Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Výroková a predikátová logika

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
E-mail: Josef.Mlcek@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kti.mff.cuni.cz/~mlcek/`

Anotace: Výroková logika, normální tvary formulí, predikátová logika, věty o úplnosti výrokové a predikátové logiky, prenexní tvary formulí, modely teorií 1. řádu. Meze formální metody, Gödelovy věty.

Cíl předmětu: Naučit základy výrokové a predikátové logiky.

16.08.2007-Th
PETER ČERNO

AILOGL VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

FORMÁLNY SYSTÉM LOGIKY
- JAZYK → ZO SYMBOLOV JAZYKA TVORÍME FORMULE A TERMY
- AXIOMY
- ODVODZOVACIE PRAVIDLÁ

DÔKAZ VO FORMÁLNOM SYSTÉME JE KONEČNÁ POSTUPNOSŤ...
AKÉ AXIOMY A ODVODZOVACIE PRAVIDLÁ ZVOLIŤ ?
- PREDIKÁTOVÁ LOGIKA RIEŠI TÚTO OTÁZKU ODKAZOM NA SÉMANTIKU. AXIOMY VYBERÁ Z UNIVERZÁLNE PLATNÝCH FORMÚL = FORMULE PLATNÉ PRI KAŽDEJ INTERPRETÁCII JAZYKA

JAZYK 1. RÁDU:
- PREMENNÉ PRE INDIVIDUÁ
- FUNKČNÉ SYMBOLY (+ ČETNOSŤ $n \geq 0$)
- PREDIKÁTOVÉ SYMBOLY (+ ČETNOSŤ $n > 0$)
- LOGICKÉ SPOJKY $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- KVANTIFIKÁTORY $\forall, \exists$
- POMOCNÉ SYMBOLY

JAZYK 1. RÁDU S ROVNOSŤOU OBSAHUJE PRED. SYMBOL =

SYMBOLY < LOGICKÉ
SPECIÁLNE - JEDNOZNAČNE URČUJÚ JAZYK

JAZYK SLABEJ LOGIKY 2. RÁDU MÁ ESTE PREMENNÉ PRE PRIRODZENÉ ČÍSLA (KONEČNÉ PO. INDIVIDUÍ)

JAZYK LOGIKY 2. RÁDU MÁ PREMENNÉ PRE MNOŽINY INDIVIDUÍ, FUNKCIE, RELÁCIE

VÝROKOVÁ LOGIKA

PRVOTNÉ FORMULE P = NEPRÁZDNA MNOŽINA, KT. PRVKY MÔŽU BYŤ SLOVÁ NEJAKÉHO FORM. JAZYKA ALEBO MENNÁ $p, q, r, \ldots$

JAZYK VÝROKOVEJ LOGIKY $L_P = P \cup \{\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$

P JE MNOŽINA PRVOTNÝCH FORMULÍ JAZYKA L_P.

VÝROKOVÁ FORMULA JAZYKA L_P, PODFORMULA (i, ii, iii)

SÉMANTIKA VÝR. LOGIKY

PRAVDIVOSTNÉ OHODNOTENIE $v: P \to \{0,1\}$
INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI FORMULE SA DÁ DEFINOVAŤ ROZŠÍRENIE $\bar{v}$ PRAV. OH. v NA VŠETKY FORMULE JAZYKA L_P

TAUTOLÓGIA, SPLNITEĽNÁ FORMULA / MNOŽINA FORMULÍ, MODEL
FORMULA A JE TAUT. DÔSLEDKOM MNOŽINY FORMULÍ T : $T \models A$
$\Leftrightarrow$ A JE PRAVDIVÁ PRI KAŽDOM MODELI MN. F. T.
[KAŽDÉ PRAVD. OHODN. v JE MODELOM $\emptyset$]

PRE $\forall v: P \to \{0,1\}: \bar{v}(A) = \bar{v}(A \to B) = 1 \Rightarrow \bar{v}(B) = 1$.
D. $T \models A \wedge T \models A \to B \Rightarrow T \models B$.

VETA O KOMPAKTNOSTI VÝR. LOGIKY

T JE SPLNITEĽNÁ $\Leftrightarrow \forall$ KONEČNÉ $T_0 \subseteq T$: T_0 JE SPLNITEĽNÁ

DÔKAZ: $\Rightarrow$) ZREJMÉ

$\Leftarrow$) MUSÍME VEDIEŤ O KOMPAKTNOSTI SÚČINU KOMPAKTNÝCH TOPOLOGICKÝCH PRIESTOROV.

MN. $\{0,1\}$ JE KOMPAKTNÝ PRIESTOR S DISKR. TOPOLÓGIOU
$\Rightarrow \prod_{p \in P} \{0,1\}$ JE TAKTIEŽ KOMP. TOP. PRIESTOR
$\equiv \{v,\ v: P \to \{0,1\}\}$.

OZNAČME PRE FORMULU A $U_A := \{v \mid v: P \to \{0,1\},\ \bar{v}(A) = 1\}$
PRETOŽE $\bar{v}(A)$ ZÁVISÍ IBA NA HODNOTÁCH $v(p)$ PRE KONEČNE VEĽA PRVOTNÝCH FORMULÍ p, JE NUTNÉ U_A OTVORENÁ:
PODOBNE AJ DOPLNOK U_A T.J. $U_{\neg A}$ JE OTVORENÁ.
$\Rightarrow U_A$ JE UZAVRETÁ. $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq T \Rightarrow U_{A_1} \cap \ldots \cap U_{A_n} \neq \emptyset$
A Z KOMPAKTNOSTI $\bigcap \{U_A \mid A \in T\} \neq \emptyset$.

16.08.2007 Th
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

$T \vdash A \Leftrightarrow \exists$ KONEČNÁ $T' \subseteq T : T' \vdash A$.

DÔKAZ: $S \vdash A \Leftrightarrow S \cup \{\neg A\}$ NIE JE SPLNITEĽNÁ

$T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ NIE JE SPLNITEĽNÁ

$\Leftrightarrow \neg: \forall$ KONEČNÉ $T' \subseteq T \cup \{\neg A\} : T'$ JE SPLNITEĽNÁ

$\Leftrightarrow \exists$ KONEČNÁ $T' \subseteq T \cup \{\neg A\} : T'$ NIE JE SPLNITEĽNÁ

$\Leftrightarrow \exists$ KONEČNÁ $T' \subseteq T : T' \cup \{\neg A\}$ NIE JE SPLNITEĽNÁ

$\Leftrightarrow \exists$ KONEČNÁ $T' \subseteq T : T' \vdash A$.

FORMÁLNY SYSTÉM VÝROKOVEJ LOGIKY

JAZYK: $L_P = P \cup \{\neg, \&, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$ → DEFINUJEME POMOCOU $\neg, \rightarrow$

AXIÓMY: (SCHÉMY)

A1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

A3 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

ODVODZOVACIE PRAVIDLO: MODUS PONENS (MP)

$A, A \rightarrow B \Rightarrow B$

AKO AXIÓMY VOLÍME LOGICKY PLATNÉ FORMULE – TAUTOLÓGIE

ODVODZOVACIE PRAVIDLO VOLÍME TAK, ABY BOLO KOREKTNÉ:

TJ. ABY Z FORMULÍ PRAVDIVÝCH PRI NEJAKOM OHODNOTENÍ ODVODZOVALO FORMULU, KT. JE PLATNÁ PRI TOM ISTOM OHODNOTENÍ

DÔKAZ, A JE DOKÁZATEĽNÁ: $\vdash A \Leftrightarrow \exists$ DÔKAZ FORMULE A,

DÔKAZ Z PREDPOKLADOV $T \vdash A$, FORMULA A JE DOKÁZATEĽNÁ Z T

VETA O DEDUKCII (NIE JE TO ANI FORMULA, ANI VETA VÝROKOVEJ LOGIKY. JEDNÁ SA O METAVETU)

NECH T JE MNOŽINA FORMULÍ, A, B SÚ FORMULE.
POTOM $T \vdash A \to B \Leftrightarrow T \cup \{A\} \vdash B$.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) NECH $A_1, \ldots, A_n$ JE DÔKAZ $A \to B$ Z PREDP. T.
TJ. $A_n = A \to B$. POTOM $A, A_1, \ldots, A_n = A \to B$, B JE DÔKAZ B Z PREDPOKLADOV $T \cup \{A\}$.

$\Leftarrow$) NECH $A, A_1, \ldots, A_n = B$ JE DÔKAZ B Z PREDPOKLADOV $T \cup \{A\}$. INDUKCIOU DOKÁŽEME, ŽE $T \vdash A \to A_i$.

PREDPOKLADÁME, ŽE PRE NEJAKÉ $i > 0$ PLATÍ $T \vdash A \to A_k$ PRE $\forall k < i$. DOKÁŽEME $T \vdash A_i$.

MÔŽU NASTAŤ 3 PRÍPADY:

1) A_i JE AXIÓM ALEBO $A_i \in T$
POTOM $T \vdash A_i$, $T \vdash A_i \to (A \to A_i)$ $\overset{MP}{\Rightarrow}$ $T \vdash A \to A_i$

2) $A_i = A$. POTOM ZREJME $T \vdash A \to A_i$

3) A_i JE ODVODENÉ PRAVIDLOM MP Z A_j, A_k $j, k < i$
NECH $A_k = A_j \to A_i$
MÁME $T \vdash A \to A_j$, $T \vdash A \to (A_j \to A_i)$
ZREJME $T \vdash (A \to (A_j \to A_i)) \to ((A \to A_j) \to (A \to A_i))$
2x MP DÁVA $T \vdash A \to A_i$.

= DEMONŠTRÁCIA INDUKCIOU PODĽA DĹŽKY DÔKAZU

PRÍKLAD: $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
VYPLÝVA Z:
$A, B, (A \to (B \to C)) \vdash C$.

PRÍKLAD: $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
VYPLÝVA Z:
$A, A \to B, B \to C \vdash C$

16.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. 4 PRED. LOGIKA - SKLÚŠKA

A, B, $(A \to (B \to C)) \vdash A$
A, B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to (B \to C))$
MP: A, B, $(A \to (B \to C)) \vdash (B \to C)$
A, B, $(A \to (B \to C)) \vdash B$
MP: A, B, $(A \to (B \to C)) \vdash C$

B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to A)$ — 5 KROKOV
B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to (B \to C))$
A1: B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to (B \to C)) \to (A \to (A \to (B \to C)))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to (A \to (B \to C)))$
A2: B, $(A \to (B \to C)) \vdash$
$(A \to (A \to (B \to C))) \to ((A \to A) \to (A \to (B \to C)))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash ((A \to A) \to (A \to (B \to C)))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to (B \to C))$
B, $(A \to (B \to C)) \vdash B$
B, $(A \to (B \to C)) \vdash (B \to (A \to B))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to B)$
A2: B, $(A \to (B \to C)) \vdash ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash ((A \to B) \to (A \to C))$
MP: B, $(A \to (B \to C)) \vdash (A \to C)$

. . .

V1 : $A \to A$

V2 : $\neg A \to (A \to B)$

V3 : $\neg\neg A \to A$

V4 : $A \to \neg\neg A$

V5 : $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

V6 : $A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

V7 : $(\neg A \to A) \to A$

DOKAZ V1 :

A1 $\vdash A \to ((A \to A) \to A)$

A2 $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

MP $\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$

A1 $\vdash A \to (A \to A)$

MP $\vdash A \to A$

DOKAZ V2 :

A1 $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$

VD $\neg A \vdash \neg B \to \neg A$

A3 $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

MP $\neg A \vdash A \to B$

VD $\vdash \neg A \to (A \to B)$

DOKAZ V3 :

V2 $\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$

VD $\neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$

A3 $\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$

MP $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$

VD $\neg\neg A \vdash A$

VD $\vdash \neg\neg A \to A$

15.08.2007 TJ
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

DÔKAZ V4:

V3 $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$

A3 $\vdash (\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$

MP $\vdash A \to \neg\neg A$

DÔKAZ V5:

V3 $\neg\neg A, A \to B \vdash A$

$\neg\neg A, A \to B \vdash A \to B$

MP $\neg\neg A, A \to B \vdash B$

V4 $\vdash B \to \neg\neg B$

MP $\neg\neg A, A \to B \vdash \neg\neg B$

VD $A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$

A3 $\vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$

MP $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

VD $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

DÔKAZ V6:

$A, A \to B \vdash B$

VD $A \vdash (A \to B) \to B$

V5 $\vdash ((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

MP $A \vdash \neg B \to \neg (A \to B)$

VD $\vdash A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

DÔKAZ V7:

V6 $\vdash \neg A \to (\neg A \to \neg (\neg A \to A))$

VD $\vdash \neg A \to \neg (\neg A \to A)$

A3 $\vdash (\neg A \to \neg (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$

MP $\vdash (\neg A \to A) \to A$

LEMMA O NEUTRÁLNEJ FORMULI:

Ak $T, A \vdash B$ a $T, \neg A \vdash B$, potom $T \vdash B$.

DOKAZ: z $T, A \vdash B$:

VD $T \vdash A \to B$

V5 $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

MP $T \vdash \neg B \to \neg A$

VD $T, \neg B \vdash \neg A$

z $T, \neg A \vdash B$:

$T \vdash \neg A \to B$

$T, \neg B \vdash \neg A \to B$

MP $T, \neg B \vdash B$

VD $T \vdash \neg B \to B$

V7 $\vdash (\neg B \to B) \to B$

MP $T \vdash B$

N

16.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

NECH v JE OHODNOTENIE PRVOTNÝCH FORMULÍ, A JE FORMULA. DEFINUJME $A^v := \begin{cases} A & \Leftrightarrow \bar{v}(A)=1 \\ \neg A & \Leftrightarrow \bar{v}(A)=0 \end{cases}$

NECH v JE OHODN. PRV. FORMULÍ, A JE FORMULA, KTORÉ VŠETKY PRVOTNÉ PODFORMULE SA NACHÁDZAJÚ MEDZI FORMULAMI $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

POTOM $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash A^v$.

DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI A)

1) KEĎ JE A PRV. FORM., POTOM JE TO JEDNA Z FORMULÍ $P_1, \ldots, P_n$.

2) $A = \neg B$. NECH UŽ MÁME DÔKAZ $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash B^v$

a) KEĎ $\bar{v}(B)=0$, POTOM $B^v = \neg B$, $\bar{v}(A) = \bar{v}(\neg B) = 1$, TAKŽE $A^v = B^v$

b) KEĎ $\bar{v}(B)=1$, POTOM $B^v = B$ $\bar{v}(A) = \bar{v}(\neg B) = 0$, TAKŽE $A^v = \neg A = \neg\neg B = \neg\neg B^v$

V4 $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash B^v \to \neg\neg B^v$

MP $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash \neg\neg B^v = A^v$

3) $A = C \to D$. MÁME DÔKAZY $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash C^v$, $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash D^v$

a) $\bar{v}(C) = \bar{v}(D) = 1$. POTOM $\bar{v}(A) = \bar{v}(C \to D) = 1$

TAKŽE $A^v = C^v \to D^v$

A1 $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash D^v \to (C^v \to D^v)$

MP $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash C^v \to D^v = A^v$

b) $\bar{v}(C) = 1$, $\bar{v}(D) = 0$, $\bar{v}(A) = \bar{v}(C \to D) = 0$, TJ. $A^v = \neg(C \to D)$

MÁME $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash C$, $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash \neg D$

V6 $\vdash C \to (\neg D \to \neg(C \to D))$.

2×MP: $P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash \neg(C \to D) = A^v$.

$\bar{v}(C) = 0$, $\bar{v}(D) = ?$ $\quad \bar{v}(A) = \bar{v}(C \to D) = 1$, $\quad C^v = \neg C$, $A^v = C \to D$

MAMME $\quad P_n^v, \ldots, P_n^v \vdash \neg C$

V2 $\quad \vdash \neg C \to (C \to D)$

MP: $\quad P_1^v, \ldots, P_n^v \vdash C \to D = A^v$.

17.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA O ÚPLNOSTI: $\vdash A \Leftrightarrow \models A$

DÔKAZ. $\Rightarrow$) ZREJME

$\Leftarrow$) NECH A JE TAUTOLÓGIA A $P_1, \ldots, P_n$ SÚ VŠETKY JEJ PRVOTNÉ PODFORMULE. ZVOĽME PRAV. OH. v TAK, ABY $v(P_1) = \ldots = v(P_n) = 1$. POTOM $P_1, \ldots, P_n \vdash A$.
ZVOĽME P. OH. w TAK, ABY $w(P_1) = \ldots w(P_{n-1}) = 1$, $w(P_n) = 0$.
POTOM $P_1, \ldots, P_{n-1}, \neg P_n \vdash A$.
Z VETY O NEUTRÁLNEJ FORMULE DOSTÁVAME
$P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash A$ A ĎALEJ POSTUPUJEME INDUKCIOU.

SPORNÝ / BEZSPORNÝ (KONZISTENTNÝ) FORMÁLNY SYSTÉM
SPORNÁ / BEZSPORNÁ MNOŽINA FORMÚL

MNOŽINA FORMÚL T VÝR. LOGIKY JE BEZSPORNÁ $\Leftrightarrow$ JE SPLNITEĽNÁ.

DÔKAZ: NECH T JE SPLNITEĽNÁ. POTOM $\exists v$ MODEL T.
Z KOREKTNOSTI ODV. PRAVIDLA DOSTÁVAME, ŽE Z T MOŽNO ODVODIŤ IBA FORMULE, KT. SPĹŇAJÚ v.
NECH T NIE JE SPLNITEĽNÁ. Z KOMPAKTNOSTI VYPLÝVA, ŽE $\exists T_0 = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq T$ NESPLNITEĽNÁ,
TJ. $(\neg A_1 \vee (\neg A_2 \vee \ldots \vee (\neg A_{n-1} \vee \neg A_n) \ldots))$ JE TAUTOLÓGIA.
NA DRUHEJ STRANE $T \vdash A_i$ PRE $\forall i$
$\Rightarrow$ $T \vdash (A_1 \& (A_2 \& \ldots \& (A_{n-1} \& A_n) \ldots))$

$T \vdash A$, $T \vdash B \Rightarrow T \vdash (A \& B)$ $\quad A \& B \equiv \neg(A \to \neg B)$

$T \vdash A$
$T \vdash B$
V4 $\vdash B \to \neg\neg B$
MP $T \vdash \neg\neg B$
V6 $\vdash A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$
2×MP $T \vdash \neg(A \to \neg B) \equiv A \& B$.

MÁME FORMULU C : $T \vdash C$ a $T \vdash \neg C$

POTOM z $\vdash \neg A \to (A \to B)$

VIEME DOKÁZAŤ VŠETKY FORMULE.

SILNÁ VETA O ÚPLNOSTI : $T \vdash A \Leftrightarrow T \models A$

DOKAZ : $\Rightarrow$) ZREJME

$\Leftarrow$) NECH $T \models A$. POTOM $T \cup \{\neg A\}$ NIE JE SPLNITEĽNÁ $\Rightarrow$ JE SPORNÁ $\Rightarrow$

$T, \neg A \vdash A$

VD $T \vdash \neg A \to A$

V7 $\vdash (\neg A \to A) \to A$

MP $T \vdash A$.

17.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

V8 $A \& B \vdash A$ $A \& B \vdash B$
V9 $A, B \vdash A \& B$

DÔKAZ V8

V5 $\vdash (\neg A \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A)$
V2 $\vdash (\neg A \to (A \to \neg B))$
MP $\vdash \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A$
VD $\neg(A \to \neg B) \vdash \neg\neg A$
V3 $\vdash \neg\neg A \to A$
MP $\neg(A \to \neg B) \vdash A$

V5 $\vdash (\neg B \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B)$
A1 $\vdash (\neg B \to (A \to \neg B))$
MP $\vdash \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B$
VD $\neg(A \to \neg B) \vdash \neg\neg B$
V3 $\vdash \neg\neg B \to B$
MP $\neg(A \to \neg B) \vdash B$

DÔKAZ V9:

V6 $\vdash A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$
VD $A \vdash \neg\neg B \to \neg(A \to \neg B)$
$A, B \vdash B$
V4 $\vdash B \to \neg\neg B$
MP $A, B \vdash \neg\neg B$
MP $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

DOKAZUJEMO:

i) $A \leftrightarrow B \vdash A \to B$

ii) $A \leftrightarrow B \vdash B \to A$

iii) $A \to B,\ B \to A \vdash A \leftrightarrow B$

KER $\vdash A \leftrightarrow B$ POTEM $T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash B$.

$\vdash A \leftrightarrow (A \& A)$ (IDEMPOTENCA)

DOKAZ:

VS $A, A \vdash A \& A$

VD $\vdash A \to (A \& A)$

VS $A \& A \vdash A$

VD $\vdash (A \& A) \to A$

iii) $\vdash ((A \to (A \& A)) \to ((A \& A) \to A)) \to (A \leftrightarrow (A \& A))$

2x MP $\vdash A \leftrightarrow A \& A$

$\vdash (A \& B) \leftrightarrow (B \& A)$

DOKAZ:

VS $A, B \vdash B \& A$

2x VD $\vdash A \to (B \to (B \& A))$

VS $A \& B \vdash A$

MP $A \& B \vdash B \to (B \& A)$

VS $A \& B \vdash B$

MP $A \& B \vdash B \& A$

VD $\vdash (A \& B) \to (B \& A)$

$\vdash (B \& A) \to (A \& B)$

$(A \& B) \to (B \& A),\ (B \& A) \to (A \& B) \vdash (A \& B) \leftrightarrow (B \& A)$

2xVD + 2xMP $\vdash (A \& B) \leftrightarrow (B \& A)$

17.08.2007 Fr.
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PŘED. LOGIKA - SKLOŠTKA

$\vdash ((A \& B) \& C) \leftrightarrow (A \& (B \& C))$

DŮKAZ:

VÚ	$(A \& B) \& C \vdash A \& B$
VÚ	$A \& B \vdash A$
VD	$\vdash A \& B \to A$
VÚ	$A \& B \vdash B$
VD	$\vdash A \& B \to B$
MP	$(A \& B) \& C \vdash A$
MP	$(A \& B) \& C \vdash B$
VÚ	$(A \& B) \& C \vdash C$
VZ	$B, C \vdash B \& C$
VZ	$A, B \& C \vdash A \& (B \& C)$
2×VD	$\vdash B \to (C \to (B \& C))$
2×MP	$(A \& B) \& C \vdash B \& C$
2×VD	$\vdash A \to ((B \& C) \to (A \& (B \& C)))$
2×MP	$(A \& B) \& C \vdash A \& (B \& C)$
VD	$\vdash ((A \& B) \& C) \to (A \& (B \& C))$
	$\vdash (A \& (B \& C)) \to ((A \& B) \& C)$
VZ	..
2×VD 2×MP	$\vdash ((A \& B) \& C) \leftrightarrow (A \& (B \& C))$

$\vdash \quad (A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to B) \ldots)) \Leftrightarrow ((A_1 \& \ldots \& A_n) \to B)$

DOKÁŽEME NAJSKÔR $(A_1 \to (A_2 \to B)) \leftrightarrow ((A_1 \& A_2) \to B)$

$(A_1 \& A_2),\ (A_1 \to (A_2 \to B)) \vdash A_1$

$(A_1 \& A_2),\ (A_1 \to (A_2 \to B)) \vdash A_2$

2x $(A_1 \& A_2),\ (A_1 \to (A_2 \to B)) \vdash (A_1 \to (A_2 \to B))$

MP $(A_1 \& A_2),\ (A_1 \to (A_2 \to B)) \vdash B$

VD $(A_1 \to (A_2 \to B)) \vdash ((A_1 \& A_2) \to B)$

V9 $A_1, A_2, ((A_1 \& A_2) \to B) \vdash (A_1 \& A_2)$

$A_1, A_2, ((A_1 \& A_2) \to B) \vdash ((A_1 \& A_2) \to B)$

MP $A_1, A_2, ((A_1 \& A_2) \to B) \vdash B$

$((A_1 \& A_2) \to B) \vdash (A_1 \to (A_2 \to B))$

VO VŠEOBECNOM PRÍPADE BY SME POSTUPOVALI NAJSKÔR 2

$(A_1 \& \ldots \& A_n),\ (A_1 \to (A_2 \to \ldots \to (A_n \to B) \ldots)) \vdash B$

A POTOM Z

$A_1, \ldots, A_n,\ ((A_1 \& \ldots \& A_n) \to B) \vdash B$

17.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA O EKVIVALENCII: NECH FORMULA A' VZNIKNE Z FORMULE A NAHRADENÍM NIEKTORÝCH VÝSKYTOV PODFORMULÍ $A_1, \ldots, A_n$ FORMULAMI $A_1', \ldots, A_n'$.
KEĎ JE $\vdash A_1 \leftrightarrow A_1', \ldots, \vdash A_n \leftrightarrow A_n'$,
POTOM TIEŽ $\vdash A \leftrightarrow A'$.

DÔKAZ: (INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI FORMULE A)

KEĎ A JE PRVOTNÁ FORMULA ALEBO JEDNA Z FORMULÍ $A_1, \ldots, A_n$ POTOM
a) KEĎ NEDÔJDE K NAHRADENIU, POTOM $A' = A$ A Z V1 JE $\vdash A \leftrightarrow A'$
b) KEĎ DÔJDE K NAHRADENIU CELEJ FORMULE A, POTOM $\vdash A \leftrightarrow A'$ VYPLÝVA Z PREDPOKLADOV VETY

KEĎ JE A ZLOŽENÁ FORMULA A K NAHRADENIU DÔJDE V JEJ VLASTNÝCH PODFORMULIACH, POTOM
a) KEĎ $A = \neg B$ A UŽ MÁME DOKÁZANÉ $\vdash B \leftrightarrow B'$
POTOM Z V5 $\vdash (B \to B') \to (\neg B' \to \neg B)$
$\vdash (B' \to B) \to (\neg B \to \neg B')$
DOSTÁVAME $\vdash (\neg B \leftrightarrow \neg B')$ TJ. $\vdash A \leftrightarrow A'$
b) KEĎ $A = B \to C$ A $\vdash B \leftrightarrow B'$, $\vdash C \leftrightarrow C'$
POTOM Z
$\vdash (B' \to B) \to ((B \to C) \to ((C \to C') \to (B' \to C')))$
DOSTÁVAME POMOCOU MP: $\vdash B' \to C'$
PODOBNE $\vdash C' \to B'$
TAKŽE $\vdash B' \leftrightarrow C'$.

DE MORGANOVÉ PRAVIDLÁ

$\vdash \neg(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$

Z V3 A V4 DOSTÁVAME $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$

CHCEME DOKÁZAT:

$\vdash \neg\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg B)$

Z V4 JE

$\vdash (A \to \neg B) \leftrightarrow (A \to \neg B)$

POUŽITÍM VETY O EKVIVALENCII DOSTÁVAME

$\vdash ((A \to \neg B) \leftrightarrow (A \to \neg B)) \leftrightarrow (\neg\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow (\neg A \to \neg B))$

PRAVIDLO MP MOŽNO APLIKOVAŤ AJ NA $\leftrightarrow$:

TOTIŽ KEĎ: $T \vdash A$
$+ \quad T \vdash A \leftrightarrow B$

POTOM: $T, A \leftrightarrow B \vdash A \to B$
MP $\quad T, A \leftrightarrow B \vdash B$
VD $\quad T \vdash (A \leftrightarrow B) \to B$
MP $\quad T \vdash B$

TAKŽE $\vdash \neg\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg B)$

PODOBNE SA DOKÁŽE:

$\vdash \neg(\neg A \to B) \leftrightarrow \neg(\neg A \to \neg\neg B)$

17.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKUŠKA

$\vdash A \to (A \vee B)$

TD. $\vdash A \to (\neg A \to B)$

V2 $\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to B)$

V4 $A \vdash \neg\neg A$

MP $A \vdash \neg A \to B$

VD $\vdash A \to (\neg A \to B)$

$\vdash B \to (A \vee B)$

TD. $\vdash B \to (\neg A \to B)$ DE A1

$\vdash A \to (A \vee A)$ (IDEMPOTENCIA)

DÔKAZ:

A1 $\vdash A \to (\neg A \to A)$

$\vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

DÔKAZ:

V5 $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg\neg A)$

2xVD $\neg A \to B, \neg B \vdash \neg\neg A$

V3 $\vdash \neg\neg A \to A$

MP $\neg A \to B, \neg B \vdash A$

2xVD $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

PODOBNE $(\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$

$\vdash ((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

DOKAZ

$\vdash \neg((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(A \vee B) \wedge \neg C)$

$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

VETA O EKVIVALENCII DÁVA

$\vdash \neg((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C)$

$\vdash ((\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \leftrightarrow (\neg A \wedge (\neg B \wedge \neg C))$

$\vdash \neg B \wedge \neg C \leftrightarrow \neg(B \vee C)$

VETA O EKVIV. DÁVA

$\vdash ((\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg(B \vee C))$

$\vdash (\neg A \wedge \neg(B \vee C)) \leftrightarrow \neg(A \vee (B \vee C))$

TERAZ UŽ IBA VUŽIJEME TRANZITIVITU $\leftrightarrow$

$\vdash \neg((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow \neg(A \vee (B \vee C))$

DOKÁŽTE ESTE $\vdash \neg A \leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \vdash A \leftrightarrow B$

A3 $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

$\neg A \leftrightarrow \neg B \vdash \neg A \to \neg B$

MP $\neg A \leftrightarrow \neg B \vdash B \to A$

$\neg A \leftrightarrow \neg B \vdash \neg B \to \neg A$

MP $\neg A \leftrightarrow \neg B \vdash A \to B$

$\vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$

MP $\neg A \leftrightarrow \neg B \vdash A \leftrightarrow B$

$\vdash (\neg A \leftrightarrow \neg B) \to (A \leftrightarrow B)$ PODOBNE $\leftarrow$

17.08.2007 Fr.
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA O DÔKAZE ROZBOROM PRÍPADOV:

$T, A \vee B \vdash C \iff T, A \vdash C \text{ a } T, B \vdash C.$

$\Rightarrow$)

VD $T \vdash (A \vee B) \to C$

VS $\vdash ((A \vee B) \to C) \to (\neg C \to \neg(A \vee B))$

MP $T \vdash \neg C \to \neg(A \vee B)$

VD $T, \neg C \vdash \neg(A \vee B)$

$T, \neg C \vdash \neg A \,\&\, \neg B$

$\vdash \neg A \,\&\, \neg B \to \neg A, \neg B$

MP $T, \neg C \vdash \neg A, \neg B$

$\vdash (\neg C \to \neg A) \to (A \to C)$

$\vdash (\neg C \to \neg B) \to (B \to C)$

MP $T \vdash A \to C$

MP $T \vdash B \to C$

VD $T, A \vdash C$

VD $T, B \vdash C$

$\Leftarrow$)

VD, VS, MP: $T, \neg C \vdash \neg A$

$T, \neg C \vdash \neg B$

$\vdash \neg A \to (\neg B \to (A \,\&\, B))$

2xMP $T, \neg C \vdash \neg A \,\&\, \neg B$

$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \,\&\, \neg B)$

$T, \neg C \vdash \neg(A \vee B)$

$T \vdash (A \vee B) \to C$

PRE $B = \neg A$ DOSTÁVAME LEMMU O NEUTRÁLNEJ FORMULI

DISTRIBUTIVITA KONJUNKCIE A DISJUNKCIE:

$\vdash (A \vee (B \& C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \& (A \vee C))$

$A \vdash A \vee B,\ A \vee C \overset{\forall\beta}{\Rightarrow} A \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

$\forall\beta$ $B \& C \vdash B,\ C$

$\vdash B \to (A \vee B),\ C \to (A \vee C)$

Mp $B \& C \vdash A \vee B$

MP $B \& C \vdash A \vee C$

$\forall\gamma$ $B \& C \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

POUŽITÍM VETY O DÔKAZE ROZBORON PRÍPADOV DOSTÁVAME:

$A \vee (B \& C) \vdash (A \vee B) \& (A \vee C)$

VD $\vdash (A \vee (B \& C)) \to ((A \vee B) \& (A \vee C))$

$\forall\beta$ $(A \vee B) \& (A \vee C) \vdash A \vee B,\ A \vee C$

VD $(A \vee B) \& (A \vee C), \neg A \vdash B, C$

$\forall\gamma$ $\quad -\!\!\!

17.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

$\vdash \quad (A \& (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$

$A \& (B \vee C) \vdash A, \neg B \to C$

$A \& (B \vee C), B \vdash A \& B, \quad (A \& B) \vee (A \& C)$

$A \& (B \vee C), \neg B \vdash A \& C, \quad (A \& B) \vee (A \& C)$

LEMMA O NEUT. FORMULE DÁVA

$A \& (B \vee C) \vdash (A \& B) \vee (A \& C)$

$A \& B \vdash A, B, B \vee C, A \& (B \vee C)$

$A \& C \vdash A, C, B \vee C, A \& (B \vee C)$

Z VETY O DÔKAZE ROZBOROM PRÍPADOV PLYNIE:

$(A \& B) \vee (A \& C) \vdash A \& (B \vee C)$

18.08.2007 S
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

CVIČENIE A

IMP: a) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ IMPLIKÁCIE

$A, B, A \to (B \to C) \vdash C$

b) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

$A, A \to B, B \to C \vdash C$

c) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\neg\neg A, A \to B \vdash \neg\neg B$ V3, V4

$A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$

$\vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$

d) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

$\neg B, \neg A \to B \vdash \neg\neg A$ V5

$\vdash \neg\neg A \to A$ V3

e) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

$B, A \to \neg B \vdash \neg A$

KONJUNKCIE

KON: a) $(A \& B) \to A$

$\vdash \neg A \to (A \to \neg B)$ V2

$\neg(A \to \neg B) \vdash \neg\neg A$ V5

b) $(A \& B) \to B$

$\vdash \neg B \to (A \to \neg B)$

$\neg(A \to \neg B) \vdash \neg\neg B$

c) $(A \to (B \to (A \& B))$

$\vdash A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$ v 6

$A, B \vdash A, \neg\neg B, \neg(A \to \neg B)$

d) $(A \& B) \to (B \& A)$

$\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$

$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ VIŠ VIŠE

e) $((A \& B) \& C) \to (A \& (B \& C))$

$(A \& B) \& C \vdash A \& B, A, B, C, B \& C, A \& (B \& C)$

f) VIMLÝVA Z a)

Z c) $A, A \vdash A \& A$, $\vdash A \to (A \& A)$

g) $(A \to B) \to ((C \to D) \to ((A \& C) \to (B \& D)))$

$A \& C, A \to B, \& C \to D \vdash A, C, B, D, B \& D$

EKVIVALENCIE

EKV: a), b), c) SÚ EKVIV. S VOV a), b), c)

d) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$

$A \leftrightarrow B \vdash A \to B, B \to A$

$\vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$

e) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

$A \leftrightarrow B \vdash A \to B, B \to A$

$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$

18.08.2007 Sk
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

f) $(\neg A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to A)$

$\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ α

$\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ β

$\vdash \alpha \to (\beta \to (\alpha \& \beta))$

g) implýva z impe)

h) implýva z impd)

DISJUNKCIE

DČ a) $A \to (A \vee B)$

$A \to (\neg A \to B)$

$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to B)$

$A \vdash \neg\neg A$

b) $B \to (A \vee B)$

$\vdash B \to (\neg A \to B)$

c) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

$\neg C \to \neg A, \neg C \to \neg B, \neg C \vdash \neg(\neg A \to B)$

$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$

$(A \to C) \to ((B \to D) \to ((A \vee B) \to (C \vee D)))$

$\neg C \to \neg A, \neg D \to \neg B, \neg(\neg C \to D) \vdash \neg(\neg A \to B)$!

