTNE.

DÔKAZ: UVAŽUJME x^0 AKO LOKÁLNE MINIMUM $f(x)$ V $\mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow \exists\, U(x^0, \varepsilon)$ TAK, ŽE PRE $\forall x \in U(x^0, \varepsilon)$ PLATÍ $f(x) \geq f(x^0)$.
PRE SPOR PREDPOKLADAJME, ŽE x^0 NIE JE ABS. MINIMUM f.
$\Rightarrow \exists\, x^1 : f(x^1) < f(x^0)$.
Z EXPL. KVAZIKONVEXNOSTI: PRE $\forall x = \lambda_1 x^0 + \lambda_2 x^1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ JE
$f(x) < f(x^0) = \max\{f(x^1), f(x^0)\}$ PRE $x \in U(x^0, \varepsilon)$. ↯

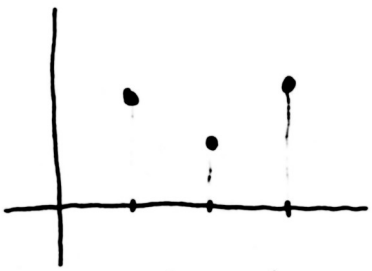
POZNÁMKA: f JE KVAZIKONKÁVNA $\Leftrightarrow$ $-f$ JE KVAZIKONV.
f JE EXPL. KVAZIKONK. $\Leftrightarrow$ $-f$ JE EXPL. KVAZIKONV.

II. M NEMUSÍ BYŤ KONVEXNÁ, ALE POŽADUJEME DIFERENCOVATEĽNOSŤ FUNKCIE

DEFINÍCIA 3: FUNKCIU $f(x)$ DEFINOVANÚ V $x^0 \in M$ NAZÝVAME LOKÁLNE PSEUDOKONVEXNÚ, KEĎ JE V x^0 DIFERENCOVATEĽNÁ A

$$f(x) \leq f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \leq 0$$
$$f(x) < f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) < 0, \quad x \in M$$

PRÍKLAD:



FUNKCIA $f(x)$ JE PSEUDOKONVEXNÁ NA M, KEĎ JE LOKÁLNE PSEUDOKONVEXNÁ PRE $\forall x \in M$.

DEFINÍCIA 4: PRE OBECNÚ FUNKCIU, KTORÁ JE V x^0 DIFERENCOVATEĽNÁ, NAZÝVAME x^0 ÚČINNÝM MINIMOM f NA M, KEĎ $(x - x^0)^T \nabla f(x^0) \geq 0 \quad \forall x \in M$.

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

VETA 7: KAŽDÉ ÚČINNÉ MINIMUM PSEUDOKONVEXNEJ FUNKCIE JE ABSOLÚTNE MINIMUM.

DÔKAZ: x^0 ÚČINNÉ MINIMUM $\Rightarrow (x-x^0)^T \nabla f(x^0) \geq 0$

PRE SPOR NECH x^0 NIE JE ABSOLÚTNE MINIMUM $\Rightarrow \exists x^1 \in M: f(x^1) < f(x^0) \Rightarrow$ Z PSEUDOKONVEXNOSTI $(x^1-x^0)^T \nabla f(x^0) < 0$, ČO JE SPOR. □

DÔSLEDOK: KAŽDÝ STACIONÁRNY BOD TJ x, PRE KTORÉ $\nabla f(x) = 0$, JE ABSOLÚTNE MINIMUM PSEUDOKONVEXNEJ FUNKCIE.

VETA 8: KEĎ JE M KONVEXNÁ, POTOM PRE DIFERENCOVATEĽNÚ FUNKCIU f NA M PLATÍ:

KONVEXNÁ $\Rightarrow$ PSEUDOKONVEXNÁ

($\Rightarrow$ EXPL. KVAZIKONVEXNÁ $\Rightarrow$ KVAZIKONVEXNÁ)

DÔKAZ: PODĽA LEMMY 2 PRE KONVEXNÚ FUNKCIU

$$f(x^2) - f(x^1) \geq \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1)$$

$$f(x^2) \leq f(x^1) \Rightarrow \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1) \leq 0.$$

POZNÁMKA: FUNKCIA $f(x)$ JE PSEUDOKONKÁVNA, KEĎ JE $-f(x)$ PSEUDOKONVEXNÁ.

FUNKCIA $f(x)$ JE PSEUDOLINEÁRNA, KEĎ JE SÚČASNE PSEUDOKONVEXNÁ AJ PSEUDOKONKÁVNA.

PRE PSEUDOKONKÁVNU FUNKCIU:

$$f(x) \geq f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) \geq 0$$

$$> \qquad\qquad\qquad\qquad > 0$$

PRE PSEUDOLINEÁRNU FUNKCIU :

$$f(x) < f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) < 0$$
$$f(x) = f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) = 0$$
$$f(x) > f(x^0) \Rightarrow \nabla f(x^0)^T (x - x^0) > 0 .$$

02.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

(1) $\min_M f(x)$, $M = \{ x \in N \mid g(x) \leq 0 \}$, KDE

f, g_i SÚ KONVEXNÉ NA N, N JE KONVEXNÁ $\subseteq \mathbb{R}^n$

POTOM:

ÚLOHA (1) JE ÚLOHOU KONVEXNÉHO PROGRAMOVANIA.

PREDPOKLADAJME, ŽE f A g_i SÚ SPOJITO DIFERENCOVATEĽNÉ NA N KTORÁ JE OTVORENÁ.

KUHN-TUCKEROVÉ PODMIENKY

DEFINUJME LAGRANGEOVÚ FUNKCIU PRIRADENÚ ÚLOHE (1):

$$\varphi(x, u) = f(x) + u^T g(x), \quad u \geq 0, \ x \in N.$$

DEFINÍCIA: HOVORÍME, ŽE (x_0, u_0) SPĽŇA KUHN-TUCKEROVE PODMIENKY (JE K-T STACIONÁRNY), KEĎ:

a) $u_0 \geq 0$, $x_0 \in N$,

b) $\nabla_u \phi(x_0, u_0) \leq 0$,

c) $\nabla_x \phi(x_0, u_0) = 0$,

d) $\nabla_u \phi(x_0, u_0)^T u_0 = 0$.

PREPIS K-T PODM. A ICH GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA.

Z b) $\Rightarrow$ $g(x_0) \leq 0$ a) $\Rightarrow$ $x_0 \in M$

Z d) $\Rightarrow$ $\underset{\leq 0}{g(x_0)}^T \underset{\geq 0}{u_0} = 0$ $\Rightarrow$ $\Downarrow$ ASPOŇ JEDNA ZLOŽKA $g(x_0)$, u_0 JE $= 0$ $\forall i$

TÁTO PODMIENKA SA NAZÝVA PODMIENKOU KOMPLEMENTARITY.

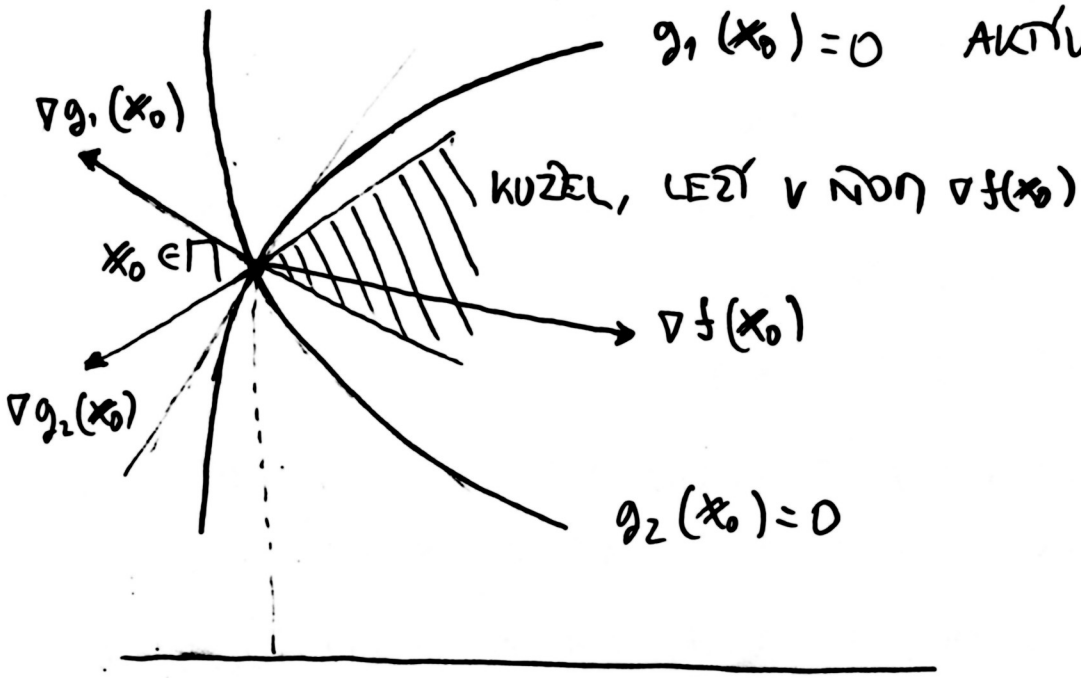
Z c) $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0)^T + u_0^T \nabla g(x_0) = 0$

OZNAČME $J = \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(x_0) = 0 \}$.

J JE MNOŽINOU INDX AKTÍVNYCH PODMIENOK V x_0.

POTOM c) $\Rightarrow \nabla f(x_0) = -\sum_{i \in J} u_i^0 \nabla g_i(x_0)$

($u_i^0 = 0$ PRE $i \notin J$, Z PODMIENKY KOMPLEMENTARITY d))



f RASTIE V SMERE GRADIENTU ∇f

$\Rightarrow$ MINIMUM NASTÁVA V BODE x_0.

VETA: KEĎ f, g_i $i \in \{1, \dots, m\}$ SÚ KONVEXNÉ, SPOJITO DIFERENCOVATEĽNÉ NA KONV. MNOŽINE M, x_0 JE K-T STACIONÁRNY BOD, POTOM x_0 JE OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY (1).

DÔKAZ: $f(x) - f(x_0) \geq \nabla f(x_0)^T (x - x_0) \quad \forall x \in M$.

TAKISTO $g_i(x) - g_i(x_0) \geq \nabla g_i(x_0)^T (x - x_0) \quad \forall x \in M \ \forall i$

K-T STAC.: $x_0 \in M$, $\nabla f(x_0) = -u_0^T \nabla g(x_0)$.

$$f(x) - f(x_0) \geq -\underbrace{u_0^T}_{\geq 0} \nabla g(x_0)(x - x_0) \geq -u_0^T (g(x) - g(x_0)) =$$

$$= -u_0^T g(x) + \underbrace{u_0^T g(x_0)}_{\to 2d) = 0} = -\underbrace{u_0^T}_{\geq 0} \underbrace{g(x)}_{\leq 0} \geq 0. \quad \square$$

02. 05. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

POZNÁMKA: PREVÁDZAME TEDA RIEŠENIE OPT. ÚLOHY NA RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC A NEROVNOSTÍ: TJ. NA K-T PODMIENKY.
ŠPECIÁLNE SA TOMO VYUŽÍVA PRE RIEŠENIE ÚLOH KVADRATICKÉHO PROGRAMOVANIA (K-T PODMIENKY SÚ POTOM LINEÁRNE).

(1) $\min_{M} f(x)$, $M = \{ x \in N \mid g(x) \leq 0 \}$

DUALITA (NIE JE JEDNOZNAČNE DEFINOVANÁ)

LAGRANGEOVA DUALITA:
DEFINÍCIA: K ÚLOHE (1) DEFINUJEME DUÁLNU ÚLOHU:

(2) $\max_{K} \phi(x, u)$ $K = \{ x \in N, u \geq 0 \mid \nabla_x \phi(x, u) = 0 \}$

ŠPECIÁLNE PRE (1) LIN. DOSTÁVAME DUALITU LIN. PROG.

SLABÁ VETA O DUALITE: NECH f_i g_i SÚ KONVEXNÉ, SPOJ. DIF. NA N. KONVEXNEJ. POTOM

$$\inf_{M} f \geq \sup_{K} \phi .$$

DÔKAZ. KEĎ JE $M = \emptyset$ ALEBO $K = \emptyset$, POTOM TVRDENIE PL.
UVAŽUJME $M \neq \emptyset$ A $K \neq 0$, ZVOLÍME $x^1 \in M$, $(x^2, u^2) \in K$
Z PREDPOKLADOV PLYNIE:

$$f(x^1) - f(x^2) \geq \nabla f(x^2)^T (x^1 - x^2).$$

$$g_i(x^1) - g_i(x^2) \geq \nabla g_i(x^2)^T (x^1 - x^2) \quad \forall i . \quad / \cdot u^2_i$$

$x^1 \in M \Rightarrow x^1 \in N \Rightarrow g(x^1) \leq 0 \quad / \cdot u^2$

$(x^2, u^2) \in K \Rightarrow x^2 \in N, \quad u^2 \geq 0,$

$\nabla f(x^2) + u^{2T} \nabla g(x^2) = 0 \quad / \cdot (x^1 - x^2)$

$\Rightarrow f(x^1) - f(x^2) \geq -u^{2T} \nabla g(x^2)(x^1 - x^2) \geq$

$\geq -u^{2T}(g(x^1) - g(x^2)) = -u^{2T} g(x^1) + u^{2T} g(x^2) \geq$

$\geq u^{2T} g(x^2).$

$\Rightarrow f(x^1) \geq f(x^2) + u^{2T} g(x^2) = \Phi(x^2, u^2). \quad \square$

ZA SILNEJŠÍCH PREDPOKLADOV PLATÍ AJ SILNÁ VETA O DUALITE (NEBUDEME DOKAZOVAŤ).