$\vdash C \to (\neg C \to D), \quad D \to (\neg C \to D)$

$\neg(\neg C \to D) \vdash \neg C, \neg D$

$\neg C \to \neg A, \neg D \to \neg B, \neg(\neg C \to D) \vdash \neg A, \neg B$

$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$

d) $(A \vee A) \leftrightarrow A$

PODĽA a) $\vdash A \to (A \vee A)$

$\vdash (\neg A \to A) \to A$ v7

e) $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$

$(\neg A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to A)$

VIĎ EKV h)

f) POMOCOU DE MORGANOVÝCH PRAVIDIEL A VETY O EKVIVALENCII

19.08.2007 Su
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

T. $(A \vee B) \vdash C \Leftrightarrow T, A \vdash C \wedge T, B \vdash C$

NECH $T, (A \vee B) \vdash C \Rightarrow T \vdash (\neg A \to B) \to C$

ZREJME $T, A \vdash A;\ A \to (\neg A \to B),\ \neg A \to B,\ C$

$T, B \vdash B,\ B \to (\neg A \to B),\ \neg A \to B,\ C$

NECH $T, A \vdash C \wedge T, B \vdash C$

$$\left.\begin{array}{l} T, \neg A \to B, A \vdash C \\ T, \neg A \to B, \neg A \vdash B \\ \qquad\qquad T \vdash B \to C \\ T, \neg A \to B, \neg A \vdash C \end{array}\right\} T, \neg A \to B \vdash C$$

DISTRIBUTIVITA

DIST a) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

$A \wedge (B \vee C) \vdash A,\ B \vee C \equiv \neg B \to C$

$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B,\ (A \wedge B),\ (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee C), \neg B \vdash C,\ A \wedge C,\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$(A \wedge B) \vdash A,\ B,\ B \vee C,\ A \wedge (B \vee C)$

$(A \wedge C) \vdash A,\ C,\ B \vee C,\ A \wedge (B \vee C)$

$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$

b) $(A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n)) \leftrightarrow ((A \& B_1) \vee \dots \vee (A \& B_n))$

$A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n) \vdash A, \neg B_n \to (B_2 \vee \dots \vee B_n)$

$A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n), B_n \vdash (A \& B_1), ((A \& B_1) \vee \dots \vee (A \& B_n))$

$A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n), \neg B_1 \vdash A, (B_2 \vee \dots \vee B_n),$

$A \& (B_2 \vee \dots \vee B_n), ((A \& B_2) \vee \dots \vee (A \& B_n)),$

$((A \& B_1) \vee \dots \vee (A \& B_n))$

$A \& B_1 \vdash A, B_1, B_1 \vee \dots \vee B_n, A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n)$

$(A \& B_2) \vee \dots \vee (A \& B_n) \vdash A \& (B_1 \vee \dots \vee B_n)$

c) $\neg A \to B, \neg A \to C, \neg A \vdash B, C, A \vee B, A \vee C, (A \vee B) \& (A \vee C)$

$\neg A \to B, \neg A \to C, A \vdash A, A \vee B, A \vee C, (A \vee B) \& (A \vee C)$

NORMÁLNE TVARY VÝR. FORMULÍ

NORMÁL $((A \vee B) \to (A \& B))$

A	B	$(A \vee B) \to (A \& B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

DNF $((\neg A \& \neg B) \vee (A \& B))$

CNF $((A \vee \neg B) \& (\neg A \vee B))$

$(\neg A \to B) \to \neg (A \to \neg B)$

$\neg A \to B$ { DNF $A \vee B$; CNF $A \vee B$ } $\neg (\neg A \to B)$ { $\neg \neg A \& \neg B$; $\neg A \& \neg B$ }

$\neg (A \to \neg B)$ { DNF $A \& B$; CNF $A \& B$ }

DNF $(\neg A \& \neg B) \vee (A \& B)$

CNF $(\neg A \& \neg B) \vee (A \& B) \equiv$

$\equiv ((\neg A \vee (A \& B)) \& (\neg B \vee (A \& B))) \equiv$

$\equiv (\neg A \vee A) \& (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A) \&$

$\& (\neg B \vee B) \equiv (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$

19.08.2007 Sq
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKUŠKA

CVIČENIE B

3. POĽSKÝ ZÁPIS FORMULÍ

a) VYPLÝVA Z iii)

b) INDUKCIA PODĽA n PRIČOM a_i SÚ BUĎ PRVOTNÉ FORMULE ALEBO SYMBOLY

PRE $n=0$ PLATÍ

PREDPOKLADÁME, ŽE TVRDENIE PLATÍ PRE $\forall n < k.\ k>0$
DOKÁŽEME JEHO PLATNOSŤ AJ PRE $n=k$

NECH $a = a_0 \dots a_n$ JE FORMULA. PRE SPOR NECH
$\exists i < n : a_0 \dots a_i$ JE FORMULA. POTOM PODĽA 3a)

a) $a_0 \dots a_i$ JE PRVOTNÁ FORMULA,
TJ. $i=0$, a_0 JE PRVOTNÁ FORMULA
TO JE ALE SPOR S TÝM, ŽE $n>0$, TJ.
$a_0 .. a_n$ NIE JE PRVOTNÁ FORMULA A TÝM
PÁDOM MUSÍ BYŤ a_0 SYMBOL $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

b) $a_0 \dots a_i$ NIE JE PRVOTNÁ FORMULA

i) $a_0 = \neg$

TJ. $a_0 \dots a_i = \neg a_1 \dots a_i$

KDE $a_1 \dots a_i$ JE FORMULA, $i \geq 1$

PODOBNE $a = \neg a_1 \dots a_n$ JE FORMULA, TAKŽE
NUTNE AJ $a_1 \dots a_n$ JE FORMULA
KEĎŽE $i < n$, DOSTÁVAME SPOR. PODĽA IND. PREDP.

ii) PODOBNE PRE $a_0 \in \{ \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

c) VYPLÝVA Z b). NECH

$a = \square b c = \square b' c'$.

b A b' SÚ FORMULE. KEBY b JE PODREŤAZEC b',
DOSTANEME (PODĽA 3b) SPOR.

5. PRAVIDLO REZU

$$\frac{\neg A \vee B,\ A \vee C}{B \vee C}$$ (POZRI REZOLUČNÚ METÓDU)

a) $\neg A \vee B,\ A \vee C \vdash B \vee C$

$\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C \vdash \neg B \to C$

DÔKAZ: $\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C,\ \neg A \vdash C$

$\vdash C \to (\neg B \to C)$

MP $\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C,\ \neg A \vdash \neg B \to C$

$\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C,\ \neg\neg A \vdash B,\ \neg\neg B$

$\vdash \neg\neg B \to (\neg B \to C)$

$\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C,\ \neg\neg A \vdash \neg B \to C$

LEMA O NEVT. FORMULE DÔKAZ:

$\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C \vdash \neg B \to C$

b) UVAŽUJME FORMÁLNY SYSTÉM KDE SÚ AXIÓMY

A ODV. PRAVIDLO $\neg\neg A \to B,\ \neg A \to C \Rightarrow \neg B \to C$

CHCEME DOKÁZAŤ $A,\ A \to B \Rightarrow B$

???

6. UVAŽUJME FORMÁLNY SYSTÉM, V KTOROM MÁME AXIÓMY A1, A2, A4, ODV. PR. MP. DOKÁŽEME A3. ZREJME PLATÍ: VETA O DEDUKCII (BOLI POUŽITÉ IBA A1, A2).

A1 $\vdash A \to (\neg B \to A)$

VD $A \vdash \neg B \to A$

A4+VD $\neg B \to \neg A,\ A \vdash \neg B \to A,\ (\neg B \to A) \to B$

MP $\neg B \to \neg A,\ A \vdash B$

2x VD $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

19.09.2007 S4
PETER ČERNO

AIL026 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

7. BOOLEOVSKÉ FUNKCIE

a) $f_\wedge(p_1, p_2) = f_\neg(f_\to(p_1, f_\neg(p_2)))$ $\quad \neg(p_1 \to \neg p_2)$

$f_\vee(p_1, p_2) = f_\to(f_\neg(p_1), p_2)$ $\quad \neg p_1 \to p_2$

b) $f_\to(p_1, p_2) = f_\neg(f_\wedge(p_1, f_\neg(p_2)))$ $\quad \neg(p_1 \wedge \neg p_2)$

$= f_\vee(f_\neg(p_1), p_2)$ $\quad \neg p_1 \vee p_2$

c) $\{f_\wedge, f_\vee\}$ PRE KAŽDÚ FUNKCIU $f(p)$
ZLOŽENÚ IBA POMOCOU $f_\wedge, f_\vee$ PLATÍ $f(1) = 1$

$\{f_\neg, f_\leftrightarrow\}$ PRE KAŽDÚ FUNKCIU $f(p_1, p_2)$
... PLATÍ $f(p_1, p_2) = f(p_2, p_1)$
(INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI f)

20.08.2007 M.
PETER ČERNO

AIL0062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA

JAZYK LOGIKY PRVÉHO RÁDU [S ROVNOSŤOU]
(JE JEDNOZNAČNE URČENÝ VÝBEROM ŠPECIÁLNYCH SYMBOLOV)

TERM[3], [ATOMICKÁ] FORMULA[4]

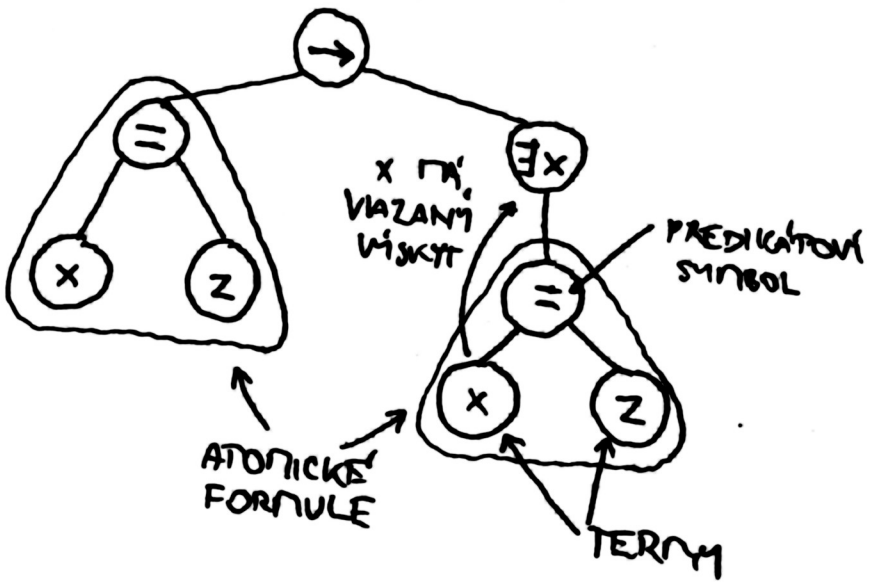
SLOVO, PODSLOVO, ZRETAZENIE, VÝSKYT SYMBOLU s V SLOVE S

PODTERM, PODFORMULA, VIAZANÝ / VOĽNÝ VÝSKYT PREMENNEJ x VO FORMULI

PREMENNÁ x VOĽNÁ / VIAZANÁ VO FORMULI A

OTVORENÁ / UZAVRETÁ FORMULA, FORMULE S ĎALŠÍMI PREMENNÝMI

PRÍKLAD: $(x=z) \to (\exists x)(x=z)$



SÉMANTIKA PREDIKÁTOVEJ LOGIKY

RELAČNÁ ŠTRUKTÚRA $\mathcal{M}$ PRE JAZYK L = REALIZÁCIA JAZYKA L
OBSAHUJE UNIVERZUM $M \neq \emptyset$ A REALIZÁCIE FUNKCIÍ A RELÁCIÍ
(OKREM SYMBOLU PRE ROVNOSŤ. TEN JE VŽDY DEFINOVANÝ AKO id_M)

PRVKY UNIVERZA M = INDIVÍDUÁ

$f_{\mathcal{M}}$ JE REALIZÁCIA FUNKČNÉHO SYMBOLU f $\quad : M^n \to M$

$P_{\mathcal{M}}$ JE REALIZÁCIA PREDIK. SYMBOLU P $\quad \subseteq M^n$

OHODNOTENIE PREMENNÝCH e, $e(x/m)$

$t[e]$ .. REALIZÁCIA TERMU PRI OHODNOTENÍ e

(ZÁVISÍ NA REALIZÁCII $\mathfrak{M}$) (ZÁVISÍ NA OHOD. PREM. VYSKYT. V t)

TARSKEHO DEFINÍCIA PRAVDY

NECH $\mathfrak{M}$ JE REALIZÁCIA JAZYKA L, e JE OHODNOTENIE PREMENNÝCH, A FORMULA.

INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI DEFINUJEME PRAVDIVOSŤ A V $\mathfrak{M}$ PRI OH. e : $\mathfrak{M} \models A[e]$.

A JE SPLNENÁ V $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \forall e : \mathfrak{M} \models A[e]$

(ZÁVISÍ IBA NA OHODN. PREM. VSKYT. SA V A)

KEĎ JE A UZAVRETÁ FORMULA, POTOM

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e]$ PRE ĽUBOĽ. OHODNOTENIE e

KEĎ JE A UZAVRETÁ FORMULA SPLNENÁ V $\mathfrak{M}$, HOVORÍME, ŽE JE PRAVDIVÁ V $\mathfrak{M}$.

A JE SPLNENÁ V $\mathfrak{M} \Leftrightarrow \overbrace{(\forall x_1)\dots(\forall x_n)A}^{\text{UZÁVER FORMULE } A}$ JE PRAVDIVÁ V $\mathfrak{M}$, KDE $x_1, \dots, x_n$ SÚ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ FORMULE A

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \forall e\ \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \forall e \forall m \in M\ \mathfrak{M} \models A[e(x_n/m)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall e\ \mathfrak{M} \models (\forall x_n)A\ [e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x_n)A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x_1)\dots(\forall x_{n-1})(\forall x_n)A$

SUBSTITÚCIA TERMOV ZA PREMENNÉ $t_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$

$A_x[t]$ (IND. PODĽA ZLOŽITOSTI SA PREUKÁŽE, ŽE $A_x[t]$ JE OPÄŤ FORMULA)

$A_x[t]$ VZNIKNE Z A NAHRADENÍM KAŽDÉHO VOĽNÉHO VÝSKYTU PREMENNEJ x TERMOM t

20.08.2007 R.
PETER ČERNO

AIL026, VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

~~TERM t JE SUBSTITUOVATEĽNÝ ZA PREMENNÚ x~~
DO FORMULE A, KEĎ PRE KAŽDÚ PREMENNÚ y
VISKYTUJÚCU SA V TERME t, FORMULA A
NEOBSAHUJE PODFORMULU $(\forall y)B$ ALEBO $(\exists y)B$,
V KTOREJ BY SA NACHÁDZAL VOĽNÝ VÝSKYT x.

FORMULA $A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$ VZNIKNE Z A
NAHRADENÍM KAŽDÉHO VOĽNÉHO VÝSKYTU x_i
TERMOM t_i $(i=1..n)$, NAZÝVA SA INŠTANCIA FORM. A

VETA: KEĎ JE M REALIZÁCIA JAZYKA L, A JE FORMULA,
$t, t_1, \dots, t_n$ SÚ TERMY JAZYKA L A e JE
OHODNOTENIE PREMENNÝCH TAKÉ, ŽE $t_i[e] = m_i$
PRE $i=1,\dots,n$, POTOM

(i) $t_{x_1,\dots,x_n}[t_1\dots,t_n][e]$ JE INDIVIDUUM
$t[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

(ii) $M \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \iff$
$M \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

POUŽÍVA SA V DÔKAZE KOREKTNOSTI AXIÓMU ŠPECIFIKÁCIE $(\forall x)\to A_x[t]$

DÔKAZ: (i) INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI TERMU t

KEĎ JE t PREMENNÁ x RÔZNA OD $x_1,\dots,x_n$,
POTOM $t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = x$, TAKŽE
$t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] = e(x) = t[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

KEĎ JE t PREMENNÁ x_i, POTOM
$t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = t_i$, TAKŽE
$t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] = t_i[e] = m_i = t[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

KEĎ JE t TVARU $f(s_1,\dots,s_n)$, POTOM

$t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = f\left(s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots t_n],\dots,s_{r\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]\right)$

TAKŽE $t_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] =$

$= f_{\mathfrak{M}}\left(s_{1\,x_1\dots x_n}[t_1\dots t_n][e],\dots,s_{r\,x_1\dots x_n}[t_1\dots,t_n][e]\right) =$

$= f_{\mathfrak{M}}\left(s_1[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)],\dots,s_r[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]\right) =$

$= f(s_1,\dots,s_r)[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] =$

$= t[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

(ii) INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI FORMULE A

KEĎ JE A ATOMICKÁ FORMULA $p(s_1,\dots,s_r)$

KDE p NIE JE =, POTOM

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = p(s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n],\dots,s_{r\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n])$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$ PODĽA TARSKEHO DEF. PRAVDY

$(s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e],\dots,s_{r\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e]) \in p_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (s_1[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)],\dots,s_r[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]) \in p_{\mathfrak{M}}$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models p(s_1,\dots,s_r)[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

KEĎ A JE ATOMICKÁ FORMULA $(s_1 = s_2)$, POTOM

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = (s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = s_{2\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n])$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] = s_{2\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s_1[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] = s_2[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (s_1 = s_2)[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

20.08.2007 M.
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

KEĎ A JE TVARU $\neg B$, POTOM

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = \neg B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$.

PODOBNE KEĎ A JE TVARU $B \to C$

KEĎ A JE TVARU $(\forall z)B$, POTOM

a) KEĎ z JE RÔZNE OD $x_1,\dots,x_n$, POTOM

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = (\forall z) B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall z) B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m \in M \quad \mathfrak{M} \models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e(z/m)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m \in M \quad \mathfrak{M} \models B[e(z/m, x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall z) B[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$

b) BÚNO $z = x_1$. POTOM

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] = (\forall x_1) B_{x_2,\dots,x_n}[t_2,\dots,t_n]$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x_1) B_{x_2,\dots,x_n}[t_2,\dots,t_n] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m_1 \in M \quad \mathfrak{M} \models B_{x_2,\dots,x_n}[t_2,\dots,t_n][e(x_1/m_1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m_1 \in M \quad \mathfrak{M} \models B[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x_1) B[e(x_2/m_2,\dots,x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (\forall x_1) B[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$ x_1 JE VIAZANÁ

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e(x_1/m_1,\dots,x_n/m_n)]$.

OZNAČME P MNOŽINU VŠETKÝCH ATOMICKÝCH FORMÚL JAZYKA L A VŠETKÝCH FORMÚL TVARU $(\forall x)B$, $(\exists x)B$, KDE x JE NEJAKÁ PREMENNÁ A B JE FORMULA JAZYKA L.

PRE KAŽDÚ FORMULU A JAZYKA L PLATÍ VETA: KEĎ JE A TAUTOLÓGIA VÝR. LOGIKY NAD P, POTOM A JE VETOU PREDIKÁTOVEJ LOGIKY

FORMÁLNY SYSTÉM PREDIKÁTOVEJ LOGIKY 1. RÁDU BEZ ROVNOSTI

AXIÓMY: A1, A2, A3 (AXIÓMY VÝR. LOGIKY)

AXIÓMY PRE KVANTIFIKÁTORY:

SCHÉMA ŠPECIFIKÁCIE: A JE FORMULA, x PREMENNÁ A t TERM SUBSTITUOVATEĽNÝ ZA x DO A, POTOM

$(\forall x)A \to A_x[t]$ JE AXIÓM PRED. LOGIKY

SCHÉMA PRESKOKU: A, B SÚ FORMULE, x PREMENNÁ, KTORÁ NEMÁ VOĽNY VÝSKYT V A, POTOM

$(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$ JE AXIÓM PRED. LOGIKY

ODVODZOVACIE PRAVIDLÁ: MODUS PONENS: $A, A \to B \;/\; B$

PRAVIDLO GENERALIZÁCIE: $A \;/\; (\forall x)A$

LEMMA: $\vdash A_x[t] \to (\exists x)A$

$\vdash (\forall x)\neg A \to \neg A_x[t]$

V5 $\vdash ((\forall x)\neg A \to \neg A_x[t]) \to (\neg\neg A_x[t] \to \neg(\forall x)\neg A)$

MP $\vdash \neg\neg A_x[t] \to \neg(\forall x)\neg A$

V4 $\vdash A_x[t] \to \neg\neg A_x[t]$

ZLOŽENÍM OBOCH POSLEDNÝCH IMPLIKÁCIÍ:

$\vdash A_x[t] \to (\exists x)A$

20.08.2007
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

PRAVIDLO (ZAVEDENIA) $\forall$: KEĎ SÚ A, B FORMULE A PREMENNÁ x NEMÁ V A VOĽNÝ VÝSKYT, POTOM

$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash A \to (\forall x) B$

$\vdash A \to B$, PRAVIDLO GENER.: $\vdash (\forall x)(A \to B)$

SCHÉMA PRESKOKU: $\vdash (\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x) B)$

MP: $\vdash A \to (\forall x) B$

PRAVIDLO (ZAVEDENIA) $\exists$: KEĎ SÚ A, B FORMULE A PREMENNÁ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B, POTOM

$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash (\exists x) A \to B$

VS $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

MP $\vdash \neg B \to \neg A$

PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$:

$\vdash \neg B \to (\forall x) \neg A$

VS $\vdash (\neg B \to (\forall x) \neg A) \to (\neg(\forall x) \neg A \to \neg\neg B)$

MP $\vdash \neg(\forall x) \neg A \to \neg\neg B$

VS $\vdash \neg\neg B \to B$

ZLOŽENÍM IMPLIKÁCIÍ:

$\vdash (\exists x) A \to B$.

LEMA: KEĎ JE A' INŠTANCIA A, POTOM

$\vdash A \Rightarrow \vdash A'$.

DÔKAZ. ZREJME $\vdash A \Rightarrow \vdash A_x[t]$

PRE VIAC PREMENNÝCH $x_1, \ldots, x_n$ MUSÍME NAJSKÔR PREM. $x_1, \ldots, x_n$ NAHRADIŤ (POSTUPNE) NOVÝMI UNIKÁTNYMI $z_1, \ldots, z_n$ A AŽ TIE POTOM TERMAMI $t_1, \ldots, t_n$.

LEMMA: PRE ĽUBOVOĽNÚ FORMULU A, PREMENNÉ $x_1, \dots, x_n$ A TERMY $t_1, \dots, t_n$
(SUBSTITUOVATEĽNÉ ZA $x_1, \dots, x_n$ VO FORMULI A)
PLATÍ:

i) $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to A$

i)* $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]$

ii) $A \to (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A$

ii)* $A_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n] \to (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A$

DÔKAZ: i) PODĽA AXIÓMU ŠPECIFIKÁCIE JE $\vdash (\forall x) C \to C_x[x]$
TJ. $\vdash (\forall x) C \to C$. TAKŽE

$\vdash (\forall x_n) A \to A$

$\vdash (\forall x_{n-1}) (\forall x_n) A \to (\forall x_n) A$

...

$\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to (\forall x_2) \dots (\forall x_n) A$

A ZLOŽENÍM TÝCHTO IMPLIKÁCIÍ DOSTÁVAME:

$\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \to A$

i)* JE INŠTANCIOU i).

ii) PODOBNE $\vdash C_x[x] \to (\exists x) C_1$ TJ. $\vdash C \to (\exists x) C$

OPÄŤ ii)* JE INŠTANCIOU ii)

Z i) RESP. ii) VYPLÝVA TIEŽ (POMOCOU PRAVIDLA ZAVEDENIA $\forall$ RESP. $\exists$)

$\vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) A \leftrightarrow (\forall x_{\pi(1)}) \dots (\forall x_{\pi(n)}) A$

$\vdash (\exists x_1) \dots (\exists x_n) A \leftrightarrow (\exists x_{\pi(1)}) \dots (\exists x_{\pi(n)}) A$

PRE $\forall$ PERMUTÁCIE π NA $\{1, \dots, n\}$.

UZÁVER FORMULE

20.08.2007 Ľb
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

VETA O UZÁVERE: KEĎ A' JE UZÁVER A.
POTOM $\vdash A \Leftrightarrow \vdash A'$

LEMA (DISTRIBÚCIA KVANTIFIKÁTOROV)
$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$, $\vdash (\exists x)A \to (\exists x)B$.

DOKAZ. a)

$\vdash (\forall x)A \to A_x[x]$ AX. ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash A \to B$
$\vdash (\forall x)A \to B$ ZLOŽENIE IMPLIKÁCIÍ
$\vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

b) $\vdash B_x[x] \to (\exists x)B$
$\vdash A \to B$
$\vdash A \to (\exists x)B$
$\vdash (\exists x)A \to (\exists x)B$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

VETA O EKVIVALENCII
VETA O VARIANTÁCH
VETA O DEDUKCII

21.08.2007 TU
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

$T \vdash A \Rightarrow T \vdash B$. POTOM $T \vdash A \to B$? NIE!

KEĎ $T \nvdash A \to B$ POTOM $A \to B$ NIE JE TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK T
TJ. $\exists v$: $v(A)=1$ A $v(B)=0$, v JE MODEL T.
IMPLIKÁCIA $T \vdash A \Rightarrow T \vdash B$ VŠAK MÔŽE PLATIŤ NAPR. VTEDY,
AK A NIE JE TAUT. DÔSLEDOK T.
PRÍKLAD: $\vdash A \Rightarrow \vdash B \to C$ PLATÍ A PRITOM
$\nvdash A \to (B \to C)$

PLATÍ $\mathcal{M} \models A \to (\forall x)A$? NIE!

NECH e JE ĽUBOVOĽNÉ. POTOM
$\mathcal{M} \models A \to (\forall x)A \ [e] \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models A \ [e] \vee \forall m \in M \ \mathcal{M} \models A \ [e(x/m)]$
NÁJDITE A TAKÚ, ŽE $\exists e$: $\mathcal{M} \models A \ [e] \wedge \exists m \in M \ \mathcal{M} \not\models A \ [e(x/m)]$
NAPR. PRE $M = \{0,1\}$ A $A = x > 0$, $e(x) = 1$
JE $\mathcal{M} \models A[e]$, A PRITOM PRE $m = 0$ JE $\mathcal{M} \not\models A[e(x/m)]$
TO ZNAMENÁ, ŽE $\mathcal{M} \not\models x > 0 \to (\forall x) x > 0$.
INTERPRETÁCIA: TO, ŽE $x > 0$ ESTE NEZNAMENÁ, ŽE $(\forall x) x > 0$.

VETA O EKVIVALENCII: NECH FORMULA A' VZNIKNE Z FORMULE A NAHRADENÍM NIEKTORÝCH VÝSKYTOV PODFORMULÍ $B_1, \ldots, B_n$ PO RADE FORMULAMI $B_1', \ldots, B_n'$. KEĎ JE $\vdash B_i \leftrightarrow B_i'$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, POTOM $\vdash A \leftrightarrow A'$

LEMA (O DISTRIBÚCII KVANTIFIKÁTOROV):
$\vdash A \to B$, POTOM $\vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$, $(\exists x)A \to (\exists x)B$.

DÔKAZ.
$\vdash (\forall x)A \to A_x[x]$ AXIÓM ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash A \to B$
$\vdash (\forall x)A \to B$ ZLOŽENIE IMPLIKÁCIÍ
$\vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$ ZAVEDENIE $\forall$.

PODOBNE $\vdash B_x[x] \to (\exists x)B$
$\vdash A \to (\exists x)B$.
$\vdash (\exists x)A \to (\exists x)B$ ZAVEDENIE $\exists$

DÔKAZ VETY O EKVIVALENCII: (INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI A)

KEĎ JE A ATOMICKÁ FORMULA ALEBO JE TO JEDNA Z FORMULÍ $B_1, \dots, B_n$, POTOM

a) AK NEDÔJDE K NAHRADENIU, PLATÍ $A' = A$ A TEDA $\vdash A \leftrightarrow A'$

b) AK DÔJDE K NAHRADENIU CELEJ FORMULE A, POTOM MUSÍME PREDPOKLADOV VETY A OPÄŤ $\vdash A \leftrightarrow A'$.

KEĎ JE A ZLOŽENÁ FORMULA A K NAHRADENIU DÔJDE AŽ V JEJ VLASTNÝCH PODFORMULIACH, POTOM:

a) KEĎ $A = \neg B$, $\vdash B \leftrightarrow B'$

POTOM Z VS $\vdash (B \to B') \to (\neg B' \to \neg B)$

$\vdash (B' \to B) \to (\neg B \to \neg B')$

TAKŽE POUŽITÍM MP DOSTÁVAME: $\vdash \neg B \leftrightarrow \neg B'$.

b) KEĎ $A = B \to C$ A $\vdash B \leftrightarrow B'$, $\vdash C \leftrightarrow C'$,

POTOM $\vdash (B' \to B) \to ((B \to C) \to ((C \to C') \to (B' \to C')))$

POMOCOU MP, JE $B \to C \vdash B' \to C'$

PODOBNE $B' \to C' \vdash B \to C$

TAKŽE OPÄŤ $\vdash A \leftrightarrow A'$

c) KEĎ $A = (\forall x) B$ A $\vdash B \leftrightarrow B'$

POTOM $\vdash B \to B'$

$\vdash (\forall x) B \to (\forall x) B'$

PODOBNE $\vdash B' \to B$

$\vdash (\forall x) B' \to (\forall x) B$

BOD $\vdash A \leftrightarrow A'$.

d) PODOBNE PRE $A = (\exists x) B$.

POZNÁMKA: BOD b) BEZ VETY O DEDUKCII VÝR. LOGIKY

$\vdash (B' \to B) \to ((B \to C) \to ((C \to C') \to (B' \to C')))$ JE TAUTOLÓGIA

MP $\vdash (B \to C) \to ((C' \to C) \to (B' \to C'))$

A2 $\vdash ((B \to C) \to ((C' \to C) \to (B' \to C'))) \to (((B \to C) \to (C' \to C)) \to ((B \to C) \to (B' \to C')))$

MP $\vdash ((B \to C) \to (C' \to C)) \to ((B \to C) \to (B' \to C'))$

A1 $\vdash (C' \to C) \to ((B \to C) \to (C' \to C))$

MP $\vdash (B \to C) \to (C' \to C)$

MP $\vdash (B \to C) \to (B' \to C')$.

21.08.2007 Tu
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

FORMULA A' JE VARIANTOU FORMULE A, KEĎ A' VZNIKNE Z A NAHRADENÍM PODFORMULÍ TVARU $(\square x)B$ FORMULAMI $(\square y)B_x[y]$ KDE y NIE JE VOĽNÁ V B A $\square \in \{\forall, \exists\}$.

VETA O VARIANTÁCH: KEĎ JE A' VARIANTA FORMULE A, POTOM $\vdash A \leftrightarrow A'$

PODĽA VETY O EKVIVALENCII STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE $\vdash (\square x)B \leftrightarrow (\square y)B_x[y]$.

$\vdash (\forall x)B \to B_x[y]$ AX. ŠPECIFIKÁCIE

$\vdash (\forall y)((\forall x)B \to B_x[y])$ PRAVIDLO GEN.

y NIE JE VOĽNÁ V B, TAKŽE

$\vdash (\forall y)((\forall x)B \to B_x[y]) \to ((\forall x)B \to (\forall y)B_x[y])$ AX. PRESKOKU

MP $\vdash (\forall x)B \to (\forall y)B_x[y]$

OZNAČME $B' = B_x[y]$, POTOM ZREJME $B'_y[x] = B$ A x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B'.

ANALOGICKY $\vdash (\forall y)B' \to (\forall x)B'_y[x]$

TJ $\vdash (\forall y)B' \to (\forall x)B$.

VETA O DEDUKCII: NECH T JE MNOŽINA FORMULÍ, A JE UZAVRETÁ FORMULA A B JE ĽUBOVOĽNÁ FORMULA. POTOM $T \vdash A \to B \leftrightarrow T, A \vdash B$.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) NECH $A_1, \ldots, A_n$ JE DÔKAZ $A \to B$ z T.
POTOM $A, A_1, \ldots, A_n = A \to B, B$ JE DÔKAZ B z T, A.

$\Leftarrow$) NECH $A, A_1, \ldots, A_n$ JE DÔKAZ $T, A \vdash B$.
MY ZOSTROJÍME DÔKAZY FORMULÍ $A \to A_i$. PRE $i = 1, \ldots, n$ Z PREDPOKLADOV T.

PREDPOKLADÁME, ŽE UŽ MÁME DÔKAZY FORMULÍ $A \to A_j$ PRE $\forall j < i$, KDE $i > 0$. DOKÁŽEME $A \to A_i$.

a) KEĎ $A_i = A$, POTOM ZREJME $\vdash A \to A$

b) KEĎ $A_i \in T$ ALEBO JE AXIÓM PRED. LOGIKY, POTOM

A1 $\vdash A_i \to (A \to A_i)$

MP $\vdash A \to A_i$

c) KEĎ A_i VZNIKLO POUŽITÍM MP NA A_j, A_k $j,k < i$

BÚNO NECH $A_k = A_j \to A_i$

UŽ MÁME DÔKAZY

$\vdash A \to A_j$

$\vdash A \to (A_j \to A_i)$

ĎALEJ

A2 $\vdash (A \to (A_j \to A_i)) \to ((A \to A_j) \to (A \to A_i))$

MP $\vdash (A \to A_j) \to (A \to A_i)$

MP $\vdash A \to A_i$

d) KEĎ A_i VZNIKLO POUŽITÍM PRAVIDLA GENERALIZÁCIE NA A_j, $j < i$ T.J. $A_i = (\forall x) A_j$

$\vdash A \to A_j$

KEĎŽE A JE UZAVRETÁ FORMULA, T.J. x NIE JE VOĽNÁ V A POTOM PRAVIDLO $\forall$ DÁVA:

$\vdash A \to (\forall x) A_j$.

21.08.2007 Tu
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – CKÚŠKA

VETA O KONŠTANTÁCH: NECH T JE MNOŽINA FORMÚL JAZYKA L A A JE FORMULA JAZYKA L. NECH JAZYK L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM NOVÝCH SYMBOLOV $c_1, \dots, c_n$ PRE KONŠTANTY. POTOM PLATÍ $T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$.

DÔKAZ. $\Rightarrow$) $A_{x_1,\dots x_n}[c_1,\dots,c_n]$ JE INŠTANCIA A TAKŽE $T \vdash A \Rightarrow T \vdash A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$.

$\Leftarrow$) NECH $T \vdash A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$ A $A'_1,\dots,A'_m$ JE DÔKAZ $A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$ Z PREDPOKLADOV T. NECH $y_1,\dots,y_n$ SÚ PREMENNÉ, KTORÉ SA NEVYSKYTUJÚ NIKDE V T ANI V DÔKAZE $A'_1,\dots,A'_m$ ANI VO FORMULI A. DEFINUJEME A_i AKO A'_i, KDE VŠETKY KONŠTANTY $c_1,\dots,c_n$ NAHRADÍME PREMENNÝMI $y_1,\dots,y_n$. POTOM $A_1,\dots,A_m$ JE DÔKAZ $T \vdash A_{x_1,\dots,x_n}[y_1,\dots,y_n]$.

DÔKAZ. NECH B' JE FORMULA (TERM) V JAZYKU L'. INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI (TERMU) SA DÁ DOKÁZAŤ, ŽE KEĎ VO FORMULI (TERME) B' NAHRADÍME VŠETKY VÝSKYTY KONŠTANT $c_1,\dots,c_n$ POSTUPNE PREMENNÝMI $y_1,\dots,y_n$, DOSTANEME FORMULU (TERM) B JAZYKA L.

a) KEĎ A'_i JE AXIÓM PRED. POČTU, POTOM ZREJME AJ A_i JE AXIÓM. A1, A2, A3 SÚ ZREJME.

AXIÓM ŠPECIFIKÁCIE: $A'_i = (\forall x)B' \to B'_x[t']$, POTOM $A_i = (\forall x)B \to B_x[t]$ JE TIEŽ AX. ŠPEC.

AXIÓM PRESKOKU: $A'_i = \forall x(A' \to B') \to (A' \to (\forall x)B')$ KDE x NIE JE VOĽNÁ V A', POTOM

$$A_i = \forall x(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$$

KDE TIEŽ x NIE JE VOĽNÁ V A, PRETOŽE x SA NENACHÁDZA MEDZI PREMENNÝMI $y_1,\dots,y_n$.

b) A_i' JE Z MNOŽINY T, POTOM A_i' JE FORMULA JAZYKA L, TJ. NEOBSAHUJE KONŠTANTY $c_1, \dots, c_n$, A PRETO $A_i = A_i' \in T$

c) A_i' VZNIKLO POUŽITÍM PRAVIDLA MODUS PONENS NA A_j', A_k', KDE $j, k < i$, $A_k' = A_j' \to A_i'$, POTOM A_i VZNIKNE TIEŽ POUŽITÍM MP NA A_j, $A_k = A_j \to A_i$

d) A_i' VZNIKLO POUŽITÍM PRAVIDLA GENERALIZÁCIE NA A_j', TJ. $A_i' = (\forall x) A_j'$. POTOM ZREJME $A_i = (\forall x) A_j$ VZNIKNE POUŽITÍM PRAVIDLA GENERALIZÁCIE NA A_j.

NUTNE TEDA $T \vdash A_{x_1, \dots, x_n}[y_1, \dots, y_n]$

A FORMULA A JE UŽ IBA INŠTANCIOU TEJTO DOKÁZANEJ F.

VETA O KONŠTANTÁCH NÁM POMÔŽE PRI DÔKAZE $A \to B$, KDE A MÁ VOĽNÉ PREMENNÉ $y_1, \dots, y_n$.

$T \vdash A \to B \Leftrightarrow T \vdash A_{y_1, \dots, y_n}[c_1, \dots, c_n] \to B_{y_1, \dots, y_n}[c_1, \dots, c_n]$

$\Leftrightarrow T, \underbrace{A_{y_1, \dots, y_n}[c_1, \dots, c_n]}_{\text{UZAVRETÁ FORMULA}} \vdash B_{y_1, \dots, y_n}[c_1, \dots, c_n]$.

21.08.2007 Tu
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA O REDUKCII: NECH A JE FORMULA, T MNOŽINA FORMÚL. POTOM $T \vdash A \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ $B_1, \dots, B_n$ SÚ UZÁVERY NEJAKÝCH FORMÚL Z T
$A \vdash B_1 \to (B_2 \to \dots \to (B_{n-1} \to (B_n \to A)) \dots)$

DÔKAZ: $\Leftarrow$) ZREJMÉ Z VETY O UZÁVERE

$\Rightarrow$) NECH $A_1, \dots, A_n$ SÚ VŠETKY FORMULE Z T POUŽITÉ PRI $T \vdash A$. OZNAČÍME B_i UZÁVER A_i.

PODĽA VETY O UZÁVERE JE $B_1, \dots, B_n \vdash A_i$ PRE $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ TAKŽE $B_1, \dots, B_n \vdash B \Rightarrow$ (VETA O DEDUKCII) $\vdash B_1 \to (B_2 \to \dots \to (B_{n-1} \to (B_n \to A)) \dots)$.

VETA: NECH A' JE UZÁVER A. POTOM $T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A'\}$ JE SPORNÁ

DÔKAZ: $\Rightarrow$) Z VETY O UZÁVERE $T \vdash A'$

$T, \neg A' \vdash A', \neg A'$
V2 $\vdash \neg A' \to (A' \to B)$
2x MP $T, \neg A' \vdash B$

$\Leftarrow$) $T, \neg A' \vdash A'$
VD $T \vdash \neg A' \to A'$
V7 $\vdash (\neg A' \to A') \to A'$
MP $T \vdash A'$

VETA O UZÁVERE DÁVA $T \vdash A$.

PRENEXNÉ TVARY FORMULÍ

HOVORÍME, ŽE FORMULA A JE V PRENEXNOM TVARE
$\Leftrightarrow$ $A = (\square_1 x_1) \dots (\square_n x_n) B$ $\quad n \geq 0$
KDE $\square_1, \dots, \square_n \in \{\forall, \exists\}$,
$x_1, \dots, x_n$ SÚ NAVZÁJOM RÔZNE PREMENNÉ
B JE OTVORENÁ FORMULA = OTVORENÉ JADRO

VETA: KU KAŽDEJ FORMULI A MOŽNO ZOSTROJIŤ FORMULU A' V PRENEXNOM TVARE TAK, ŽE $\vdash A \leftrightarrow A'$.

KU KVANTIFIKÁTORU $\square$ BUDE $\bar{\square}$ OZNAČOVAŤ OPAČNÝ KVANT.

PRENEXNÉ OPERÁCIE S FORMULOU A:
a) PODFORMULU B NAHRAĎ NEJAKOU JEJ VARIANTOU B'.
b) PODFORMULU $\neg(\square x)B$ NAHRAĎ $(\bar{\square} x)\neg B$
c) PODFORMULU $B \to (\square x)C$, KDE x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B NAHRAĎ FORMULOU $(\square x)(B \to C)$
d) PODFORMULU $(\square x)B \to C$, KDE x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V C NAHRAĎ FORMULOU $(\bar{\square} x)(B \to C)$
e) PODFORMULU $(\square x)B \,\Delta\, C$, RESP. $C \,\Delta\, (\square x)B$, KDE x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V C A $\Delta \in \{\&, \vee\}$ NAHRAĎ FORMULOU $(\square x)(B \,\Delta\, C)$

VETA:
pL) $\vdash (\bar{\square} x)\neg B \leftrightarrow \neg(\square x)B$
pc) KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B, POTOM
$\vdash (\square x)(B \to C) \leftrightarrow (B \to (\square x)C)$
pd) KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V C, POTOM
$\vdash (\bar{\square} x)(B \to C) \leftrightarrow ((\square x)B \to C)$
pe) KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V C, POTOM
$\vdash (\square x)(B \,\Delta\, C) \leftrightarrow ((\square x)B \,\Delta\, C)$ $\quad \Delta \in \{\&, \vee\}$

21.08.2007 T4
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKOUŠKA

DŮKAZ:

Pb) $(\exists x)\neg B \leftrightarrow \neg(\forall x)B$

$\neg(\forall x)\neg\neg B \leftrightarrow \neg(\forall x)B$

VYPLÝVÁ Z VĚTY O EKVIVALENCI1 $(\vdash B \leftrightarrow \neg\neg B)$

$(\forall x)\neg B \leftrightarrow \neg(\exists x)B$

$(\forall x)\neg B \leftrightarrow \neg\neg(\forall x)\neg B$

OPĚT VYPLÝVÁ Z VĚTY O EKVIVALENCI1

~ (NAVÍC JE TO TAUTOLOGIE VÝR. LOGIKY)

Pc) PŘEDPOKLADÁME, ŽE x NEMÁ VOLNÝ VÝSKYT V B.

NEJDŘÍVE DOKÁŽEME $(\forall x)(B \to C) \leftrightarrow (B \to (\forall x)C)$

$\vdash (\forall x)(B \to C) \to (B \to (\forall x)C)$ Z AXIÓMU PŘESKOKU

DOKÁŽEME TAKÉ $(B \to (\forall x)C) \to (\forall x)(B \to C)$

$\vdash (\forall x)C \to C_x[x]$, TJ. $\vdash (\forall x)C \to C$ AX. ŠPECIF.

$\vdash \underline{(B \to (\forall x)C) \to (((\forall x)C \to C) \to (B \to C))}$ TAUT. VÝR. POČTU

A2 $\vdash \underline{((B \to (\forall x)C) \to (((\forall x)C \to C) \to (B \to C))) \to}$

$(((B \to (\forall x)C) \to ((\forall x)C \to C)) \to$

$\to ((B \to (\forall x)C) \to (B \to C)))$

MP $\vdash \underline{((B \to (\forall x)C) \to ((\forall x)C \to C)) \to}$

$\to ((B \to (\forall x)C) \to (B \to C))$

A1 $\vdash ((\forall x)C \to C) \to ((B \to (\forall x)C) \to ((\forall x)C \to C))$

MP $\vdash \underline{(B \to (\forall x)C) \to ((\forall x)C \to C)}$

MP $\vdash (B \to (\forall x)C) \to (B \to C)$

$\vdash (B \to (\forall x)C) \to (\forall x)(B \to C)$ PRAVIDLO ZAVEDENÍ $\forall$

JEDNODUCHSÍ SPÔSOB, AKO DOKÁZAŤ

$(B \to (\forall x)C) \to (\forall x)(B \to C)$

$\vdash ((\forall x)(C \to C) \to ((B \to (\forall x)C) \to (B \to C))$ JE TAUT. VÝR. POČTU

$\vdash (\forall x)C \to C$ JE AXIÓM ŠPECIFIKÁCIE

MP $\vdash (B \to (\forall x)C) \to (B \to C)$

$\vdash (B \to (\forall x)C) \to (\forall x)(B \to C)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

POZNÁMKA: PRI SKLADANÍ IMPLIKÁCIÍ HRÁ DÔLEŽITÚ ÚLOHU PORADIE:

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ $\equiv$

$\equiv \vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

DOKÁŽTE, ŽE $(\exists x)(B \to C) \leftrightarrow B \to (\exists x)C$

TJ. $\neg(\forall x)\neg(B \to C) \leftrightarrow B \to \neg(\forall x)\neg C$

$\neg(\forall x)\neg(B \to C) \leftrightarrow (\forall x)\neg(C \to \neg B)$

$\vdash C_x[x] \to (\exists x)C$ TJ. $\vdash C \to (\exists x)C$

$\vdash (C \to (\exists x)C) \to ((B \to C) \to (B \to (\exists x)C))$ JE TAUT. VÝR. POČTU

MP $\vdash (B \to C) \to (B \to (\exists x)C)$

$\vdash (\exists x)(B \to C) \to (B \to (\exists x)C)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

DOKÁŽTE EŠTE OPAČNÚ IMPLIKÁCIU

21.08.2007 TK
PETER ČERNO

AILD62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKOLSKA

CHCEME DOKÁZAŤ $\underbrace{(B)}_{D} \to \underbrace{(\exists x)C)}_{E} \to \underbrace{(\exists x)(B \to C)}_{F}$

OZNAČME PO RADE $D = B$, $E = (\exists x)C$, $F = (\exists x)(B \to C)$

CHCEME DOKÁZAŤ $(D \to E) \to F$

PLATÍ

$\vdash (\neg D \to F) \to ((\overbrace{(E \to F) \to ((D \to E) \to F)}^{D \to F})$ JE TAUTOLÓGIA VÝR. POČTU

NASKOR UKÁŽEME $\neg D \to F$ T.J. $\neg B \to (\exists x)(B \to C)$

V7 $\vdash \neg B \to (B \to C)$

$\vdash (B \to C)_x[x] \to (\exists x)(B \to C)$

$\vdash \neg B \to (\exists x)(B \to C)$

ĎALEJ UKÁŽEME $E \to F$, T.J. $(\exists x)C \to (\exists x)(B \to C)$

A1 $\vdash C \to (B \to C)$

$\vdash (\exists x)C \to (\exists x)(B \to C)$ DISTRIBÚCIA $\exists$

POUŽIJEME 2x MP A DOSTÁVAME:

$\vdash (B \to (\exists x)C) \to (\exists x)(B \to C)$.

POZOR! $\vdash A \to B$, ~~x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V A,~~

POTOM $\vdash A \to (\exists x)B$ NIE JE PRAVIDLO ZAV. $\exists$

$\vdash A \to B$

$\vdash B_x[x] \to (\exists x)B$

$\vdash A \to (\exists x)B$ ZLOŽENIE IMPLIKÁCIÍ

x MÔŽE MAŤ VOĽNÝ VÝSKYT V A AJ B.

PODOBNE $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash (\forall x)A \to B$

NIE JE PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$!!!

22.08.2007 We
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

ZHRNUTIE (VETY FORMÁLNEHO SYSTÉMU PREDIKÁTOVEJ LOGIKY 1. RÁDU BEZ ROVNOSTI)

AXIÓMY:

A1 $A \to (B \to A)$

A2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3 $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

AXIÓM ŠPECIFIKÁCIE: $(\forall x)A \to A_x[t]$

AXIÓM PRESKOKU: $(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$

KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V A

ODVODZOVACIE PRAVIDLÁ:

MP: $A, A \to B \;/\; B$

PRAVIDLO GENERALIZÁCIE: $A \;/\; (\forall x)A$

OSTATNÉ SPOJKY A KVANT.:

$A \& B \equiv \neg(A \to \neg B)$, $A \vee B \equiv \neg A \to B$,

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \& (B \to A)$,

$(\exists x)A \equiv \neg(\forall x)\neg A$

VETY:

SCHÉMA ŠPEC. PRE $\exists$: $A_x[t] \to (\exists x)A$

PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$:

$\vdash A \to B$, x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V A, POTOM $\vdash A \to (\forall x)B$

PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$:

$\vdash A \to B$ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B, POTOM $\vdash (\exists x)A \to B$

VETA O INŠTANCII: AK A' JE INŠTANCIA A, POTOM $\vdash A \Rightarrow \vdash A'$

LEMA: $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)A \to A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n] \to (\exists x_1)\dots(\exists x_n)A$

VETA O UZÁVERE: KEĎ JE A' UZÁVER A, POTOM $\vdash A \Leftrightarrow \vdash A'$

VETA O DISTRIBÚCII KVANTIFIKÁTOROV:

$\vdash A \to B \Rightarrow \vdash (\forall x)A \to (\forall x)B$, $\vdash (\exists x)A \to (\exists x)B$

VETA O EKVIVALENCII

VETA O VARIANTÁCH: KEĎ JE A' VARIANTA FORMULE A, POTOM $\vdash A \leftrightarrow A'$

VETA O DEDUKCII: KEĎ A JE UZAV. F., POTOM
$T \vdash A \to B \Leftrightarrow T, A \vdash B$

VETA O KONŠTANTÁCH: $T \vdash A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n] \Leftrightarrow T \vdash A$.

VETA O REDUKCII: $T \vdash A \Leftrightarrow \vdash B_1 \to (B_2 \to \dots (B_n \to A)\dots)$
PRE NEJAKÉ $B_1,\dots,B_n$, KTORÉ SÚ UZÁVERY NEJAKÝCH FORMULÍ Z T.

VETA: $T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A'\}$ JE SPORNÁ (A' JE UZÁVER A)

VETA: KU KAŽDEJ A MOŽNO ZOSTROJIŤ A' V PRENEXNOM TVARE TAK, ŽE $\vdash A \leftrightarrow A'$

LEMMA: pb) $\vdash (\bar{\Box}x).\neg B \leftrightarrow \neg(\Box x)B$

pc) $\vdash (\Box x)(B \to C) \leftrightarrow (B \to (\Box x)C)$ × NIE JE VOĽNÁ V B

pd) $\vdash (\bar{\Box}x)(B \to C) \leftrightarrow ((\Box x)B \to C)$ × NIE JE VOĽNÁ V C

pe) $\vdash (\Box x)(B \,\Delta\, C) \leftrightarrow ((\Box x)B \,\Delta\, C)$ × NIE JE VOĽNÁ V C

DÔKAZ:

pb) $\vdash (\exists x)\neg B \leftrightarrow \neg(\forall x)B$

$\vdash \neg(\forall x)\neg\neg B \leftrightarrow \neg(\forall x)B$ PODĽA VETY O EKVIVALENCII

$\vdash (\forall x)\neg B \leftrightarrow \neg(\exists x)B$

$\vdash (\forall x)\neg B \Leftrightarrow \neg\neg(\forall x)\neg B$ PLATÍ $\vdash A \leftrightarrow \neg\neg A$ V3,V4

pc) $\vdash (\forall x)(B \to C) \to (B \to (\forall x)C)$ JE AXIÓM PRESKOKU

$\vdash (\forall x)C \to C$ AXIÓM ŠPEC.

$\vdash ((\forall x)C \to C) \to ((B \to (\forall x)C) \to (B \to C))$ JE TAUT. VÝR L.

MP $\vdash (B \to (\forall x)C) \to (B \to C)$

$\vdash (B \to (\forall x)C) \to (\forall x)(B \to C)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

22.08.2007 Ut
PETER OBANO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

$\vdash C \to (\exists x) C$ SCHÉMA ŠPEC. PRE $\exists$

$\vdash (C \to (\exists x) C) \to ((B \to C) \to (B \to (\exists x) C))$ TAUT. VÝR. L.

MP $\vdash (B \to C) \to (B \to (\exists x) C)$

$\boxed{\vdash (\exists x)(B \to C) \to (B \to (\exists x) C)}$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

DOKÁŽTE $\underbrace{(B}_{D} \to \underbrace{(\exists x) C)}_{E} \to \underbrace{(\exists x)(B \to C)}_{F}$

OZNAČTE PO RADE $D = B$, $E = (\exists x) C$, $F = (\exists x)(B \to C)$.

CHCEME DOKÁZAŤ $(D \to E) \to F$

PLATÍ

$\vdash (\neg D \to F) \to ((\overbrace{E \to F}^{D \to F}) \to ((D \to E) \to F))$ TAUT. VÝR. L.

$\vdash \neg B \to (B \to C)$

$\vdash (B \to C) \to (\exists x)(B \to C)$ V2

$\vdash \neg B \to (\exists x)(B \to C)$ SCHÉMA ŠPEC. PRE $\exists$, ZLOŽENIE IMPL.

$\vdash C \to (B \to C)$

$\vdash (\exists x) C \to (\exists x)(B \to C)$ A1, ZAVEDENIE $\exists$

2x MP $\boxed{\vdash (B \to (\exists x) C) \to (\exists x)(B \to C).}$

pd)

$\vdash (\forall x)(B \to C) \leftrightarrow (\forall x)(\neg C \to \neg B)$ VETA O EKV.

$\vdash (\forall x)(\neg(\neg B) \leftrightarrow (\neg C \to (\forall x) \neg B)$ PC)

$\vdash (\neg C \to (\forall x) \neg B) \leftrightarrow (\neg(\forall x) \neg B \to \neg\neg C)$ A3, V5

$\vdash (\neg(\forall x) \neg B \to \neg\neg C) \leftrightarrow ((\exists x) B \to C)$

ZLOŽENÍM $\leftrightarrow$ DOSTÁVAME

$\vdash (\forall x)(B \to C) \leftrightarrow (\exists x) B \to C)$.

$\vdash (\exists x)(B \to C) \leftrightarrow (\exists x)(\neg C \to \neg B)$ VETA O EKVIV.

$\vdash (\exists x)(\neg C \to \neg B) \leftrightarrow (\neg C \to (\exists x)\neg B)$

$\vdash (\neg C \to (\exists x)\neg B) \leftrightarrow (\neg(\exists x)\neg B \to \neg\neg C)$

$\vdash (\neg\neg(\forall x)\neg\neg B \to \neg\neg C) \leftrightarrow ((\forall x)B \to C)$

ZLOŽENÍ ⇔ DOSTAVANJE:

$\vdash (\exists x)(B \to C) \leftrightarrow ((\forall x)B \to C)$

pel $\vdash (\forall x)(\neg B \to C) \leftrightarrow (\underbrace{(\exists x)\neg B}_{\neg(\forall x)\neg} \to C)$ V

$\vdash ((\exists x)\neg B \to C) \leftrightarrow (\neg(\forall x)B \to C)$

PODOBNE $\vdash (\exists x)(\neg B \to C) \leftrightarrow ((\forall x)\neg B \to C)$

$\vdash ((\forall x)\neg B \to C) \leftrightarrow (\neg(\exists x)B \to C)$

$\vdash (\forall x)\neg(B \to \neg C) \leftrightarrow \neg\neg(\forall x)\neg(B \to \neg C)$ &

$\vdash \neg(\exists x)(B \to \neg C) \leftrightarrow \neg((\forall x)B \to \neg C)$

$\vdash (\exists x)\neg(B \to \neg C) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\neg(B \to \neg C)$

$\vdash \neg(\forall x)\neg\neg(B \to \neg C) \leftrightarrow \neg(\forall x)(B \to \neg C)$

$\vdash \neg(\forall x)(B \to \neg C) \leftrightarrow \neg((\forall x)B \to \neg C)$

22.08.2007 11:
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

PRÍKLAD: NECH x NIE JE VOĽNÁ VO FORMULI B A PREMENNÁ y SA NEVYSKYTUJE V B ANI C. NÁJDITE PRENEXNÝ TVAR FORMULE $B \leftrightarrow (\forall x) C$.

$B \leftrightarrow (\forall x) C$

$(B \to (\forall x) C) \;\&\; ((\forall x) C \to B)$

$(\forall x)(B \to C) \;\&\; (\exists x)(C \to B)$

$\sim (\forall x)((B \to C) \;\&\; (\exists x)(C \to B))$

↑ x MÔŽE BYŤ VOĽNÁ V C

$(\forall x)((B \to C) \;\&\; (\exists y)(C_x[y] \to B))$

$(\forall x)(\exists y)((B \to C) \;\&\; (C_x[y] \to B))$

PRÍKLAD: $(\exists x)(x = y) \to (\exists x)(x = 0 \vee \neg(\exists y)(y < 0))$

$(\forall x)[(x = y) \to (\exists x)(x = 0 \vee \neg(\exists y)(y < 0))]$

$(\forall x)[(x = y) \to (\exists u)(u = 0 \vee \neg(\exists y)(y < 0))]$

$\sim (\forall x)(\exists u)[(x = y) \to (u = 0 \vee \neg(\exists y)(y < 0))]$

$(\forall x)(\exists u)[(x = y) \to (u = 0 \vee (\forall y)\neg(y < 0))]$

$(\forall x)(\exists u)[(x = y) \to (u = 0 \vee (\forall v)\neg(v < 0))]$

$(\forall x)(\exists u)[(x = y) \to (\forall v)(u = 0 \vee \neg(v < 0))]$

$(\forall x)(\exists u)(\forall v)[(x = y) \to (u = 0 \vee \neg(v < 0))]$.

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA S ROVNOSŤOU

AXIÓMY:

KEĎ JE x PREMENNÁ, POTOM $x = x$ (R1)

KEĎ SÚ $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ PREMENNÉ A f n-ÁRNY FUNKČNÝ SYMBOL, POTOM (R2)

$(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \dots \to (x_n = y_n \to f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)) \dots))$

KEĎ SÚ $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ PREMENNÉ A P n-ÁRNY PREDIKÁTOVÝ SYMBOL, POTOM (R3)

$(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \dots \to (x_n = y_n \to (P(x_1, \dots, x_n) \to P(y_1, \dots, y_n)) \dots))$

VETA: $\vdash x = y \to y = x$.

DÔKAZ:

$\vdash x = y \to (x = x \to (x = x \to y = x))$ (R3)

$\vdash x = x \to (x = x \to (x = y \to y = x))$ JE TAUT. DÔSLEDOK

2x MP $\vdash x = y \to y = x$.

VETA: $\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$.

DÔKAZ:

R3 $\vdash x = x \to (y = z \to (x = y \to x = z))$

MP $\vdash y = z \to (x = y \to x = z)$

$\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$ JE TAUT. DÔSLEDOK

VETA: NECH $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ SÚ TERMY, $\vdash t_i = s_i$ PRE $\forall i$.

i) KEĎ TERM s VZNIKNE Z t ZÁMENOU NIEKTORÝCH VÝSKYTOV t_i ODPOVEDAJÚCIMI s_i, POTOM $\vdash t = s$.

ii) KEĎ FORMULA B, VZNIKNE Z FORMULE A ZÁMENOU NIEKTORÝCH VÝSKYTOV t_i ODPOVEDAJÚCIMI s_i (OKREM PRÍPADU KEĎ t_i JE PREMENNÁ x VIAZANÁ KVANTIFIKÁTOROM $(\forall x)$ ALEBO $(\exists x)$.), POTOM $\vdash A \leftrightarrow B$.

22.08.2007 We
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

DÔKAZ i). INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI TERMU t.:
KEĎ t JE PREMENNÁ ALEBO SA NEVYSKYTUJE MEDZI $t_1, \dots, t_n$,
POTOM AK DÔJDE K NAHRADENIU CELÉHO TERMU
$t = t_i$ TERMOM s_i, POTOM Z PREDPOKLADOV VETY
JE $\vdash t = s$.
NECH $t = f(r_1, \dots, r_k)$ A PRE r_i UŽ BOLO
DOKÁZANÉ $\vdash r_i = r_i'$, KDE $s = f(r_1', \dots, r_k')$.
POTOM $\vdash t = s$ DOSTANEME Z
R2 $\vdash x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \dots \to (x_k = y_k \to f(x_1, \dots, x_k) = f(y_1, \dots, y_k)) \dots)$
AKO INŠTANCIU + PRAVIDLO MP.

DÔKAZ ii). STAČÍ, KEĎ UKÁŽEME, ŽE ĽUBOVOĽNÁ ATOMICKÁ
PODFORMULA $p(r_1, \dots, r_k)$, RESP. $r_1 = r_2$
JE EKVIVALENTNÁ FORMULE $p(r_1', \dots, r_k')$, RESP. $r_1' = r_2'$.
PODĽA i) PLATÍ $\vdash r_i \leftrightarrow r_i'$ A
$r_1 = r_1' \to (r_2 = r_2' \to \dots \to (r_k = r_k' \to (p(r_1, \dots, r_k) \to p(r_1', \dots, r_k')) \dots)$
JE INŠTANCIA AXIÓMU R3.
MP DÁVA $\vdash p(r_1, \dots, r_k) \to p(r_1', \dots, r_k')$.
PODOBNE $\vdash p(r_1', \dots, r_k') \to p(r_1, \dots, r_k)$.

$\vdash r_1 = r_1'$, $r_2 = r_2'$, $r_1' = r_1$
$\vdash r_1' = r_1 \to (r_1 = r_2 \to (r_1' = r_2))$
$\vdash r_1' = r_2$
$\vdash r_1' = r_2 \to (r_2 = r_2' \to (r_1' = r_2'))$
$\vdash r_1' = r_2'$.

VETA: i) $\vdash t_1 = s_1 \to (t_2 = s_2 \to \ldots \to (t_n = s_n \to$
$t[t_1, \ldots, t_n] = t[s_1, \ldots, s_n]) \ldots)$

ii) $\vdash t_1 = s_1 \to (t_2 = s_2 \to \ldots \to (t_n = s_n \to$
$(A[t_1, \ldots, t_n] \leftrightarrow A[s_1, \ldots, s_n])) \ldots)$.

VETA: KEĎ x JE PREMENNÁ, KTORÁ NIE JE OBSIAHNUTÁ V TERME t, POTOM

$\vdash A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x = t \to A)$

$\vdash A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x = t \,\&\, A)$

DÔKAZ.

$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (t = t \to A_x[t])$ AX. ŠPECIFIKÁCIE

$\vdash t = t \to ((\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t])$ TAUT. DÔSLEDOK

R1 $\vdash x = x$

$\vdash t = t$ JE INŠTANCIA R1

MP $\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t]$

$\vdash x = t \to (A_x[x] \leftrightarrow A_x[t])$ (VIĎ VYŠŠIE)

$\vdash A_x[t] \to (x = t \to A)$

$\vdash A_x[t] \to (\forall x)(x = t \to A)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

ĎALEJ DOKÁŽEME $A_x[t] \leftrightarrow \neg(\forall x)(x = t \to \neg A)$

TJ. $\neg A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x = t \to \neg A)$

TO ALE PLATÍ Z PREDCHÁDZAJÚCEHO.

5/7

22.08.2007 16
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

CVIČENIE A

SÉMANTIKA

a) $(\exists x)\, p(x)$ ÁNO, $(\forall x)\, p(x)$ ÁNO

$(\exists x)(\forall y)\,(q(x,x) \& \neg q(x,y))$ NIE

NAPR. PRE $q_m = \emptyset$

$(\exists x)(\exists y)\,(p(x) \& \neg p(y))$ ÁNO

$(\exists x)(\forall y)\, q(x,y) \to (\forall y)(\exists x)\, q(x,y)$ ÁNO (DOKONCA V KAŽDOM $\mathcal{M}$)

$(\exists x)(\forall y)\, q(x,y) \to (\forall z) R(x,y,z)$ ÁNO (NAPR. $q_m = \emptyset$)

$(\forall x)(\exists y)\, q(x,y) \to (\exists y)(\forall x)\, q(x,y)$ NIE

NAPR. $M = \{1,2\}$, $q_m = \{(1,2),(2,1)\}$

b) JEDINÁ FORMULA $(\exists x)(\forall y) q(x,y) \to (\forall y)(\exists x) q(x,y)$ JE LOGICKY PRAVDIVÁ.

e JE OHODN. PREM., $\mathcal{M}$ REALIZÁCIA

$\mathcal{M} \models (\exists x)(\forall y) q(x,y)\ [e] \Leftrightarrow$

$\exists m_1 \in M\ \forall m_2 \in M\ \ \mathcal{M} \models q(x,y)\ [e(x/m_1, y/m_2)]$

$\Leftrightarrow \exists m_1 \in M\ \forall m_2 \in M\ \ (m_1, m_2) \in q_m \Rightarrow$

OZNAČÍME TO m_1 AKO $\overline{m}_1$ $\forall m_2 \in M\ \ (\overline{m}_1, m_2) \in q_m \Rightarrow$

$\forall m_2 \in M\ \exists m_1 \in M\ \ (m_1, m_2) \in q_m \Leftrightarrow \mathcal{M} \models (\forall y)(\exists x) q(x,y)\ [e]$

FORMÁLNY SYSTÉM

1) a) $(\forall x)(A \to B) \to ((\exists x) A \to B)$, KDE x NIE JE V. V. V B

VS $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\vdash (\forall x)(A \to B) \to (\forall x)(\neg B \to \neg A)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

$\vdash (\forall x)(\neg B \to \neg A) \to (\neg B \to (\forall x) \neg A)$ AX. PRESKOKU

VS $\vdash (\neg B \to (\forall x) \neg A) \to (\neg(\forall x) \neg A \to \neg\neg B)$

$\vdash (\neg B \to (\forall x) \neg A) \to ((\exists x) A \to B)$ VETA O EKVIV.

$\vdash (\forall x)(A \to B) \to ((\exists x) A \to B)$ ZLOŽENIE IMPLIKÁCIÍ (TAUT. DÔSLEDOK)

JE TO TIEŽ DÔSLEDOK PREVIEXNEJ OPERÁCIE
$\vdash (\forall x)(A \to B) \leftrightarrow (\exists x)A \to B)$ x NIE JE VOĽNÁ V B.

b) x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V A.

$A \leftrightarrow (\forall x)A$

$\vdash (\forall x)A \to A_x[x]$ AX. ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash A \to A$
$\vdash A \to (\forall x)A$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

$A \leftrightarrow (\exists x)A$

$\vdash A_x[x] \to (\exists x)A$ EKVIVALENT AX. ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash A \to A$
$\vdash (\exists x)A \to A$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

$(\forall x)A \leftrightarrow (\exists x)A$

VYPLÝVA Z PRVÝCH DVOCH TVRDENÍ
$\vdash (\forall x)A \to A$, $A \to (\exists x)A$
$\vdash (\exists x)A \to A$, $A \to (\forall x)A$

c) $(\forall x)(\forall y)B \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)B$

$\vdash (\forall y)B \to B$ AX. ŠPEC.
$\vdash (\forall x)(\forall y)B \to (\forall y)B$ AX ŠPEC
$\vdash (\forall x)(\forall y)B \to B$ TAUT. DÔSLEDOK
$\vdash (\forall x)(\forall y)B \to (\forall x)B$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$
$\vdash (\forall x)(\forall y)B \to (\forall y)(\forall x)B$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

PODOBNE NAOPAK

PODOBNE PRI $\exists$

22.08.2007 14
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

d) $(\exists x)(\forall_1)B \to (\forall_1)(\exists x)B$

$\vdash (\forall_1)B \to B$ AX. ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash (\exists x)(\forall_1)B \to (\exists x)B$ VETA O DISTRIBÚCII $\exists$
$\vdash (\exists x)(\forall_1)B \to (\forall_1)(\exists x)B$ VETA O ZAVEDENÍ $\forall$

e) $\neg(\exists x)A \to \neg(\forall x)A$

$\vdash (\forall x)A \to A$ AX. ŠPECIFIKÁCIE
$\vdash A \to (\exists x)A$ EKVIVALENT AX. ŠPEC. PRE $\exists$
$\vdash (\forall x)A \to (\exists x)A$ TAUT. DÔSLEDOK (ZLOŽ. IMPLIKÁCIÍ)
V5, MP $\vdash \neg(\exists x)A \to \neg(\forall x)A$

f) $(\exists x)(A \& (B \to C)) \to ((\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B)$

POZNÁMKA: VIEME, ŽE $\vdash A \Leftrightarrow \vdash (\forall x)A$
PLATÍ NIEČO PODOBNÉ AJ PRE $\exists$? ÁNO

$\vdash \neg A \Leftrightarrow \vdash \neg(\exists x)A$

$\vdash \neg A \Rightarrow \vdash (\forall x)\neg A \Rightarrow \vdash \neg\neg(\underbrace{\exists x}_{\text{(POSLEDNÁ JE TAM TÁ NEG.)}})\neg A$
$\vdash \neg(\exists x)A \Rightarrow \vdash (\forall x)\neg A \Rightarrow \vdash \neg A$

$A \& (B \to C) \equiv A \& (\neg B \vee C) \equiv (A \& \neg B) \vee (A \& C)$
$(A \to B) \to \neg(A \to \neg C)$

Z VETY O EKVIVALENCII STAČÍ DOKÁZAŤ

$(\exists x)((A \to B) \to \neg(A \to \neg C)) \to ((\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B)$

$(\exists x)((A\to B)\to\neg(A\to\neg C))\to((\forall x)(A\to\neg C)\to\neg B)$

OPÄŤ Z VETY O EKVIVALENCII STAČÍ DOKÁZAŤ

$(\exists x)((A\to\neg C)\to\neg(A\to B))\to((\forall x)(A\to\neg C)\to\neg B)$

A1 $\vdash B\to(A\to B)$

V5 $\vdash \neg(A\to B)\to\neg B$

$\vdash (\neg(A\to B)\to\neg B)\to[((A\to\neg C)\to\neg(A\to B))\to$

$\to((A\to\neg C)\to\neg B)]$ JE TAUTOLÓGIA (SKLADANIE IMPLIKÁCIÍ)

MP $\vdash ((A\to\neg C)\to\neg(A\to B))\to((A\to\neg C)\to\neg B)$

$\vdash (\exists x)((A\to\neg C)\to\neg(A\to B))\to(\exists x)((A\to\neg C)\to\neg B)$

Z VETY O DISTRIBÚCII $\exists$

$\vdash (\exists x)((A\to\neg C)\to\neg B)\to((\forall x)(A\to\neg C)\to\neg B)$

Z VETY O PRENEXNÝCH OP.:

1. KEĎ x NIE JE VOĽNÁ V A, POTOM

$\vdash B\to(\exists x)B$

$\vdash (B\to(\exists x)B)\to((A\to B)\to(A\to(\exists x)B))$ AX. SPEC TAUTOLÓGIA

MP $\vdash (A\to B)\to(A\to(\exists x)B)$

$\vdash (\exists x)(A\to B)\to(A\to(\exists x)B)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

2. ĎALEJ KEĎ x NIEJE VOĽNÁ V B, POTOM

$\vdash (\exists x)(\neg B\to\neg A)\to(\neg B\to(\exists x)\neg A)$ (VIĎ VYŠŠIE)

$\vdash (\exists x)(A\to B)\to((\forall x)A\to B)$ VETA O EKVIVALENCII

ZLOŽENÍM OBOCH IMPLIKÁCIÍ JE

$\vdash (\exists x)((A\to\neg C)\to\neg(A\to B))\to((\forall x)(A\to\neg C)\to\neg B)$

POUŽITÍM VETY O EKVIVALENCII DOSTANEME:

$\vdash (\exists x)(A\&(B\to C))\to((\forall x)(A\to\neg C)\to\neg B)$.