METÓDY RIEŠENIA ÚLOH NELIN. PROGR.

I. METÓDY PRE NÁJDENIE VOĽNÉHO EXTRÉMU ($\min_{\mathbb{R}^n} f(x)$)

a) NEWTONOVSKÉ
b) GRADIENTNÉ
} c) KVAZI NEWTONOVSKÉ

d) LEMKEHE-HO METÓDA (ODPORÚČANÁ) V KNIHE POLÁK

VYUŽÍVAJÚ SA U PENALIZAČNÝCH A BARIÉROVÝCH METÓDACH, KEDY PREVÁDZAME ÚLOHU NA VIAZANÝ EXTRÉM NA POSTUPNOSŤ ÚLOH NA VOĽNÝ EXTRÉM.

II. METÓDY PRÍPUSTNÝCH SMEROV (SÚ NAJČASTEJŠIE METÓDY)

METÓDA FRANKA A WOLFA, ZOUTENDIJKOVA

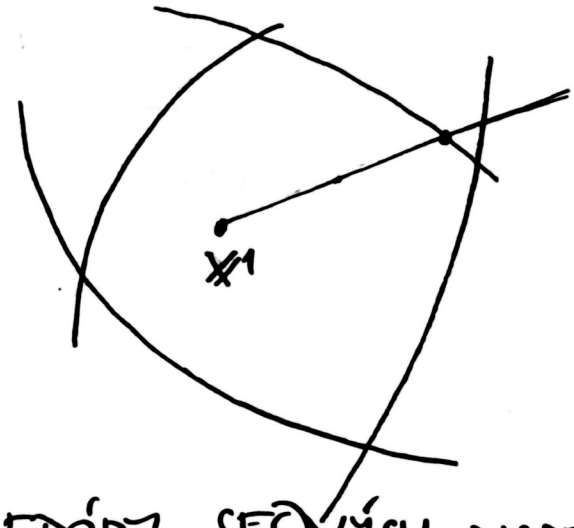
VIDEME Z NEJAKÉHO $x^1 \in M$

(NAJVÄČŠÍ PROBLÉM BÝVA NÁJSŤ TAKÝTO VÝCHODZÍ BOD)

1. HĽADÁME PRÍPUSTNÝ SMER (NEMUSÍ BYŤ V SMERE GRADIENTU)
2. HĽADÁME DĹŽKU KROKU

02.05.2008 Fr
PETER ČERNO

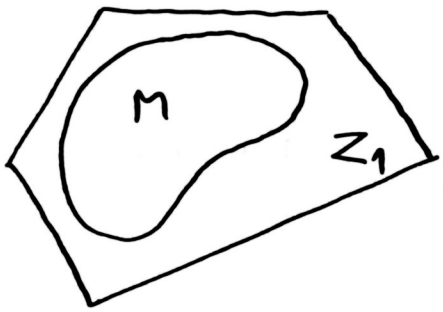
NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE



TOTO SÚ NAJOBJAVNEJŠIE METÓDY VHODNÉ PRE M JEDNODUCHÚ (NAJRADŠEJ KONVEXNÝ POLYÉDER) A OBECNÚ $f(x)$.

III. METÓDY SEČNÝCH NADROVÍN (NAPR. VEINOTTOVA) SÚ VHODNÉ PRE JEDNODUCHÚ f (NAJLEPŠIE LINEÁRNU) A OBECNÚ MNOŽINU M.

NÁJDEME VÝCHODZÍ KONVEXNÝ POLYÉDER / MNOŽINU Z_1 TAK, ABY $Z_1 \supset M$.



UPREDNOSTNÚSEME JEDNODUCHÝ POPIS Z_1 PRED VEĽKOSŤOU

HĽADÁME $\min_{Z_1} f(x)$. OPT. RIEŠENIE z^1:

AK $z^1 \in M \Rightarrow$ SME HOTOVÍ, INAK

NÁJDEME SEČNÚ NADROVINU, KTORÁ ODDELÍ z_1 OD MNOŽINY M.

DOSTANEME $Z_2 = Z_1 \cap \{x \mid a^T x \leq b\}$

A RIEŠIME $\min_{Z_2} f(x)$.

DOSTÁVAME: $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \ \dots \supset M$.

IV. METÓDY VYUŽÍVAJÚCE K-T PODMIENOK VHODNÉ PRE RIEŠENIE ÚLOH KVADRATICKÉHO PROGR.

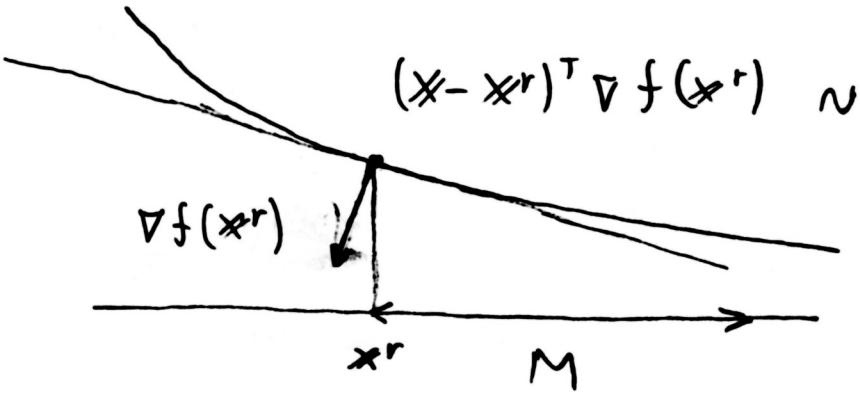
V. ŠPECIÁLNE METÓDY PRE ŠPECIÁLNE ÚLOHY

METÓDA FRANKA WOLFA

$\min\limits_{M} f(x)$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$,

KDE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, f JE PSEUDOKONVEXNÁ NA M.

PREDPOKLADÁME $M \neq \emptyset$, $x^T \nabla f(x^r)$ JE ZDOLA OHRANIČENÁ NA M PRE $\forall x^r \in M$.
(STAČÍ PREDPOKLADAŤ OHRANIČENOSŤ M).



$(x - x^r)^T \nabla f(x^r) \sim$ HĽADÁME $\min\limits_{M} x^T \nabla f(x^r) = \hat{x}^r{}^T \nabla f(x^r)$

MÁME SMER $\hat{x}^r - x^r$.
HĽADÁME DĺŽKU KROKU, TJ $\min\limits_{0 \leq \lambda \leq 1} f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r))$

ALGORITMUS:

1. RIEŠIME ÚLOHU LP $\min\limits_{M} 0$. AK JE $M \neq \emptyset$, DOSTANEME VÝCHODZÍ $x^1 \in M$.

2. MÁME $x^r \in M$ A RIEŠIME ÚLOHU $\min\limits_{M} x^T \nabla f(x^r)$ SM; NÁJDEME $\hat{x}^r$ OPT. RIEŠENIE

02.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\Rightarrow \quad (\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0 \quad \forall x \in M$$

1. VETA METÓDY FRANKA A WOLFA:

AK PLATÍ $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) = 0$, POTOM JE x^r OPT. RIEŠENÍM ZADANEJ ÚLOHY.

DÔKAZ. $x^r \in M \Rightarrow (\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) \leq 0$.

Z $(\hat{x}^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0$ DOSTÁVAME PRE

$x = \hat{x}^r + x^r - x^r - x$:

$$\underbrace{(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r)}_{=0} + (x^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0$$

$$(x^r - x)^T \nabla f(x^r) \leq 0 \quad \forall x \in M$$

Z PSEUDOKONVEXITY $\Rightarrow$

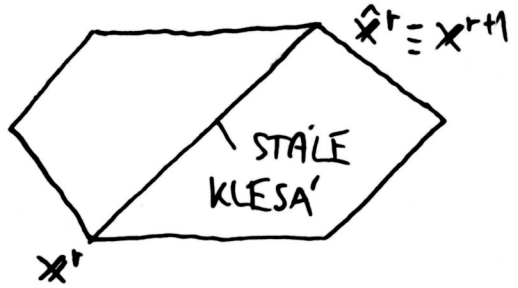
$$f(x) < f(x^r) \Rightarrow \nabla f(x^r)^T (x - x^r) < 0.$$

NUTNE $f(x) \geq f(x^r)$. $\square$

09. 05. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

2. VETA F.W.: KEĎ PLATÍ $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) < 0$ A $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(\hat{x}^r) \leq 0$, POTOM $x^{r+1} = \hat{x}^r$ A $f(x^{r+1}) < f(x^r)$.



3. VETA F.W.: KEĎ PLATÍ $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r) < 0$ A $(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(\hat{x}^r) > 0$, POTOM POLOŽÍME $x^{r+1} = x^r + \lambda_r (\hat{x}^r - x^r)$, $f(x^{r+1}) < f(x^r)$, KDE λ_r JE RIEŠENÍM ROVNICE

$$(\hat{x}^r - x^r)^T \nabla f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r)) = 0$$

$$\left(\equiv \min_{\langle 0,1 \rangle} f(x^r + \lambda(\hat{x}^r - x^r))\right)$$

4. VETA F.W.: $\{x^r\}$ MÁ ASPOŇ 1 HROMADNÝ BOD x^*, KTORÝ JE OPT. RIEŠENÍM ZADANEJ ÚLOHY.
(V1 & V2 ZARUČUJÚ KONEČNOSŤ)

VIACKRITERIÁLNE PROGRAMOVANIE
(VEKTOROVÁ OPTIMALIZÁCIA)

(1) $\max\limits_{M} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$,

KDE f_i, g_j $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$
SÚ REÁLNE FUNKCIE DEFINOVANÉ V $\mathbb{R}^n$.

a) IDEÁLNE RIEŠENIE - $\max\limits_{M} f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^*)$ $\forall i$

b) DOMINANTNÉ RIEŠENIE - $\exists i_0 \in \{1, \dots, s\}$ TAK, ŽE RIEŠIŤ (1) ZNAMENÁ RIEŠIŤ $\max\limits_{M} f_{i_0}(\mathbf{x})$.

c) EFICIENTNÉ RIEŠENIE

DEFINÍCIA: PRVOK $\mathbf{x}^* \in M$ NAZÝVAME EFICIENTNÝM RIEŠENÍM ÚLOHY (1), KEĎ $\neg\exists\, \mathbf{x} \in M$ TAK, ABY PLATILO $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \gtrless \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

MNOŽINU VŠETKÝCH EFICIENTNÍCH RIEŠENÍ OZNAČÍME $\mathcal{E}$.

DEFINÍCIA: PRVOK $\mathbf{x}^* \in M$ NAZVEME VLASTNÝM EFICIENTNÝM RIEŠENÍM ÚLOHY (1), KEĎ $\exists\, B > 0$ $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ A $\forall \mathbf{x} \in M$ PRE KTORÉ $f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}^*)$ $\exists k \in \{1, \dots, s\}$: $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$,

$$\frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}^*)}{f_k(\mathbf{x}^*) - f_k(\mathbf{x})} \leq B.$$

d) KOMPROMISNÉ RIEŠENIE $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x})$ PRIRADÍME SKALÁRNU FUNKCIU.

09.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

AD c) (PREVIESŤ NA SKALÁRNY EKVIVALENT)

PARAMETRICKÝ SKALÁRNY EKVIVALENT

$$\max_{M} \lambda^T f(x), \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^s \mid \lambda > 0\}$$

KEĎ OZNAČÍME $M_{OPT}(\lambda) = \{x^0 \in M \mid \max_{M} \lambda^T f(x) = \lambda^T f(x^0)\}$ PRE $\lambda \in \Lambda$

POTOM PLATÍ VETA:

VETA: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{OPT}(\lambda) \subset \mathcal{E}$.