22.08.2007 we
PETER ČERNO

AIL 062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

2) a) $(\forall x)(A \& B) \leftrightarrow ((\forall x)A \& (\forall x)B)$

$(\forall x)\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg((\forall x)A \to \neg(\forall x)B)$

$((\forall x)A \to (\exists x)\neg B) \leftrightarrow (\exists x)(A \to \neg B)$

ZREJME

$\vdash (\exists x)(A \to (\exists x)\neg B) \to ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$

$\vdash \neg B \to (\exists x)\neg B$ AX. ŠPECIFIKÁCIE

$\vdash (\neg B \to (\exists x)\neg B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to (\exists x)\neg B))$ TAUTOLÓGIA

MP $\vdash (A \to \neg B) \to (A \to (\exists x)\neg B)$

$\vdash (\exists x)(A \to \neg B) \to (\exists x)(A \to (\exists x)\neg B)$ PRAVIDLO ZAV. $\exists$

$\vdash (\exists x)(A \to \neg B) \to ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$ TAUT. DÔSLEDOK

DOKÁŽEME EŠTE OPAČNÚ IMPLIKÁCIU

1/3

23.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

2) a) $(\forall x)(A \& B) \leftrightarrow ((\forall x)A \& (\forall x)B)$

$(\forall x)\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg((\forall x)A \to \neg(\forall x)B)$

$(\exists x)(A \to \neg B) \leftrightarrow ((\forall x)A \to \neg(\forall x)B)$

$(\exists x)(A \to \neg B) \leftrightarrow ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$

$\vdash \neg B \to (\exists x)\neg B$ AX. ŠPECIFIKÁCIE

$\vdash (\neg B \to (\exists x)\neg B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to (\exists x)\neg B))$ TAUTOLÓGIA

MP $\vdash (A \to \neg B) \to (A \to (\exists x)\neg B)$

$\vdash (\exists x)(A \to \neg B) \to (\exists x)(A \to (\exists x)\neg B)$ PRAVIDLO ZAV. $\exists$

$\vdash (\exists x)(A \to (\exists x)\neg B) \leftrightarrow ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$ PRENEX. OP.

$\vdash (\exists x)(A \to \neg B) \to ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$ TAUT. DÔSLEDOK

DOKÁŽEME ESTE $((\forall x)A \to (\exists x)\neg B) \to (\exists x)(A \to \neg B)$

NECH' y SA NEVYSKYTUJE V A ANI B, POTOM

$\vdash (\forall x)A \leftrightarrow (\forall y)A_x[y]$

$\vdash ((\forall y)A_x[y] \to (\exists x)\neg B) \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A_x[y] \to \neg B)$???

ZREJME $\vdash (\exists x)\neg A \to (\exists x)(A \to \neg B)$ z V2

$\vdash (\exists x)\neg B \to (\exists x)(A \to \neg B)$ z A1

TD. $\vdash \neg(\forall x)A \to (\exists x)(A \to \neg B)$

PODĽA VETY O EKVIVALENCII

OZNAČÍME $D = (\forall x)A$, $E = (\exists x)\neg B$, $F = (\exists x)(A \to \neg B)$

TERAZ SI STAČÍ UVEDOMIŤ, ŽE z

$\vdash E \to F$

$\vdash \neg D \to F$

PLYNIE $\vdash (D \to E) \to F$ AKO TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK

TOTIŽ $\neg F \vdash \neg E, D$ POTOM z

$\vdash D \to (\neg E \to \neg(D \to E))$ POMOCOU MP A VD SE

$\vdash \neg F \to \neg(D \to E)$.

b) $(\exists x)(A \vee B) \leftrightarrow ((\exists x)A \vee (\exists x)B)$

$(\exists x)(\neg A \to B) \leftrightarrow (\neg(\exists x)A \to (\exists x)B)$

$(\exists x)(\neg A \to B) \leftrightarrow ((\forall x)\neg A \to (\exists x)B)$

TO JE EKVIVALENTNÉ S a)

c) $(\exists x)(A \& B) \to ((\exists x)A \& (\exists x)B)$

$(\exists x)\neg(A \to \neg B) \to \neg((\exists x)A \to \neg(\exists x)B)$

$\neg(\forall x)(A \to \neg B) \to \neg((\exists x)A \to (\forall x)\neg B)$

$((\exists x)A \to (\forall x)\neg B) \to (\forall x)(A \to \neg B)$

ZREJME $\vdash (\forall x)\neg B \to (\forall x)(A \to \neg B)$ z A1

DALEJ $\vdash (\forall x)\neg A \to (\forall x)(A \to \neg B)$ z V2

TJ. $\vdash \neg(\exists x)A \to (\forall x)(A \to \neg B)$

OZNAČME $D \equiv (\exists x)A$, $E \equiv (\forall x)\neg B$, $F \equiv (\forall x)(A \to \neg B)$

PLATÍ $\vdash \neg D \to F$, $\vdash E \to F$

TVRDENIE $\vdash (D \to E) \to F$ JE PODĽA

VZ IBA TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK.

d) $((\exists x)A \vee (\exists x)B) \to (\exists x)(A \vee B)$

$(\neg(\exists x)A \to (\exists x)B) \to (\exists x)(\neg A \to B)$

$((\forall x)\neg A \to (\exists x)B) \to (\exists x)(\neg A \to B)$

$\vdash (\exists x)B \to (\exists x)(\neg A \to B)$

$\vdash \neg(\exists x)\neg\neg A \to (\exists x)(\neg A \to B)$

$\vdash \neg(\forall x)\neg A \to (\exists x)(\neg A \to B)$

TVRDENIE JE TAUT. DÔSLEDOK

2/1

23.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

e) $((\forall x)A \to (\forall x)B) \to (\forall x)(A \to B)$ NEPLATÍ

$\vdash (\forall x)B \to (\forall x)(A \to B)$

$\vdash (\forall x)A \to A$

$\vdash A \to (\exists x)A$

$\vdash (\forall x)A \to (\exists x)A$, $\vdash (\forall x)A \to \neg(\forall x)\neg A$

$\vdash (\forall x)\neg A \to (\forall x)(A \to B)$

$\vdash \neg(\exists x)A \to (\forall x)(A \to B)$

✓ $\vdash ((\exists x)A \to (\forall x)B) \to (\forall x)(A \to B)$ TAUT. DOSLEDOK

OZNAČÍME $D = (\forall x)A$, $E = (\exists x)A$, $F = (\forall x)B$, $G = (\forall x)(A \to B)$

TERAZ VIEME STAČÍ IBA UKÁZAŤ, ŽE

$\vdash D \to E$, $(E \to F) \to G$

PLYNIE $\vdash (D \to F) \to G$ AKO TAUT. DÔSLEDOK

ZREJME $E \to F \vdash (D \to F) \to G$

DOKÁŽEME $((\forall x)A \to (\forall x)B) \to ((\exists x)A \to (\forall x)B)$

$((\forall x)A \to B) \to ((\exists x)A \to B)$

ALE TO NEPLATÍ !!!

e) $(\forall x)(A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$

$\vdash (\forall x)A \to A$

$\vdash ((\forall x)A \to A) \to ((A \to B) \to ((\forall x)A \to B))$

MP $\vdash (A \to B) \to ((\forall x)A \to B)$

$\vdash (\forall x)(A \to B) \to (\forall x)((\forall x)A \to B)$

$\vdash (\forall x)((\forall x)A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$

$\vdash (\forall x)(A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$

f) $((\forall x)A \to (\forall x)B) \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)$

$\vdash (\forall x)B \to (\exists x)B$

$\vdash (\exists x)B \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)$

$\boxed{\vdash (\forall x)B \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)}$

$\vdash (\exists x)\neg A \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)$

$\boxed{\vdash \neg(\forall x)A \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)}$

TVRDENIE JE TAUT. DÔSLEDOK

VETA O KOREKTNOSTI

1) a) $(\forall x)(\exists_4)A \to (\exists_4)(\forall x)A$ NEPLATÍ

$M = \{1,2\}$, $A = P(x,4)$, $P_m = \{(1,2),(2,1)\}$

b) $((\exists x)A \,\&\, (\exists x)B) \to (\exists x)(A \,\&\, B)$ NEPLATÍ

$M = \{1,2\}$, $A = P(x)$, $B = q(4)$, $P_m = \{1\}$, $q_m = \{2\}$

c) $(\forall x)(A \vee B) \to ((\forall x)A \vee (\forall x)B)$ NEPLATÍ

STAČÍ VZIAŤ m AKO V b)

d) $(A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$, $A = P(x)$, $B = q(x)$

m: Ak $m \models A \to B\ [e] \wedge m \not\models (\forall x)A \to (\forall x)B\ [e]$

$e(x) \notin P_m \vee e(x) \in q_m \quad \wedge \neg(P_m = M \Rightarrow q_m = M)$

$P_m = M \wedge q_m \neq M$

$M = \{1,2\}$, $P_m = \{1,2\}$, $q_m = \{1\}$

$e(x) = 1$ ZREJME $m \models P(x) \to q(x)\ [e]$

A TIEŽ $m \not\models (\forall x)A \to (\forall x)B$, PRETOŽE

$P_m = M$, ALE $q_m \neq M$.

23.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKOŠKA

e) $(A \to B) \to ((\exists x)A \to (\exists x)B)$

$\mathfrak{M}$: $\exists e$ $\mathfrak{M} \models (A \to B)[e] \wedge \exists m_1 \in M\ \mathfrak{M} \models A[e(x/m_1)] \wedge$
$\wedge \neg \exists m_2 \in M\ \mathfrak{M} \models B[e(x/m_2)]$

$A = p(x)$, $B = q(x)$

$M = \{1, 2\}$, $p_{\mathfrak{M}} = \{1\}$, $q_{\mathfrak{M}} = \emptyset$

$e(x) = 2$, ZREJME $\mathfrak{M} \models (p(x) \to q(x))[e]$
PREDPOKLAD $2 \notin p_{\mathfrak{M}}$.

PODOBNE $\exists m_1 \in M$: $\mathfrak{M} \models p(x)[e(x/m_1)]$ $m_1 = 1$
$\neg \exists m_2 \in M$: $\mathfrak{M} \models q(x)[e(x/m_2)]$ $q_{\mathfrak{M}} = \emptyset$

VETY O ROVNOSTI

c) NECH x JE PREMENNÁ A t JE TERM, KTORÝ NEOBSAHUJE PREMENNÚ x. POTOM

$A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x = t \to A)$
$A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x = t \wedge A)$

$\vdash (x = t) \to (A_x[x] \leftrightarrow A_x[t])$
$\vdash (x = t) \to (A_x[t] \to A)$
$\vdash A_x[t] \to (x = t \to A)$
$\vdash A_x[t] \to (\forall x)(x = t \to A)$

$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (x = t \to A)_x[t]$
$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (t = t \to A_x[t])$
$\vdash (t = t) \to ((\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t])$
$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t]$

CVIČENIE 8

d) KEĎ JE S MNOŽINA VŠETKÝCH UZÁVEROV FORMULÍ Z T,
POTOM $T \vdash A \Leftrightarrow S \vdash A$.

$\Rightarrow$) NECH $A_1, \dots, A_n$ SÚ VŠETKY FORMULE POUŽITÉ Z T
PRI DÔKAZE $T \vdash A$. OZNAČME $B_1, \dots, B_n$ ICH UZÁVERY
POTOM $B_1, \dots, B_n \vdash B_i \Rightarrow B_1, \dots, B_n \vdash A_i$ $\forall i$ (VETA O UZÁVERE)
TAKŽE VIEME ZOSTROJIŤ DÔKAZ $B_1, \dots, B_n \vdash A$.
KEĎŽE $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq S$, NUTNE $S \vdash A$.

$\Leftarrow$) PODOBNE.

3. $\Rightarrow$) NECH $T, A \vdash B$. ZREJME $T, A' \vdash A' \Rightarrow T, A' \vdash A$,
TAKŽE VIEME ZOSTROJIŤ DÔKAZ $T, A' \vdash B$.
Z VETY O DEDUKCII $T \vdash A' \to B$.

$\Leftarrow$) $T \vdash A' \to B$, POTOM VETA O DEDUKCII DÁVA
$T, A' \vdash B$. ZREJME $T, A \vdash A \Rightarrow T, A \vdash A'$,
TAKŽE VIEME ZOSTROJIŤ DÔKAZ $T, A \vdash B$.

4. a) UVAŽUJME AKO ZÁKLAD PRAVIDLO
ZAVEDENIA $\forall$: $A \to B \;/\; A \to (\forall x) B$ (x NIE JE V A)
DOKÁŽEME PRAVIDLO GENERALIZÁCIE:
NECH $\vdash A$
UVAŽUJME FORMULU B_1 V KTOREJ SA NEVYSKYTUJE x
AKO VOĽNÁ Ppremenná. (NAPR. $y = y$)
$\vdash B \to B$
$\vdash A \to ((B \to B) \to A)$
MP $\vdash (B \to B) \to A$
$\vdash (B \to B) \to (\forall x) A$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$
MP $\vdash (\forall x) A$

22.08.2007 Th
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

4. b) CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE:

$\vdash A \to B \;/\; \vdash (\exists x)A \to B$ x NIE JE VOĽNÁ V B

$\vdash A_x[t] \to (\exists x)A$

ÚPLNE NAHRADÍ PRAVIDLO A SCHÉMU:

$\vdash A \to B \;/\; \vdash A \to (\forall x)B$ x NIE JE VOĽNÁ V A

$\vdash (\forall x)A \to A_x[t]$

NECH $\vdash A \to B$ x NIE JE VOĽNÁ V B

POTOM $\vdash \neg B \to \neg A$ TAUT. DÔSLEDOK

$\vdash (\exists x)\neg B \to \neg A$

$\vdash \neg\neg A \to \neg(\exists x)\neg B$

$\vdash A \to (\forall x)B$

!!! ZA PREDPOKLADU, ŽE $(\forall x)$ JE DEFINOVANÉ AKO $\neg(\exists x)\neg$

$\vdash \neg A_x[t] \to (\exists x)\neg A$

$\vdash \neg(\exists x)\neg A \to A_x[t]$

$\vdash (\forall x)A \to A_x[t]$

KEĎ $\vdash \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$

A $A_1, \ldots, A_n$ SÚ UZÁVERY (NAVZÁJOM RÔZNYCH) FORMÚL Z MNOŽINY T, POTOM TIEŽ $T \vdash A_i$ PRE $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

TJ. $T \vdash A_1 \& \ldots \& A_n$

OZNAČÍME $B = A_1 \& \ldots \& A_n$.

POTOM ZREJME $\neg B = \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$

KEĎŽE $T \vdash B$ AJ $T \vdash \neg B$, DOSTÁVAME Z $\vdash \neg B \to (B \to C)$, ŽE T JE SPORNÁ

KEĎ T JE SPORNÁ, TJ. $T \vdash B$ AJ $T \vdash \neg B$ PRE NEJAKÉ B

NECH $A_1, \ldots, A_n$ SÚ UZÁVERY VŠETKÝCH FORMÚL POUŽITÝCH V DÔKAZOCH $T \vdash B$ AJ $T \vdash \neg B$

Z T

POTOM ZREJME $A_1, \dots, A_n \vdash B$, $A_1, \dots, A_n \vdash \neg B$
A Z VETY O DEDUKCII JE

$\vdash A_1 \to (A_2 \to \dots \to (A_n \to B) \dots)$
$\vdash A_1 \to (A_2 \to \dots \to (A_n \to \neg B) \dots)$

PLATÍ $\vdash A_1 \to (A_2 \to \dots \to (A_n \to C) \dots) \Leftrightarrow \vdash (A_1 \& \dots \& A_n) \to C$
JE TO TAUTOLÓGIA

TJ. ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE

$\vdash \neg B \to \neg(A_1 \& \dots \& A_n)$
$\vdash \neg\neg B \to \neg(A_1 \& \dots \& A_n)$

TJ. $\vdash \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n$ JE TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK
(VID LEMA O NEUTRÁLNEJ FORMULI)

6. MÁME DOKÁZAŤ $(A_n \equiv (\exists v_1) \dots (\exists v_n)(v_1 \neq v_2 \& \dots \& v_{n-1} \neq v_n))$

$(\exists x)(x \neq y \& x \neq z) \leftrightarrow ((y = z \& (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2)) \vee$
$(y \neq z \& (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(v_1 \neq v_2 \& v_1 \neq v_3 \& v_2 \neq v_3)))$

NAJSKÔR DOKÁŽEME

$(y = z \& (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2)) \to (\exists x)(x \neq y \& x \neq z)$.

TJ. $(\exists v_1)(\exists v_2)(y = z \& v_1 \neq v_2) \to (\exists x)(x \neq y \& x \neq z)$

$(\forall x)(x = y \vee x = z) \to (\forall v_1)(\forall v_2)(y \neq z \vee v_1 = v_2)$
$(\forall x)(x \neq y \to x = z) \to (\forall v_1)(\forall v_2)(y = z \to v_1 = v_2)$,

$A \equiv x \neq y$, $B \equiv x = z$, $C \equiv y = z$
$(A \vee B) \to (C \to A)$ / $B \to (C \to A)$ / $C \to (A \to B)$ / ...
$(\neg A \to B) \to (C \to D)$
1 1 1 0

$\vdash (y = z \& v_1 \neq v_2) \to ((v_1 = y) \to (v_2 \neq y \& v_2 \neq z))$
$\vdash (y = z \& v_1 \neq v_2) \to ((v_1 \neq y) \to (v_1 \neq y \& v_1 \neq z))$
$\vdash (v_1 \neq y \& v_1 \neq z) \to (\exists x)(x \neq y \& x \neq z)$, PODOBNE PRE v_2
$\vdash (y = z \& v_1 \neq v_2) \to (\exists x)(x \neq y \& x \neq z)$ TAUT. DÔSLEDOK

2*/3

23. 10. 2007 Th
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

TOTIŽ

$\vdash x = x \to (y = z \to (x \neq y \to x \neq z))$

$\vdash v_1 = y \to (v_2 = v_2 \to (v_1 \neq v_2 \to y \neq v_2))$

$\vdash v_1 = y \to (y = z \to v_1 = z)$

$\vdash v_1 = z \to (v_2 = v_2 \to (v_1 \neq v_2 \to z \neq v_2))$

PODOBNE

$\vdash A \to (B \to C) \Leftrightarrow$
$\vdash B \to (A \to C)$
$\vdash A \to (B \to C) \Leftrightarrow$
$\vdash (A \& B) \to C$

TAKŽE AKO TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK JE

$\vdash (v_1 = y) \to ((y = z) \to ((v_1 \neq v_2) \to (y \neq v_2 \;\&\; z \neq v_2)))$, TAKŽE TIEŽ

$\vdash (y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (v_1 = y \to (v_2 \neq y \;\&\; v_2 \neq z))$

PODOBNE

$\vdash (y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (v_1 \neq y \to (v_1 \neq y \;\&\; v_1 \neq z))$

TD. SPOLU MÁME:

$\vdash (y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (v_1 = y \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z))$

$\vdash (y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (v_1 \neq y \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z))$

⇒ DOSTÁVAME AKO TAUT. DÔSLEDOK:

$\vdash (y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z)$

Z PRAVIDLA ZAVEDENIA $\exists$

IMPLIKUJE:

$\vdash (\exists v_1)(\exists v_2)[(y = z \;\&\; v_1 \neq v_2) \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z)]$

ĎALEJ DOKÁŽTE

$(y \neq z \;\&\; (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(v_1 \neq v_2 \;\&\; v_1 \neq v_3 \;\&\; v_2 \neq v_3)) \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z)$

TD. $(\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(y \neq z \;\&\; v_1 \neq v_2 \;\&\; v_1 \neq v_3 \;\&\; v_2 \neq v_3) \to (\exists x)(x \neq y \;\&\; x \neq z)$

TREBA ROZLÍŠIŤ VEĽA PRÍPADOV ... NAPR.

$y \neq z \;\&\; v_1 \neq v_2 \;\&\; v_1 \neq v_3 \;\&\; v_2 \neq v_3 \to (y = v_1 \to (z = v_2 \to (v_3 \neq y \;\&\; v_3 \neq z)))$

...

A EŠTE PRÍPADY, KEĎ y ; RESP. z NIE JE ANI JEDNO Z v_1, v_2, v_3.

PRINCÍP DOKAZOVANIA OPAČNEJ IMPLIKÁCIE:

CHCEME DOKÁZAŤ

$(\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z) \to ((y = z \,\&\, A_2) \vee (y \neq z \,\&\, A_3))$

BUDEME VYCHÁDZAŤ Z NASLEDUJÚCEHO:

OZNAČÍME $A \equiv (\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z)$, $B \equiv y = z$

POTOM Z

$\vdash A \to (B \to A_2)$

$\vdash A \to (\neg B \to A_3)$

VYPLÝVA

$\vdash A \to ((B \,\&\, A_2) \vee (\neg B \,\&\, A_3))$ AKO TAUT. DÔSLEDOK

TOTIŽ $B \to (A_2 \to ((B \,\&\, A_2) \vee (\neg B \,\&\, A_3)))$

$\neg B \to (A_3 \to (\underbrace{(B \,\&\, A_2) \vee (\neg B \,\&\, A_3)}_{C}))$

$A, B \vdash C$

$A, \neg B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$

DOKÁŽEME PRETO NAJSKÔR

$(\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y = z \to (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2))$

ZREJME

$\vdash ((x \neq y) \,\&\, x \neq z) \to (y = z \to (x \neq y))$ TAUTOLÓGIA

$\vdash x \neq y \to (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2)$

$\Rightarrow \vdash (x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y = z \to (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2))$

A POUŽIJEME PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$:

$\vdash (\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y = z \to (\exists v_1)(\exists v_2)(v_1 \neq v_2))$

3*/3

23.08.2017 TH
PETER ČERNO

AILD62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

DOKÁŽTE

$(\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y \neq z \to (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(v_1 \neq v_2 \,\&\, v_1 \neq v_3 \,\&\, v_2 \neq v_3))$

ZREJME

$\vdash (x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y \neq z \to (x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\, y \neq z))$

$\vdash (x \neq y \,\&\, x \neq z \,\&\, y \neq z) \to (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(v_1 \neq v_2 \,\&\, v_1 \neq v_3 \,\&\, v_2 \neq v_3)$

$\Rightarrow \vdash (x \neq y \,\&\, x \neq z) \to (y \neq z \to (\exists v_1)(\exists v_2)(\exists v_3)(v_1 \neq v_2 \,\&\, v_1 \neq v_3 \,\&\, v_2 \neq v_3))$

A POUŽITÍM PRAVIDLA O ZAVEDENÍ $\exists$ DOSTÁVAME POŽADOVANÉ TVRDENIE.

CELÁ IMPLIKÁCIA $(\exists x)(x \neq y \,\&\, x \neq z) \to ((y = z \,\&\, A_2) \vee (y \neq z \,\&\, A_3))$ JE IBA TAUT. DÔSLEDOK MÝCHTO DVOCH DOKÁZANÝCH TVRDENÍ.

24.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

9 [b] NECH L JE JAZYK BEZ ROVNOSTI, A FORMULA $\vdash A$. DOKÁŽTE, ŽE A^* JE TAUTOLÓGIA

NECH $A_1, \dots, A_m = A$ JE DÔKAZ A. DOKÁŽTE, ŽE $A_1^*, \dots, A_n^* = A^*$ JE $\pm$DÔKAZ A^*

a) A_i JE AXIÓM, POTOM A_i^* JE TIEŽ AXIÓM ALEBO TAUTOLÓGIA
PRE A1, AL, AJ JE TO ZREJME

$A_i \equiv (\forall x)B \to B_x[t] \Rightarrow A_i^* \equiv B^* \to B_x[t]^*$
(KDE $B_x[t]^* = B^*$ TJ. $A_i^* = B^* \to B^*$ JE TAUTOLÓGIA

$A_i \equiv (\forall x)(B \to C) \to (B \to (\forall x)C) \Rightarrow A_i^* \equiv (B^* \to (*) \to (B^* \to (*]$
JE OPÄŤ TAUTOLÓGIA

b) NECH A_i VZNIKLO POUŽITÍM MP NA $A_j, A_k \equiv A_j \to A_i$
POTOM A_i^* VZNIKNE POUŽITÍM MP NA $A_j^*, A_k^* \equiv A_j^* \to A_i^*$

c) PODOBNE PRE PRAVIDLO GENERALIZÁCIE

A^* MÔŽNO CHÁPAŤ AKO FORMULU VÝROKOVEJ LOGIKY

[c] KEĎŽE JE L JAZYK S ROVNOSŤOU, POTOM
ESTE NAVYŠE PRIBUDNÚ AXIÓMY PRE ROVNOSŤ

$A_i \equiv x = x \Rightarrow A_i^* \equiv c = c$

$A_i \equiv x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \dots \to (x_m = y_m \to f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m)) \dots)$

$\Rightarrow A_i^* = c = c \to (c = c \to \dots \to (c = c \to c = c) \dots)$

$A_i \equiv x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \dots \to (x_m = y_m \to (p(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow p(y_1, \dots y_m))) \dots)$

$\Rightarrow A_i^* = c = c \to (c = c \to \dots \to (c = c \to (p(c, \dots, c) \leftrightarrow p(c, \dots, c))) \dots)$

VO VŠETKÝCH PRÍPADOCH DOSTÁVAME A_i^* AKO TAUTOLOGICKÝ DÔSLEDOK $c = c$.

[d] KEBY $\vdash A$ AJ $\vdash \neg A$, POTOM BY A^* AJ $\neg A^*$ BOLI TAUTOLÓGIE
ČO VŠAK NEMÔŽE NIKDY NASTAŤ.

PRAVDIVOSŤ A DOKÁZATEĽNOSŤ

LOGICKY PRAVDIVÁ FORMULA = LOGICKY PLATNÁ FORMULA

TEÓRIA PRVÉHO RÁDU. T S JAZYKOM L, ŠPECIÁLNE AXIÓMY TEÓRIE

MODEL $\mathcal{M}$ TEÓRIE T. $\mathcal{M} \models T$

FORMULA A JE SÉMANTICKÝ DÔSLEDOK T,
A JE T-PLATNÁ FORMULA $T \models A$
$\Leftrightarrow \forall \mathcal{M} : \mathcal{M} \models T : \mathcal{M} \models A$, T. J. A JE SPLNENÁ V KAŽDOM MOD. T

PRÍKLADY TEÓRIÍ: TEÓRIA [LINEÁRNEHO] USPORIADANIA,
TEÓRIA KOMUTATÍVNYCH OKRUHOV S JEDNOTKOU,
TEÓRIA OBORU INTEGRITY, TEÓRIA TELIES,
ELEMENTÁRNA ARITMETIKA

VETA O KOREKTNOSTI: KEĎ T JE TEÓRIA JAZYKA L,
A FORMULA JAZYKA L, POTOM $T \vdash A \Rightarrow T \models A$.

T. J. KAŽDÁ VETA TEÓRIE T JE T-PLATNÁ FORMULA
KAŽDÁ VETA TEÓRIE T JE SPLNENÁ VO VŠETKÝCH MODELOCH T.

DÔKAZ. a) KOREKTNOSŤ AXIÓMOV $A1, A2, A3$ JE ZREJMÁ
b) KOREKTNOSŤ AXIÓMU PRESKOKU $(\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$,
KDE x NIE JE VOĽNÁ V A:

NECH $\mathcal{M}$ JE REALIZÁCIA JAZYKA L A e OHODNOTENIE PREM.

$\mathcal{M} \models (\forall x)(A \to B) \to (A \to (\forall x)B)\ [e] \Leftrightarrow$
$\neg\, \mathcal{M} \models (\forall x)(A \to B)[e]$ v $\mathcal{M} \models (A \to (\forall x)B)\ [e]$

PREDPOKLADÁME, ŽE $\mathcal{M} \models (\forall x)(A \to B)\ [e]$ (DRUHÝ PRÍPAD JE ZREJMÝ)
T. J. $\forall m \in M\ \mathcal{M} \models A \to B\ [e(x/m)]$
$\Leftrightarrow \forall m \in M\ \neg \mathcal{M} \models A[e(x/m)]$ v $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$

KEĎŽE x NIE JE VOĽNÁ V A,
PLATÍ $\mathcal{M} \models A[e(x/m)] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models A[e]$

T. J. $\neg\, \mathcal{M} \models A[e]$ v $\forall m \in M\ \mathcal{M} \models B[e(x/m)]$
$\Leftrightarrow \neg\, \mathcal{M} \models A[e]$ v $\mathcal{M} \models (\forall x)B\ [e]$
$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models A \to (\forall x)B\ [e]$

27.08.2007 Fr
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

c) KOREKTNOSŤ AXIÓMU ŠPECIFIKÁCIE : $(\forall x)A \to A_x[t]$

$\mathfrak{M} \models (\forall x)A \to A_x[t]$ $[e] \Leftrightarrow$

$\neg\, \mathfrak{M} \models (\forall x)A[e] \vee \mathfrak{M} \models A_x[t]$ $[e]$

PREDPOKLADAJME, ŽE $\mathfrak{M} \models (\forall x)A$ $[e]$, TJ.

$\forall m \in M$ $\mathfrak{M} \models A$ $[e(x/m)]$.

POTOM ALE TIEŽ PRE $m = t[e]$ JE

$\mathfrak{M} \models A$ $[e(x/t[e])]$

PODĽA UŽ DOKÁZANEJ LEMMY

$\mathfrak{M} \models A_x[t]$ $[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A$ $[e(x/t[e])]$

d) PODOBNE PRE AXIÓMY R1, R2, R3

e) A ODVODZOVACIE PRAVIDLÁ.

DÔSLEDOK : VŠETKY VETY PREDIKÁTOVEJ LOGIKY SÚ LOGICKÉ PRAV. F.

DÔSLEDOK: KEĎ MÁ TEÓRIA T MODEL $\mathfrak{M}$, POTOM JE BEZSPORNÁ.

DÔKAZ: NECH T MÁ MODEL $\mathfrak{M}$. Z VETY O KOREKTNOSTI MPLÝVA, ŽE $T \vdash A$, POTOM $\mathfrak{M} \models A$.

NECH A JE UZAVRETÁ FORMULA.

POTOM BUĎ $\mathfrak{M} \models A$ ALEBO $\mathfrak{M} \models \neg A$, TJ. PRÁVE JEDNÁ Z FORMÚL A, $\neg A$ JE PRAVDIVÁ V $\mathfrak{M}$.

TÁ DRUHÁ POTOM NIE JE DOKÁZATEĽNÁ.

DÔSLEDOK : PREDIKÁTOVÁ LOGIKA JE BEZSPORNÁ.

DÔKAZ : KAŽDÁ REALIZÁCIA $\mathfrak{M}$ JAZYKA L JE MODELOM PREDIKÁTOVEJ LOGIKY.

VETA O ÚPLNOSTI : KEĎ T JE TEÓRIA JAZYKA L.

i) $T \vdash A \Leftrightarrow T \models A$

ii) T JE BEZSPORNÁ $\Leftrightarrow$ T MÁ MODEL

i) JE DÔSLEDOK ii)

DÔKAZ. NECH A JE FORMULA JAZYKA L A A' JE JEJ UZÁVER

$T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A'\}$ JE SPORNÁ

$\Rightarrow$) $T \vdash A \Rightarrow T \vdash A' \Rightarrow T, \neg A' \vdash \neg A', A'$, $\vdash \neg A' \to (A' \to B) \Rightarrow$ MP: $T, \neg A' \vdash B$

$\Leftarrow$) $T \cup \{\neg A'\}$ JE SPORNÁ $\Rightarrow T, \neg A' \vdash A'$, $\vdash (\neg A' \to A') \to A' \Rightarrow$ MP: $T \vdash A' \Rightarrow T \vdash A$

$\Leftrightarrow$ $T \cup \{\neg A'\}$ NEMÁ MODEL (PODĽA TVRDENIA ii))

KEĎ $\mathfrak{M}$ JE MODEL T, POTOM BUĎ $\mathfrak{M} \models A'$ ALEBO $\mathfrak{M} \models \neg A'$. VZHĽADOM K TOMU, ŽE $T \cup \{\neg A'\}$ NEMÁ MODEL, NUTNE $\mathfrak{M} \models A'$. D.

$\Rightarrow T \models A' \Rightarrow T \vdash A$

NAOPAK, KEĎ $T \vdash A$, POTOM TIEŽ $T \vdash A'$

$\Rightarrow T \cup \{\neg A'\}$ NEMÁ MODEL.

K DÔKAZU VETY O ÚPLNOSTI STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE KAŽDÁ BEZSPORNÁ TEÓRIA MÁ MODEL

ÚPLNÁ TEÓRIA T: T JE BEZSPORNÁ A PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU A PLATÍ BUĎ $T \vdash A$, ALEBO $T \vdash \neg A$.

HENKINOVA TEÓRIA T: PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU $(\exists x)B$ EXISTUJE KONŠTANTA c TAKÁ, ŽE $T \vdash (\exists x)B \to B_x[c]$.

27.08.2007 Mo
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

VETA: KEĎ JE T ÚPLNÁ HENKINOVÁ TEÓRIA, POTOM T MÁ MODEL.

DÔKAZ: NAJSKÔR ZOSTROJÍME REALIZÁCIU $\mathcal{M}$ JAZYKA L, POTOM DOKÁŽEME, ŽE JE TO MODEL T, TJ. $\mathcal{M} \models T$.
NECH $\mathcal{T}$ JE MNOŽINA VŠETKÝCH TERMOV t JAZYKA L BEZ PREMENNÝCH. DEFINUJME EKVIVALENCIU $\equiv$ NA $\mathcal{T}$ AKO
$t_1 \equiv t_2 \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} T \vdash t_1 = t_2$.

POZNÁMKA, POKIAĽ JE L JAZYK. BEZ ROVNOSTI, POTOM KLADIEME $t_1 \equiv t_2$ KEĎ SÚ t_1 A t_2 IDENTICKÉ TERMY.
TO, ŽE JE $\equiv$ NAOZAJ EKVIVALENCIA VYPLÝVA Z ÚPLNOSTI T + Z REFLEXÍVNOSTI, SYMETRIE A TRANZITÍVNOSTI $=$.
NECH $[t] \overset{\text{def.}}{:=} \{s \in \mathcal{T} : t \equiv s\}$ JE TRIEDA EKVIVALENCIE, DO KTOREJ PATRÍ TERM $t \in \mathcal{T}$.
DEFINUJME UNIVERZUM $\mathcal{M} \overset{\text{def}}{:=} \mathcal{T}/\equiv \; = \{[t] : t \in \mathcal{T}\}$
TJ. $\mathcal{M}$ VZNIKNE FAKTORIZÁCIOU $\mathcal{T}$ PODĽA $\equiv$.
PRE KAŽDÝ FUNKČNÝ [A PREDIKÁTOVÝ SYMBOL P] SYMBOL f Z L MUSÍME DEFINOVAŤ JEHO REALIZÁCIU:

$$f_{\mathcal{M}}([t_1], \ldots, [t_n]) \overset{\text{def}}{:=} [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

DOKÁŽEME, ŽE NEZÁLEŽÍ NA VOĽBE REPREZENTANTOV, TJ. AK $t_1 \equiv s_1, \ldots, t_n \equiv s_n$, POTOM
$[f(t_1, \ldots, t_n)] = [f(s_1, \ldots, s_n)]$.