DÔKAZ: NECH $x^0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{OPT}(\lambda) \Rightarrow \exists \lambda^0 > 0$ TAK, ŽE

$$x^0 \in M_{OPT}(\lambda^0) \Rightarrow \lambda^{0T} f(x) \leq \lambda^{0T} f(x^0) \quad \forall x \in M$$

PRE DÔKAZ SPOROM NECH $x^0 \notin \mathcal{E} \Rightarrow \exists \bar{x} \in M$ TAK, ŽE $f(\bar{x}) > f(x^0)$

$$\overset{\lambda^0 > 0}{\Longrightarrow} \lambda^{0T} f(\bar{x}) > \lambda^{0T} f(x^0). \ \lightning \ \square$$

POZNÁMKA: 1) KEĎ PLATÍ, ŽE f_i, g_j SÚ LINEÁRNE, POTOM IDE O LINEÁRNU VIACKRITERIÁLNU OPTIMALIZÁCIU

2) KEĎ PLATÍ, ŽE f_i - KONKÁVNE, g_j - KONVEXNÉ, POTOM IDE O KONVEXNÚ VIACKRITERIÁLNU OPTIMALIZÁCIU

VETA: PRE LINEÁRNE VIACKRITERIÁLNE PROGRAMOVANIE PLATÍ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{OPT}(\lambda) = \mathcal{E}$ A $\mathcal{E}$ JE ROVNÁ MNOŽINE VLASTNÝCH EFICIENTNÝCH RIEŠENÍ.

PRE KONVEXNÉ VIACKRITERIÁLNE PROGRAMOVANIE PLATÍ

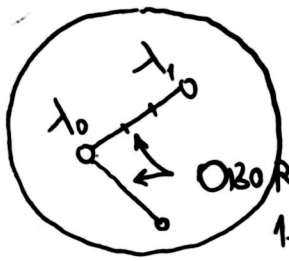
$$\bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda > 0}} M_{OPT}(\lambda) \subset \mathcal{E} \subset \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\} \\ \lambda \geq 0 \\ <}} M_{OPT}(\lambda) .$$

1. ALGORITMUS DIALÓGU

$\lambda_0, \lambda_1 > 0$

RIEŠIME ÚLOHU 1-PARAM. PROGRAMOVANIA

$x^0 \in M_{OPT}(\lambda_0)$, $x^1 \in M_{OPT}(\lambda_1)$, $x^0, x^1 \in \mathcal{E}$



OBORY STABILITY 1-PAR. ÚLOHY

$$(*) \quad \max_{x \in M} (\lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0))^T f(x) \quad \text{PRE} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

TAK, ŽE NÁJDEME RIEŠENIE PRE $t = 0$, TJ.

$\max \lambda_0^T f(x) = \lambda_0^T f(x^0)$ A OBOR

STABILITY $x^0 \Rightarrow t_1 > 0$.

HODNOTU $x^0 + t_1(\lambda_1 - \lambda_0)$ ZVÁČŠÍ UŽÍVATEĽ

A ROZHODNE SA:

A) POKRAČUJE V RIEŠENÍ $(*)$ PRE $t > t_1$.

B) ZMENÍME λ_1 A RIEŠIME $(*)$

09.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZÁCIE

2) VRÁTIME SA K PREDCHÁDZAJÚCEMU t_i

δ) ZMENÍME λ_0, λ_1

ω) UŽÍVATEĽ JE SPOKOJNÝ - KONIEC

2. ALGORITMUS DIALÓGU

NAJSKÔR SA APLIKUJE 1. ALGORITMUS DIALÓGU

DEF. MNOŽINU $K \subset \{1, \dots, s\}$, KDE CHCE ZLEPŠIŤ $f_i(x^*)$ $(i \in K)$ A $\mu_i > 0$ O KOĽKO CHCE ZLEPŠIŤ TIETO HODNOTY.

DEFINUJEME $M(K, \mu) = \{x \in M \mid f_i(x) \geq f_i(x^*) + \mu_i, i \in K\}$

OZNAČME $\bar{K} = \{1, \dots, s\} \setminus K$.

RIEŠIME ÚLOHU

$$\max_{M(K,\mu)} \sum_{i \in \bar{K}} \lambda_i f_i(x) \quad \text{1. ALG. DIALÓGU}$$

α) UŽÍV. JE SPOKOJNÝ

β) MÔŽE ZMENIŤ K ALEBO μ_i

AD d)

(1) INFORMÁCIE O PREFERENCIÁCH UŽÍVATEĽA NEDOSTANEME

<u>METÓDA GLOBÁLNEJ CIEĽOVEJ FUNKCIE</u>

$$\max_{x \in M} f_i(x) = f_i^* > 0 \quad \forall i$$

$$\min_{x \in M} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^*} \right)^p \right\} \quad p = 1, 2$$

$\Rightarrow$ KOMPROMISNÉ RIEŠENIE, DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE JE EFICIENTNÉ

(2) INFORMÁCIE O PREFERENCIÁCH DOSTANEME PRED ZAČIATKOM VÝPOČTU

<u>METÓDA FUNKCIE ÚŽITKU</u>

$$\max_{x \in M} \sum_{i=1}^{s} w_i f_i(x), \quad w_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{s} w_i = 1$$

! NESÚMERATEĽNÉ FUNKCIE SÚ PROBLEMATICKÉ

(3) INFORMÁCIE O PREFERENCIÁCH DOSTANEME POČAS VÝPOČTU

f_1 —— f_i

∇f_1 —— $-\nabla f_i \quad \forall i$

POROVNÁVANIE 2 FUNKCIÍ
$\rightarrow$ PREVOD NA FCIU. ÚŽITKU
NEDÁ SA DOKÁZAŤ EFICIEN.

(4) INFORMÁCIE O PREFERENCIÁCH AŽ PO UKONČENÍ VÝPOČTU

SKÚSIME λ_1 A RIEŠIME $\max_M \lambda_1^T f(x)$

SKÚSIME λ_2 ...

$\vdots$

16.05.2008 FT
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DYNAMICKÉ PROGRAMOVANIE

SYSTÉM = PREDMET NAŠEHO SKÚMANIA

TEN SKÚMAME V ČASOVOM INTERVALE $\langle t', t'' \rangle$

STAV - VŠETKY POTREBNÉ INFORMÁCIE O SYSTÉME V ČASOVOM OKAMŽIKU Z $\langle t', t'' \rangle$.

KEĎ POZNÁME DELENIE $\langle t', t'' \rangle$

$t' = t^1 < t^2 < \dots < t^N = t''$, KDE $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$.

POTOM STAV SYSTÉMU V t^i SA MUSÍ DAŤ VYJADRIŤ n-TICOU REÁLNYCH ČÍSIEL $x^i \in \mathbb{R}^n$.

MNOŽINU VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH STAVOV: $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

STAV SYSTÉMU SA MÔŽE MENIŤ IBA V ČASOVÝCH OKAMŽIKOCH t^i NA ZÁKLADE ROZHODNUTÍ - $u^i \in \mathbb{R}^m$ (USPORIADANÁ m-TICA $\mathbb{R}$-ČÍSIEL)

MNOŽINU VŠETKÝCH ROZHODNUTÍ: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$.

(NEHĽADÁME 1 VEKTOR, ALE CELÚ POSTUPNOSŤ)

ZMENA JE DANÁ TZV. STAVOVOU TRANSFORMÁCIOU

$$x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \quad \forall i = 1..N$$

DELENIE: 1) MÁME ZADANÝ POČIATOČNÝ STAV x^1.

2) MÁME ZADANÝ KONCOVÝ STAV x^{N+1}.

3) MÁME ZADANÝ x^1 AŽ x^{N+1}.

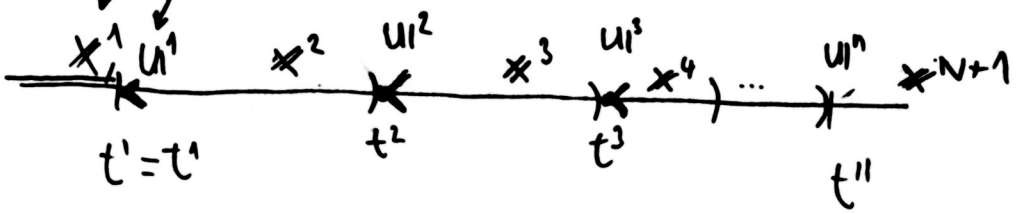
4) MÁME ZADANÚ PODMNOŽINU $X^1 \subseteq X$,

5) ALEBO $X^{N+1} \subseteq X$

6) NEPOZNÁME N A MÁME SÚČASTNE NÁJSŤ NAJMENŠIE N, PRE KTORÉ JE ÚLOHA RIEŠITEĽNÁ, POPR. PRE KTORÉ DOSTÁVAME NAJLEPŠIU HODNOTU ÚČ. FUNKCIE

AD 1) POČIATOČNÝ STAV

PRVÉ ROZHODNUTIE V ČASE $t' = t^1$.



OKAMŽIKY t^i POZNÁME VOPRED.

DEFINÍCIA: HOVORÍME, ŽE V ČASOVOM INTERVALE $\langle t', t'' \rangle$ PREBIEHA DISKRÉTNY ROZHODOVACÍ DETERMINISTICKÝ PROCES, KEĎ:

a) MÁME DANÉ DELENIE $t' = t^1 < \ldots < t^N = t''$, $N > 1$

b) x^1 JE DANÝ POČIATOČNÝ STAV

c) STAV SA MÔŽE ZMENIŤ IBA V OKAMŽIKOCH t^i A PODĽA STAVOVEJ TRANSFORMÁCIE

$$x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \quad i = 1, \ldots, N$$

x^{i+1} ZÁVISÍ IBA NA PREDCHÁDZAJÚCOM STAVE x^i A POSLEDNOM ROZHODNUTÍ u^i.

16.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DEFINÍCIA: POSTUPNOSŤ $u^1, \dots, u^N$ S VLASTNOSŤOU, ŽE: $u^i \in \mathcal{U}$ A $x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X$ $\forall i = 1, \dots, N$ NAZÝVAME PRÍPUSTNOU STRATÉGIOU.

MNOŽINU VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH STRATÉGIÍ, PRIRADENÝCH DANÉMU SYSTÉMU A DISKR., DET. ~~ROZH.~~ DYN. PR. ZNAČÍME $\mathcal{P}_N(x^1) =$ $(x^1 \in X)$

$$= \{ (u^1, \dots, u^N) \mid u^i \in \mathcal{U},\ x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X \ \forall i = 1, \dots, N \}$$

POZNÁMKA: DANÉ N, $x^1 \in X$, ALE VŽDY MÔŽEME POČÍTAŤ ÚLOHU PRE KAŽDÉ $x^1 \in X$ A V NIEKTORÝCH PRÍPADOCH I PRE KAŽDÉ $N \in \mathbb{N}$.

ABY SME MALI ÚLOHU DISKRÉTNEHO DETERM. DYNAM. PROG., MUSÍ CIEĽOVÁ FUNKCIA, KTORÚ PRIRADÍME ROZHODOVACIEMU PROCESU SPĽŇAŤ DVA POŽIADAVKY:

1) $f_1(x^1, u^1)$, $f_2(x^1, x^2, u^1, u^2)$, ...
... $f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N)$

2) MARKOVSKÁ VLASTNOSŤ

$$f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N) = \Phi\left(f_{N-1}(x^1, \dots, x^{N-1}, u^1, \dots, u^{N-1}), \varphi_N(x^N, u^N) \right)$$

$\uparrow$ DEKOMPOZIČNÝ OPERÁTOR.

PRÍKLAD: $f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x^i, u^i)$

DEKOMPOZIČNÝ OPERÁTOR JE SÚČET $+$.

ALEBO $f_N(\dots) = \min\{g_1(x^1, u^1), \dots, g_N(x^N, u^N)\}$.

DEFINÍCIA: ÚLOHOU DISKR. DETERM. DYN. PROGR. ROZUMIEME ÚLOHU $\max f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N)$ NA MNOŽINE $\mathcal{P}_N(x^1)$.

POZNÁMKA: POLOŽÍME $f_N(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x^i, u^i)$

VETA: KEĎ SÚ $g_i(x^i, u^i)$ DANÉ REÁLNE FUNKCIE, $T_i(x^i, u^i)$ DANÉ ZOBRAZENIA DEFINOVANÉ PRE $\forall i = 1, \dots, N^*$, $N^* > 1$, $x^i \in X$, $u^i \in \mathcal{U}$

A KEĎ PRE DANÉ $x^1 \in X$ PLATÍ

$x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \quad \forall i = 1, \dots, N$

A KEĎ OZNAČÍME $\max \sum_{i=1}^{N} g_i(x^i, u^i) \equiv F_N(x^1)$

A $\max \sum_{i=2}^{N} g_i(x^i, u^i) = F_{N-1}(x^2) \quad 2 \le N \le N^*$

NA MNOŽINÁCH $\mathcal{P}_N(x^1)$, RESP. $\mathcal{P}_{N-1}(x^2)$,

KDE $\mathcal{P}_{N-1}(x^2) = \{(u^2, \dots, u^N) \mid u^i \in \mathcal{U}, x^{i+1} = T_i(x^i, u^i) \in X$ PRE $\forall i = 2, \dots, N, \ x^2 \in X\}$

POTOM PLATÍ, AK $\mathcal{U}(x^1) := \{u^1 \in \mathcal{U} \mid x^2 = T_1(x^1, u^1) \in X\}$

$$F_N(x^1) = \max_{u^1 \in \mathcal{U}(x^1)} \{g_1(x^1, u^1) + F_{N-1}(x^2)\} =$$

$$= \max_{u^1 \in \mathcal{U}(x^1)} \{g_1(x^1, u^1) + F_{N-1}(T_1(x^1, u^1))\},$$

$N = 1, \dots, N^*, \quad F_0(x) = 0 \ \forall x \in X$

16.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DÔKAZ JE JEDNODUCHÝ, ALE VYNECHÁME HO, PRÍLIŠ VEĽA PÍSANIA.

ALGORITMUS:

1) PRE KAŽDÉ $x^N \in X$ POČÍTAME FUNKCIU $F_1(x^N) = \max\limits_{u^N \in \mathcal{U}(x^N)} g_N(x^N, u^N)$,

$$\mathcal{U}(x^N) = \{ u^N \in \mathcal{U} \mid x^{N+1} = T_N(x^N, u^N) \in X \}$$

X	$F_1(x^N)$	u^{*N}	$F_2(x^{N-1})$	u^{*N-1}	...	$F_N(x^1)$	u^{*1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
x^N		u^{*N}	$F_N(x^N) = g_N(x^N, u^{*N})$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					

2) PRE KAŽDÉ $x^{N-1} \in X$ POČÍTAME: $\boxed{T_{N-1}(x^{N-1}, u^{N-1})}$

$$F_2(x^{N-1}) = \max_{u^{N-1} \in \mathcal{U}(x^{N-1})} \{ g_{N-1}(x^{N-1}, u^{N-1}) + F_1(\overbrace{x^N}) \} =$$

$$= g_{N-1}(x^{N-1}, u^{*N-1}) + F_1(T_{N-1}(x^{N-1}, u^{*N-1}))$$

... ATĎ.

N-1) PRE KAŽDÉ $x^2 \in X$ POČÍTAME

$$F_{N-1}(x^2) = \max_{u^2 \in \mathcal{U}(x^2)} \{ g_2(x^2, u^2) + F_{N-2}(x^3) \}$$

N) (PRE KAŽDÉ) $x^1 \in X$

$$F_N(x^1) = \max_{u^1 \in \mathcal{U}(x^1)} \left\{ g_1(x^1, u^1) + F_{N-1}(x^2) \right\}$$

23.05.2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

(DUŠAN KNOB)

TEÓRIA HIER

KONEČNÉ MATICOVÉ HRY 2 HRÁČOV S 0 SÚČTOM

MÁME: 1. HRÁČ, KTORÝ MÁ K DISPOZÍCII $i \in \{1, \dots, n\}$ STRATÉGIÍ.
2. HRÁČ MÁ K DISPOZÍCII $j \in \{1, \dots, m\}$ STRATÉGIÍ.

HRU BUDÚ HRAŤ N-KRÁT, $N \in \mathbb{N}$, $N >> 0$.

KEĎ ZVOLÍ 1. HRÁČ STRATÉGIU i A 2. HRÁČ j, POTOM 1. HRÁČ ZÍSKA HODNOTU a_{ij}, KTORÚ DRUHÝ HRÁČ STRATÍ.

MÁME DANÚ MATICU $A = (a_{ij})_{n \times m}$

DEFINÍCIA: MNOŽINU $\{\{1,2\}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, A\}$ NAZÝVAME KONEČNÚ MATICOVÚ HRU 2 HRÁČOV S 0 SÚČ.

KEĎ HRÁ 1. HRÁČ STÁLE 1 STRATÉGIOU (HOVORÍME O ČISTEJ STRATÉGII) A 2. HRÁČ TAKTIEŽ, JE HRA NEZAUJÍMAVÁ.

OZNAČME x_i PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE 1. HRÁČ POUŽIJE STRATÉGIU i. PODOBNE y_j PRE 2. HRÁČA.

PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE SA STRETNÚ i-TA A j-TA STRATÉGIA JE $x_i y_j$.

PO N HRÁCH JE CELKOVÝ ZISK $N x^T A y$.

OZNAČME $[X] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{1}^T x = 1, x \geq \mathbb{0}\}$
$[Y] = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \mathbb{1}^T y = 1, y \geq \mathbb{0}\}$

MNOŽINU $\{ \{1,2\}, [X], [Y], x^T A y \}$ NAZÝVAME ZMIEŠANÝM ROZŠÍRENÍM MATICOVEJ HRY, PRIČOM $x^T A y$ NAZÝVAME CENOU HRY.

HĽADÁME x^* A y^*, $x^* \in [X]$, $y^* \in [Y]$, ABY $x^{*T} A y^* \geq x A y^*$ A

$$x^{*T} A y^* \leq x^{*T} A y$$

PRVÝ HRÁČ MAXIMALIZUJE CENU HRY A DRUHÝ JU MINIMALIZUJE.

DEFINÍCIA: STRATÉGIE x^* A y^* NAZVEME OPTIMÁLNYMI STRATÉGIAMI A $x^{*T} A y^*$ OPTIMÁLNOU CENOU HRY.

VETA 1: KEĎ SÚ x^*, y^* A $\tilde{x}, \tilde{y}$ DVE RÔZNE OPTIMÁLNE STRATÉGIE, POTOM

$$x^{*T} A y^* = \tilde{x}^T A \tilde{y}.$$

DÔKAZ: $x^{*T} A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A \tilde{y} \leq \tilde{x}^T A y^* \leq x^* A y^* \leq$

$$\leq x^{*T} A \tilde{y}. \square$$

LEMMA: KEĎ JE $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times m}$

$\alpha = 1 - \min_{i,j} a_{ij}$. POTOM $\bar{A} \equiv A + \alpha I > 0$.

DÔKAZ: $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \alpha \geq \min_{i,j} a_{ij} + \alpha = 1 \Rightarrow \bar{A} > 0$

23. 05. 2008 Fr
PETER ČERNO

NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

VETA 2: KEĎ SÚ x^0 y^0 OPTIMÁLNE RIEŠENIA LP:

(P) $\min_M \mathbb{1}^T x \qquad M = \{x \mid \bar{A}^T x \geq \mathbb{1},\ x \geq \mathbb{0}\}$

(D) $\max_N \mathbb{1}^T y \qquad N = \{y \mid \bar{A}\, y \leq \mathbb{1},\ y \geq \mathbb{0}\}$

POTOM $x^* = \dfrac{x^0}{\mathbb{1}^T x^0}$, $y^* = \dfrac{y^0}{\mathbb{1}^T y^0}$ SÚ OPTIMÁLNE STRATÉGIE A $x^{*T} A\, y^*$ JE OPTIMÁLNA CENA HRY.

DÔKAZ: PRETOŽE $\mathbb{0} \in N \Rightarrow N \neq \emptyset$.

$\bar{A} > 0 \Rightarrow N$ JE OHRANIČENÁ

$\Rightarrow$ ÚLOHA (D) MÁ ASPOŇ 1 OPT. RIEŠENIE y^0.

Z PRINCÍPU DUALITY $\Rightarrow$ (P) MÁ OPTIMÁLNE x^0 A PLATÍ $\mathbb{1}^T x^0 = \mathbb{1}^T y^0$.

Z DEFINÍCIE x^*, y^* PLYNIE, ŽE x^*, y^* SÚ PRÍPUSTNÉ STRATÉGIE.

ZVOLME $x \in [X]$, TJ. $x \geq \mathbb{0}$ A $\mathbb{1}^T x = 1$ A $y \in [Y]$, TJ. $y \geq \mathbb{0}$ A $\mathbb{1}^T y = 1$.

PRE y^0 PLATÍ $\bar{A}\, y^0 \leq \mathbb{1} \Rightarrow x^T \bar{A}\, y^0 \leq \mathbb{1}^T x = 1$.

$\Rightarrow x^T A\, y^* \leq \dfrac{1}{\mathbb{1}^T y^0}$.

PRE x^0 PLATÍ $\bar{A}^T x^0 \geq \mathbb{1} \Rightarrow x^{0T} \bar{A} \geq \mathbb{1}^T \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{0T} \bar{A}\, y \geq \mathbb{1}^T y = 1 \Rightarrow x^{*T} A\, y \geq \dfrac{1}{\mathbb{1}^T x^0} = \dfrac{1}{\mathbb{1}^T y^0}$.

$$\Rightarrow \quad x^{*T} \bar{A} y \geq x^T \bar{A} y^* \quad \text{PRE } \forall x \in [X], y \in [Y].$$

PO DOSADENÍ ZA $\bar{A}$:

$$x^{*T}(A + \alpha I) y \geq x^T (A + \alpha I) y^*$$

$$x^{*T} A y + \alpha \cdot 1 \geq x^T A y^* + \alpha \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad x^{*T} A y \geq x^T A y^* \quad \text{PRE } \forall x \in [X], y \in [Y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x^{*T} A y \geq x^{*T} A y^* \geq x^T A y^*}} \quad \square$$

DÔSLEDOK: VŽDY EXISTUJÚ OPTIMÁLNE STRATÉGIE KONEČNEJ MATICOVEJ HRY 2 HRÁČOV S 0 SÚČTOM.

21.03.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKL. OPTIMALIZÁCIE

SIMPLEXOVÁ METÓDA VIE RIEŠIŤ IBA ÚLOHY:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

VIEME PREVIESŤ KAŽDÚ ÚLOHU LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA NA SIMPLEX. METÓDU

PRÍKLAD: CHCEME RIEŠIŤ ÚLOHU $\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ ZA PODMIENKY $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

NAHRADÍME x_i ROZDIELOM $x_i = x_i^+ - x_i^-$,

KDE $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$, $x_i^- = \max\{0, -x_i\}$

$x_i^+, x_i^- \geq 0$.

ÚLOHU MÔŽEME PREVIESŤ NA:

$$\min \mathbf{c}^T (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-)$$
$$A(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geq 0$$

$$\sim$$

$$\min \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^+ \\ \mathbf{x}^- \end{pmatrix} \geq 0$$

RIEŠENIE JE POTOM: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$

PRÍKLAD: $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, ZA PODMIENOK:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i , \qquad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i , \qquad i = k+1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 , \qquad j = 1, \dots, n$$

PREVEDIEME NA: $\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 . c_i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i , \qquad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i = b_i , \qquad i = k+1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 , \quad y_i \geq 0$$

TJ. $\min \begin{pmatrix} \mathbb{c} \\ \mathbb{0}_m \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{y} \end{pmatrix}$

$$\left(\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{y} \end{pmatrix} = \mathbb{b}$$

KDE $\begin{pmatrix} \mathbb{x} \\ \mathbb{y} \end{pmatrix} \geq \mathbb{0}_{n+m}$

21.03.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

SIMPLEXOVÁ METÓDA

PRÍKLAD:

$$\min\ (x_2 - 3x_3 + 2x_5)$$

NAJSKÔR ZNEZÁPORNÍME PRAVÉ STRANY

$$\begin{aligned}
\boxed{-x_1} - 3x_2 + x_3 \qquad\qquad - 2x_5 &= -7\\
-2x_2 + 4x_3 + \boxed{x_4} \qquad\qquad &= 12\\
-4x_2 + 3x_3 + \qquad 8x_5 + \boxed{x_6} &= 10
\end{aligned}$$

BÁZICKÉ PREMENNÉ

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3x_2 + x_3 - 2x_5 + 7\\
x_4 &= +2x_2 - 4x_3 + 12\\
x_6 &= +4x_2 - 3x_3 - 8x_5 + 10
\end{aligned}$$

ÚČELOVÁ FUNKCIA:

$$c_0 + \sum_{j \in N} (c_j - z_j)\, x_j$$

−		0	1	−3	0	2	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1	3	−1	0	2	0	7
0	x_4	0	−2	4	1	0	0	12
0	x_6	0	−4	3	0	8	1	10
$c-z$		0	1	−3	0	2	0	0

← KĽÚČOVÝ RIADOK

$$= -\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}$$

KĽÚČOVÝ STĹPEC PRE VÝBER NEBÁZICKEJ PREMENNEJ, KT. VLOŽÍME DO BÁZY

ZAUJÍMAJÚ SA O POMERY: $\frac{12}{4}$, $\frac{10}{3}$,

VYBERIEM NAJMENŠÍ $\frac{12}{4} = 3$, PIVOT JE x_4

		0	1	-3	0	2	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_1	1	$\frac{5}{2}$ PIVOT	0	$\frac{1}{4}$	2	0	10
-3	x_3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	3
0	x_6	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1	1
		0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	2	0	9

$$1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

NAJSKÔR SPOČÍTAME KRITICKÝ RIADOK,
MÁME ZÁPORNÉ ČÍSLO V KRITERIÁLNOM RIADKU
$\Rightarrow$ MUSÍME DOPOČÍTAŤ TABUĽKU!