DÔKAZ. $t_1 \equiv s_1, \ldots, t_n \equiv s_n$, POTOM
$T \vdash t_1 = s_1, \ldots, T \vdash t_n = s_n$,
$\vdash t_1 = s_1 \to (t_2 = s_2 \to \ldots \to (t_n = s_n \to f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)) \ldots)$
MP $T \vdash f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)$
$\Rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) \equiv f(s_1, \ldots, s_n)$.
$\Rightarrow [f(t_1, \ldots, t_n)] = [f(s_1, \ldots, s_n)]$.

PODOBNE DEFINUJEME

$$([t_1], \dots, [t_n]) \in p_m \Leftrightarrow T \vdash p(t_1, \dots, t_n)$$

OPÄŤ AK $t_1 \equiv s_1, \dots, t_n \equiv s_n$, TJ. $T \vdash t_1 = s_1, \dots, T \vdash t_n = s_n$

POTOM Z $t_1 = s_1 \to (t_2 = s_2 \to \dots \to (t_n = s_n \to (p(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow p(s_1, \dots, s_n))) \dots)$

JE MP $T \vdash p(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow p(s_1, \dots, s_n)$

TAKŽE $T \vdash p(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow T \vdash p(s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ([s_1], \dots, [s_n]) \in p_m.$$

V PRÍPADE JAZYKA L BEZ ROVNOSTI MOŽNO POSTUPOVAŤ PODOBNE:
UŽ MÁME SKONŠTRUOVANÚ TZV. KANONICKÚ ŠTRUKTÚRU PRE TEÓRIU T
REALIZÁCIU $\mathfrak{M}$ JAZYKA L,
TERAZ UŽ NEBUDEME DOKÁZAŤ, ŽE: $\mathfrak{M} \models T$ ($\mathfrak{M}$ JE MODEL T)
STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU
A JAZYKA L JE $\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow T \vdash A$.

K TOMU POUŽIJEME NASLEDUJÚCE POMOCNÉ LEMY:

LEMA: NECH t JE TERM A VŠETKY JEHO PREMENNÉ SÚ MEDZI PREMENNÝMI $x_1, \dots, x_n$,
$t_1, \dots, t_n$ SÚ TERMY BEZ PREMENNÝCH.
NECH e JE OHODNOTENIE PREMENNÝCH TAKÉ,
ŽE $e(x_i) = [t_i]$ PRE $i = 1, 2, \dots, n$.
POTOM $t[e] = [t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]]$.

DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI t)
KEĎ JE t JEDNA Z PREMENNÝCH $x_1, \dots, x_n$, $t = x_i$,
POTOM $t[e] = e(x_i) = [t_i] = [t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]]$
NECH t JE ZLOŽENÝ TERM $f(s_1, \dots, s_m)$.
NECH $\forall i$ $s_i[e] = [s_{i\, x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]]$

$$t[e] = f_m(s_1[e], \dots, s_m[e]) = f_m([s_1[t_1, \dots, t_n]], \dots, [s_m[t_1, \dots, t_n]])$$
$$= [f(s_{1\, x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n], \dots, s_{m\, x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n])] =$$
$$= [t_{x_1, \dots, x_n}[t_1, \dots, t_n]]. \quad \square$$

(PODĽA DEFINÍCIE f_m)

27.08.2007 Mo
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

LEMMA: NECH A JE FORMULA, KTOREJ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ SA NACHÁDZAJÚ MEDZI PREMENNÝMI $x_1, \dots, x_n$. NECH $t_1, \dots, t_n$ SÚ TERMY BEZ PREMENNÝCH (TÝM PÁDOM SÚ SUBSTITUOVATEĽNÉ DO A ZA $x_1, \dots, x_n$).
NECH e JE OHODNOTENIE PREMENNÝCH TAKÉ, ŽE $e(x_i) = [t_i]$.
POTOM $\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$.

DÔKAZ. (INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI FORMULE A).
NECH A JE ATOMICKÁ FORMULA TVARU $p(s_1, \dots, s_m)$

$\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow (s_1[e], \dots, s_m[e]) \in p_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ([s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]], \dots, [s_{m\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]]) \in p_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (s_{1\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e'], \dots, s_{m\,x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e']) \in p_{\mathfrak{M}} \quad \forall e'$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n][e'] \quad \forall e' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$. PODOBNE PRE $\underline{A \equiv s_1 = s_2}$.

PREDPOKLADAJME, ŽE A JE ZLOŽENÁ FORMULA.
KEĎ $A \equiv \neg B$, POTOM

$\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

POSLEDNÁ EKVIVALENCIA PLATÍ VĎAKA TOMU, ŽE $B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$ JE UZAVRETÁ FORMULA.

KEĎ $A \equiv B \to C$, POTOM

$\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B[e]$ v $\mathfrak{M} \models C[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$ v $\mathfrak{M} \models C_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$

OPÄŤ IBA VĎAKA TOMU, ŽE $B_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$ AJ $C_{x_1,\dots,x_n}[t_1,\dots,t_n]$ SÚ UZAVRETÉ FORMULE.

$A \equiv (\forall x)B$ $\quad \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \forall m \in M\ \mathfrak{M} \models B[e(x/m)]$

~~INDUKCIA~~ ROZLÍŠIME 2 PRÍPADY:

a) x JE RÔZNE OD $x_1, \dots, x_n$

POTOM $\Leftrightarrow \forall m \in M\ \mathfrak{M} \models B[e]$ PRETOŽE x SA NEVYSKYTUJE V B

$\Leftrightarrow \forall m \in M\ \mathfrak{M} \models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models B_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$.

b) BÚNO $x = x_1$

POTOM x_1 NIE JE VOĽNÁ PREMENNÁ V A

PLATÍ $\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$

(PRÍPAD b) SME TOTIŽ PREVIEDLI NA PRÍPAD a)

NO A KEĎŽE x_1 NIE JE VOĽNÁ V A, NUTNE

$A_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n] = A_{x_1,\dots,x_n}[t_1, \dots, t_n]$. □

UVAŽUJME TERAZ ĽUBOVOĽNÚ UZAVRETÚ FORMULU A.

DOKÁŽEME $\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow T \vdash A$.

DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA ZLOŽITOSTI A) NECH e JE ĽUBOVOĽNÉ OHODNOTENIE PREM.

a) NECH A JE ATOMICKÁ FORMULA TVARU $p(s_1, \dots, s_m)$

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (s_1[e], \dots, s_m[e]) \in p_m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ([s_1], \dots, [s_m]) \in p_m \Leftrightarrow T \vdash p(s_1, \dots, s_m)$.

DEFINÍCIA p_m

PODOBNE. PRE $A \equiv s_1 = s_2$.

b) KEĎ A JE ZLOŽENÁ FORMULA.

AK $A \equiv \neg B$, POTOM

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B \Leftrightarrow T \not\vdash B \Leftrightarrow T \vdash \neg B \Leftrightarrow T \vdash A$

ÚPLNOSŤ

27.08.2007 M.
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

c) KEĎ $A \equiv B \to C$. POTOM

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B[e] \vee \mathfrak{M} \models C[e] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models B \vee \mathfrak{M} \models C \Leftrightarrow T \vdash \neg B \vee T \vdash C \Leftrightarrow T \vdash B \to C$

POSLEDNÚ EKVIVALENCIU SI ROZOBERIEME PODROBNEJŠIE.

$\Rightarrow$) $T \vdash \neg B \Rightarrow \vdash \neg B \to (B \to C) \Rightarrow T \vdash B \to C$

$T \vdash C \Rightarrow \vdash C \to (B \to C) \Rightarrow T \vdash B \to C$

$T \vdash \neg B \vee T \vdash C \Rightarrow T \vdash B \to C.$

$\Leftarrow$) $\neg T \vdash \neg B \wedge \neg T \vdash C$ TJ.

$T \vdash B \wedge T \vdash \neg C$, POTOM Z

$\vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$

VYPLÝVA $T \vdash \neg(B \to C)$, TJ. $\neg T \vdash B \to C$.

d) KEĎ $A \equiv (\forall x)B$. POTOM

$\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow$
$\forall m \in M \quad \mathfrak{M} \models B[e(x/m)]$

KEĎ B JE UZAVRETÁ FORMULA (TJ. x NIE JE VOĽNÁ V B)
POTOM $\mathfrak{M} \models B[e(x/m)] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models B \Leftrightarrow T \vdash B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow T \vdash (\forall x)B \Leftrightarrow T \vdash A$.

PREDPOKLADAJME, ŽE x JE VOĽNÁ V B.

VIEME, ŽE EXISTUJE KONŠTANTA c TAKÁ, ŽE
$T \vdash (\exists x)B \to \neg B_x[c]$, TJ. $T \vdash B_x[c] \to (\forall x)B$.

PODĽA INDUKČNÉHO PREDPOKLADU $\mathfrak{M} \models B_x[c] \Leftrightarrow T \vdash B_x[c]$
$\Rightarrow T \vdash (\forall x)B$.

NAOPAK $T \vdash (\forall x)B$, $T \vdash (\forall x)B \to B_x[m] \Rightarrow T \vdash B_x[m]$
$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models B_x[m]$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $m \in M$,
TAKŽE $\forall m \in M \quad \mathfrak{M} \models B_x[m] \Leftrightarrow \forall m \in M \quad \mathfrak{M} \models B[e(x/m)] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A$.

NAKONIEC JEDNODUCHOU ÚVAHOU DOKÁŽEME $\mathfrak{M} \models T$.

NECH A JE ĽUBOVOĽNÁ FORMULA Z T A A' JE JEJ UZÁVER. PODĽA VETY O UZÁVERE JE $T \vdash A'$ TAKŽE NUTNE $\mathfrak{M} \models A' \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A$.

TO ALE ZNAMENÁ, ŽE $\mathfrak{M}$ JE MODELOM T.

ROZŠÍRENIE JAZYKA L, [KONZERVATÍVNE] ROZŠÍRENIE TEÓRIE T S JAZYKOM L.

ROZŠÍRENIE TEÓRIE T O NOVÉ KONŠTANTY JE KONZERVATÍVNE
DÔKAZ: VETA O KONŠTANTÁCH.

VETA: KU KAŽDEJ TEÓRII T MOŽNO ZOSTROJIŤ HENKINOVU TEÓRIU T_H, KTORÁ JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM TEÓRIE T.

DÔKAZ: UVAŽUJME TEÓRIU T S JAZYKOM L.
POLOŽÍME $L_0 := L$, $C_0 := \emptyset$, $T_0 := T$.
PRE $n > 0$ DEFINUJEME (INDUKTÍVNE) C_n, L_n, T_n NASLEDOVNE:
PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU $(\exists x)B$ JAZYKA L_{n-1} UVAŽUJEME KONŠTANTU $c_{(\exists x)B}$.
DO MNOŽINY DO MNOŽINY C_n PATRIA VŠETKY TAKÉTO KONŠTANTY, KTORÉ SA NENACHÁDZAJÚ EŠTE V L_{n-1}. SÚ TO KONŠTANTY RÁDU n.
POLOŽÍME $L_n := L_{n-1} \cup C_n$
T_n VZNIKNE Z T_{n-1} PRIDANÍM NOVÝCH AXIÓMOV $(\exists x)B \to B_x[c_{(\exists x)B}]$ PRE KONŠTANTY Z C_n.
POLOŽÍME $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ A $L_C := L \cup C$.
NECH T_H JE TEÓRIA, KTORÁ VZNIKNE Z T PRIDANÍM VŠETKÝCH HENKINOVÝCH AXIÓMOV, TJ.
$T_H = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. T_H JE ZREJME ROZŠÍRENÍM TEÓRIE T.
ĽAHKO NAHLIADNEME, ŽE T_H JE HENKINOVA TEÓRIA.

27.08.2007 Po
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SLOVŠKA

UVAŽUJME TOTIŽ ĽUBOVOĽNÚ UZAVRETÚ FORMULU $(\exists x)B$ JAZYKA L_C. JE TO KONEČNÁ FORMULA, KTORÁ JE BUĎ FORMULOU JAZYKA $L_0 = L$. V TAKOM PRÍPADE JE $(\exists x)B \to B_x[c_{(\exists x)B}]$ JE AXIÓM z T_1.

ALEBO FORMULA $(\exists x)B$ V SEBE UŽ OBSAHUJE NEJAKÉ HEN. KONŠTANTY. PREDPOKLADÁME, ŽE SA V NEJ VYSKYTUJÚ KONŠTANTY RÁDU MENŠIEHO AKO n. POTOM NUTNE $c_{(\exists x)B} \in C_n$ A $((\exists x)B \to B_x[c_{(\exists x)B}]) \in T_n$.

VIDÍME, ŽE KU KAŽDEJ UZAVRETEJ FORMULE $(\exists x)B$ JAZYKA L_C EXISTUJE KONŠTANTA $c_{(\exists x)B}$ A AXIÓM $(\exists x)B \to B_x[c_{(\exists x)B}]$ TEÓRIE T_H.

DOKÁŽEME EŠTE, ŽE T_H JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE TEÓRIE T.

NECH A JE FORMULA JAZYKA L TAKÁ, ŽE $T_H \vdash A$.

NECH $B_1, \dots, B_m$ SÚ VŠETKY HENKINOVE AXIÓMY POUŽITÉ V DÔKAZE $T_H \vdash A$. PRETOŽE $B_1, \dots, B_m$ SÚ UZAVRETÉ, DOSTÁVAME (2 VETY O DEDUKCII), ŽE

$T \vdash B_1 \to (B_2 \to \dots \to (B_m \to A)\dots)$

PREDPOKLADÁME, ŽE B_1 JE TVARU $(\exists x)B \to B_x[c]$, PRIČOM KONŠTANTA c JE RÁDU VYŠŠIEHO ALEBO ROVNÉHO AKO SÚ RÁDY KONŠTANÍT VO FORMULIACH $B_2, \dots, B_m$. MÔŽEME PRETO PREDPOKLADAŤ, ŽE KONŠTANTA c SA UŽ VO FORMULIACH $B_2, \dots, B_m$ NEVYSKYTUJE.

PRE SPOR, NECH SA c VYSKYTUJE V NEJAKEJ FORMULE $B_i \equiv (\exists x)D \to D_x[d]$. $d \neq c$, PRETOŽE $B_i \neq B_1$. TO ALE ZNAMENÁ, ŽE c SA VYSKYTUJE NIEKDE VO VNÚTRI FORMULE D. POTOM JE ALE $d = \bullet\, c_{(\exists x)D}$ RÁDU VYŠŠIEHO AKO c, ČO JE SPOR.

PLATÍ TEDA:

$$T \vdash ((\exists x)B \to B_x[c]) \to (B_2 \to \ldots \to (B_m \to A)\ldots)$$

PRETOŽE T NEOBSAHUJE ŽIADEN AXIÓM O KONŠTANTE c (T JE TEÓRIA S JAZYKOM L), POTOM Z VETY O KONŠTANTÁCH DOSTÁVAME:

$$T \vdash ((\exists x)B \to B_x[w]) \to (B_2 \to \ldots \to (B_m \to A)\ldots)$$

KDE w JE NEJAKÁ NOVÁ (UNIKÁTNA) PREMENNÁ.
PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$ POTOM DÁVA:

$$T \vdash (\exists w)((\exists x)B \to B_x[w]) \to (B_2 \to \ldots \to (B_m \to A)\ldots)$$

A PRENEXNOU OPERÁCIOU DOSTANEME:

$$T \vdash ((\exists x)B \to (\exists w)B_x[w]) \to (B_2 \to \ldots \to (B_m \to A)\ldots)$$

KEĎŽE $\vdash (\exists x)B \leftrightarrow (\exists w)B_x[w]$ (VETA O VARIANTÁCH)
DOSTÁVAME (POMOCOU MP):

$$T \vdash B_2 \to (B_3 \to \ldots \to (B_m \to A)\ldots)$$

OPAKOVANÍM TOHOTO POSTUPU DOSTANEME $T \vdash A$.

NECH S JE MNOŽINA A $\mathcal{B}$ JE MNOŽINA NEJAKÝCH PODMNOŽÍN MNOŽINY S. POTOM HOVORÍME, ŽE $\mathcal{B}$ MÁ KONEČNÚ VLASTNOSŤ $\Leftrightarrow$ $\forall B \subseteq S$ PLATÍ:
$B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall$ KONEČNÉ $B' \subseteq B : B' \in \mathcal{B}$.

B JE MAXIMÁLNY PRVOK $\mathcal{B}$, KEĎ ŽIADNA NADMNOŽINA $B' \supset B$ NIE JE PRVKOM $\mathcal{B}$.

VETA (TEICHMÜLLER, TUKEY): KAŽDÁ $\mathcal{B}$ S KONEČNOU VLASTNOSŤOU MÁ MAXIMÁLNY PRVOK.

27.08.2007
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA (LINDENBAUM): KAŽDÁ BEZSPORNÁ TEÓRIA T MÁ ÚPLNÉ ROZŠÍRENIE S ROVNAKÝM JAZYKOM.

DÔKAZ: NECH T JE BEZSPORNÁ TEÓRIA S JAZYKOM L, S JE MNOŽINA VŠETKÝCH UZAVRETÝCH FORMÚL JAZYKA L.

POLOŽME $\mathcal{B} = \{B \mid B \subseteq S, T \cup B \text{ JE BEZSPORNÁ}\}$

DOKÁŽEME, ŽE $\mathcal{B}$ MÁ KONEČNÚ VLASTNOSŤ.

$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \subseteq S \wedge T \cup B$ JE BEZSPORNÁ

$\Rightarrow \forall$ KONEČNÉ $B' \subseteq B$ JE ZREJME $B' \subseteq S \wedge T \cup B'$ BEZSPORNÁ

$\Rightarrow \forall$ KONEČNÉ $B' \subseteq B$ $B' \in \mathcal{B}$.

$B \notin \mathcal{B}, B \subseteq S \Rightarrow T \cup B$ JE SPORNÁ

D. PRE NEJAKÚ UZAVRETÚ FORMULU A PLATÍ

$T \cup B \vdash A, \quad T \cup B \vdash \neg A$

NECH $B_1, \ldots, B_m$ SÚ VŠETKY UZAVRETÉ FORMULE Z B POUŽITÉ PRI OBOCH DÔKAZOCH.

POTOM $T \cup \{B_1, \ldots, B_m\}$ JE TIEŽ SPORNÁ

A $\{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq B$.

D. EXISTUJE KONEČNÁ $B' \subseteq B$: $T \cup B'$ JE SPORNÁ. □

NECH B JE MAXIMÁLNY PRVOK $\mathcal{B}$. POTOM $T \cup B$ JE BEZSPORNÁ. DOKÁŽEME, ŽE PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU A PLATÍ BUĎ $T \cup B \vdash A$, ALEBO $T \cup B \vdash \neg A$.

AK NIE, POTOM MÔŽEME $\neg A$ PRIDAŤ DO B BEZ TOHO, ABY SME PORUŠILI BEZSPORNOSŤ, PRETOŽE

$T \cup B \vdash A \Leftrightarrow T \cup B \cup \{\neg A\}$ JE SPORNÁ.

REDUKCIA A EXPANZIA ŠTRUKTÚR.

LEMMA: NECH T' JE ROZŠÍRENIE TEÓRIE T S JAZ. L. KEĎ JE $\mathcal{M}'$ MODEL T', POTOM $\mathcal{M} = \mathcal{M}'|L$ JE MODEL T.

DÔKAZ. OBE ŠTRUKTÚRY $\mathcal{M}$ AJ $\mathcal{M}'$ MAJÚ TO ISTÉ UNIVERZUM. NECH A JE ĽUBOVOĽNÁ FORMULA JAZYKA L. POTOM PLATÍ:

$\mathcal{M} \models A[c] \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models A[c]$, T.J. TAKISTO
$\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models A$.

NECH A JE AXIÓM TEÓRIE T. POTOM (KEĎŽE T' JE ROZŠÍRENIE T) JE A VETOU T', T.J. $T' \vdash A$. Z VETY O KOREKTNOSTI DOSTÁVAME $\mathcal{M}' \models A$, TAKŽE NUTNE TIEŽ $\mathcal{M} \models A$.
$\Rightarrow \mathcal{M} \models T$, T.J. $\mathcal{M}$ JE MODEL T. □

DOKONČENIE DÔKAZU VETY O ÚPLNOSTI:

KEĎ JE T BEZSPORNÁ TEÓRIA, POTOM K NEJ EXISTUJE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T_H HENKINOVA T.
$\Rightarrow T_H$ JE TIEŽ BEZSPORNÁ $\Rightarrow$ EXISTUJE ÚPLNÉ ROZŠÍRENIE T' S TÝM ISTÝM JAZYKOM L_H.
T' JE ÚPLNÁ HENKINOVA TEÓRIA. NECH $\mathcal{M}'$ JE MODEL T'. POTOM $\mathcal{M}'|L$ JE MODEL T, ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ. □

→ TO, ŽE T_H JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE MUSÍME K TOMU, ABY SME MALI ZARUČENÉ, ŽE T_H JE BEZSPORNÁ TEÓRIA. !!

28.08.2007 T4
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

VETA O KOMPAKTNOSTI: MNOŽINA FORMULÍ T MÁ MODEL $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ KONEČNÁ PODMNOŽINA MNOŽINY T MÁ MODEL.

VETA: $T \models A \Leftrightarrow T' \models A$ PRE NEJAKÚ KONEČNÚ $T' \subseteq T$.

TELESÁ CHARAKTERISTIKY 0 NIE JE MOŽNÉ AXIOMATIZOVAŤ KONEČNÝM POČTOM AXIÓMOV V LOGIKE PRVÉHO RÁDU.

DÔKAZ. NECH T JE TEÓRIA TELIES
TJ. OBSAHUJE AXIÓMY TEÓRIE KOMUTATÍVNYCH OKRUHOV S 1
+ AXIÓMY $0 \neq 1$ A $x \neq 0 \to \exists y\,(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

OZNAČÍME PRE PRIRODZENÉ n
$nx \overset{\text{def}}{:=} \underbrace{(x + (x + \ldots + (x + x)\ldots))}_{n \text{ VÝSKYTOV } x}$

KEĎ PRIDÁME K T AXIÓMY TVARU $p \cdot 1 \neq 0$
PRE VŠETKY NENULOVÉ PRIRODZENÉ ČÍSLA p,
DOSTANEME T', AXIÓMY TEÓRIE TELIES CHARAKTERISTIKY NULA.
PREDPOKLADÁME, ŽE AXIÓMY $p \cdot 1 \neq 0$ VIEME NAHRADIŤ JEDINOU FORMULOU A JAZYKA L.
TJ. PRE KAŽDÝ MODEL $\mathfrak{M}'$ TEÓRIE T' PLATÍ $\mathfrak{M}' \models A$,
TJ. $T' \models A \Rightarrow \exists$ KONEČNÁ $T'' \subseteq T'$: $T'' \models A$.
TERAZ UŽ STAČÍ NÁJSŤ MODEL $\mathfrak{M}''$ TELESA DOSTATOČNE VEĽKEJ CHARAKTERISTIKY TAK, ABY $\mathfrak{M}'' \models T''$. POTOM $\mathfrak{M}'' \models A$, TAKŽE A NEDOKÁŽE ROZLÍŠIŤ TELESÁ CHARAKTERISTIKY NULA.

PEANOVA ARITMETIKA PRVÉHO RÁDU

ELEMENTÁRNA ARITMETIKA JE TEÓRIA T PRVÉHO RÁDU S ROVNOSŤOU A ŠPECIÁLNYMI SYMBOLMI $0, S, +, \cdot$.
KDE 0 JE KONŠTANTA A S JE UNÁRNY FUNKČNÝ SYMBOL. ELEM. ARITMETIKA MÁ TIETO ŠPEC. AXIÓMY:

$S(x) \neq 0$

$S(x) = S(y) \rightarrow x = y$

$x + 0 = x$

$x + S(y) = S(x+y)$

$x \cdot 0 = 0$

$x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$

KEĎ K TESNO TEÓRII T S JAZYKOM L PRIDÁME EŠTE AXIÓMY $A_x[0] \rightarrow ((\forall x)(A \rightarrow A_x[S(x)]) \rightarrow (\forall x)A)$ PRE VŠETKY FORMULE A JAZYKA L, DOSTANEME TEÓRIU P PEANOVEJ ARITMETIKY PRVÉHO RÁDU.

PRE ĽUBOVOĽNÉ PRIRODZENÉ n DEFINUJEME $\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S(S(\ldots S(0)\ldots))}_{n \text{ VÝSKYTOV } S}$, TJ. $\overline{0} = 0$, $\overline{n+1} = S(\overline{n})$

TERMY $\overline{n}$ NAZÝVAME NUMERÁLY.

NECH L_c VZNIKNE Z L PRIDANÍM NOVEJ KONŠTANTY c A P_c JE ROZŠÍRENIE PEANOVEJ ARITMETIKY PRVÉHO RÁDU O AXIÓMY $c \neq \overline{n}$ PRE VŠETKY PRIRODZENÉ n.

DOKÁŽEME, ŽE EXISTUJE $\mathfrak{M}$ MODEL TEÓRIE P_c S JAZ. L_c.

KAŽDÁ KONEČNÁ $T \subseteq P_c$ MÁ MODEL. STAČÍ UVAŽOVAŤ EXPANZIU $\mathfrak{I}$ ŠTANDARDNÉHO MODELU $\mathfrak{N}$ TAK, ŽE KONŠTANTU c REALIZUJEME INDIVIDUOM, KTORÉ NIE JE REALIZÁCIOU ŽIADNEHO Z KONEČNE VEĽA NUMERÁLOV VYSKYTUJÚCICH SA V T. KONŠTANTA c SA VYSKYTUJE LEN V AXIÓMOCH TVARU $c \neq \overline{n}$. PRE OSTATNÉ AXIÓMY A Z T ZREJME PLATÍ $\mathfrak{N} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models A$.

VIDÍME, ŽE KAŽDÁ KONEČNÁ $T \subseteq P_c$ MÁ MODEL $\mathfrak{I}$

$\Rightarrow$ P_c MÁ MODEL $\mathfrak{M}$.

ZREJME $\mathfrak{M} | L$ JE NEŠTANDARDNÝ MODEL PEANOVEJ AR. 1. RÁDU

28.08.2007 Th
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

CVIČENIE

1. PLATÍ VETA: NECH t, t' SÚ TERMY TAKÉ, ŽE PLATÍ $\vdash t = t'$. KEĎ A' JE FORMULA, KTORÁ VZNIKNE Z FORMULE A ZÁMENOU NIEKTORÝCH VÝSKYTOV TERMU t TERMOM t' [OKREM PRÍPADU KEĎ t JE PpremennÁ x, KTORÁ JE SÚČASŤOU KVANTIFIKÁCIE $(\forall x)\ldots$ ALEBO $(\exists x)\ldots$], POTOM $\vdash A \leftrightarrow A'$.

a) PREDPOKLADAJME, ŽE ~~NEPLATÍ~~ PODMIENKA $\vdash t = t'$ NIE JE DANÁ, NAMIESTO TOHO, NECH $x_1, \ldots, x_n$ SÚ VŠETKY PREMENNÉ, KTORÉ SÚ VO FORMULI $t = t'$ A ZÁROVEŇ SÚ VIAZANÉ VO FORMULI $A \leftrightarrow A'$.

DOKÁŽEME $\vdash (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(t = t') \rightarrow (A \leftrightarrow A')$.

NECH $y_1, \ldots, y_m$ SÚ ZVYŠNÉ PREMENNÉ VO FORMULI $t = t'$ NECH $c_1, \ldots, c_m$ SÚ NOVÉ KONŠTANTY. Z VETY O KONŠT. VYPLÝVA, ŽE STAČÍ DOKÁZAŤ

$\vdash (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(t[c_1,\ldots,c_m] = t'[c_1,\ldots,c_m]) \rightarrow (A[c_1,\ldots,c_m] \leftrightarrow A'[c_1,\ldots,c_m])$.

$y_1, \ldots, y_m$ SÚ VOĽNÉ V CELEJ FORMULI

PLATÍ $(\forall x_m)\ldots(\forall x_m)(t[c_1,\ldots,c_m] = t'[c_1,\ldots,c_m]) \vdash t[\ldots] = t'[\ldots]$

TAKŽE PODĽA VYŠŠIE UVEDENEJ VETY KEĎ A' VZNIKNE Z A JE TO TO ISTÉ AKO KEĎ $A'[\ldots]$ VZNIKNE Z $A[\ldots]$

TAKŽE $(\forall x_1)\ldots(\forall x_m)(t[\ldots] = t'[\ldots]) \vdash A[\ldots] \leftrightarrow A'[\ldots]$

A 2. VETY O DEDUKCII DOSTÁVAME POŽADOVANÉ TVRDENIE.

b) $t \equiv y$, $t' \equiv S(x)$ $\quad A \equiv (\forall y)(y \neq 0)$

POTOM $(t = t') \rightarrow (A \leftrightarrow A')$ JE FORMULA:

$(y = S(x)) \rightarrow ((\forall y)(y \neq 0) \leftrightarrow (\forall y)(S(x) \neq 0))$ NEPLATÍ V $\mathbb{N}$.

FORMULA $(\forall y)(y = S(x)) \rightarrow ((\forall y)(y \neq 0) \leftrightarrow (\forall y)(S(x) \neq 0))$

VŠ ALE PLATÍ V $\mathbb{N}$, PRETOŽE $(\forall y)(y = S(x))$ NEPLATÍ V $\mathbb{N}$, PRE ŽIADNE OHODN. e.

2. Z VETY O EKVIVALENCII DOSTÁVATE TVRDENIE:
KEĎ FORMULA A' VZNIKNE Z FORMULE A NAHRADENÍM
NIEKTORÝCH VÝSKYTOV PODFORMULE B FORMULOU B',
POTOM $\vdash B \leftrightarrow B' \Rightarrow \vdash A \leftrightarrow A'$.

PREDPOKLADAJME, ŽE PODMIENKA $\vdash B \leftrightarrow B'$ NIE JE DANÁ,
NAMIESTO TOHO NECH $x_1, \ldots, x_n$ OBSAHUJÚ KAŽDÚ
PREMENNÚ, KTORÁ MÁ VOĽNÝ VÝSKYT V PODFORMULI $B \leftrightarrow B'$
ALE VIAZANÝ VÝSKYT VO FORMULI $A \leftrightarrow A'$.

a) DOKÁŽTE, ŽE $\vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(B \leftrightarrow B') \rightarrow (A \leftrightarrow A')$

NECH $y_1, \ldots, y_m$ SÚ OSTATNÉ VOĽNÉ PREMENNÉ V $B \leftrightarrow B'$.
KAŽDÁ y_i MÁ VO FORMULI $A \leftrightarrow A'$ IBA VOĽNÉ VÝSKYTY
(POPR. SA VO FORMULI $A \leftrightarrow A'$ VÔBEC NEVYSKYTUJE).
NECH $c_1, \ldots, c_m$ SÚ NOVÉ KONŠTANTY. PODĽA VETY
O KONŠTANTÁCH STAČÍ DOKÁZAŤ

$$\vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(B[c_1, \ldots, c_m] \leftrightarrow B'[c_1, \ldots, c_m]) \rightarrow (A[c_1, \ldots, c_m] \leftrightarrow A'[c_1, \ldots, c_m])$$

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $A'[\ldots]$ VZNIKNE Z $A[\ldots]$
NAHRADENÍM NIEKTORÝCH VÝSKYTOV PODFORMULE $B[\ldots]$
FORMULOU $B'[\ldots]$

PREČO? NECH FORMULA A JE TVARU

$\alpha_0 B \alpha_1 B \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} B \alpha_k$, KDE α_i SÚ NEJAKÉ SLOVÁ

A A' JE TVARU $\alpha_0 B' \alpha_1 B' \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1} B' \alpha_k$.

V OBOCH TÝCHTO FORMULIACH MAJÚ PREMENNÉ $y_1, \ldots, y_m$
IBA VOĽNÉ VÝSKYTY, TAKŽE KEĎ ICH NAHRADÍME
KONŠTANTAMI $c_1, \ldots, c_m$ JE TO TO ISTÉ, AKO KEĎ
VO FORMULI $A[c_1, \ldots, c_m] \equiv \beta_0 B[\ldots] \ldots B[\ldots] \beta_k$
NAHRÁDZAME $B[\ldots]$ ZA $B'[\ldots]$

ZVYŠOK JE AKO V PRÍKLADE 1 a)

28.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

2. b) $\underbrace{x=0}_{B} \leftrightarrow \underbrace{S(y)\neq x}_{B'}$ JE SPLNENÁ V $\mathcal{N}$,

$A \equiv (\forall x)(\exists y)(x=0)$

$\Rightarrow A' \equiv (\forall x)(\exists y)(S(y)\neq x)$

PRENEX $(x=0 \leftrightarrow S(y)\neq x) \rightarrow$

$((\forall x)(\exists y)(x=0) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(S(y)\neq x))$

NIE JE SPLNENÁ V ŠTANDARDNOM MODELI $\mathcal{N}$,

KDEŽTO $(\forall x)(\forall y)(x=0 \leftrightarrow S(y)\neq x) \rightarrow$

$((\forall x)(\exists y)(x=0) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(S(y)\neq x))$

VŽ PLATÍ, PRENOŽE $(\forall x)(\forall y)(x=0 \leftrightarrow S(y)\neq x)$ NEPLATÍ.

3. b) HĽADÁME TAKÚ FORMULU A A TAKÝ TERM t ELEMENTÁRNEJ ARITMETIKY, ABY

$A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x=t \rightarrow A)$ NEBOLA SPLNENÁ V $\mathcal{N}$.

TERM t NUTNE MUSÍ OBSAHOVAŤ PREMENNÚ x.

NAPR.: $A \equiv x=0$, $t=x$

$x=0 \leftrightarrow (\forall x)(x=x \rightarrow x=0)$ NIE JE PLATNÁ V $\mathcal{N}$.

TOTO NIKDY NEPLATÍ.

$A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x=t \,\&\, A)$ JE EKVIVALENTNÉ S:

$\neg A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x=t \rightarrow \neg A)$

$x\neq 0 \leftrightarrow (\exists x)(x=x \,\&\, x\neq 0)$ NIE JE PLATNÁ V $\mathcal{N}$.

TOTO PLATÍ VŽDY. :)

4. d) $\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \forall A \in T\ \mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow$
$\forall A \in T\ \mathfrak{M}' \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models T$

$T \models_L A \Leftrightarrow \forall \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models T \Rightarrow \mathfrak{M} \models A$
$\Leftrightarrow \forall \mathfrak{M}' : \mathfrak{M}' \models T \Rightarrow \mathfrak{M}' \models A$

DOKAŽ (POSLEDNÁ EKVIVALENCIA)

$\Rightarrow$) NECH $\mathfrak{M}'$ JE ĽUBOVOĽNÁ REALIZÁCIA L'.
POTOM PRE $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'|L$ PODĽA PREDPOKLADU
PLATÍ $\mathfrak{M} \models T \Rightarrow \mathfrak{M} \models A$.
VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models T$ A $\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models A$
NUTNE $\mathfrak{M}' \models T \Rightarrow \mathfrak{M}' \models A$.

$\Leftarrow$) NECH $\mathfrak{M}$ JE ĽUBOVOĽNÁ REALIZÁCIA L
ZVOĽME ĽUBOVOĽNÚ $\mathfrak{M}'$ REALIZÁCIU L' TAKÚ, ŽE $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'|L$.
(URČITE EXISTUJE). ZVYŠOK JE ZREJMÝ.

5. NECH T JE BEZSPORNÁ TEÓRIA S JAZYKOM L,
KTORÝ MÁ SPOČETNE VEĽA SYMBOLOV.

DOKÁŽTE, ŽE MNOŽINA VŠETKÝCH KONEČNÝCH SLOV JAZYKA L
JE SPOČETNÁ. K TOMU STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE MNOŽINA
VŠETKÝCH KONEČNÝCH POSTUPNOSTÍ PRIR. ČÍSEL JE
SPOČETNÁ...

NECH $A_1, A_2, A_3, \ldots$ JE POSTUPNOSŤ VŠETKÝCH
FORMÚL JAZYKA L.
DEFINUJME $T_0 := T$, $T_n := T_{n-1} \cup \begin{cases} \{A_n\} \\ \{\neg A_n\} \end{cases}$

TAK, ABY T_n BOLA BEZSPORNÁ.

29.08.2007Th
PETER ČERNO

AILOGL VÝR. A PRED. LOGIKA - SKRÚŠKA

LEMMA: NECH T JE BEZSPORNÁ A A JE FORMULA. POTOM $T \cup \{A\}$ ALEBO $T \cup \{\neg A\}$ JE BEZSPORNÁ.

DÔKAZ. PRE SPOR NECH SÚ OBE MNOŽINY SPORNÉ

LEMMA: $T \cup \{A\}$ JE SPORNÁ $\Leftrightarrow$ $T \cup \{A'\}$ JE SPORNÁ, KDE A' JE UZÁVER A.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) NECH B JE ĽUBOVOĽNÁ FORMULA.
Z VETY O UZÁVERE JE $T, A' \vdash A$, TAKŽE
Z $T, A \vdash B$ VIEME SKONŠTRUOVAŤ AJ DÔKAZ $T, A' \vdash B$.
$\Leftarrow$) PODOBNE Z VETY O UZÁVERE $T, A \vdash A'$...

D. $T \cup \{A'\}$ AJ $T \cup \{\neg A'\}$ SÚ SPORNÉ.
PRE ĽUBOVOĽNÉ UZAVRETÉ FORMULU B PLATÍ:

$T, A' \vdash B$, $T, \neg A' \vdash B$, D. Z VETY O DEDUKCII

$T \vdash \neg B \to \neg A'$, $T \vdash \neg B \to A'$

$T, \neg B \vdash A', \neg A'$

2 $\vdash \neg A' \to (A' \to B)$

MP $T, \neg B \vdash B$

$T \vdash \neg B \to B$

$\vdash (\neg B \to B) \to B$

$T \vdash B$.

} LEMMA O NEUTRÁLNEJ FORMULI

PRETO JE AJ T SPORNÁ, ČO JE SPOR □

POLOŽME $T' := \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. POTOM T' JE BEZSPORNÁ (ZREJMÉ) + PRE KAŽDÉ UZAVRETÉ FORMULU A JE BUĎ $T' \vdash A$, ALEBO $T' \vdash \neg A$, D. T' JE ÚPLNÁ.

6. a) $\Leftrightarrow$ b) JE ZREJME (VIĎ LEMA Z 5. CVIČENIA)

a) $\Rightarrow$ c)

$$T \vdash A \Rightarrow T \vdash A \vee B$$
$$T \vdash B \Rightarrow T \vdash A \vee B$$

TAKŽE $T \vdash A \vee T \vdash B \Rightarrow T \vdash A \vee B$

KEĎ $\neg T \vdash A \wedge \neg T \vdash B$, POTOM (Z ÚPLNOSTI)
$T \vdash \neg A \wedge T \vdash \neg B$

$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \vee B))$

$\Rightarrow T \vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg T \vdash A \vee B$ (Z ÚPLNOSTI)

c) $\Rightarrow$ a)

NECH A JE ĽUBOVOĽNÁ UZAVRETÁ FORMULA, POTOM
$\vdash A \vee \neg A \Rightarrow T \vdash A \vee \neg A \Leftrightarrow T \vdash A \vee T \vdash \neg A$.

7. NECH $(\forall x)B$ JE UZAVRETÁ PODFORMULA A

POTOM ∃ KONŠTANTA c: $T \vdash (\exists x)\neg B \to \neg B_x[c]$

D. $T \vdash B_x[c] \to (\forall x)B$.

AX. ŠPECIFIKÁCIE DÁVA $T \vdash (\forall x)B \to B_x[c]$

TAKŽE SPOLU MÁME $T \vdash (\forall x)B \Leftrightarrow B_x[c]$.

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE KEĎ NAHRADÍME PODFORMULU $(\forall x)B$ FORMULOU $B_x[c]$, DOSTANEME UZAVRETÚ FORMULU A' TAKÚ, ŽE $\vdash A \Leftrightarrow A'$, PRIČOM FORMULA A' MÁ O 1 KVANTIFIKÁTOR MENEJ.

PRE $(\exists x)B$ MÁME $T \vdash (\exists x)B \to B_x[c]$,
$T \vdash B_x[c] \to (\exists x)B$ A OPÄŤ ODSTRÁNIME AJ TENTO KV.

POSTUPNE TAKTO VIEME ODSTRÁNIŤ ∀ KVANTIFIKÁTORY.

28.08.2007 Th
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

PREDPOKLADAJME, ŽE x A y SA NEVYSKYTUJÚ V t.
$\vdash x=y \to (\exists x)(x=y)$ JE AX. ŠPECIFIKÁCIE

VETA O INŠTANCII DÁVA:
$\vdash t=t \to (\exists x)(x=t)$
$\vdash t=t$ JE INŠTANCIA RA
MP $\vdash (\exists x)(x=t)$.

8. b)
⌢ VEZMIME SI ĽUBOVOĽNÉ INDIVÍDUUM $[t]$, KDE t JE TERM BEZ PREMENNÝCH
PLATÍ $\vdash (\exists x)(x=t)$
$T \vdash (\exists x)(x=t) \to (c=t)$ PRE NEJAKÚ KONŠTANTU c.
MP DÁVA $T \vdash c=t$

V KANONICKEJ ŠTRUKTÚRE $\mathfrak{M}$ (VZHĽADOM K TOMU, ŽE $c=t$ JE UZAVRETÁ FORMULA) PLATÍ
$\mathfrak{M} \models c=t$ TJ. IBA ak $\forall e: \mathfrak{M} \models [c=t]\ [e]$.
TJ. $c_{\mathfrak{M}} = t[e] = [t]$.

29.08.2007 Ke
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKOŠKA

LEMMA: NECH JAZYK L' JE ROZŠÍRENÍM JAZYKA L. NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L A T' JE TEÓRIA S JAZYKOM L'. POTOM:

i) T' JE ROZŠÍRENÍM T $\Leftrightarrow$ PRE KAŽDÝ MODEL $\mathcal{M}'$ TEÓRIE T' JE $\mathcal{M}'|L$ MODELOM TEÓRIE T.

ii) T' JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T AK T' JE ROZŠÍRENÍM T A KAŽDÝ MODEL $\mathcal{M}$ TEÓRIE T ⌒ MOŽNO EXPANDOVAŤ DO MODELU $\mathcal{M}'$ TEÓRIE T'.

DÔKAZ i) $\Rightarrow$) AK T' JE ROZŠÍRENÍM T, POTOM PRE $\forall$ FORMULE A JAZYKA L PLATÍ $T \vdash A \Rightarrow T' \vdash A$. NECH $\mathcal{M}'$ JE MODEL TEÓRIE T'. ZREJME PRE $\forall$ FORMULE A Z T JE $T \vdash A \Rightarrow T' \vdash A \Rightarrow \mathcal{M}' \models A$ (VETA O KOREKT.) KEĎŽE A JE FORMULA JAZYKA L, ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $\mathcal{M}' \models A \Rightarrow \mathcal{M}'|L \models A$. $\Rightarrow$ NUTNE $\mathcal{M}'|L$ JE MODEL T.

$\Leftarrow$) NECH PRE KAŽDÝ MODEL $\mathcal{M}'$ TEÓRIE T' JE $\mathcal{M}'|L$ MODELOM TEÓRIE T. UVAŽUJME ĽUBOVOĽNÚ FORMULU ⌒ TEÓRIE T. ZREJME $T \vdash A$. DOKÁŽEME, ŽE TIEŽ $T' \vdash A$. Z VETY O ÚPLNOSTI STAČÍ DOKÁZAŤ $T' \models A$. NECH $\mathcal{M}'$ JE MODEL T'. DOKÁŽEME, ŽE $\mathcal{M}' \models A$. $\mathcal{M}'|L$ JE MODEL $T \Rightarrow$ Z VETY O KOREKTNOSTI $\mathcal{M}'|L \models A$. KEĎŽE / A / JE / FORMULA / JAZYKA / L, NUTNE TIEŽ $\mathcal{M}' \models A$.

ii) $\Leftarrow$) UVAŽUJME A FORMULU L. NECH $T' \vdash A$. DOKÁŽEME $T \vdash A$. NECH $\mathcal{M}$ JE MODEL T A $\mathcal{M}'$ JE JEHO EXPANZIA DO T', TJ. $\mathcal{M} = \mathcal{M}'|L$, $\mathcal{M}' \models T'$. Z VETY O KOREKTNOSTI JE $\mathcal{M}' \models A \Rightarrow \mathcal{M} \models A$. TJ. $T \models A \Rightarrow T \vdash A$.

POZNÁMKA: UVAŽUJME TEÓRIU T OBSAHUJÚCU ŠPECIÁLNY AXIÓM $x=y$. AKO VYZERÁ MODEL $\mathcal{M}$ TAKEJTO TEÓRIE? UNIVERZUM M JE NUTNE 1-PRVKOVÁ MNOŽINA. !!

ROZŠÍRENIE TEÓRIE O DEFINÍCIU PREDIKÁTU

KEĎ CHCEME NAPR. DO ELEMENTÁRNEJ ARITMETIKY E ZAVIESŤ RELÁCIU $\leq$, ROZŠÍRIME JAZYK O NOVÝ BINÁRNY PREDIKÁT $\leq$ A PRIDÁME AXIÓM (DOSTANEME E')

$x \leq y \leftrightarrow \underbrace{(\exists z)(z+x=y)}_{D}$. = TZV. DEFINUJÚCI AXIÓM

D JE DEFINUJÚCA FORMULA PREDIKÁTU $\leq$

KAŽDÚ INSTANCIU $t \leq s$ FORMULE $x \leq y$ MÔŽEME V E' NAHRADIŤ FORMULOU $D'_{x,y}[t,s]$, KDE D' JE VHODNÁ VARIANTA D. TOTIŽ, ABY BOLI TERMY t, s SUBSTITUOVATEĽNÉ ZA x, y VO FORMULI: $x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z+x=y)$, NESMIE SA Z VYSKYTOVAŤ V ŽIADNEJ Z FORMULÍ t, s.

- PRETO MUSÍME VŽDY ZVOLIŤ NAJSKÔR VHODNÚ VARIANTU D'.

VETA (O DEFINÍCII PREDIKÁTOVÉHO SYMBOLU):

NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L, D JE FORMULA JAZ. L, MEDZI $x_1, \ldots, x_n$ SÚ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ D. NECH TEÓRIA T' S JAZYKOM L' JE ROZŠÍRENIE T S JAZ. L TAKÉ, ŽE L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM NOVÉHO n-ÁRNEHO PREDIKÁTOVÉHO SYMBOLU P A T' VZNIKNE Z T PRIDANÍM NOVÉHO ŠPECIÁLNEHO AXIÓMU

$P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow D$.

POTOM T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T A NAVIAC KU KAŽDEJ FORMULI B' JAZYKA L' EXISTUJE FORMULA B JAZYKA L TAKÁ, ŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$.

29.08.2007 Ut
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PREP. LOGIKA – SKÚŠKA

DÔKAZ: DOKÁŽEME NAJSKÔR, ŽE KU KAŽDEJ FORMULI B' JAZYKA L' EXISTUJE FORMULA B JAZYKA L, TAKÁ, ŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$. KEĎ JE B' FORMULA JAZYKA L, POTOM ZREJME $T' \vdash B \leftrightarrow B'$. PREDPOKLADAJME, ŽE B' V SEBE OBSAHUJE $p(t_1, \ldots, t_n)$ AKO PODFORMULU.
PLATÍ $T' \vdash p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow D$. NECH D' JE VARIANTA D TAKÁ, ŽE ŽIADNA PREMENNÁ VYSKYTUJÚCA SA V TERMOCH $t_1, \ldots, t_n$ NIE JE VIAZANÁ V D', TAKŽE $t_1, \ldots, t_n$ SÚ SUBSTITUOVATEĽNÉ ZA $x_1, \ldots, x_n$ V D.
AKO INŠTANCIU DOSTÁVAME

$$T' \vdash p(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow D'_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n].$$

Z VETY O EKVIVALENCII POTOM VIEME, ŽE $\vdash B' \leftrightarrow B''$, KDE B'' VZNIKNE Z B' NAHRADENÍM VÝSKYTU $p(t_1, \ldots, t_n)$ FORMULOU $D'_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n]$, KTORÁ JE UŽ Z JAZYKA L.
CELÝ POSTUP OPAKUJEME, KÝM NA KONCI NEDOSTANEME FORMULU B JAZYKA L TAKÚ, ŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$.

DOKÁŽEME EŠTE, ŽE T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENÍM T. NECH B JE FORMULA JAZYKA L A NECH $T' \vdash B$. NECH $A'_1, \ldots, A'_n = B$ JE DÔKAZ B Z PREDPOKLADOV T'. INDUKCIOU PODĽA DĹŽKY DÔKAZU DOKÁŽEME $T \vdash A_i$, KDE A_i VZNIKNE Z A'_i VYššIE POPÍSANÝM SPÔSOBOM.
KEĎ JE A'_i AXIÓM A1, A2, A3, AX. ŠPEC., AX. PRESKOČ., R1, ⊗, R3 POTOM A_i JE TIEŽ TEN ISTÝ AXIÓM. (V PRÍPADE ŽE T JE TEÓRIA 1.R. S ROVNOSŤOU)
KEĎ JE A'_i Z T, POTOM $A_i \equiv A'_i$.
KEĎ JE $A'_i \equiv p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow D$, POTOM (Z VETY O VAR.) JE $T \vdash D' \leftrightarrow D$, PRE KAŽDÚ VARIANTU D' FORMULE D.

TREBA OŠETRIŤ ŠPECIÁLNY PRÍPAD, KEĎ JE A_i' AXIÓM R2

$$x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \ldots \to (x_n = y_n \to P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)) \ldots)$$

TU MÁME 2 VÝSKYTY PREDIKÁTU P, ~~ALEBO NIEKOĽKO~~ ~~ALEBO ŽIADNY~~ NECH D' JE VARIANTA D TAKÁ, ŽE POTOM ŽIADNA Z PREM. $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ NIE JE VIAZANÁ V D'

$A_i \equiv x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to \ldots \to (x_n = y_n \to D'[x_1, \ldots, x_n] \to D'[y_1, \ldots, y_n]) \ldots)$

JE VETA PREDIKÁTOVEJ LOGIKY, TAKŽE $T \vdash A_i$

PODSTATNÉ JE, ABY NA PRAVEJ STRANE BOLA 1 VARIANTA D'.

PRAVIDLÁ MP A ~~PG~~ GENERALIZÁCIE SÚ NAHLIADNU PODOBNÉ

POZNÁMKA: VETA BY SA MALA DOKAZOVAŤ TAK, ŽE NAJSKÔR NÁJDEM VARIANTU D' FORMULE D TAKÚ, ŽE ŽIADNA PREMENNÁ Z VŠETKÝCH SÚ V DÔKAZE $A_1', \ldots, A_n' \vdash B$ NIE JE VIAZANÁ V D. TÝM MÁM ZARUČENÉ, ŽE KAŽDÝ TERM V DANOM DÔKAZE JE SUBSTITUOVATEĽNÝ DO D'.

PRECHOD Z A_i' DO A_i BUDE POTOM DEFINOVANÝ JEDNOZNAČNE → VŠADE BUDE POUŽITÁ IBA VARIANTA D'. POTOM UŽ NAPR. NETREBA ZVLÁŠŤ OŠETROVAŤ R2 ATĎ.

29.08.2007 Ut
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

ROZŠÍRENIE TEÓRIE O FUNKČNÉ SYMBOLY

- ZAVEDENIE NOVÉHO FUNKČNÉHO SYMBOLU
- DEFINÍCIA NOVÉHO FUNKČNÉHO SYMBOLU

MNOŽINA M JE DOBRE USPORIADANÁ RELÁCIOU $<$, KEĎ KAŽDÁ NEPRÁZDNA $M' \subseteq M$ MÁ NAJMENŠÍ PRVOK.

VETA O DOBROM USPORIADANÍ: NA KAŽDEJ MNOŽINE EXISTUJE RELÁCIA DOBRÉHO USPORIADANIA

VETA (O ZAVEDENÍ FUNKČNÉHO SYMBOLU):
NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L, $(\exists y)A$ JE FORMULA JAZYKA L TAKÁ, ŽE $T \vdash (\exists y)A$
NECH MEDZI PREMENNÝMI $x_1, \ldots, x_n$ SÚ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ FORMULE $(\exists y)A$.
NECH T' S JAZYKOM L' JE ROZŠÍRENIE TEÓRIE T TAKÉ, ŽE L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM n-ÁRNEHO FUNKČNÉHO SYMBOLU f A
T' VZNIKNE Z T PRIDANÍM ŠPEC. AXIÓMU
$A_y[f(x_1, \ldots, x_n)]$.
POTOM T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T.

DÔKAZ: NECH $\mathfrak{M}$ JE MODEL T. DOKÁŽEME, ŽE EXISTUJE EXPANZIA $\mathfrak{M}'$ MODELU $\mathfrak{M}$ DO TEÓRIE T'.
NECH $<$ JE RELÁCIA DOBRÉHO USPORIADANIA NA M. (EXISTENCIA ZARUČENÁ VETOU O DOBROM USPORIADANÍ).
PLATÍ $T \vdash (\exists y)A \Rightarrow \mathfrak{M} \models (\exists y)A$

TAKŽE PRE KAŽDÉ OHODNOTENIE e
$e(x_i)=m_i \in M$ EXISTUJE $m \in \Pi$ TAKÉ, $\mathfrak{M} \models A[e(y/m)]$

OZNAČME $M(m_1,\dots,m_n)$ MNOŽINU VŠETKÝCH TAKÝCHTO $m \in \Pi$.

POLOŽME $f_{\mathfrak{M}'}(m_1,\dots,m_n) := \min(M(m_1,\dots,m_n))$.

TÝM SME DEFINOVALI $\mathfrak{M}'$. ĎALEJ DOKÁŽEME,
ŽE $\mathfrak{M}' \models T'$. STAČÍ OVERIŤ, ŽE $\mathfrak{M}' \models A_y[f(x_1,\dots,x_n)]$.

T.J. PRE $\forall e$ $\mathfrak{M}' \models A_y[f(x_1,\dots,x_n)][e]$ $e(x_i)=m_i$ ∎.
$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M}' \models A[e(y/f_{\mathfrak{M}'}(m_1,\dots,m_n)]$
$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{M} \models A[e(y/f_{\mathfrak{M}'}(m_1,\dots,m_n)]$, čo platí.

VIDÍME, ŽE $\mathfrak{M}'$ JE MODEL T'.

PODĽA VYŠŠIE UVEDENEJ LEMMY (ii) JE T' KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T.

UNIVERZÁLNA / EXISTENČNÁ FORMULA

SKOLEMOVA VARIANTA FORMULE A

KEĎ A JE UZAVRETÁ FORMULA V PRENEXNOM TVARE, POTOM A_S DEFINUJEME INDUKCIOU:

i) A JE UNIVERZÁLNA $\Rightarrow$ $A_S = A$

ii) A JE TVARU $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists y)B$ $n \geq 0$,
POTOM NECH f JE NOVÝ n-ÁRNY FUNKČNÝ SYMBOL
POLOŽME $A^0 := (\forall x_1)\dots(\forall x_n)B_y[f(x_1,\dots,x_n)]$
ZREJME $A^0 \vdash A$. Z AX. ŠPECIFIKÁCIE (ALEBO VETY O UZÁVERE)
$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)B_y[f(x_1,\dots,x_n)] \vdash B_y[f(x_1,\dots,x_n)]$
$\vdash B_y[f(x_1,\dots,x_n)] \to (\exists y)B$
MP $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)B_y[f(x_1,\dots,x_n)] \vdash (\exists y)B$
PRAVIDLO GENERALIZÁCIE DÁVA $A^0 \vdash A$.

KLADIEME $A_S := (A^0)_S$. ZREJME $A_S \vdash A$.

29.08.2007 Hb
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKOLEM

EKVIVALENTNÉ TEÓRIE, OTVORENÁ TEÓRIA

VETA (SKOLEM): K ĽUBOVOĽNEJ TEÓRII T MOŽNO ZOSTROJIŤ OTVORENÚ TEÓRIU T', KTORÁ JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T.

DÔKAZ. UVAŽUJME ĽUBOVOĽNÚ TEÓRIU T.
NECH T_1 JE TEÓRIA, KTORÁ JE TVORENÁ PRÁVE UZÁVERMI PRENEXNÝCH TVAROV VŠETKÝCH ŠPECIÁLNYCH AXIÓMOV TEÓRIE T, $L_1 = L$.
Z VETY O UZÁVERE A Z VETY O PRENEXNOM TVARE DOSTÁVAME, ŽE TEÓRIE T A T_1 SÚ EKVIVALENTNÉ.
NECH $T_2 = T_1 \cup \{A_S \mid A \in T_1\}$, KDE A_S JE SKOLEMOVA VARIANTA FORMULE A (KTORÁ JE UZAVRETÁ V PRENEXNOM T.),
L_2 VZNIKNE Z L_1 PRIDANÍM VŠETKÝCH NOVÝCH FUNKČNÝCH SYMBOLOV POUŽITÝCH PRI TVORBE SK. VARIANT.
DOKÁŽEME, ŽE T_2 JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T_1.
UVAŽUJME FORMULU A JAZYKA L_1. NECH $T_2 \vdash A$.
DOKÁŽEME, ŽE TIEŽ $T_1 \vdash A$. PREDNE PRI DÔKAZE $T_2 \vdash A$ MOHLO BYŤ POUŽITÝCH NAJVIAC KONEČNE VEĽA FORMÚL A_S A NOVÝCH FUNKČNÝCH SYMBOLOV. NECH TO BOLI PRÁVE FORMULE $A_{1S}, \ldots, A_{nS}$ A FE. SYM. $f_1, \ldots, f_m$.
OZNAČME $T_2' = T_1 \cup \{A_{1S}, \ldots, A_{nS}\}$, $L_2' = L_1 \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$.
POTOM TIEŽ $T_2' \vdash A$ V JAZYKU L_2'.
Z VETY O ZAVEDENÍ FUNKČNÉHO SYMBOLU SA DÁ ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE T_2' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T_1, TAKŽE NUTNE TIEŽ $T_1 \vdash A$, ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ.

NECH T_3 VZNIKNE Z T_2 MNOŽINAMI FORMULÍ, KTORÉ NIE SÚ SKOLEMOVÍM VARIANTAMI, $L_3 = L_2$. TJ. $T_3 = \{A_S,\ A \in T_1\}$. KEĎŽE PRE $\forall A$ JAZYKA L_3 JE $\vdash A_S \to A$ VETOU PRED. LOGIKY, NUTNE SÚ T_2 A T_3 EKVIVALENTNÉ.

NECH T_4 VZNIKNE Z T_3 ODSTRÁNENÍM KVANTIFIKÁTOROV T. J. PONECHANÍM IBA OTVORENÝCH ČLENOV. POTOM SÚ T_3 A T_4 OPÄŤ EKVIVALENTNÉ AKO VYPLÝVA Z VETY O UZÁVERE. PLATÍ TEDA $T \equiv T_1$, $T_2 \equiv T_3 \equiv T_4$, T_2 JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T_1. POTOM ZREJME $T' = T_4$ JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T V POŽADOVANOM TVARE.

VETA (O <u>DEFINÍCII</u> FUNKČNÉHO SYMBOLU)

30.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

VETA (O DEFINÍCII FUNKČNÉHO SYMBOLU): NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L, $(\exists y)D$ JE FORMULA JAZYKA L A MEDZI PREMENNÝMI $x_1, \dots, x_n, y$ SA NACHÁDZAJÚ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ FORMULE D.

NECH $T \vdash (\exists y)D$

$T \vdash D \to (D_y[t] \to y = t)$ → PRE KAŽDÝ TERM t SUBSTIT. ZA y DO D ?

n-ÁRNEHO

NECH L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM NOVÉHO FUNKČNÉHO SYMBOLU f A T' VZNIKNE Z T PRIDANÍM ŠPECIÁLNEHO (DEFINUJÚCEHO) AXIÓMU: $y = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow D$.

POTOM T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T A KU KAŽDEJ FORMULI A' JAZYKA L' EXISTUJE FORMULA A JAZYKA L TAKÁ, ŽE $T' \vdash A \leftrightarrow A'$.

DÔKAZ. DOKÁŽEME NAJSKÔR, ŽE KU KAŽDEJ FORMULI A' JAZYKA L' VIEME NÁJSŤ EKVIVALENTNÚ FORMULU JAZYKA L. KEĎŽE TERM f SA VYSKYTUJE $[\mathbb{B}\mathbb{A}]$ V ATOMICKÝCH FORMULÁCH, MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE A' JE ATOMICKÁ FORMULA. KEĎ A' NEOBSAHUJE TERM f, POTOM $A \equiv A'$. NECH TEDA $f(t_1, \dots, t_n)$ JE NEJAKÝ VÝSKYT TERMU f V A' TAKÝ, ŽE f SA UŽ NEVYSKYTUJE V TERMOCH $t_1, \dots, t_n$. VIEME TEDA ZOSTROJIŤ FORMULU B', KTORÁ MÁ O JEDEN VÝSKYT TERMU f MENEJ AKO A' A PRE KTORÚ JE $A' \equiv B'_z[f(t_1, \dots, t_n)]$. MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE z SA NEVYSKYTUJE NIKDE V A', ANI V D.

PODĽA INDUKČNÉHO PREDPOKLADU EXISTUJE FORMULA B V JAZYKU L TAKÁ, ŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$.

NECH D' JE VARIANTA D TAKÁ, ŽE ŽIADNA PREMENNÁ FORMULE A' NIE JE VIAZANÁ V D'.

POLOŽÍME $\boxed{A := (\exists z)(D'_{x_1,\dots,x_n,y}[t_1,\dots,t_n,z] \,\&\, B).}$

ZREJME A JE FORMULA JAZYKA L. TERAZ UŽ STAČÍ IBA DOKÁZAŤ, ŽE $T' \vdash A \leftrightarrow A'$, TJ.

$$T' \vdash (\exists z)(D'_{x_1,\dots,x_n,y}[t_1,\dots,t_n,z] \,\&\, B) \leftrightarrow B'_z[f(x_1,\dots,x_n)]$$

PLATÍ $T' \vdash y = f(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow D'$, TAKŽE TIEŽ INŠTANCIA

$$T' \vdash z = f(t_1,\dots,t_n) \leftrightarrow D'_{x_1,\dots,x_n,y}[t_1,\dots,t_n,z]$$

$$\Rightarrow T' \vdash (\exists z)(z = f(t_1,\dots,t_n) \,\&\, B) \leftrightarrow \underbrace{(\exists z)(D'_{x_1,\dots,x_n,y}[t_1,\dots,t_n,z] \,\&\, B)}_{A}$$

KEĎŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$ A TERM $f(t_1,\dots,t_n)$ V SEBE NEOBSAHUJE z MÔŽEME POUŽIŤ VETU O ROVNOSTI:

$$\vdash C_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x = t \,\&\, C)$$

TJ. $$T' \vdash (\exists z)(z = f(t_1,\dots,t_n) \,\&\, B') \leftrightarrow B'_z[f(t_1,\dots,t_n)]$$

TAKŽE $T' \vdash B'_z[f(t_1,\dots,t_n)] \leftrightarrow A$

TJ. $T' \vdash A' \leftrightarrow A$, čo BOLO TREBA DOKÁZAŤ.

30.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

TERAZ UŽ STAČÍ AK DOKÁŽEME, ŽE T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T. NECH S JE TEÓRIA S JAZYKOM L', KTORÁ VZNIKNE Z T PRIDANÍM DEFINUJÚCEHO AXIÓMU

$$D_f[f(x_1, \ldots, x_n)]$$

DOKÁŽEME, ŽE T' JE EKVIVALENTNÁ S S.
K TOMU STAČÍ, ABY SME DOKÁZALI

a) $T' \vdash D_f[f(x_1, \ldots, x_n)]$

b) $S \vdash y = f(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow D$

DÔKAZ a) : $T' \vdash y = f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow D$, TAKŽE

$T' \vdash f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow D_f[f(x_1, \ldots, x_n)]$

POZNÁMKA: PREDPOKLADÁME, ŽE $x_1, \ldots, x_n$ NEMAJÚ VIAZANÉ VÝSKYTY V D.

MP $T' \vdash D_f[f(x_1, \ldots, x_n)]$

DÔKAZ b) : PLATÍ $S \vdash D_f[f(x_1, \ldots, x_n)]$.

Z $S \vdash D \rightarrow (D_f[f(x_1, \ldots, x_n)] \rightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n))$

DOSTÁVAME AKO TAUT. DÔSLEDOK

$S \vdash D_f[f(x_1, \ldots, x_n)] \rightarrow (D \rightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n))$

MP $S \vdash D \rightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n)$

PLATÍ $\vdash$ '$y = f(x_1, \ldots, x_n)$' $\rightarrow (D \leftrightarrow D_f[f(x_1, \ldots, x_n)])$

TAKŽE $\vdash D_f[f(x_1, \ldots, x_n)] \rightarrow (y = f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow D)$

MP $S \vdash y = f(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow D$.

SPOLU MÁME $S \vdash y = f(x_1, \ldots x_n) \leftrightarrow D$, ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ.
PRETOŽE S JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T,
NUTNE AJ T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T.

NECH JE t TERM, $x_1, \ldots, x_n$ SÚ VŠETKY JEHO PREMENNÉ
POLOŽME $D :\equiv y = t$ A DEFINUJME NOVÝ FUNKČNÝ
SYMBOL $f(x_1, \ldots, x_n)$ POMOCOU DEFINUJÚCEHO AXIÓMU

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow y = t$$

$D_y[t] \equiv t = t$, TAKŽE $\vdash D_y[t] \to (\exists y) D$
DOSTÁVAME POMOCOU MP $\vdash (\exists y) D$
ĎALEJ $\vdash D \to (D_y[t'] \to y = t')$ [redacted], PRETOŽE
$\vdash y = t \to (t' = t \to y = t')$
PLATÍ 20 SYMETRIE A TRANZITÍVNOSTI.

TAKŽE SÚ SPLNENÉ PODMIENKY VETY O DEFINÍCII FUNKČNÉHO SYMBOLU, TAKŽE ZAVEDENIE TAKÉHOTO SYMBOLU f JE „KONZERVATÍVNE".

ROZŠÍRENIE TEÓRIE O DEFINÍCIE.

20.03.2007 Th
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA CVIČENIE

1. L^r JE RELAČNÁ VERZIA JAZYKA L,
p^f JE PREDIKÁTOVÝ SYMBOL ZDRUŽENÝ S f

$P(L^r)$ JE MNOŽINA VŠETKÝCH AXIÓMOV TVARU:

$(\exists y)\ p^f(x_1, \ldots, x_n, y)$

$p^f(x_1, \ldots, x_n, y) \to (p^f(x_1, \ldots, x_n, y') \to y = y')$

PRE VŠETKY ZDRUŽENÉ PREDIKÁTOVÉ SYMBOLY p^f JAZYKA L^r

$\mathfrak{M}^r$ JE RELAČNÁ VERZIA ŠTRUKTÚRY $\mathfrak{M}$.

NECH A JE FORMULA JAZYKA L. A $\mathfrak{M}$ JE REALIZÁCIA L.

a) DOKÁŽTE, ŽE $\mathfrak{M}^r \models P(L^r)$

NAJSKÔR DOKÁŽTE, ŽE PRE $\forall e$ JE

$\mathfrak{M}^r \models (\exists y)\, p^f(x_1, \ldots, x_n, y)\ [e]$

NECH $e(x_i) = m_i$. POLOŽTE $m := f_{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n)$

POTOM Z DEFINÍCIE p^f PLATÍ

$(m_1, \ldots, m_n, m) \in p^f_{\mathfrak{M}^r}$, TAKŽE

$\mathfrak{M}^r \models p^f(x_1, \ldots, x_n, y)\ [e(y/m)]$, TJ.

$\mathfrak{M}^r \models (\exists y)\, p^f(x_1, \ldots, x_n)\ [e]$.