		0	1	-3	0	2	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_2	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	4
-3	x_3		0	1			0	5
0	x_6		0	0			1	11
		$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	11

$$(0, 4, 5, 0, 0, 11)$$

28.03.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

HĽADANIE BÁZICKÉHO PRÍPUSTNÉHO RIEŠENIA

$$\begin{aligned} \max\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \max\ & -\mathbf{u} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

TU MÁME PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$

INÁ MOŽNOSŤ: $\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} - M \cdot \mathbf{u}$
KDE M JE VEĽMI VEĽKÉ ČÍSLO

TZV. BIG MOTHER METHOD

PRÍKLAD:

$$\begin{aligned} \min\ & 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & u \\ x_1 + x_2 - x_3 - y_1 + u &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + y_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad u \geq 0$$

		0	0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	u	
1	u	1	1	-1	-1	0	1	2
0	y_2	-1	2	0	0	1	0	2
		-1	-1	1	1	0	0	-2

NAJSKÔR VYBERÁME, KTORÚ NEBÁZICKÚ PREMENNÚ DÁME DO BÁZE

		0	0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	u	
0	x_1	1	1	-1	-1	0	1	2
0	y_2	0	3	-1	-1	1	1	4
		0	0	0	0	0	1	0

MÔŽME ZAČAŤ PRACOVAŤ S PÔVODNOU ÚLOHOU

		5	-2	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
5	x_1	1	1	-1	-1	0	2
0	y_2	0	3	-1	-1	1	4
		0	-7	6	5	0	-10

		5	-2	1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
5	x_1	1	0				2/3
-2	x_2	0	1	-1/3	-1/3	1/3	4/3
		0	0	11/3	8/3	7/3	-2/3

$-\frac{7}{3}+6=\frac{11}{3}$

$+5 \quad 8/3$

$\frac{7}{3}+0$

$28/3-10=-2/3$

$2-4/3=2/3$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 0\right)^T$$

VÝSLEDOK: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ MINIMUM JE 2/3

28.03.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

PRÍKLAD:

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq -2$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min \quad -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad + y_1 \quad &= 4 \\
x_1 - x_2 + x_3 \quad - y_2 \quad &= 2 \\
x_1 \quad - y_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 5
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

BIG MOTHER $\Rightarrow$

$$\min \quad -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + Mu_1 + Mu_2 + Mu_3$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad + y_1 \quad &= 4 \\
x_1 - x_2 + x_3 \quad - y_2 \quad + u_1 \quad &= 2 \\
x_1 \quad - y_3 \quad + u_2 &= 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 \quad + u_3 &= 5
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

		-2	-3	0	0	0	0	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	u_3	
0	y_1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	4
M	u_1	1	-1	1	0	-1	0	1	0	0	2
M	u_2	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	1
M	u_3	1	1	1	0	0	0	0	0	1	5
		$-2-3M$	-3	$-2M$	0	$+M$	$+M$	0	0	0	$-8M$

DOKONČIT ZA DCV

04.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		-2 x_1	-3 x_2	0 x_3	0 y_1	0 y_2	0 y_3	M u_1	M u_2	M u_3	
0	y_1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0	3
M	u_1	0	-1	1	0	-1	1	1	-1	0	1
-2	x_1	1	0	0	0	0	-1	0	1	0	1
M	u_3	0	1	1	0	0	1	0	-1	1	4
		0	-3	-2M	0	M	-2-2M	0	2+3M	0	2-5M

		-2 x_1	-3 x_2	0 x_3	0 y_1	0 y_2	0 y_3	M u_1	M u_2	M u_3	
0	y_1	0	2	-1	1	1	0	-1	0	0	2
0	y_3	0	-1	1	0	-1	1	1	-1	0	1
-2	x_1	1	-1	1	0	-1	0	1	0	0	2
M	u_3	0	2	0	0	1	0	-1	-2	1	3
		0	-5-2M	2	0	-2-M	0	2+2M	M	0	4-3M

		-2 x_1	-3 x_2	0 x_3	0 y_1	0 y_2	0 y_3	M u_3
-3	x_2							
0	y_3							
-2	x_1							
M	u_3							

u_2, u_3 UŽ NEMUSÍME UVAŽOVAT !!!

VYHNUTIE SA CYKLOM (STAČÍ NEDEGENEROVANOSŤ)

LP:

$$\min \ \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$
$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$$
$$\mathbb{x} \geq \mathbb{0}$$

$\rightarrow$

LP_ε:

$$\min \ \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$
$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b} + \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon)^j \mathbb{A}_{\cdot j}$$
$$\mathbb{x} \geq \mathbb{0}$$
$$\varepsilon > 0$$

VETA: KU KAŽDEJ ÚLOHE LP $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ NENASTÁVA V ÚLOHE LP_ε DEGENERÁCIA V ŽIADNOM KROKU SIMPL. METÓDY.

VETA: KEĎ JE $x^*(\varepsilon)$ OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY LP_ε, POTOM $x^* = \lim_{\varepsilon \to 0} x^*(\varepsilon)$ JE OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY LP.

VETA: KEĎ MÁ ÚLOHA LP OPTIMÁLNE RIEŠENIE, MÁ HO AJ LP_ε PRE $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

PRÍKLAD:

		-10	57	9	24	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	$1/2$	$-11/2$	$-5/2$	9	1	0	0	$0 + \frac{1}{2}\varepsilon^1 - \frac{11}{2}\varepsilon^2 \ldots$
0	x_6	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	$0 + \frac{1}{2}\varepsilon^1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2 \ldots$
0	x_7	1	0	0	0	0	1	1	1
		-10	57	9	24	0	0	0	0

04. 04. 2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		-10	57	9	24	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
-10	x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	$0+\varepsilon-11\varepsilon^2-5\varepsilon^3+18\varepsilon^4+\varepsilon^5$
0	x_6	0	4	2	-8	-1	1	0	
0	x_7	0	11	5	-18	-2	0	1	
		0					0	0	

DUALITA:

(P):

$$\min \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$
$$\mathbb{A}\mathbb{x} \geq \mathbb{b}$$
$$\mathbb{x} \geq \mathbb{0}$$

(D):

$$\max \mathbb{b}^T \mathbb{y}$$
$$\mathbb{A}^T \mathbb{y} \leq \mathbb{c}$$
$$\mathbb{y} \geq \mathbb{0}$$

DUÁLNA ÚLOHA K ÚLOHE (D) JE ZREJME (P)

(P):

$$-\min -\mathbb{b}^T \mathbb{y}$$
$$-\mathbb{A}^T \mathbb{y} \geq -\mathbb{c}$$
$$\mathbb{y} \geq \mathbb{0}$$

(D):

$$-\max -\mathbb{c}^T \mathbb{x}$$
$$-(\mathbb{A}^T)^T \mathbb{x} \leq -\mathbb{b}$$
$$\mathbb{x} \geq 0$$

$$\equiv \quad \min \mathbb{c}^T \mathbb{x}, \quad \mathbb{A}\mathbb{x} \geq \mathbb{b}, \quad \mathbb{x} \geq \mathbb{0}$$

PRÍKLAD: NÁJDIME DUÁLNU ÚLOHU K

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i \in I_1 \subset I = \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in I \setminus I_1$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in J \subset \{1, \dots, n\}$$

$$\min \sum_{j \in J_1} c_j x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} c_j x_j^+ + \sum_{j \in J \setminus J_1} -c_j x_j^-$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} a_{ij} x_j^+ + \sum_{j \in J \setminus J_1} -a_{ij} x_j^- \geq b_i \qquad i \in I_1 \qquad y_i$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} a_{ij} x_j^+ + \sum_{j \in J \setminus J_1} -a_{ij} x_j^- \geq b_i \qquad i \in I \setminus I_1 \qquad y_i^+$$

$$\sum_{j \in J_1} -a_{ij} x_j + \sum_{j \in J \setminus J_1} -a_{ij} x_j^+ + \sum_{j \in J \setminus J_1} +a_{ij} x_j^- \geq -b_i \qquad i \in I \setminus I_1 \qquad y_i^-$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in J_1$$

$$x_j^+, x_j^- \geq 0 \qquad j \in J \setminus J_1$$

04.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT 046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\max \sum_{i\in I_1} b_i y_i + \sum_{i\in I\setminus I_1} b_i y_i^+ + \sum_{i\in I\setminus I_1} -b_i y_i^-$$

$$\sum_{i\in I_1} a_{ij} y_1 + \sum_{i\in I\setminus I_1} a_{ij} y_i^+ + \sum_{i\in I\setminus I_1} -a_{ij} y_i^- \leq c_j \quad j\in J_1$$

$$\sum_{i\in I_1} a_{ij} y_i + \sum_{i\in I\setminus I_1} a_{ij} y_i^+ + \sum_{i\in I\setminus I_1} -a_{ij} y_i^- \leq c_j \quad j\in J\setminus J_1$$

$$\sum_{i\in I_1} -a_{ij} y_i + \sum_{i\in I\setminus I_1} -a_{ij} y_i^+ + \sum_{i\in I\setminus I_1} a_{ij} y_i^- \leq -c_j \quad j\in J\setminus J_1$$

KEĎ POLOŽÍME $y_i = y_i^+ - y_i^-$

DOSTÁVAME:

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j\in J_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j\in J\setminus J_1$$

$$y_i \geq 0 \quad i\in I_1$$

11.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

PRÍKLAD:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in \{1,\dots,m\} \quad \xRightarrow{\text{DUÁLNA ÚLOHA}} \quad \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in \{1,\dots,m\} \quad x_j \geq 0 \quad j \in \{1,\dots,n\} \quad \Rightarrow \quad \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j \in \{1,\dots,n\}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in \{1,\dots,m\} \quad \Rightarrow \quad \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{m} +a_{ij} y_i = c_j \quad j \in \{1,\dots,n\} \quad y_i \geq 0 \quad i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I_1 \subset \{1,\dots,m\} \qquad = b_i \quad i \in I \setminus I_1 \quad \Rightarrow \quad \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j \in \{1,\dots,n\} \quad y_i \geq 0 \quad i \in I_1$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in \{1,\dots,m\} \qquad x_j \geq 0 \quad j \in J_1 \quad \Rightarrow \quad \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j \in J_1 \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad j \in \{1,\dots,n\} \setminus J_1$$

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i \in I_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i \in I \setminus I_1$$

$$x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

$$y_i \geq 0 \quad i \in I_1$$

18.04.2008 25.04.2008	7.30

$$\min \mathbb{c}^T \mathbb{x}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

$$\mathbb{x} \geq \mathbb{0}$$

$$\max \mathbb{b}^T \mathbb{y}$$

$$\mathbb{A}^T \mathbb{y} \leq \mathbb{c}$$

KEĎ KRITERIÁLNY RIADOK:

$$\mathbb{c}^T - \mathbb{c}_B^T \mathbb{B}^{-1} \mathbb{A} \geq \mathbb{0}$$

POTOM $\mathbb{y} = (\mathbb{c}_B^T \mathbb{B}^{-1})^T$ JE PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE DUÁLNEJ ÚLOHY

11.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\min \; 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 8x_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2\tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 &\geq 80 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 40 \\ x_1 + 2x_3 &\geq 20 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2\tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 - x_5 &= 80 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_6 &= 40 \\ x_1 + 2x_3 - x_7 &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 - 2\tfrac{1}{2}x_3 - 3x_4 + x_5 &= -80 \\ -4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_6 &= -40 \\ -x_1 - 2x_3 + x_7 &= -20 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

		10	10	20	8	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	-2	-2	$-2\frac{1}{2}$	-3	1	0	0	-80
0	x_6	0	-4	-1	-2	0	1	0	-40
0	x_7	-1	0	-2	0	0	0	1	-20
		10	10	20	8	0	0	0	0

KLÚČOVÝ RIADOK

KRIT. RIADOK ≥ 0

MÔŽEME POUŽIŤ DUÁLNU SIMPLEXOVÚ METÓDU

AK BY SME NAŠLI RIADOK SO ZÁPORNÝM PRAVÝM KOEF, KTORÝ MÁ IBA NEZÁPORNÉ ĽAVÉ KOEF. $\Rightarrow$ D JE NEOBM. $\Rightarrow$ P NEMÁ PRÍP. RIEŠENIE

$$\min\left\{\frac{10}{|-2|}, \frac{10}{|-2|}, \frac{20}{|-2{,}5|}, \frac{8}{|-3|}\right\}$$

VEZMEME NAJMENŠÍ ZAUJÍMAJÚ NÁS IBA ZÁPORNÉ ĽAVÉ KOEF.

		10	10	20	8	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
8	x_4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{80}{3}$
0	x_6	$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{4}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{40}{3}$
0	x_7	-1	0	-2	0	0	0	1	-20
		$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{40}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{640}{3}$

$$\min\left\{\frac{14/3}{|-1|}, \frac{40/3}{|-2|}\right\}$$

		10	10	20	8	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
8	x_4	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{40}{3}$
0	x_6	0	$-\frac{8}{3}$	-2	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{40}{3}$
10	x_1	1	0	2	0	0	0	-1	20
		1	$\frac{14}{3}$	4	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	$-\frac{920}{3}$

$$\min\left\{\frac{14/3}{|-8/3|}, \frac{4}{|-2|}, \frac{8/3}{|-2/3|}\right\}$$

11.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT 046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		10	10	20	8	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
8	x_4	0	0	−1	1	−1/2	1/4	1	10
10	x_2	0	1	3/4	0	1/4	−3/8	−1/2	5
10	x_1	1	0	2	0	0	0	−1	20
		0	0	1/2	0	3/2	7/4	7	−330

MÁME PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE PRIM. ÚLOHY

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T = (20, 5, 0, 10, 0, 0, 0)^T$$

ALE TAKISTO AJ DUÁLNEJ ÚLOHY $\Rightarrow \underline{\underline{x^* = (20, 5, 0, 10)^T}}$

HĽADÁME $y = (c_B^T B^{-1})^T$

$$\frac{3}{2} = 0 - (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1$$

$$\frac{7}{4} = 0 - (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_2$$

$$7 = 0 - (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = y_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 7\right)^T}}$$

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\max \quad 5x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$3x_1 + x_2 \le 11$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad \underline{\underline{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}}}$$

1. GOMORIHO ALGORITMUS

$$\max \quad 5x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 11$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \qquad x_1, x_2, \underline{\underline{x_3, x_4}} \in \mathbb{Z}$$

V 1. FÁZE ZABUDNEME NA PODMIENKU CELOČÍSELNOSTI A ZAVEDIEME 1 ROVNICU

$x_0 = 5x_1 + 2x_2$, TJ. $x_0 - 5x_1 - 2x_2 = 0$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
(c-z)	x_0	-5	-2	0	0	0
0	x_3	2	2	1	0	9
0	x_4	3	1	0	1	11
		-5	-2	0	0	0

← TOTO TU NETREBA PÍSAŤ !

$-\min -(\dots)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_0	0	$-1/3$	0	$5/3$	$55/3$
0	x_3	0	$1/3$	1	$-2/3$	$5/3$
-5	x_1	1	$1/3$	0	$1/3$	$11/3$

KRITERIÁLNY RIADOK

SEM DOPÍŠEME s_1

		x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_0	0	0	$1/4$	$3/2$	$75/4$
-2	x_2	0	1	$3/4$	$-1/2$	$5/4$
-5	x_1	1	0	$-1/4$	$1/2$	$13/4$

<u>UPRAVENÉ SCHÉMA</u>:

TOLKO STĹPCOV, KOĽKO JE NEBÁZICKÝCH PREM.

		x_3	x_4	
FORMÁLNE:	x_0	$1/4$	$3/2$	$75/4$
$x_3 - x_3 = 0 \leftarrow$	x_3	-1	0	0
$x_4 - x_4 = 0 \leftarrow$	x_4	0	-1	0
	x_2	$3/4$	$-1/2$	$5/4$
	x_1	$-1/4$	$1/2$	$13/4$
	s_1	$-1/4$	$-1/2$	$-3/4$

$d_0^j \quad j = 0, \dots, n+m$

HĽADÁME

$k = \min \{ j = 0, \dots, n+m$ TAKÉ, ŽE $d_0^j \notin \mathbb{Z} \}$

VYJDE $k = 0$

$\leftarrow$ DOPLNÍME

$$x_0 + \underbrace{\frac{1}{4}}_{0+\frac{1}{4}} x_3 + \underbrace{\frac{3}{2}}_{1+\frac{1}{2}} x_4 = \underbrace{\frac{75}{4}}_{18+\frac{3}{4}}$$

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

DEFINUJEME SI PREMENNÚ REZU:

$$s_1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{3}{4}$$

DO TABUĽKY PRIDÁME STĹPEC PRE s_1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
x_0	0	0	1/4	3/2	0	75/4
x_2	0	1	3/4	-1/2	0	5/4
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	13/4
s_1	0	0	-1/4	-1/2	1	-3/4

← JEDINÁ ZÁPORNÁ PREM.

A VYKONÁME KROK DUÁLNEJ SIMPLEXOVEJ METÓDY

$$\min\left\{\frac{1/4}{|-1/4|}, \frac{3/2}{|-1/2|}\right\}$$

OPÄŤ SI TU NECHÁME MIESTO

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
x_0	0	0	0	1	1	18
x_2	0	1	0	-2	3	-1
x_1	1	0	0	1	-1	4
x_3	0	0	1	2	-4	3

← MÁME ZÁPORNÉ ČÍSLO

UPRAVENÉ SCHÉMA:

	s_1	x_4	
x_0	1	1	18
x_3	-4	2	3
x_4	0	-1	0
x_2	3	-2	-1
x_1	-1	1	4

NESMIEME HÝBAŤ S PORADÍM! KVÔLI L-METÓDE

NOVÝ STĹPEC

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$17\frac{1}{2}$
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_3	0	1	1	0	-1	0	2
s_2	0	-1/2	0	0	-1/2	1	-1/2

SAMÉ KLADNÉ (NEZÁPORNÉ) ČÍSLA

DOPLNÍME

$$\min\left\{\frac{1/2}{|-1/2|}, \frac{5/2}{|-1/2|}\right\}$$

OPÄŤ JEDINÉ ZÁPORNÉ ČÍSLO

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

UPRAVENÉ SCHÉMA :

	s_1	x_2		d_0^j
x_0	5/2	1/2	35/2	
x_3	−1	1	2	
x_4	−3/2	−1/2	1/2	
x_2	0	−1	0	
x_1	1/2	1/2	7/2	
s_2	−1/2	−1/2	−1/2	← DOPLNÍME

$k = \min\{ j = 0, \dots, m+n : d_0^j \notin \mathbb{Z} \}$

OPÄŤ $k = 0$

$$x_0 + \underbrace{5/2}_{2+\frac{1}{2}} s_1 + \underbrace{1/2}_{\frac{1}{2}} x_2 = \underbrace{35/2}_{17+\frac{1}{2}}$$

$$s_2 - \frac{1}{2} s_1 - \frac{1}{2} x_2 = -\frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_0	0	0	0	0	0	2	17
x_4	0	0	0	1	1	−1	1
x_1	1	0	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	0	−2	2	1
x_2	0	1	0	0	1	−2	1

UPRAVENÉ SCHÉMA:

	s_1	s_2	
x_0	2	1	17
x_3	-2	2	1
x_4	-1	-1	1
x_2	1	-2	1
x_1	0	1	3
s_1	-1	0	0
s_2	0	-1	0

VIDÍME, ŽE OPTIMÁLNE RIEŠENIE JE

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ A HODNOTA ÚČELOVEJ FUNKCIE JE 17.

18.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

1. GOMORIHO ALGORITMUS

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 = 15$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

ZAVEDIEME NOVÚ ROVNICU $x_0 = 2x_1 + x_2$,
TJ. $x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$

		-2 x_1	-1 x_2	0 x_3	0 x_4	
	x_0	-2	-1	0	0	0
0	x_3	2	6	1	0	15
0	x_4	1	-1	0	1	1

		-2 x_1	-1 x_2	0 x_3	0 x_4	
	x_0	0	-3	0	2	2
0	x_3	0	8	1	-2	13
-2	x_1	1	-1	0	1	1

		-2	-1	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
	x_0	0	0	3/8	5/4	55/8
-1	x_2	0	1	1/8	-1/4	13/8
-2	x_1	1	0	1/8	3/4	21/8

UPRAVENÉ SCHÉMA:

	x_3	x_4		d_0^j
x_0	3/8	5/4	55/8	
x_3	-1	0	0	
x_4	0	-1	0	
x_2	1/8	-1/4	13/8	
x_1	1/8	3/4	21/8	
s_1	-3/8	-1/4	-7/8	

$k = \min\{ j \mid d_0^j \notin \mathbb{Z} \}$

VYBER $k = 0$

PLATÍ $x_0 + \underbrace{3/8}_{3/8} x_3 + \underbrace{5/4}_{1+1/4} x_4 = \underbrace{55/8}_{6+7/8}$

DEFINUJEME PREDENNÚ REZU:

$$s_1 - 3/8\, x_3 - 1/4\, x_4 = -7/8$$

18. 04. 2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
	x_0	0	0	3/8	5/4	0	55/8
-1	x_2	0	1	1/8	-1/4	0	13/8
-2	x_1	1	0	1/8	3/4	0	21/8
	s_1	0	0	-3/8	-1/4	1	-7/8

VYKONÁJTE KROK DUÁLNEJ SIMPLEXOVEJ METÓDY

$$\min\left\{\frac{3/8}{|-3/8|}, \frac{5/4}{|-1/4|}\right\}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	
	x_0	0	0	0	1	1	6
-1	x_2	0	1	0	-1/3	1/3	4/3
-2	x_1	1	0	0	2/3	1/3	7/3
0	x_3	0	0	1	2/3	-8/3	7/3

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{21}{8} - \frac{7}{24} = \frac{63-7}{24} = \frac{56}{24} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{13}{8} - \frac{7}{24} = \frac{39-7}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

UPRAVENÉ SCHÉMA:

	x_4	s_1	d_0^j
x_0	1	1	6
x_3	2/3	-8/3	7/3
x_4	-1	0	0
x_2	-1/3	1/3	4/3
x_1	2/3	1/3	7/3
s_1	0	-1	0
s_2	-2/3	-1/3	-1/3

$k = \min\{j \mid d_0^j \notin \mathbb{Z}\}$

VIDE $k=1$

PLATÍ $x_3 + \underbrace{2/3}_{2/3}\, x_4 \underbrace{- 8/3}_{-3+1/3}\, s_1 = \underbrace{7/3}_{2+1/3}$

25. 04. 2008 7.30
02. 05. 2008 ODPADÁ CVIKO
09. 05. 2008 ODPADÁ CVIKO
16. 05. 2008 7.30

DONIEST INDEX

$$s_2 = 1/3\, s_1 - 2/3\, x_4 = -1/3$$

18.04.2008 FT
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_0	0	0	0	1	1	0	6
x_2	0	1	0	-1/3	1/3	0	4/3
x_1	1	0	0	2/3	1/3	0	7/3
x_3	0	0	1	2/3	-1/3	0	7/3
s_2	0	0	0	-2/3	-1/3	1	-1/3

$$\min\left\{\frac{1}{|-2/3|}, \frac{1}{|-1/3|}\right\}$$

VŠIMNIME SI, ŽE NEBÁZICKÝCH PROMENNÝCH JE STÁLE ROVNAKO

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
x_0	0	0	0	0	1/2	3/2	11/2
x_2	0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2
x_1	1	0	0	0	0	1	2
x_3	0	0	1	0	-3	1	2
x_4	0	0	0	1	1/2	-3/2	1/2

	s_1	s_2		d_0^j
x_0	1/2	3/2	11/2	
x_3	-3	1	2	
x_4	1/2	-3/2	1/2	
x_2	1/2	-1/2	3/2	
x_1	0	1	2	
s_3	-1/2	-1/2	-1/2	

$$k = \min\{ j \mid d_0^j \notin \mathbb{Z} \}$$

VIDE $k = 0$

← DOPLNÍME

$$x_0 + 1/2\, s_1 + 3/2\, s_2 = 11/2$$
$$\Rightarrow s_3 - 1/2\, s_1 - 1/2\, s_2 = -1/2$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_0	0	0	0	0	1/2	3/2	0	11/2
x_2	0	1	0	0	1/2	-1/2	0	3/2
x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_3	0	0	1	0	-3	1	0	2
x_4	0	0	0	1	1/2	-3/2	0	1/2
s_3	0	0	0	0	-1/2	-1/2	1	-1/2

DOPLNÍME

$$\min\left\{\frac{1/2}{|-1/2|}, \frac{3/2}{|-1/2|}\right\}$$

DO BÁZE VSTUPUJE s_1 ... BUDE TO POSLEDNÁ TABUĽKA

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
x_0	0	0	0	0	0	1	1	5
x_2	0	1	0	0	0	-1	1	1
x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
x_3	0	0	1	0	0	4	-6	5
x_4	0	0	0	1	0	-2	1	0
s_1	0	0	0	0	1	1	-2	1

AK BY SME NÁHODOU EŠTE POKRAČOVALI, ŠKRTNEME RIADOK AO STĹPEC PRE s_1.

DOSTALI SME OPTIMÁLNE RIEŠENIE $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

HODNOTA ÚČELOVEJ FUNKCIE JE 5.