ĎALEJ DOKÁŽTE, ŽE PRE $\forall e$ JE

$\mathfrak{M}^r \models p^f(x_1, \ldots, x_n, y) \to (p^f(x_1, \ldots, x_n, y') \to y = y')\ [e]$

NECH $e(x_i) = m_i$. ZAUJÍMAVÝ JE IBA PRÍPAD, KEĎ
$e(y) = m$, $e(y') = m'$, $(m_1, \ldots, m_n, m) \in p^f_{\mathfrak{M}^r}$ A $(m_1, \ldots, m_n, m') \in p^f_{\mathfrak{M}^r}$.
Z DEFINÍCIE p^f ALE PLYNIE $m = m' = f_{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n)$,
TAKŽE NUTNE TIEŽ $\mathfrak{M}^r \models y = y'\ [e]$.

b) TO JE PRAVDA IBA KEĎ DOPLNÍME DEFINÍCIU A^r PRE A ATOMICKÚ FORMULU TVARU $p(t_1, \dots, t_n)$

c) BUDEME POSTUPOVAŤ INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI FORMULE A, PRIČOM JEDINÝ ZAUJÍMAVÝ PRÍPAD JE, KEĎ A JE ATOMICKÁ FORMULA

KEĎ A JE TVARU $t_1 = t_2$

i) KEĎ SÚ OBA TERMY t_1, t_2 PREMENNÉ, POTOM $A^r = A$ A ZREJME $\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models A^r[e]$
(VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\mathfrak{M}$ AJ $\mathfrak{M}^r$ MAJÚ TO ISTÉ UNIVERZUM)

ii) KEĎ t_2 JE PREMENNÁ y A t_1 JE TERM TVARU $f(s_1, \dots, s_n)$, POTOM AK $x_1, \dots, x_n$ SÚ PREMENNÉ, KTORÉ SA NEVYSKYTUJÚ V A, MÔŽEME PÍSAŤ A^r V TVARE

$(\exists x_1) \dots (\exists x_n)(s_1 = x_1)^r \& \dots \& (s_n = x_n)^r \& p^{\mathfrak{M}}(x_1, \dots, x_n, y)$

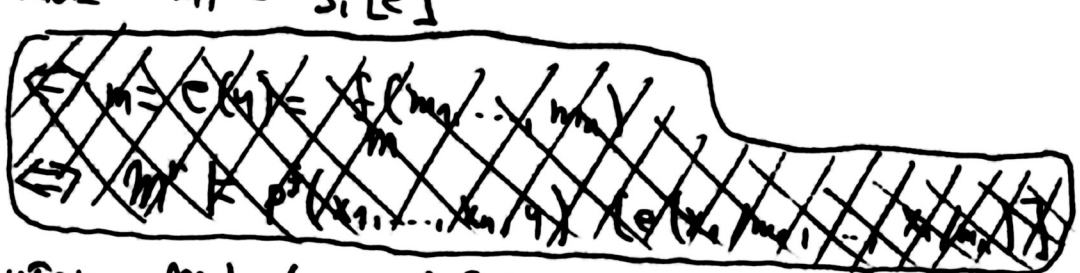
PRIČOM UŽ MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE

PRE $\forall e$: $\mathfrak{M} \models (s_i = x_i)[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models (s_i = x_i)^r[e]$

$\mathfrak{M} \models y = f(s_1, \dots, s_n)[e] \Leftrightarrow$

$\mathfrak{M} \models y = f(x_1, \dots, x_n)[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$,

KDE $m_i = s_i[e]$



AVŠAK $\mathfrak{M} \models (s_i = x_i)[e] \Leftrightarrow s_i[e] = e(x_i) = m_i$

TAKŽE $\mathfrak{M} \models y = f(x_1, \dots, x_n)[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow$ PRE $m_i = s_i[e]$

$\mathfrak{M} \models (s_1 = x_1) \& \dots \& (s_n = x_n) \& y = f(x_1, \dots, x_n)[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$

30.06.2007 Th
PETER ČERNO

ALLO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

TOTIŽ $\mathfrak{M} \models y = f(x_1, \dots, x_n)\ [e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models (s_1 = x_1) \& \dots \& (s_n = x_n) \& y = f(x_1, \dots, x_n)$
$[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$ KDE $m_i = s_i[e]$

PRETOŽE $\mathfrak{M} \models s_i = x_i\ [e(x_i/m_i)]$ PLATÍ PRE $m_i = s_i[e]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models (s_1 = x_1)^r \& \dots \& (s_n = x_n)^r\ [e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$ A

A $\mathfrak{M} \models y = f(x_1, \dots, x_n)\ [e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models (s_1 = x_1)^r \& \dots \& (s_n = x_n)^r\ [e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$ A

A $\mathfrak{M}^r \models p^s(x_1, \dots, x_n, y)\ [e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models (s_1 = x_1)^r \& \dots \& (s_n = x_n)^r \& p^s(x_1, \dots, x_n, y)$
$[e(x_1/m_1, \dots, x_n/m_n)]$

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models (\exists x_1) \dots (\exists x_n)\ (s_1 = x_1)^r \& \dots \& (s_n = x_n)^r \&$
$p^s(x_1, \dots, x_n, y)\ [e]$

POSLEDNÁ EKVIVALENCIA JE ZĽAVA DOPRAVA ZREJMÁ.
ZPRAVA DOĽAVA VŠAK PLATÍ TIEŽ, PRETOŽE POKIAĽ NEJAKÉ INDIVÍDUÁ $m_1, \dots, m_n$ PRE $x_1, \dots, x_n$ EXISTUJÚ, MUSIA TO BYŤ PRÁVE REALIZÁCIE TERMOV s_i PRI OHODNOTENÍ e.

TOTIŽ $\mathfrak{M}^r \models (s_i = x_i)^r\ [e(x_i/m_i)] \Leftrightarrow$
$\mathfrak{M} \models s_i = x_i\ [e(x_i/m_i)] \Leftrightarrow$
$s_i[e] = m_i$.

iii) iv) PODOBNE SA DOKAZUJÚ A) PRÍPADY

$A \equiv t_1 = t_2 \quad A^r \equiv (\exists x)\ ((t_1 = x)^r \& (t_2 = x)^r)$

$A \equiv p(t_1, \dots, t_n) \quad A^r \equiv (\exists x_1) \dots (\exists x_n)\ ((t_1 = x_1)^r \& \dots \& (t_n = x_n)^r \& p(x_1, \dots, x_n))$.

d) MAJME FORMULU B JAZYKA L^r. KAŽDÝ ATOMICKÝ PODFORMULI TVARU $p^f(x_1,\dots,x_n,y)$ NAHRADÍME FORMULOU $y = f(x_1,\dots,x_n)$

PRIČOM VIEME, ŽE PRE VE JE

$$\mathfrak{M}^r \models p^f(x_1,\dots,x_n,y) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models y = f(x_1,\dots,x_n)\ [e].$$

ODTIAĽTO UŽ PLYNIE, ŽE $\mathfrak{M} \models B^f[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models B[e]$.
(NAPR. INDUKCIOU PODĽA ZLOŽITOSTI B)

e) NECH $\mathfrak{N}$ JE REALIZÁCIA L^r TAKÁ, ŽE JE MODELOM $P(L^r)$. p^f JE NEJAKÝ PREDIKÁTOVÝ SYMBOL ZDRUŽENÝ S f.

PLATÍ $\mathfrak{N} \models (\exists y)\, p^f(x_1,\dots,x_n,y)\ [e]$ PRE VE DEFINUJEME $f_{\mathfrak{M}}(m_1,\dots,m_n) := m$ TAKÉ, ŽE $p^f_{\mathfrak{N}}(m_1,\dots,m_n,m)$

TÁTO DEFINÍCIA JE KOREKTNÁ, PRETOŽE:

$$\mathfrak{N} \models p^f(x_1,\dots,x_n,y) \to \left(p(x_1,\dots,x_n,y') \to y = y'\right)\ [e]$$ VE

TERAZ UŽ ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE PRE PRÍSLUŠNÝ MODEL $\mathfrak{M}$ JE $\mathfrak{M}^r = \mathfrak{N}$.

f) NAJSKÔR NAHLIADNEME, ŽE PRE KAŽDÚ REALIZÁCIU $\mathfrak{M}$ JAZYKA L PLATÍ $\mathfrak{M} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{M}^r \models T^r$. VYPLÝVA Z c)

$\Rightarrow$) NECH $T \vdash A$. NECH $\mathfrak{N}$ JE ĽUBOVOĽNÁ REALIZÁCIA L^r TAKÁ, ŽE $\mathfrak{N} \models T^r \cup P(L^r)$, T. J. PRETOŽE $\mathfrak{N} \models P(L^r)$, EXISTUJE REALIZÁCIA $\mathfrak{M}$ JAZYKA L TAKÁ, ŽE $\mathfrak{M}^r = \mathfrak{N}$.
$\mathfrak{M}^r \models T^r \Rightarrow \mathfrak{M} \models T$, TAKŽE $\mathfrak{M}$ JE MODEL T
A 2 VETY O KOREKTNOSTI JE $\mathfrak{M} \models A$.
PODĽA c) ALE NUTNE TIEŽ $\mathfrak{M}^r \models A^r$, T. J. $\mathfrak{N} \models A^r$.
Z VETY O ÚPLNOSTI JE POTOM $T^r \cup P(L^r) \vdash A^r$.

30.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

1. $\mathfrak{M}$) $\Leftarrow$) NECH $T^r \cup P(L^r) \vdash A^r$.
KEĎ $\mathfrak{M}$ JE ĽUBOVOĽNÝ MODEL T S JAZYKOM L,
POTOM PODĽA a) JE $\mathfrak{M}^r \models P(L^r)$
A TIEŽ (PODĽA VYŠŠIE UVEDENÉHO TVRDENIA) $\mathfrak{M}^r \models T^r$
TO ALE ZNAMENÁ, ŽE $\mathfrak{M}^r \models T^r \cup P(L^r)$
A Z VETY O KOREKTNOSTI $\mathfrak{M}^r \models A^r$, TAKŽE
(PODĽA c)) TIEŽ $\mathfrak{M} \models A$. Z VETY O ÚPLNOSTI JE $T \vdash A$.
LEMA 5.1 i)

2. a) $\Rightarrow$) NECH T' JE ROZŠÍRENÍM T
PRE $\forall$ FORMULE A JAZYKA L PLATÍ $T \vdash A \Rightarrow T' \vdash A$.
NECH $\mathfrak{M}'$ JE MODEL T'. PRE KAŽDÝ ŠPECIÁLNY
AXIÓM TEÓRIE T PLATÍ (Z VETY O KOREKTNOSTI) $\mathfrak{M}' \models A$.
ZREJME $\mathfrak{M}' \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M}'|_L \models A$, TAKŽE
$\mathfrak{M}'|_L$ JE MODEL T. (VIĎ CVIČENIE 4.c) PREDCH. KAPITOLY)

$\Leftarrow$) NECH PRE KAŽDÝ MODEL $\mathfrak{M}'$ TEÓRIE T' JE
$\mathfrak{M}'|_L$ MODEL TEÓRIE T.
$T \vdash A \Rightarrow \mathfrak{M}'|_L \models A \Leftrightarrow \mathfrak{M}' \models A$
A Z VETY O ÚPLNOSTI $T' \vdash A$.

b) LEMA 5.1 (i)

c) TEÓRIE T A T' SÚ EKVIVALENTNÉ $\Leftrightarrow$
ROVNAKÉ MODELY.
DÔKAZ. NECH T A T' SÚ TEÓRIE S JAZYKOM L
$\Rightarrow$) NECH $\mathfrak{M}$ JE MODEL T PRE KAŽDÝ
ŠPECIÁLNY AXIÓM A TEÓRIE T' PLATÍ $T \vdash A$,
TAKŽE $\mathfrak{M} \models A \Rightarrow \mathfrak{M}$ JE MODEL T'. PODOBNE NAOPAK

$\Leftarrow$) NECH T A T' MAJÚ ROVNAKÉ MODELY.

$T \vdash A \Rightarrow \forall \mathcal{M}$ MODELY T' JE $\mathcal{M} \models T \Rightarrow \mathcal{M} \models A$

A 2 VETY O ÚPLNOSTI $T' \vdash A$. PODOBNE NAOPAK.

3. a) NECH T JE ĽUBOVOĽNÁ TEÓRIA S JAZYKOM L.

PODĽA CVIČENIA 1 NECHAJ $T' := T^r \cup P(L^r)$

JE TEÓRIA S JAZYKOM $L' := L^r$, KTORÝ NEOBSAHUJE FUNKČNÉ SYMBOLY.

DOKÁŽTE, ŽE T JE SLABO EKVIVALENTNÁ S T'.

JAZYK L' MÁ NAMIESTO FUNKČNÝCH SYMBOLOV f PRÍSLUŠNÉ ZDRUŽENÉ PREDIKÁTY P_f.

POKÚSIME SA TEÓRIU T ROZŠÍRIŤ O DEFINÍCIE PREDIKÁTOV P_f NA TEÓRIU T_1

A TEÓRIU T' SA POKÚSIME ROZŠÍRIŤ O DEFINÍCIE FUNKCIÍ f NA TEÓRIU T_2 TAK,

ABY BOLI TEÓRIE T_1 A T_2 EKVIVALENTNÉ,

(TJ. MALI AJ ROVNAKÝ JAZYK ...)

ZATIAĽ PREDPOKLADAJME, ŽE MÁME KONEČNE VEĽA f. !!!

TEÓRIA T_1 S JAZYKOM L_1 NECH JE ROZŠÍRENÍM TEÓRIE T S JAZYKOM L TAKÉ, ŽE

L_1 VZNIKNE Z L PRIDANÍM ZDRUŽENÝCH PREDIKÁTOV P^f PRE VŠETKY FUNKČNÉ SYMBOLY f

T_1 VZNIKNE Z T PRIDANÍM AXIÓMOV

$$P^f(x_1, \ldots, x_n, y) \leftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

ZREJME T_1 JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T O DEFINÍCIE PREDIKÁTOV..

30.08.2007 Th
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

TEÓRIA T_2 S JAZYKOM L_2 VECH JE ROZŠÍRENÍM TEÓRIE T' S JAZYKOM L' TAKÉ, ŽE

L_2 VZNIKNE Z L' PRIDANÍM FUNKČNÝCH SYMBOLOV f PRE KAŽDÝ ZDRUŽENÉ PREDIKÁTY p^f

T_2 VZNIKNE Z T' PRIDANÍM AXIÓMOV

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow p^f(x_1, \dots, x_n, y)$$

ZREJME PLATÍ

$$T' \vdash (\exists y)\, p^f(x_1, \dots, x_n, y)$$

PRETOŽE JE TO JEDEN Z AXIÓMOV MNOŽINY $P(L')$, KTORÉ BOLI ZARADENÉ DO T'.

ESTE MUSÍME UKÁZAŤ, ŽE

$$T' \vdash p^f(x_1, \dots, x_n, y) \to \left(p^f(x_1, \dots, x_n, t) \to y = t\right)$$

AVŠAK TO PLYNIE Z AXIÓMU

$$T' \vdash p^f(x_1, \dots, x_n, y) \to \left(p^f(x_1, \dots, x_n, y') \to y = y'\right)$$

AKO INŠTANCIA.

OPÄŤ MOŽNO NAHLIADNUŤ, ŽE T_2 JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T' O DEFINÍCIE FUNKCIÍ.

TAKISTO VIDÍME, ŽE $L_1 = L_2$.

TERAZ UŽ IBA STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE TIETO TEÓRIE SÚ EKVIVALENTNÉ.

OZNAČME T_0 MNOŽINU VŠETKÝCH AXIÓMOV TVARU

$$P^f(x_1, \dots, x_n, y) \Leftrightarrow y = f(x_1, \dots, x_n)$$

POTOM ZREJME $T_1 = T \cup T_0$, $T_2 = T' \cup T_0 = T^r \cup P(L^r) \cup T_0$

DOKÁŽEME, ŽE PRE ĽUBOVOĽNÚ FORMULU A JAZYKA $L_1 = L_2 = L \cup \{P^f, f \in L\} = L \cup L^r = \mathcal{L}$ PLATÍ $T_1 \vdash A \Leftrightarrow T_2 \vdash A$.



T_1 A T_2 SÚ EKVIVALENTNÉ $\Leftrightarrow$ MAJÚ ROVNAKÉ MODELY.

AK $\mathfrak{M}$ JE MODEL T_1, POTOM ZREJME $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}|_L$ JE MODEL T V JAZYKU L.

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $\mathfrak{N}^r = \mathfrak{M}|_{L^r}$.

PLATÍ (PODĽA 1.a)) $\mathfrak{N}^r \models P(L^r)$, TJ. $\mathfrak{M} \models P(L^r)$.

ĎALEJ AKO DÔSLEDOK 1.c) DOSTÁVAME PRE $\forall A \in T$

$$\mathfrak{N} \models A \Leftrightarrow \mathfrak{N}^r \models A^r, \text{ TJ. } \mathfrak{N} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{N}^r \models T^r$$

AVŠAK VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\mathfrak{M} \models T$, NUTNE TIEŽ $\mathfrak{N} \models T \Rightarrow \mathfrak{N}^r \models T^r \Rightarrow \mathfrak{M} \models T^r$.

SPOLU MÁME $\mathfrak{M} \models T^r \cup P(L^r) \cup T_0 = T_2$

30.08.2007 Th
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKÚŠKA

AK $\mathfrak{M}$ JE MODEL $T_2 = T^r \cup P(L^r) \cup T_0$, POTOM ZREJME $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}|_{L^r}$ JE MODEL $T^r \cup P(L^r)$

PODĽA 1.e) JE $\mathfrak{N}'$ REALIZÁCIA L^r TAKÁ, KTORÁ JE ZÁROVEŇ MODELOM $P(L^r)$, TAKŽE EXISTUJE REALIZÁCIA $\mathfrak{N}$ JAZYKA L TAKÁ, ŽE $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^r$.

TO MÁME $\mathfrak{N}^r = \mathfrak{M}|_{L^r}$.

KEĎŽE $\mathfrak{M} \models T^r \cup P(L^r)$, NUTNE $\mathfrak{N}^r \models T^r \cup P(L^r)$

A PLATÍ $\mathfrak{N} \models T \Leftrightarrow \mathfrak{N}^r \models T^r$, TAKŽE MÁME $\mathfrak{N} \models T$.

KEĎŽE $(\mathfrak{M}|_L)^r = \mathfrak{M}|_{L^r}$, DOSTÁVAME

Z $\mathfrak{N}^r = (\mathfrak{M}|_L)^r$, ŽE $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}|_L$. *

Z $\mathfrak{N} \models T$ POTOM PLYNIE $\mathfrak{M} \models T$,

TAKŽE SPOLU MÁME $\mathfrak{M} \models T \cup T_0 = T_1$,

ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ.

* $\mathfrak{N}^r = \mathfrak{M}^r \Rightarrow \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ PLYNIE Z TOHO, ŽE $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{N}^r \neq \mathfrak{M}^r$.

31.08.2007 FF
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

3. b)

5. NECH A JE OTVORENÁ FORMULA BEZ ROVNOSTI. POTOM VŠETKY JEJ ATOMICKÉ FORMULE SÚ TVARU $p(t_1, \dots, t_n)$ PRE NEJAKÝ PREDIKÁT p A TERMY $t_1, \dots, t_n$.

OZNAČÍME $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ VŠETKY JEJ RÔZNE ATOMICKÉ FORMULE (PRIČOM ZA RÔZNE AT. FORMULE POVAŽUJEME AJ 2 FORMULE S ROVNAKÝM PREDIKÁTOVÝM SYMBOLOM p, ALE S RÔZNYMI TERMAMI; NAPR. $p(x_1, x_2) \neq p(x_1, t)$.)

DÁ SA NAHLIADNUŤ, ŽE PRE KAŽDÉ OHODNOTENIE $v : \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \to \{0, 1\}$ EXISTUJE MODEL $\mathfrak{M}$ A OHODN. e TAKÉ, ŽE PRE $\forall i \in \{1, \dots, m\}$: $v(\alpha_i) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \alpha_i [e]$.

NECH $x_1, \dots, x_k$ SÚ VŠETKY PREMENNÉ, KTORÉ SA VYSKYTUJÚ V A. AKO UNIVERZUM ZVOLÍME MNOŽINU $[x_1], \dots, [x_k], [t]$, PRE $\forall$ TERMY t

~~BÁZOVÉ / VŠ. PREMENNÉ / $x_1, \dots, x_k$~~

A DEFINUJEME $f_{\mathfrak{M}}([t_1], \dots, [t_n]) := [f(t_1, \dots, t_n)]$

e ZVOLÍME TAK, ABY $e(x) = [x]$ PRE $\forall$ PREMENNÉ x.

TERAZ UŽ ĽAHKO NAHLIADNEME, ŽE SPLNITEĽNOSŤ KAŽDEJ AT. FORMULE α_i PRI OHODNOTENÍ e MÔŽEME DEFINOVAŤ AKO CHCEME (NEZÁVISLE NA OSTATNÝCH AT. FORMULÁCH)

ZVYŠOK JE ZREJMÝ.

~~X~~ NECH $T \vdash A$, $A_1, \ldots, A_n = A$ JE DÔKAZ A Z T. NECH $L' \subseteq L$ JE MNOŽINA TÝCH ŠPECIÁLNYCH SYMBOLOV, KTORÉ SA VYSKYTUJÚ V T ALEBO V A. NÁJDITE DÔKAZ $T \vdash A$, KTORÝ OBSAHUJE IBA SYMBOLY Z L'.

Z DÔKAZU $A_1, \ldots, A_n$ STAČÍ VYHADZOVAŤ TIE A_i, KTORÉ OBSAHUJÚ NEJAKÉ ŠPECIÁLNE SYMBOLY Z $L \setminus L'$. TREBA DOKÁZAŤ, ŽE VZNIKNUTÁ PODPOSTUPNOSŤ JE DÔKAZ A Z T.

POSTUPUJEME INDUKCIOU PODĽA DĹŽKY DÔKAZU.

PREDPOKLADÁME, ŽE A_i OBSAHUJE IBA SYMBOLY Z L'.

MÔŽU NASTAŤ NASLEDUJÚCE PRÍPADY:

a) $A_i \in T$

b) A_i JE AXIÓM

c) A_i VZNIKLO Z A_j PRAVIDLOM GENERALIZÁCIE, T. $A_i = (\forall x) A_j$. V TAKOM PRÍPADE ALE A_j TIEŽ OBSAHUJE IBA SYMBOLY Z L', A TEDA PATRÍ DO PODPOSTUPNOSTI.

d) A_i VZNIKLO ZO A_j, A_k PRAVIDLOM MP, NECH $A_k = A_j \to A_i$

PREDPOKLADÁME TIEŽ, ŽE A_j OBSAHUJE NEJAKÉ ŠPECIÁLNE SYMBOLY Z $L \setminus L'$, T. A_j ANI $A_j \to A_i$ NEPATRÍ DO PODPOSTUPNOSTI.

OTÁZKA ZNIE, AKO MOHLO VZNIKNÚŤ A_k.

i) BUĎ JE TO AXIÓM, V TAKOM PRÍPADE BY ALE NUTNE MUSELO A_i OBSAHOVAŤ ŠPEC. SYMBOL MIMO L'

ii) $A_k \notin T$ A TAKISTO A_k NEVZNIKLO PRAVIDLOM GENERALIZÁCIE.

iii) JEDINÁ MOŽNOSŤ PRE A_k JE MP, TJ. Z A_{j_1}, $A_{j_1} \to (A_j \to A_i)$.

???

2/2

31.06.2007 Fr
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

7. NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L, A FORMULA. NECH L' VZNIKNE Z L ODSTRÁNENÍM VŠETKÝCH TÝCH ŠPECIÁLNYCH SYMBOLOV, KTORÉ SA NEVYSKYTUJÚ ANI V T, ANI V A. POTOM JE TIEŽ T TEÓRIA S JAZYKOM L' A A JE FORMULA JAZYKA L'.
DOKÁŽEME, ŽE $T \vdash A \Rightarrow T \vdash_{L'} A$.

NECH $\mathfrak{M}'$ JE ĽUBOVOĽNÝ MODEL T NAD JAZYKOM L', $\mathfrak{M}$ VZNIKNE Z $\mathfrak{M}'$ PRIDANÍM REALIZÁCIÍ PREDIKÁTOVÝCH A FUNKČNÝCH SYMBOLOV Z $L \setminus L'$, TAKŽE $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}|_{L'}$. ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $\mathfrak{M} \models T$, TAKŽE Z VETY O KOREKTNOSTI $\mathfrak{M} \models A \Rightarrow \mathfrak{M}' \models A$.
Z VETY O ÚPLNOSTI POTOM $T \vdash_{L'} A$.

NEROZHODNUTEĽNOSŤ, NEÚPLNOSŤ

[ČIASTOČNE] REKURZÍVNE FUNKCIE

ROZHODNUTEĽNÁ
MNOŽINA k-TIC PRIRODZENÝCH ČÍSIEL JE REKURZÍVNA

KEĎ L JE SPOČETNÝ JAZYK A DOKÁŽEME „EFEKTÍVNE" OČÍSLOVAŤ JEHO SYMBOLY, POTOM DOK. EF.-OČ. AJ FORMULE #A

VETA (CHURCH), VETA

ROBINSONOVA ARITMETIKA Q (JE REKURZ. AXIOMAT.)
PEANOVA ARITMETIKA P (PRVÉHO RÁDU)
AXIOMATIKA PEANOVEJ ARITMETIKY JE REKURZÍVNA

Th(N) ÚPLNÁ ARITMETIKA, TEÓRIA MODELU N
NIE JE REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÁ

Thm(T)

TEÓRIA T JE ROZHODNUTEĽNÁ

VETA O NEROZHODNUTEĽNOSTI ARITMETIKY (CHURCH)

VETA O NEÚPLNOSTI ARITMETIKY (GÖDEL, ROSSER)

DRUHÁ VETA O NEÚPLNOSTI

01.09.2007 Sa
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

HENKINOVA TEÓRIA T S JAZYKOM L JE TEÓRIA, V KTOREJ PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU $(\exists x)B$ EXISTUJE KONŠTANTA c TAKÁ, ŽE $T \vdash (\exists x)B \to B_x[c]$.

ROBINSNOVA ARITMETIKA Q

$L = \{0, S, +, *, \leq\}$

$S(x) \neq 0$

$(S(x) = S(y)) \to (x = y)$

~~$\exists y (S(y) = x)$~~ $x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))$

$x + 0 = x$

$x + S(y) = S(x+y)$

$x * 0 = 0$

$x * S(y) = (x * y) + x$

$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

PODĽA VETY O NEROZHODNUTEĽNOSTI ARITMETIKY (CHURCH) KEĎ T JE BEZSPORNÉ ROZŠÍRENIE ROBINSONOVEJ ARITMETIKY Q, POTOM T JE NEROZHODNUTEĽNÁ TEÓRIA.

$\Rightarrow$ Q JE NEROZHODNUTEĽNÁ TEÓRIA.

VETA O KOMPAKTNOSTI: T MÁ MODEL $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ KONEČNÁ $T' \subseteq T$ MÁ MODEL

$\Rightarrow$) ZREJMÉ

$\Leftarrow$) T NEMÁ MODEL $\Rightarrow$ T JE SPORNÁ (VETA O ÚPLNOSTI)

$T \vdash (A \& \neg A) \Rightarrow \exists$ KONEČNÁ $T' \subseteq T : T' \vdash (A \& \neg A)$

$\Rightarrow$ T' JE SPORNÁ $\Rightarrow$ T' NEMÁ MODEL.

10. $T \cup S$ JE ÚPLNÁ $\Leftrightarrow \forall A \in T \; S \vdash A$.

$\Rightarrow$) $A \in T$ A' JE UZÁVĚR A, POTOM $T \cup S \vdash A'$
S JE ÚPLNÁ $\Rightarrow S \vdash A' \vee S \vdash \neg A'$. $\Rightarrow S \vdash A' \Rightarrow S \vdash A$.

$\Leftarrow$) A' JE UZAVŘENÁ FORMULE $\forall A'$ UZ. $T \vdash A' \Rightarrow S \vdash A'$.
DOKÁŽEME ŽE $T \cup S$ NIE JE SPORNÁ
AK $T \cup S \vdash A' \wedge T \cup S \vdash \neg A'$
BÚNO $S \vdash A'$, $S \vdash \neg A'$
NEBO: AVŠAK Z $T \cup S \vdash \neg A' \Rightarrow S \vdash \neg A'$, CO JE SPOR.
KAŽDÁ FORMULE DŮKAZU $T \cup S \vdash \neg A'$ SA
DÁ DOKÁZAT Z S.

DOKÁŽTE $(A \to B) \to ((C \to D) \to ((A \vee C) \to (B \vee D)))$

$A \to B, C \to D \vdash (\neg A \to C) \to (\neg B \to D)$

$A \to B, C \to D, \neg A \to C, \neg B \vdash \neg B, \neg B \to \neg A, C, D$. □

KOREKTNOST $\neg A \vee B, A \to C \;/\; B \vee C$

DOKÁŽTE: $A_x[t] \Leftrightarrow (\forall x)(x = t \to A)$ t NEOBSAHUJE x.

$\vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (x = t \to A)$
$\Rightarrow \vdash (\forall x)(x = t \to A) \to (t = t \to A_x[t])$
$\Rightarrow \vdash t = t \to ((\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t])$
$\Rightarrow \vdash (\forall x)(x = t \to A) \to A_x[t]$

$\vdash x = t \to (A \Leftrightarrow A_x[t])$
$\Rightarrow \vdash A_x[t] \to (x = t \to A)$
$\Rightarrow \vdash A_x[t] \to (\forall x)(x = t \to A)$

01.09.2007 Sa
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKUŠKA

$\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A$

$\forall x \forall y A \rightarrow A$

$\forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A$

PREVEĎTE FORMULE DO PRENEXNÉHO TVARU

a) $(\forall x)\big((\forall y)(y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow (\forall x) P(x)$

b) $(\exists x) P(x) \rightarrow (\exists x)\big(P(x) \,\&\, (\forall y)(y < x \rightarrow \neg P(y))\big)$

a) $(\exists x)\big[\big((\forall y)(y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow (\forall x) P(x)\big]$

$(\exists x)(\forall z)\big[\big((\forall y)(y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow P(z)\big]$

$(\exists x)(\forall z)\big[(\forall y)\big((y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow P(z)\big]$

$(\exists x)(\forall z)(\forall y)\big[\big((y < x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow P(z)\big]$

b) $(\exists x)\big[(\exists x) P(x) \rightarrow \big(P(x) \,\&\, (\forall y)(y < x \rightarrow \neg P(y))\big)\big]$

$(\exists x)(\forall z)\big[P(z) \rightarrow \big(P(x) \,\&\, (\forall y)(y < x \rightarrow \neg P(y))\big)\big]$

$(\exists x)(\forall z)\big[P(z) \rightarrow (\forall y)\big(P(x) \,\&\, (y < x \rightarrow \neg P(y))\big)\big]$

$(\exists x)(\forall z)(\forall y)\big[P(z) \rightarrow \big(P(x) \,\&\, (y < x \rightarrow \neg P(y))\big)\big]$

ROBINSNOVA ARITMETIKA

$S(x) \neq 0$

$S(x) = S(y) \to x = y$

$x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))$

$x + 0 = x$

$x + S(y) = S(x + y)$

$x * 0 = 0$

$x * S(y) = x * y + x$

$x \leq y \Leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

PEANOVA ARITMETIKA

~~$A_x[0] \to ((A_x[y] \to A_x[S(y)]) \to A)$~~

$A_x[0] \to ((\forall x)(A \to A_x[S(x)]) \to (\forall x)A)$

$$(\forall x)\left[(x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))) \to (S(x) \neq 0 \to (\exists y)(S(x) = S(y)))\right]$$

DOKAŽEME:

$$(x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))) \to (S(x) \neq 0 \to (\exists y)(S(x) = S(y)))$$

PLATÍ $\vdash S(x) \neq 0$

$\vdash x = y \to (S(x) = S(y))$

$\vdash (S(x) = S(y)) \to (\exists y)(S(x) = S(y))$

$\Rightarrow \vdash x = y \to (\exists y)(S(x) = S(y))$

[redacted]

$\vdash x = x \to (\exists y)(S(x) = S(y))$

MP $\vdash (\exists y)(S(x) = S(y))$

$\Rightarrow \vdash S(x) \neq 0 \to (\exists y)(S(x) = S(y))$

$\Rightarrow \vdash (x \neq 0 \to (\exists y)(x = S(y))) \to (S(x) \neq 0 \to (\exists y)(\ldots))$

$\vdash 0 \neq 0 \to (\exists y)(0 = S(y))$

01.09.2007 Sa
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKUŠKA

LEMMA O NEUTRÁLNEJ FORMULI

$T, A \vdash B,\ T, \neg A \vdash B \Rightarrow T \vdash B$

$T \vdash \neg B \to \neg A$
$T \vdash \neg B \to \neg\neg A$
$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to B)$
$T, \neg B \vdash B$
$T \vdash \neg B \to B$
$\vdash (\neg B \to B) \to B$
$T \vdash B$

VARIANTY FORMULE: $(\square x)B \leftrightarrow (\square z)B_x[z]$ z SA NEMÔŽE V B

$\vdash (\forall x)B \leftrightarrow B_x[z]$
$\vdash (\forall x)B \to (\forall z)B_x[z]$
$\vdash (\forall z)B_x[z] \to B$
$\vdash (\forall z)B_x[z] \to (\forall x)B$

$(\forall x)\neg B \leftrightarrow (\forall z)\neg B_x[1]$
$(\exists x)B \leftrightarrow (\exists z)B_x[z]$

KEDY PLATÍ, ŽE $T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ JE SPORNÁ

$\Rightarrow$) $T \vdash A \Rightarrow T, \neg A \vdash A, \neg A \Rightarrow T, \neg A$ JE SPORNÁ

$\Leftarrow$) $T \cup \{\neg A\}$ JE SPORNÁ, PRETOŽE $T, \neg A \vdash A$

$T,$ UZAVER$(\neg A) \vdash \neg A$
$\Rightarrow T,$ UZAVER$(\neg A) \vdash A$
$\Rightarrow T,$ UZAVER$(\neg A)$ JE SPORNÁ $\square$

EXISTUJE TEÓRIA, KTORÁ MÁ IBA 1-3 PRVKOVÚ DOMÉNU?

$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_1 = x_4 \vee x_2 = x_3 \vee x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4)$

TEÓRIA, KTORÁ MÁ KONEČNÝ AJ NEKONEČNÝ MODEL?

$L = \{P\}$, $T = \{(\forall x) P(x)\}$

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA PRVÉHO RÁDU NIE JE ÚPLNÁ

$L = \{P\}$, $\nvdash (\forall x) P(x)$ $\nvdash \neg(\forall x) P(x)$

01.09.2007 &
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

PEANOVA ARITMETIKA P :

$L = \{0, S, +, *, \leq\}$

Q1 $S(x) \neq 0$

Q2 $S(x) = S(y) \to x = y$

$A_x[0] \to \big((\forall x)(A \to A_x[S(x)]) \to (\forall x)A \big)$

Q4 $x + 0 = x$

Q5 $x + S(y) = S(x + y)$

Q6 $x * 0 = 0$

Q7 $x * S(y) = (x * y) + x$

Q8 $x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

MÁME DOKÁZAŤ: $x + y = y + x$

NAJSKÔR DOKÁŽEME $x + 0 = 0 + x$.

PLATÍ $\vdash 0 + 0 = 0 + 0$

$\vdash 0 + 0 = 0 + 0 \to \big((\forall x)(x + 0 = 0 + x \to S(x) + 0 = 0 + S(x)) \to (\forall x)(x + 0 = 0 + x) \big)$

STAČÍ, AK DOKÁŽEME

$x + 0 = 0 + x \to S(x) + 0 = 0 + S(x)$

$\vdash x + 0 = x \to S(x + 0) = S(x)$ R2

MP $\vdash S(x + 0) = S(x)$

$\vdash x + 0 = 0 + x \to S(x + 0) = S(0 + x)$

$\vdash 0 + S(x) = S(0 + x)$

$\vdash S(x) + 0 = S(x)$ INŠTANCIA Q4

$\vdash S(x) + 0 = S(x + 0)$ TAUT. DÔSLEDOK

$\vdash x + 0 = 0 + x \to S(x) + 0 = 0 + S(x)$ AKO TAUT. DÔSLEDOK.

DOKÁŽTE $x+y = y+x$

PLATÍ $\vdash x+0 = 0+x$

DOKÁŽTE EŠTE $x+y = y+x \rightarrow x+S(y) = S(y)+x$

$\vdash x+S(y) = S(x+y)$

$\vdash x+y = y+x \rightarrow S(x+y) = S(y+x)$

NAJSKÔR ALE MUSÍME DOKÁZAŤ $S(x)+y = S(x+y)$

$\vdash S(x)+0 = S(x)$

$\vdash x+0 = x \rightarrow S(x+0) = S(x)$

$\Rightarrow \vdash S(x)+0 = S(x+0)$

EŠTE DOKÁŽTE

$S(x)+y = S(x+y) \rightarrow S(x)+S(y) = S(x+S(y))$

$\vdash S(x)+S(y) = S(S(x)+y)$

$\vdash S(x)+y = S(x+y) \rightarrow S(S(x)+y) = S(S(x+y))$

$\vdash x+S(y) = S(x+y) \rightarrow S(x+S(y)) = S(S(x+y))$

$\vdash S(x+S(y)) = S(S(x+y))$

$\Rightarrow$ AKO TAUT. DÔSLEDOK DOSTÁVAME

$\vdash S(x)+y = S(x+y) \rightarrow S(x)+S(y) = S(x+S(y))$

TAKŽE PLATÍ $S(x)+y = S(x+y)$

$\vdash S(y+x) = S(y)+x$

AKO TAUT. DÔSLEDOK JE

$\vdash x+y = y+x \rightarrow x+S(y) = S(y)+x$

TÝM SME ALE DOKÁZALI PLATNOSŤ $\vdash x+y = y+x$.