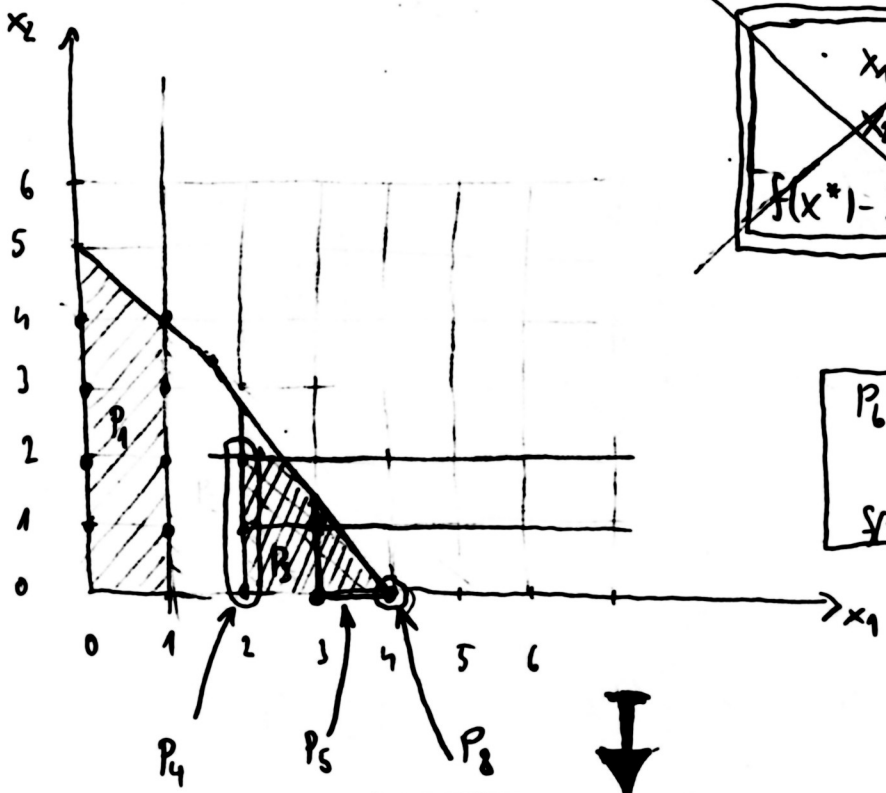
25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

A820

PRÍKLAD: BRANCH & BOUND + DAKIN MODIFIKÁCIA (PREHĽADÁVANIE DO HĹBKY)

$$\max \; 17x_1 + 12x_2$$
$$10x_1 + 7x_2 \le 40$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$



P_0: $x_1 = 1{,}67$, $x_2 = 3{,}33$, $f(x^*) = 68{,}33$

$x_1 \le 1$: P_1: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $f(x^*) = 65$

$x_1 \ge 2$: P_2: $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}86$, $f(x^*) = 68{,}29$

$x_2 \le 2$: P_3: $x_1 = 2{,}6$, $x_2 = 2$, $f(x^*) = 68{,}2$

$x_2 \ge 3$: P_{10}: $\emptyset$

$x_1 \le 2$: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $f(x^*) = 52$

$x_1 \ge 3$: P_5: $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}43$, $f(x^*) = 68{,}14$

$x_2 \le 1$: P_6: $x_1 = 3{,}3$, $x_2 = 1$, $f(x^*) = 68{,}1$

$x_2 \ge 2$: P_9: $\emptyset$

$x_1 \le 3$: P_7: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $f(x^*) = 63$

$x_1 \ge 4$: P_8: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $f(x^*) = 68$

NOVÝ BOUND

PRÍKLAD: $\max\ x_1+2x_2$

$$6x_1+5x_2 \le 27$$
$$2x_1+6x_2 \le 21$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$-\min\ -x_1-2x_2$$
$$6x_1+5x_2+x_3 = 27$$
$$2x_1+6x_2+x_4 = 21 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \quad \in \mathbb{Z}$$

		-1	-2	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	5	1	0	27
0	x_4	2	6	0	1	21
		-1	-2	0	0	0

$\boxed{P_0}$

		-1	-2	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	x_3	13/3	0	1	$-5/6$	13/2
-2	x_2	1/3	1	0	1/6	7/2
		$-1/3$	0	0	1/3	7

$\boxed{P_0}$

		-1	-2	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
-1	x_1	1	0	3/13	$-5/26$	57/26
-2	x_2	0	1	$-1/13$	3/13	36/13
		0	0	1/13	7/26	201/26

$\boxed{P_0^{OPT}}$

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\boxed{P_0:\ x_1 = 2\tfrac{5}{26} \quad x_2 = 2\tfrac{10}{13} \qquad f^* = 7{,}73}$$

$x_1 \le 2$

P_1

$x_1 + r_1 = 2 \qquad r_1 \ge 0,\ r_1 \in \mathbb{Z}$

Z POSLEDNEJ TABUĽKY:

$$\begin{array}{rl} - & x_1 + 3/13\, x_3 + (-5/26)\, x_4 = 57/26 \\ + & x_1 + r_1 = 2 \\ \hline & -3/13\, x_3 + 5/26\, x_4 + r_1 = -5/26 \end{array}$$

	-1	-2	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	
x_1	1	0	3/13	-5/26	0	57/26
x_2	0	1	-1/13	3/13	0	36/13
r_1	0	0	-3/13	5/26	1	-5/26
	0	0	1/13	7/26	0	209/26

$\boxed{P_1}$

← JEDINÉ ZÁPORNÉ ČÍSLO

↳ NEZÁPORNÝ KRITERIÁLNY RIADOK

⇒ MÔŽEME POUŽIŤ DUÁLNU SIMPLEXOVÚ METÓDU

	-1	-2	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	
x_1	1	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	1/6	-1/3	$2\frac{5}{6}$
x_3	0	0	1	-5/6	-13/3	5/6
	0	0	0	1/3	1/3	23/3

$\boxed{P_1^{OPT}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1: \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2\frac{5}{6} \\ f^* = 7{,}67 \end{array}}$$

$x_2 \leq 2$

P_2 :

$$x_2 + r_2 = 2 \qquad r_2 \geq 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{rl} - & x_2 + \frac{1}{6} x_4 - \frac{1}{3} r_1 = 2\frac{5}{6} \\ + & x_2 + r_2 = 2 \\ \hline & r_2 - \frac{1}{6} x_4 + \frac{1}{3} r_1 = -\frac{5}{6} \end{array}$$

		-1	-2	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	
-1	x_1	1	0	0	0	1	0	2
-2	x_2	0	1	0	1/6	-1/3	0	$2\frac{5}{6}$
0	x_3	0	0	1	-5/6	-13/3	0	5/6
0	r_2	0	0	0	-1/6	1/3	1	-5/6
		0	0	0	1/3	1/3	0	23/3

$\boxed{P_2}$

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		-1	-2	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	
-1	x_1	1	0	0	0	1	0	2
-2	x_2	0	1	0	0	0	1	2
0	x_3	0	0	1	0	-6	-5	5
0	x_4	0	0	0	1	-2	-6	5
		0	0	0	0	1	2	6

$\boxed{P_2^{OPT}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_2: \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2 \\ \quad f^* = 6 \end{array}}$$

P_3: DO P_1 PRIDÁME $x_2 \geq 3$

$$\begin{array}{rl} - & x_2 - r_3 = 3 \\ + & x_2 + 1/6\, x_4 - 1/3\, r_1 = 2\,5/6 \\ \hline & r_3 + 1/6\, x_4 - 1/3\, r_1 = -1/6 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_3	
x_1	1	0	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	$1/6$	$-1/3$	0	$2\,5/6$
x_3	0	0	1	$-5/6$	$-13/3$	0	$5/6$
r_3	0	0	0	$1/6$	$-1/3$	1	$-1/6$
	0	0	0	$1/3$	$1/3$	0	$23/3$

$\boxed{P_3}$

		-1 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 r_1	0 r_3	
-1	x_1	1	0	0	1/2	0	3	1 1/2
-2	x_2	0	1	0	0	0	-1	3
0	x_3	0	0	1	-3	0	-13	3
0	r_1	0	0	0	-1/2	1	-3	1/2
		0	0	0	1/2	0	1	15/2

$\boxed{P_3^{OPT}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_3: \quad x_1 = 1\tfrac{1}{2}, \quad x_2 = 3 \\ \quad f^* = 7\tfrac{1}{2} \end{array}}$$

r_1 MÔŽME ŠKRTNÚŤ

$x_1 \leq 1$

$$P_4: + \quad x_1 + r_4 = 1 \qquad r_4 \geq 0 \quad \in \mathbb{Z}$$

$$- \quad x_1 + \tfrac{1}{2} x_4 + 3r_3 = 1\tfrac{1}{2}$$

$$r_4 - \tfrac{1}{2} x_4 - 3r_3 = -\tfrac{1}{2}$$

		-1 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 r_3	0 r_4	
-1	x_1	1	0	0	1/2	3	0	1 1/2
-2	x_2	0	1	0	0	-1	0	3
0	x_3	0	0	1	-3	-13	0	3
0	r_4	0	0	0	-1/2	-3	1	-1/2
		0	0	0	1/2	1	0	15/2

$\boxed{P_4}$

$$\min\left\{ \frac{1/2}{|-1/2|}, \frac{1}{|-3|} \right\}$$

25. 04. 2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

		-1 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 r_3	0 r_4	
-1	x_1	1	0	0	0	0	1	1
-2	x_2	0	1	0	1/6	0	-1/3	3 1/6
0	x_3	0	0	1	-5/6	0	-13/3	31/6
0	r_3	0	0	0	1/6	1	-1/3	1/6
		0	0	0	1/3	0	1/3	7 1/3

$\boxed{P_4^{OPT}}$

MŮŽME ODSTRÁNIT

$$\boxed{\begin{array}{l} P_4: \ x_1 = 1, \ x_2 = 3\tfrac{1}{6} \\ f^* = 7\tfrac{1}{3} \end{array}}$$

$x_2 \leq 3$

$$\begin{array}{rl} + & x_2 + r_5 = 3 \\ - & x_2 + \tfrac{1}{6} x_4 - \tfrac{1}{3} r_4 = 3\tfrac{1}{6} \\ \hline & r_5 - \tfrac{1}{6} x_4 + \tfrac{1}{3} r_4 = -\tfrac{1}{6} \end{array}$$

		-1 x_1	-2 x_2	0 x_3	0 x_4	0 r_4	0 r_5	
-1	x_1	1	0	0	0	1	0	1
-2	x_2	0	1	0	1/6	-1/3	0	19/6
0	x_3	0	0	1	-5/6	-13/3	0	31/6
0	r_5	0	0	0	-1/6	1/3	1	-1/6
		0	0	0	1/3	1/3	0	22/3

$\boxed{P_5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_4	r_5	
x_1	1	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	0	-6	-5	6
x_4	0	0	0	1	-2	-6	1
	0	0	0	0	1	2	7

$\boxed{P_5^{OPT}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_5: \quad x_1 = 1, \; x_2 = 3 \\ f^* = 7 \end{array}}$$

P_6 : z P_4 $\quad x_2 \geq 4$

$$\begin{array}{rl} - & x_2 - r_6 = 4 \\ + & x_2 + 1/6\, x_4 - 1/3\, r_4 = 3\,1/6 \\ \hline & r_6 + 1/6\, x_4 - 1/3\, r_4 = -5/6 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_4	r_6	
x_1	1	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	1/6	-1/3	0	19/6
x_3	0	0	1	-5/6	-13/3	0	31/6
r_6	0	0	0	1/6	-1/3	1	-5/6
	0	0	0	1/3	1/3	0	22/3

$\boxed{P_6}$

25.04.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NIOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

	x_1	x_2	x_3	x_4	r_4	r_6	
x_1	1	0	0	1/2	0	3	$-3/2$
x_2	0	1	0	0	0	-1	4
x_3	0	0	1	-3	0	-13	16
r_4	0	0	0	$-1/2$	1	-3	$5/2$
	0	0	0	1/2	0	1	$13/2$

$\boxed{P_6 \text{ FINAL}}$

$P_6 = \emptyset$

P_7: z P_3 $x_1 \geq 2$

OPÁT VYJDE $P_7 = \emptyset$

P_8: z P_1 $x_1 \geq 3$

VYJDE: $x_1 = 3$, $x_2 = 1\frac{4}{5}$

$f^* = 6,6$

16.05.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

PARAMETRICKÉ PROGRAMOVANIE

12.20, 14.00 Ut T5
ZAPÍSAŤ ZÁPOČET

$$\min \overset{\mu_1 \quad \nu_1}{(-1+\lambda)} x_1 + \overset{\mu_2 \quad \nu_2}{(-1+2\lambda)} x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ -2x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_i &\ge 0 \quad \forall i \end{aligned} \qquad -1 \le \lambda \le 5$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 5 \\ -2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 1 \\ x_i \ge 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

ZAČNEME S $\lambda_1 = -1$:

		$-1+\lambda_1$ x_1	$-1+2\lambda_1$ x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	
0	x_3	1	-1	1	0	0	1
0	x_4	2	1	0	1	0	5
0	x_5	-2	1	0	0	1	1
	μ	-1	-1	0	0	0	0
	ν	1	2	0	0	0	0
$c-z=$ $\mu+\lambda_1\nu$		-2	-3	0	0	0	0

$-f(x^i, \lambda) = \mu + \lambda \nu$

$\longrightarrow -f(x^i, \lambda_1)$

		$-1+\lambda_1$	$-1+2\lambda_1$	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	-1	0	1	0	1	2
0	x_4	4	0	0	1	-1	4
$-1+2\lambda_1$	x_2	-2	1	0	0	1	1
	μ	-3	0	0	0	1	1
	ν	5	0	0	0	-2	-2
$c-z=\mu+\lambda\nu$		-8	0	0	0	3	3

$-f(x^{i+1}, \lambda_1) = \mu + \lambda\nu$

$-f(x^{i+1}, \lambda_1) = 3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$1/4$	$3/4$	3
x_1	1	0	0	$1/4$	$-1/4$	1
x_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	3
μ	0	0	0	$3/4$	$1/4$	4
ν	0	0	0	$-5/4$	$-3/4$	-7
$c-z=\mu+\lambda\nu$	0	0	0	2	1 *	11

VIĎ (*)

MÁME OPTIMUM PRE λ_1

VIĎ (*)

CHCEME NÁJSŤ ĎALŠIE HODNOTY λ

MUSÍ BYŤ $\forall i$

$$\mu_i + \lambda \nu_i \geq 0$$

$$\lambda \geq -\frac{\mu_i}{\nu_i} \quad \text{PRE} \quad \nu_i > 0 \qquad \lambda \geq \sup_{\nu_i > 0} -\frac{\mu_i}{\nu_i} \equiv \underline{\lambda_1}$$

$$\lambda \leq -\frac{\mu_i}{\nu_i} \quad \text{PRE} \quad \nu_i < 0 \qquad \lambda \leq \inf_{\nu_i < 0} -\frac{\mu_i}{\nu_i} \equiv \overline{\lambda_1}$$

16.05.2008 FT
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\underline{\lambda_1} = \sup_{\emptyset} \{ \quad \} = -\infty$$

$$\overline{\lambda_1} = \inf \left\{ \frac{-3/4}{-5/4}, \frac{-1/4}{-3/4} \right\}$$

$\Rightarrow$ PRE $\boxed{\lambda \in \langle -1; \frac{1}{3} \rangle}$ JE OPTIMÁLNE RIEŠ.:

$x_1 = 1, \; x_2 = 3$

$-f^* = 4 - 7\lambda \Rightarrow \underline{\underline{f^* = 7\lambda - 4}}$

(*) PRE $\varepsilon > 0$, $\lambda = \overline{\lambda_1} + \varepsilon$ DOSTÁVAME $\mu_5 + \lambda \nu_5 < 0$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	4/3	1/3	1	4
x_1	1	0	1/3	1/3	0	2
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	1
μ	0	0	-1/3	2/3	0	3
ν	0	0	1	-1	0	-4
~~$f-z=$~~	0	0		*	0	

UŽ NEPOTREBUJEME KRITERIÁLNY RIADOK

$$\underline{\lambda_2} = \sup_{\nu_i > 0} -\frac{\mu_i}{\nu_i} = \sup \left\{ -\frac{-1/3}{1} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{\lambda_2} = \inf_{\nu_i < 0} -\frac{\mu_i}{\nu_i} = \inf \left\{ -\frac{2/3}{-1} \right\} = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\lambda \in \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle}$ $\quad x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; \underline{\underline{f(x^*, \lambda) = -3 + 4\lambda}}$

$$\min \left\{ \frac{1}{1/3}, \frac{2}{1/3}, \frac{4}{1/3} \right\}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	-1	2	0	1	3
x_1	1	-1	1	0	0	1
x_4	0	3	-2	1	0	3
μ	0	-2	1	0	0	1
ν	0	3	-1	0	0	-1
	0		*	0	0	

$\underline{\lambda_3} = \bar{\lambda}_2$

$\bar{\lambda}_3 = \inf\limits_{v_i<0} -\frac{\mu_i}{v_i} = \inf\left\{-\frac{1}{-1}\right\} = 1$

$\Rightarrow$ PRE $\boxed{\lambda \in \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle}$ $\quad x_1 = 1;\ x_2 = 0;$

$f(x^*, \lambda) = -1 + \lambda$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	-2	1	0	0	1	1
x_3	1	-1	1	0	0	1
x_4	2	1	0	1	0	5
μ	-1	-1	0	0	0	0
ν	1	2	0	0	0	0

$\bar{\lambda}_4 = \inf \emptyset = +\infty$ $\quad x_1 = 0;\ x_2 = 0;$

$\Rightarrow$ PRE $\boxed{\lambda \in \langle 1; 5 \rangle}$ $\quad f(x, \lambda) = 0$

16.05.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

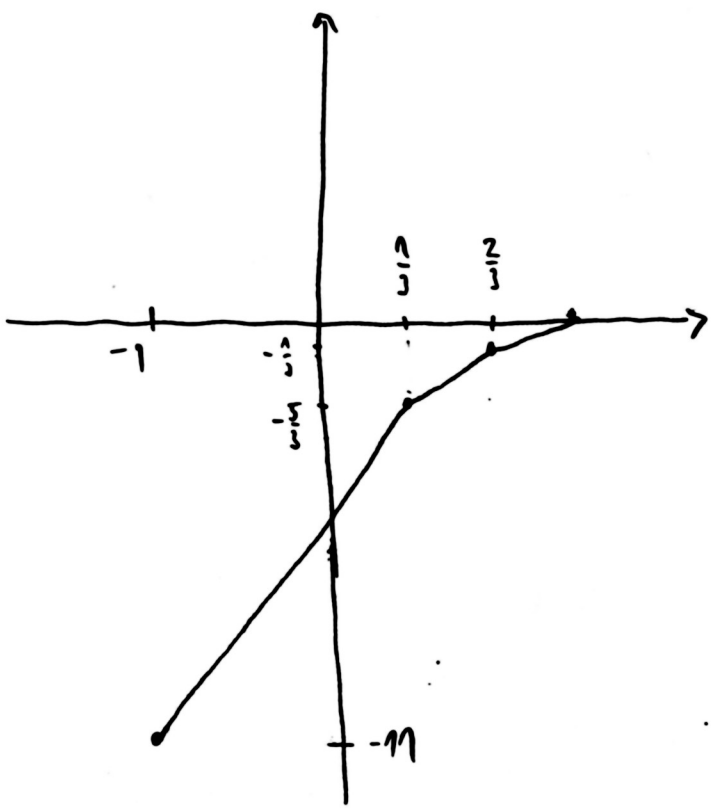
$$\min_{\lambda \in \langle -1, 1/3 \rangle} 7\lambda - 4 = 7(-1) - 4 = -11$$

$$\min_{\lambda \in \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle} -3 + 4\lambda = -3 + 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\min_{\lambda \in \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle} \lambda - 1 = 2/3 - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\min_{\lambda \in \langle 1; 5 \rangle} 0 = 0$$

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in M} (c + \lambda c')^T x$$



PRÍKLAD:

$$\min \left(1+\tfrac{1}{2}\lambda\right)x_1 + \left(1+\tfrac{1}{4}\lambda\right)x_2$$

$$4x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$-4 \leq \lambda \leq 2$$

$$4x_1 + 6x_2 - x_3 \overset{+u_1}{=} 24$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_4 \overset{+u_2}{=} 12$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

[min u_1+u_2]

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
x_4	0	4	-1	1			12
x_1	1	3/2	-1/4	0			6
	0	4	0	0			0

$\lambda_1 := -4$

MÁME ZDOLA NEOHRANIČENÚ FUNKCIU

		$1+\frac{1}{2}\lambda$	$1+\frac{1}{4}\lambda$	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_4	0	$\boxed{4}$	-1	1	12
$1+\frac{1}{2}\lambda$	x_1	1	3/2	-1/4	0	6
	μ	0	-1/2	1/4	0	-6
	ν	0	-1/2	1/8 *	0	-3
$c-z = \mu+\lambda\nu$		0	3/2	-1/4	0	6

$\hookrightarrow \left(1+\frac{1}{4}(-4)\right) - \left(1+\frac{1}{2}(-4)\right)\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-4)$

16.05.2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\nu_\ell \begin{cases} = 0 & (-\infty, \infty) \\ > 0 & (-\infty; -\frac{\mu_\ell}{\nu_\ell}\rangle \\ < 0 & \langle -\frac{\mu_\ell}{\nu_\ell}; \infty) \end{cases}$$

V NAJOM PRÍPADE JE f ZDOLA NEOHRANIČENÁ PRE $\lambda \in (-\infty; -2\rangle$

DOSADÍME $\lambda_2 = -2$ A NÁJDEME PIVOTA x_4 $\boxed{4}$ x_2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2			...		
x_1					
μ			...		
ν					

MOŽE $\lambda \in \langle -2; -1\rangle$ $x_1 = 6$, $x_2 = 0$

$\lambda \in \langle -1; 2\rangle$ $x_1 = 3/2$, $x_2 = 3$

$$\min_{\lambda \in \langle -2; -1\rangle} 6 + 3\lambda = 0$$

$$\min_{\lambda \in \langle -1; 2\rangle} 9/2 + 3/2\,\lambda = 3$$

PRÍKLAD:

$$\min \{ f(x) \mid \underbrace{g(x) \leq 0}_{g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in \{1,\dots,m\}} \}$$

$$\Phi(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)$$

$\boxed{\text{K.-T. PODMIENKY:}}$

$u \geq 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}(x, u) = g_i(x) \leq 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = u_i g_i(x) = 0$$

SLATEROVA PODMIENKA

$$\underline{\underline{\exists x : g(x) < 0}}$$

SFORMULUJTE K.-T. PODMIENKY PRE:

$$\min \{ f(x) \mid g(x) \leq 0, \underbrace{x \geq 0}_{-x \leq 0} \}$$

16. 05. 2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} v_i(-x_i)$$

$$\mathbf{u} \geq 0, \quad \mathbf{v} \geq 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_i}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v_i} = -x_i \leq 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - v_j = 0$$

$$u_i \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial u_i} = u_i g_i(\mathbf{x}) = 0$$

$$v_i \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v_i} = -v_i x_i = 0$$

$$v_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} u_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x})$$

K.T. PODMIENKY :

$$x_i \geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \geq 0$$

$$x_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$u_i \geq 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_i} = g_i(x) \leq 0$$

$$u_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i} = 0$$

PRÍKLAD:

$$\min \left\{ -\ln(x_1 + x_2) \;\middle|\; \underbrace{x_1 + 2x_2 \leq 5, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0}_{\text{KONVEXNÁ MNOŽINA}} \right\}$$

NA OVERENIE KONVEXNOSTI SPOČÍTAME HESSOVU MATICU A OVERÍME, ČI JE POZITÍVNE SEMIDEFINITNÁ.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} -\ln(x_1 + x_2) = -\frac{1}{x_1 + x_2}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} -\ln(x_1 + x_2) = \frac{1}{(x_1 + x_2)^2}$$

HESSOVA MATICA:

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{(x_1 + x_2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

JE POZITÍVNE DEFINITNÁ.

16. 05. 2008 Fr
PETER ČERNO

EX: NOPT046 ZÁKLADY OPTIMALIZACE

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$-\frac{1}{x_1+x_2} + u \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1+2x_2-5)}^{1} \geq 0 \quad \Rightarrow u \geq \frac{1}{x_1+x_2} > 0$$

$$-\frac{1}{x_1+x_2} + u \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+2x_2-5)}_{2} \geq 0 \quad \Rightarrow 2u > \frac{1}{x_1+x_2}$$

$$x_1 \cdot \left(-\frac{1}{x_1+x_2} + u\right) = 0$$

$$x_2 \cdot \left(-\frac{1}{x_1+x_2} + 2u\right) = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$

$$u \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0$$

$$u\,(x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \qquad u > 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$$

$$u = \frac{1}{x_1+x_2} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

PRÍKLAD:

$$\min \left\{ (x_1)^2 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 \le 9 \\ x_1 + x_2 \le 1 \end{array} \right\}$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \quad \dots$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ JE POZ. SEMIDEFINITNÁ

$(0,0)$ VYHOVUJE SLATEROVEJ PODMIENKE

$$\Phi(x, u) = x_1^2 + x_2 + u_1 (x_1^2 + x_2^2 - 9) + u_2 (x_1 + x_2 - 1)$$

$u_1, u_2 \ge 0$

$x_1^2 + x_2^2 \le 9 \qquad x_1 + x_2 \le 1$

$2x_1 + u_1 2x_1 + u_2 = 0$

$1 + u_1 2x_2 + u_2 = 0$

$u_1 (x_1^2 + x_2^2 - 9) = 0$

$u_2 (x_1 + x_2 - 1) = 0$

1) $u_1 = 0, \; u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 \quad \times$

2) $u_1 = 0, \; u_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 0 + u_2 = 0 \quad \times$

3) $u_1 > 0, \; u_2 > 0 \quad \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 = 9, \; x_1 + x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

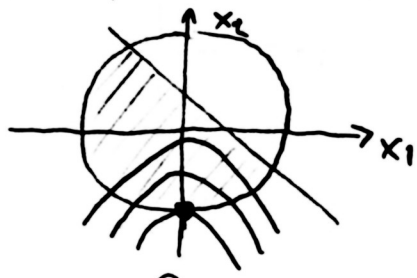
PRE $x_2 > 0$ JE $1 + u_1 2x_2 + u_2 > 0$ $\times$, PODOBNE $x_2 < 0$..

$\Rightarrow x_1 > 0$

4) $u_1 > 0, \; u_2 = 0$

$2x_1 (1 + u_1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow x_2^2 = 9 \Rightarrow x_2 = \pm 3$

NUTNE $x_2 = -3$!!

$x_1 = 0, \; x_2 = -3$ JE OK ✓