02.09.2007
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

DOKÁŽTE $x * 0 = 0 * x$

ZREJME $\vdash 0 * 0 = 0 * 0$

STAČÍ DOKÁZAŤ $x * 0 = 0 * x \rightarrow S(x) * 0 = 0 * S(x)$

$\vdash x * 0 = 0$

$\vdash x * 0 = 0 * x \rightarrow 0 * x = 0$

$\vdash 0 * S(x) = 0 * x + 0$

$\vdash 0 * x + 0 = 0 * x$

$\vdash S(x) * 0 = 0$

$\vdash x * 0 = 0 * x \rightarrow S(x) * 0 = 0 * S(x)$

DOKÁŽTE $x * y = y * x$

PLATÍ $\vdash x * 0 = 0 * x$

STAČÍ DOKÁZAŤ $x * y = y * x \rightarrow x * S(y) = S(y) * x.$

$\vdash x * S(y) = x * y + x$

DOKÁŽTE, ŽE $S(y) * x = y * x + x$

$\vdash S(y) * 0 = y * 0 + 0$

STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE

$S(y) * x = y * x + x \rightarrow S(y) * S(x) = y * S(x) + S(x)$

$\vdash S(y) * S(x) = S(y) * x + S(y)$

$\vdash S(y) * x = y * x + x \rightarrow S(y) * S(x) = (y * x + x) + S(y)$

$\vdash y * S(x) + S(x) = (y * x + y) + S(x)$

1. POTREBUJEME ASOCIATIVITU +
2. $x + S(y) = y + S(x)$
3. $x = y \rightarrow x + 2 = y + 2$

$Con(T) = \{A \mid T \vdash A\}$

a) $T \subseteq Con(T)$
b) $T \subseteq S \Rightarrow Con(T) \subseteq Con(S)$
c) $Con(Con(T)) = Con(T)$
d) T JE BEZSPORNÁ $\Rightarrow$ $Con(T)$ JE BEZSPORNÁ

DÔKAZ. a) ZREJMÉ
b) $A \in Con(T) \Rightarrow T \vdash A \Rightarrow S \vdash A \Rightarrow A \in Con(S)$
c) $Con(T) \subseteq Con(Con(T))$.
$A \in Con(Con(T)) \Rightarrow Con(T) \vdash A$
NECH $A_1, \dots, A_n$ SÚ VŠETKY FORMULE $\vdash A$ Z $Con(T)$ POUŽITÉ PRI DÔKAZE $Con(T) \vdash A$
POTOM $A_1, \dots, A_n \vdash A$
KEĎŽE $T \vdash A_i$, NUTNE $T \vdash A \Rightarrow A \in Con(T)$
D. $Con(Con(T)) \subseteq Con(T)$
d) AK $Con(T) \vdash A \& \neg A$, $A_1, \dots, A_n$ SÚ VŠETKY FLE Z $Con(T)$ POUŽITÉ PRI TOMTO DÔKAZE, POTOM $A_1, \dots, A_n \vdash A \& \neg A$
$\Rightarrow T \vdash A \& \neg A$ D. T JE SPORNÁ.

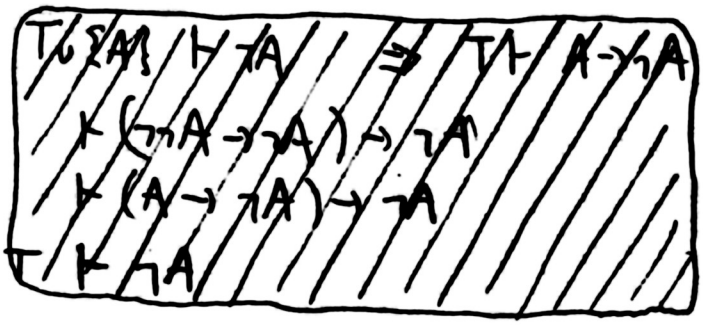
NECH T JE MAXIMÁLNA BEZSPORNÁ MNOŽINA FLE.

a) $T \vdash A \Rightarrow A \in T$
b) $T \vdash A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ JE SPORNÁ
c) T JE SPORNÁ $\Leftrightarrow T \vdash p \& \neg p$
d) $A \in T \vee \neg A \in T$
e) $A \& B \in T \Leftrightarrow A \in T \wedge B \in T$
f) $A \vee B \in T \Leftrightarrow A \in T \vee B \in T$

02.09.2007 Sk
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

a) $T \vdash A \wedge A \notin T$, POTOM $T \cup \{A\}$ JE BEZSPORNÁ



$T \cup \{A\} \vdash B$, $A, B_1, \ldots, B_n = B$ JE DÔKAZ B,
KDE $B_1, \ldots, B_n$ PATRÍ DO T,
POTOM Z $T \vdash A$ MÔŽEM $T \vdash B$

KEĎ $T \vdash A$, $A \notin T$ A $T \cup \{A\}$ JE SPORNÁ,
POTOM JE TIEŽ NUTNE T SPORNÁ.

b) ✓ $\Rightarrow$ ZREJME $T \vdash A \Leftrightarrow A \in T$

c) $T \vdash p \wedge \neg p$ $T \vdash \neg(p \to \neg p)$, $\vdash \neg\neg(p \to \neg p) \to (\neg(p \to \neg p) \to A)$

d) PRE SPOR NECH $\exists A$ $A \notin T \wedge \neg A \notin T$.

a) $\Rightarrow T \vdash A$ ~~$T \vdash \neg A$~~

POTOM JE ALE $T \cup \{\neg A\}$ BEZSPORNÁ. b)

$T \subset T \cup \{\neg A\}$ KEĎŽE $\neg A \notin T$

e) $A \& B \in T \Rightarrow T \vdash A \& B \Rightarrow T \vdash A \wedge T \vdash B \Rightarrow$
$A \in T \wedge B \in T$

$A \in T \wedge B \in T \Rightarrow T \vdash A \wedge T \vdash B \Rightarrow T \vdash A \& B \Rightarrow A \& B \in T$.

f) $A \vee B \in T \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \notin T \Leftrightarrow T \vdash \neg A \& \neg B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow T \vdash \neg A \vee T \vdash \neg B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg A \notin T \vee \neg B \notin T. \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A \in T \vee B \in T$

DOKÁŽTE, ŽE T JE BEZSPORNÁ $\Leftrightarrow$ MÁ MODEL v.

$\Leftarrow$ KEĎ T MÁ MODEL v, POTOM (Z VETY O KOREKTNOSTI) PRE VŠETKY FORMULE A: $T \vdash A$ PLATÍ $\bar{v}(A) = 1$.

$\Rightarrow$ FORMULA $A \& \neg A$ NIE JE DOKÁZATEĽNÁ Z T

$\Rightarrow$ NECH T JE BEZSPORNÁ.

OZNAČME $\mathcal{B} := \{ S$ MNOŽINA FORMÚL : $T \cup S$ JE BEZSPOR. $\}$

$\mathcal{B}$ MÁ KONEČNÉ VLASTNOSTI:

$S \in \mathcal{B} \Leftrightarrow T \cup S$ JE BEZSPORNÁ

$\Rightarrow \forall S'$ KONEČNÁ $\subseteq S$ JE $T \cup S'$ BEZSPORNÁ.

NAOPAK AK $T \cup S$ JE SPORNÁ, POTOM

NECH $A_1, \ldots, A_n$ SÚ VŠETKY FORMULE Z S POUŽITÉ PRI DOKAZE $A \& \neg A$

$\Rightarrow$ PRE $S' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ JE $T \cup S'$ SPORNÁ.

NECH S_0 JE MAXIMÁLNY PRVOK ~~(LINDENBAUM)~~ $\mathcal{B}$.
(TEICHMÜLLER, TUKEY)

$\Rightarrow T \cup S_0$ JE MAXIMÁLNA BEZSPORNÁ MNOŽINA

POLOŽME PRE VŠ PRVOTNÉ FORMULE p

$v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in T \cup S_0$

DOKÁŽTE, ŽE v JE MODEL T.

DOKÁŽTE, ŽE $T \vdash A \Leftrightarrow \bar{v}(A) = 1$.

DÔKAZ (PODĽA ZLOŽITOSTI A)

ZREJME PLATÍ $T \vdash A \Leftrightarrow A \in T$ (a)

02.09.2007 Sk
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

~~PRED~~ KEĎ A JE PRVOTNÁ FORMULA p

$T \vdash p \Leftrightarrow p \in T \Leftrightarrow v(p) = 1$

KEĎ $A = \neg B$, POTOM

$T \vdash \neg B \Leftrightarrow \neg B \in T \Leftrightarrow B \notin T$

$\Leftrightarrow \neg\ T \vdash B \Leftrightarrow \neg\ \bar{v}(B) = 1$

$\Leftrightarrow \bar{v}(B) = 0 \Leftrightarrow \bar{v}(A) = 1$

KEĎ $A = B \to C$ POTOM

$T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee B \in T$

$\Leftrightarrow \neg A \in T \vee B \in T \Leftrightarrow T \vdash \neg A \vee T \vdash B$

$\Leftrightarrow \bar{v}(\neg A) = 1 \vee \bar{v}(B) = 1 \Leftrightarrow \bar{v}(A \to B) = 1$

TERAZ SI UŽ STAČÍ VŠIMNÚŤ, ŽE PRE $\forall A \in T: T \vdash A$
TJ. $\bar{v}(A) = 1$. $\Rightarrow$ v JE MODEL T.

VETA O ÚPLNOSTI: $T \vdash A \Leftrightarrow T \models A$.

DÔKAZ. ~~$\Rightarrow$~~ ~~VETA~~ O KOREKTNOSTI

$\Leftrightarrow T \models A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ NIE JE SPLNITEĽNÁ

$\Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ JE SPORNÁ $\Leftrightarrow T \vdash A$.

EFEKTÍVNE VYČÍSLITEĽNÝCH

[ČIASTOČNE] REKURZÍVNE FUNKCIE JE TRIEDA FUNKCIÍ $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ZOBRAZUJÚCE [PODMNOŽINU]

MNOŽINU USPORIADANÝCH K-TIC PRIR. ČÍSIEL DO MN. PR. ČÍS. MÁ PRESNÚ DEFINÍCIU.

MNOŽINA k-TIC PRIR. ČÍS. JE REKURZÍVNA KEĎ JEJ CHARAKTERISTICKÁ FUNKCIA JE REKURZÍVNA.

AKÝKOĽVEK MÁ TÁTO MNOŽINA NEJAKÝ VZŤAH K LOGIKE, HOVORÍME TIEŽ, ŽE JE ROZHODNUTEĽNÁ.

VETA (CHURCH): NECH L JE JAZYK PRED. LOGIKY 1. RÁDU OBSAHUJÚCI ASPOŇ 1 KONŠTANTU A ASPOŇ JEDNU FUNKCIU RÁDU $k > 0$, PRE RADŠIE $n > 0$ SPOČETNE VEĽA PREDIKÁTOV (n-ÁRNYCH).
POTOM $\{\#A \mid A$ JE FORMULA $L, \vdash A\}$
NIE JE ROZHODNUTEĽNÁ

VETA: NECH L JE JAZYK PRED. LOGIKY 1. RÁDU BEZ ROVNOSTI KT. OBSAHUJE ASPOŇ 2 BINÁRNE PREDIKÁTY.
POTOM PRED. LOGIKA S JAZYKOM L NIE JE ROZHODNUTEĽNÁ.

ROBINSONOVA ARITMETIKA Q $\quad L = \{0, S, +, *, \leq\}$

Q1 $\quad S(x) \neq 0$
Q2 $\quad S(x) = S(y) \to x = y$
Q3 $\quad x \neq 0 \to \exists y\,(x = S(y))$
Q4 $\quad x + 0 = x$
Q5 $\quad x + S(y) = S(x + y)$
Q6 $\quad x * 0 = 0$
Q7 $\quad x * S(y) = (x * y) + x$
Q8 $\quad x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y)$

PEANOVA ARITMETIKA OBSAHUJE NADIETO Q3 A SCHÉMU:

$$A_x[0] \to \left((\forall x)(A \to A_x[S(x)]) \to (\forall x)A\right)$$

02.09.2007 Sq
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKOŠKA

ROBINSONOVA ARITMETIKA MÁ IBA KONEČNE VEĽA AXIÓMOV, TAKŽE JE REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÁ

DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE PEANOVA ARITMETIKA JE REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÁ.

ÚPLNÁ ARITMETIKA $Th(\mathbb{N}) = \{A \mid \mathbb{N} \models A\}$ (A JE UZAVRETÁ FLA) NIE JE REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÁ (PRAVDIVÁ ARITMETIKA)

$\neg Thm(T) = \{\#A \mid T \vdash A\}$ (A JE UZAV. FLA) $Th(\Pi)$ = TEÓRIA MODELU Π

TEÓRIA T JE ROZHODNUTEĽNÁ $\Leftrightarrow$ $Thm(T)$ JE REKURZÍVNA

VETA O NEROZHODNUTEĽNOSTI ARITMETIKY (CHURCH):
NECH T JE (BEZSPORNE) ROZŠÍRENIE ROBINSONOVEJ ARITMETIKY, POTOM T NIE JE ROZHODNUTEĽNÁ TEÓRIA

VETA O NEÚPLNOSTI ARITMETIKY (GÖDEL, ROSSER)
NECH T JE (BEZSPORNE) REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÉ ROZŠÍRENIE ROBINSONOVEJ ARITMETIKY.
POTOM T NIE JE ÚPLNÁ TEÓRIA.

DRUHÁ VETA O NEÚPLNOSTI:
NECH T JE (BEZSPORNÉ) REKURZÍVNE AXIOMATIZOVATEĽNÉ ROZŠÍRENIE PEANOVEJ ARITMETIKY.
POTOM $T \nvdash Con(T)$ $\quad Con(T) = \neg Thm(T)\ (\#\, 0 = 1)$

03.09 2007 M.
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKLÚŠKA

KED x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B, POTOM

i) $(\forall x)(B \to C) \leftrightarrow (B \to (\forall x) C)$

ii) $(\exists x)(B \to C) \leftrightarrow (B \to (\exists x) C)$

DÔKAZ i)

$\vdash (\forall x) C \to C$

$\vdash ((\forall x) C \to C) \to ((B \to (\forall x) C) \to (B \to C))$ TAUTOLÓGIA (SKLADANIE IMPLIKÁCIÍ)

MP $\vdash (B \to (\forall x) C) \to (B \to C)$

$\frown$ $\vdash (B \to (\forall x) C) \to (\forall x)(B \to C)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\forall$

$\vdash (\forall x)(B \to C) \to (B \to (\forall x) C)$ AXIÓM PRESKOKU

DÔKAZ ii)

$\vdash C \to (\exists x) C$

$\vdash (C \to (\exists x) C) \to ((B \to C) \to (B \to (\exists x) C))$

MP $\vdash (B \to C) \to (B \to (\exists x) C)$

$\vdash (\exists x)(B \to C) \to (B \to (\exists x) C)$ PRAVIDLO ZAVEDENIA $\exists$

$\frown$ DOKÁŽTE EŠTE $(B \to (\exists x) C) \to (\exists x)(B \to C)$

$\vdash \neg B \to (\exists x)(B \to C)$

$\vdash (\exists x) \neg \to (\exists x)(B \to C)$

$\vdash (\neg D \to F) \to ((E \to F) \to ((D \to E) \to F))$ JE TAUTOLÓGIA

x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B

DOKÁŽTE $(\exists x)(A \& (B \to C)) \to ((\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B)$

$A \& (B \to C) \equiv A \& (\neg B \vee C) \equiv (A \& \neg B) \vee (A \& C) \equiv$

$\equiv \neg(A \to \neg\neg B) \vee \neg(A \to \neg C) \equiv (A \to B) \to \neg(A \to \neg C)$

STAČÍ DOKÁZAŤ

$(\exists x)\left((A \to B) \to \neg(A \to \neg C)\right) \to ((\forall x)(A \to \neg C) \to \neg B)$, ⊛

STAČÍ, AK UKÁŽETE: $((A \to B) \to \neg(A \to \neg C)) \to ((A \to \neg C) \to \neg B)$, T.J.

$((A \to \neg C) \to \neg(A \to B)) \to ((A \to \neg C) \to \neg B)$

$(A \to \neg C),\ (A \to \neg C) \to \neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$

$\vdash \neg(A \to B) \to \neg B$

POUŽITÍM MP, VETY O DEDUKCII A VETY O EKVIV. DOSTÁVAME POŽADOVANÚ FORMULU, NA KTORÚ UŽ STAČÍ IBA POUŽIŤ PRAVIDLO ZAVEDENIA ∃ A PRENEXNÚ OPERÁCIU

DOKÁŽTE: $(A \to B) \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$, KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B

$\vdash (\forall x)A \to A$

$\Rightarrow \vdash \neg A \to \neg(\forall x)A$

V2 $\vdash \neg(\forall x)A \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)$

$\Rightarrow \vdash \underline{\neg A \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)}$ ZLOŽENÍM IMPLIKÁCIÍ

KEĎ x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V B, POTOM

$\vdash B \to ((\forall x)A \to B)$

$\Rightarrow \vdash B \to ((\forall x)((\forall x)A \to B)$

$\Rightarrow \vdash \underline{B \to ((\forall x)A \to (\forall x)B)}$

PÔVODNÉ TVRDENIE JE UŽ IBA TAUT. DÔSLEDOK

03.09.2007 MJ
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

DOKÁŽTE $(\forall x)(A \& B) \Leftrightarrow ((\forall x)A \& (\forall x)B)$

TJ. $(\forall x)\neg(A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg((\forall x)A \to \neg(\forall x)B)$

TJ. $(\exists x)(A \to \neg B) \Leftrightarrow ((\forall x)A \to (\exists x)\neg B)$

$\to$)

DOKÁŽTE $(A \to \neg B) \to ((\forall x)A \to \neg B)$

$\vdash (\forall x)A \to A$

$\vdash \neg A \to \neg(\forall x)A$

$\vdash \neg(\forall x)A \to ((\forall x)A \to \neg B)$

$\vdash \neg A \to ((\forall x)A \to \neg B)$

$\vdash \neg B \to ((\forall x)A \to \neg B)$

$\Rightarrow \vdash (A \to \neg B) \to ((\forall x)A \to \neg B)$ TAUT. DÔSLEDOK

$\Rightarrow \vdash (\exists x)(A \to \neg B) \to (\exists x)((\forall x)A \to \neg B)$

TERAZ VŽ STAČÍ IBA POUŽIŤ PRENEXNÚ OPERÁCIU

$\leftarrow$) DOKÁŽTE $\neg(\forall x)A \to (\exists x)(A \to \neg B)$ TJ.

$(\exists x)\neg A \to (\exists x)(A \to \neg B)$

ČO ALE VYPLÝVA Z $\vdash \neg A \to (A \to \neg B)$

ĎALEJ $\vdash \neg B \to (A \to \neg B)$, TAKŽE

$\vdash (\exists x)\neg B \to (\exists x)(A \to \neg B)$

AKO TAUT. DÔSLEDOK DOSTÁVAME:

$((\forall x)A \to (\exists x)\neg B) \to (\exists x)(A \to \neg B)$

T JE ÚPLNÁ TEÓRIA $\Leftrightarrow$ T JE BEZSPORNÁ A PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU A JE $T \vdash A$ v $T \vdash \neg A$.

T JE HENKINOVA TEÓRIA $\Leftrightarrow$ PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ FORMULU $(\exists x)B$ EXISTUJE KONŠTANTA c TAKÁ, ŽE $T \vdash (\exists x)B \to B_x[c]$

VETA: AK T JE ÚPLNÁ HENKINOVA TEÓRIA [S JAZYKOM L], POTOM T MÁ MODEL.

IDEA DÔKAZU: NAJSKÔR SKONŠTRUUJEME TZV. KANONICKÚ ŠTRUKTÚRU $\mathfrak{M}$ PRE TEÓRIU T:

1) V PRÍPADE, ŽE L JE JAZYK S ROVNOSŤOU, ZAVEDIEME EKVIVALENCIU $\equiv$ NA TERMOCH BEZ PREMENNÝCH $\rightsquigarrow$ TRIEDA EKVIVALENCIE

$t_1 \equiv t_2 \Leftrightarrow T \vdash t_1 = t_2$

UNIVERZUM $M = \{[t],\ t \text{ JE TERM BEZ PREMENNÝCH}\}$

V PRÍPADE, ŽE L JE JAZYK BEZ ROVNOSTI, KLADIEME $[t] = t$.

2) DEFINUJEME REALIZÁCIE FUNKČNÝCH SYMBOLOV

$f_{\mathfrak{M}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$

A PREDIKÁTOVÝCH SYMBOLOV

$([t_1], \ldots, [t_n]) \in P_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow T \vdash p(t_1, \ldots, t_n)$.

+ DOKÁŽEME, ŽE NEZÁLEŽÍ NA VÝBERE REPREZ. TRIED. EKVIV.

3) DOKÁŽEME 2 POMOCNÉ LEMMY:

LEMMA: KEĎ JE t TERM A VŠETKY JEHO PREMENNÉ SÚ MEDZI $x_1, \ldots, x_n$, E JE OHODNOTENIE TAKÉ, ŽE $e(x_i) = [t_i]$, POTOM $t[e] = [t_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n]]$

LEMMA: KEĎ A JE FORMULA A VŠETKY JEJ VOĽNÉ PREMENNÉ SÚ MEDZI $x_1, \ldots, x_n$, e JE OHODNOTENIE TAKÉ, ŽE $e(x_i) = [t_i]$, POTOM

$\mathfrak{M} \models A[e] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A_{x_1, \ldots, x_n}[t_1, \ldots, t_n]$.

TIETO LEMMY VLASTNE HOVORIA, AKO ZAOBCHÁDZAŤ S TERMAMI A FUNK., KTORÉ OBSAHUJÚ VOĽNÉ PREMENNÉ

03.09.2007 M.
PETER ČERNO

AIL062 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKOŠKA

4) DOKÁZEME, ŽE PRE KAŽDÚ **UZAVRETÚ** FORMULU A PLATÍ $\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow T \vdash A$

5) NAKONIEC UKÁŽEME, ŽE $\mathfrak{M}$ JE MODEL T.

VETA: KU KAŽDEJ TEÓRII T [S JAZYKOM L] EXISTUJE HENKINOVA TEÓRIA T_H [S JAZ. L_H], KTORÁ JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T.

DÔKAZ KONZERVATÍVNOSTI: NECH A JE FORMULA JAZYKA L_1

$\vdash T_H \vdash A$ A $B_1, \dots, B_n$ SÚ V HENKINOVE AXIÓME POUŽITÉ PRI DÔKAZE A, TJ. $T, B_1, \dots, B_n \vdash A$,

Z VETY O REDUKCII $T \vdash B_1 \to (B_2 \to \dots \to (B_n \to A) \dots)$

B_1 JE TVARU $(\exists x) B \to B_x[c]$

MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE KONŠTANTA c SA NEVYSKYTUJE VO FORMULIACH $B_2, \dots, B_n$.

$T \vdash ((\exists x) B \to B_x[c]) \to (B_2 \to \dots \to (B_n \to A) \dots)$

KEĎŽE T NEOBSAHUJE KONŠTANTU c, Z VETY O KONŠTANTÁCH TÁTO FORMULA PLATÍ $\Leftrightarrow$

$\vdash T \vdash ((\exists x) B \to B_x[w]) \to (B_2 \to \dots \to (B_n \to A) \dots)$

$T \vdash ((\exists x) B \to (\exists w) B_x[w]) \to (B_2 \to \dots \to (B_n \to A) \dots)$

KDE Z VETY O VARIANTÁCH JE

$\vdash (\exists x) B \Leftrightarrow (\exists w) B_x[w]$

TAKŽE Z MP DOSTÁVAME

$T \vdash B_2 \to (B_3 \to \dots \to (B_n \to A) \dots)$, ... ATĎ. $\Rightarrow T \vdash A$. □

VETA (TEICHMÜLLER, TUKEY)

VETA (LINDENBAUM)

1. NECH FORMULA A' VZNIKNE Z FORMULE A ZÁMENOU NIEKTORÝCH VÝSKYTOV TERMU t TERMOM t' (OKREM PRÍPADU KVANTIFIKÁCIE $(\forall x)\ldots$, $(\exists x)\ldots$) NÁJDITE t, t', A, A' TAK, ABY NEPLATILO
$\mathfrak{N} \models t=t' \to (A \leftrightarrow A')$

2. NECH FORMULA A' VZNIKNE Z FORMULE A ZÁMENOU NIEKTORÝCH VÝSKYTOV PODFORMULÍ B FORMULOU B'. NÁJDITE B, B', A, A' TAK, ABY NEPLATILO
$\mathfrak{N} \models (B \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow A')$

3. NÁJDITE FORMULU A A TERM t TAK, ABY NEPLATILO
$\mathfrak{N} \models A_x[t] \leftrightarrow (\forall x)(x=t \to A)$, $(\mathfrak{N} \models A_x[t] \leftrightarrow (\exists x)(x=t \wedge A))$

4. NÁJDITE FORMULU A TAK, ABY NEPLATILO $\vdash A \to (\forall x)A$.

5. NECH x NEMÁ VOĽNÝ VÝSKYT V A. NÁJDITE A, B TAK, ABY NEPLATILO $\vdash (A \to B) \to (A \to (\forall x)B)$.

RIEŠENIE 1: $t \equiv y$, $t' \equiv S(x)$, $A \equiv (\forall y)(y \neq 0)$
$y = S(x) \to ((\forall y)(y \neq 0) \leftrightarrow (\forall y)(S(x) \neq 0))$

RIEŠENIE 2: $B \equiv x=0$ $B' \equiv S(y) \neq x$, $A \equiv (\forall x)(\exists y)(x=0)$
$(x=0 \leftrightarrow S(y) \neq x) \to ((\forall x)(\exists y)(x=0) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(S(y) \neq x))$

RIEŠENIE 3: $A \equiv x=0$, $t \equiv x$
$x=0 \leftrightarrow (\forall x)(x=x \to x=0)$

RIEŠENIE 4: $A \equiv x=0$ $x=0 \to (\forall x)(x=0)$

RIEŠENIE 5: $A \equiv x=0$, $B \equiv x=0$
$(x=0 \to x=0) \to (x=0 \to (\forall x)(x=0))$

12.09.2007 Ro
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKLÍŠKA

NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L, T' JE TEÓRIA S JAZ. L'.
i) T' JE ROZŠÍRENÍM T $\Leftrightarrow$ PRE KAŽDÝ MODEL $\mathcal{M}'$ TEÓRIE T' JE $\mathcal{M} = \mathcal{M}'|_L$ MODEL TEÓRIE T.
ii) T' JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T AK T' JE ROZŠÍRENÍM T A PRE KAŽDÝ MODEL $\mathcal{M}$ TEÓRIE T EXISTUJE EXPANZIA $\mathcal{M}$ DO MODELU $\mathcal{M}'$ TEÓRIE T'.

VETA O DEFINÍCII PREDIKÁTOVÉHO SYMBOLU
VETA O ZAVEDENÍ FUNKČNÉHO SYMBOLU (DÔKAZ NEMUSÍME ii))
SKOLEMOVA VARIANTA FORMULE : A_S (INDUKTÍVNA DEF.)
VETA (SKOLEM) : KU KAŽDEJ TEÓRII T S JAZYKOM L, MOŽNO ZOSTROJIŤ OTVORENÚ TEÓRIU T' S JAZYKOM L', KTORÁ JE KONZERVATÍVNYM ROZŠÍRENÍM T.
DÔKAZ: K T ZOSTROJÍME T_1 UZÁVERY PRENEXNÝCH TVAROV T
$T_2 := T_1 \cup \{A_S \mid A \in T\}$. DOKÁŽEME KONZERVATÍVNOSŤ ROZŠÍRENIA
$T_3 := \{A_S \mid A \in T\}$
T_4 VZNIKNE Z T_3 ODSTRÁNENÍM $\forall$ KVANTIFIKÁTOROV
$T_0 \equiv T_1 \rightarrow$ KONZ. ROZŠ. $\rightarrow T_2 \equiv T_3 \equiv T_4 = T'$.
VETA O DEFINÍCII FUNKČNÉHO SYMBOLU: NECH T JE TEÓRIA S JAZYKOM L. NECH MEDZI PREMENNÝMI $y, x_1, \ldots, x_n$ SA VYSKYTUJÚ VŠETKY VOĽNÉ PREMENNÉ FORMULE D JAZYKA L. NECH

$$T \vdash (\exists y) D$$
$$T \vdash D \rightarrow (D_y[t] \Rightarrow y = t)$$

KEĎ L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM NOVÉHO n-ÁRNEHO FUNKČNÉHO SYMBOLU f A T' VZNIKNE Z T PRIDANÍM ŠPECIÁLNEHO AXIÓMU

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow D$$

POTOM T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T, NAVIAC KU KAŽDEJ FORMULI A' V JAZYKU L' EXISTUJE FORMULA A V JAZYKU L TAKÁ, ŽE $T' \vdash A \Leftrightarrow A'$.

DÔKAZ: NAJSKÔR DOKÁŽEME, ŽE K ĽUBOVOĽNEJ FLI A' J. L' VIEME ZOSTROJIŤ EKV. ● FLU. A JAZ. L.

KEĎŽE f JE FUN. SYM., STAČÍ DOKÁZAŤ TVRDENIE PRE ATOMICKÉ FORMULE A'. ZVYŠOK POTOM PLYNIE Z VETY O EKVIV.

KEĎ SA V A' NEVYSKYTUJE f, POTOM $A = A'$ A TVRDENIE PLATÍ.

ĎALEJ POSTUPUJEME INDUKCIOU PODĽA POČTU VÝSKYTOV f.

NECH $f(t_1, \ldots, t_n)$ JE TAKÝ VÝSKYT V A', ŽE f SA V TERMOCH $t_1, \ldots, t_n$ UŽ NEVYSKYTUJE. NECH z JE PREMENNÁ, KTORÁ SA NEVYSKYTUJE NIKDE V A' ANI V D

ZREJME VIEME ZOSTROJIŤ FORMULU B' TAKÚ, ŽE

$A' \equiv B'_z[f(t_1, \ldots, t_n)]$

PODĽA PREDPOKLADU $\exists$ FLA B JAZYKA L TAKÁ, ŽE $T' \vdash B \leftrightarrow B'$.

NECH D' JE TAKÁ VARIANTA D, ŽE ŽIADNA VIAZANÁ PREMENNÁ D' SA NEVYSKYTUJE NIKDE V A' ANI B', B'.

POLOŽÍME $A := (\exists z)(D'_{x_1, \ldots, x_n, y}[t_1, \ldots, t_n, z] \,\&\, B)$. (FLA L)

DOKÁŽEME $T' \vdash A \leftrightarrow A'$

PLATÍ: (VETA O ROVNOSTI)

$\vdash B'_z[f(t_1, \ldots, t_n)] \leftrightarrow (\exists z)(z = f(t_1, \ldots, t_n) \,\&\, B')$

TERAZ UŽ STAČÍ IBA VYUŽIŤ TOHO, ŽE

$\vdash z = f(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow D'_{x_1, \ldots, x_n, y}[t_1, \ldots, t_n, z]$ — INŠTANCIA ŠPEC. AX. T'.

A

$T' \vdash B \leftrightarrow B'$.

$\Rightarrow$ Z VETY O EKVIVALENCII $T' \vdash A \leftrightarrow A'$.

DÔKAZ TOHO, ŽE T' JE KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE T VYCHÁDZA Z TOHO, ŽE ZOSTROJÍME KONZERVATÍVNE ROZŠÍRENIE S TEÓRIE T A SO ŠPECIÁLNYM AXIÓMOM $D_y[f(x_1, \ldots, x_n)]$ A DOKÁŽEME, ŽE T A S SÚ EKVIVALENTNÉ.

03.09.2007
PETER ČERNO

AILO62 VÝR. A PRED. LOGIKA - SKÚŠKA

ZÁKLADNÉ VETY Z VÝR. LOGIKY

V1) $A \to A$

A1 $\vdash A \to ((A \to A) \to A)$
A2 $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
MP $\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$
A1 $\vdash A \to (A \to A)$
MP $\vdash A \to A$

V2) $\neg A \to (A \to B)$

A1 $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$
VD $\neg A \vdash \neg B \to \neg A$
A3 $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
MP $\neg A \vdash A \to B$
VD $\vdash \neg A \to (A \to B)$

V3) $\neg\neg A \to A$

C. $\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$
VD $\neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$
A3 $\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$
MP $\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$
VD $\neg\neg A \vdash A$
VD $\vdash \neg\neg A \to A$

V4 $A \to \neg\neg A$

V3 $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$
A3 $\vdash (\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$
MP $\vdash A \to \neg\neg A$

V5 $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\neg\neg A, A \to B \vdash \neg\neg A$

V3 $\vdash \neg\neg A \to A$

MP $\neg\neg A, A \to B \vdash A$

$\neg\neg A, A \to B \vdash A \to B$

MP $\neg\neg A, A \to B \vdash B$

V4 $\vdash B \to \neg\neg B$

MP $\neg\neg A, A \to B \vdash \neg\neg B$

VD $A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B$

A3 $\vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$

MP $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

VD $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

V6 $A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

$A, A \to B \vdash A, A \to B \overset{MP}{\Rightarrow} B$

VD $A \vdash (A \to B) \to B$

V5 $\vdash ((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

MP $A \vdash \neg B \to \neg (A \to B)$

VD $\vdash A \to (\neg B \to \neg (A \to B))$

V7 $(\neg A \to A) \to A$

V6 $\vdash \neg A \to (\neg A \to \neg (\neg A \to A))$

VD $\neg A \vdash \neg (\neg A \to A)$

VD $\vdash \neg A \to \neg (\neg A \to A)$

A3 $\vdash (\neg A \to \neg (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$

MP $\vdash (\neg A \to A) \to A$

03.09.2007/6
PETER ČERNO

AILOG2 VÝR. A PRED. LOGIKA – SKRÚŠKA

NECH L JE JAZYK PREDIKÁTOVEJ LOGIKY 1. RÁDU S ROVNOSŤOU
DOKÁŽTE, ŽE NEEXISTUJE TAKÁ MNOŽINA FORMÚL T,
ŽE $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow$ UNIVERZUM $\mathcal{M}$ JE KONEČNÁ MNOŽINA.

NECH JAZYK L' VZNIKNE Z L PRIDANÍM STOČETNE
VEĽA KONŠTANT c_n PRE n PRIRODZENÉ

T' NECH VZNIKNE Z T PRIDANÍM AXIÓMOV $c_n \neq c_m$
PRE $n \neq m$.

NECH S JE ĽUBOVOĽNÁ KONEČNÁ PODMNOŽINA T'.
TÁTO OBSAHUJE NAJVIAC KONEČNE VEĽA AXIÓMOV
TYPU $c_n \neq c_m$ (POVEDZME k).
ZVOĽME REALIZÁCIU $\mathcal{M}$ JAZYKA L, KTORÁ MÁ ASPOŇ k-PRVKOVÉ
UNIVERZUM (ALE KONEČNÉ). PODĽA PREDPOKLADU $\mathcal{M} \models T$.
S OBSAHUJE NAJVIAC k KONŠTANT, TAKŽE VIEME $\mathcal{M}$
VHODNE EXPANDOVAŤ DO REALIZÁCIE $\mathcal{M}'$ JAZYKA L',
T.J. $\mathcal{M}' \models S$.

Z VETY O KOMPAKTNOSTI MÁ T' MODEL $\mathcal{M}'$.
POTOM ALE $\mathcal{M}'|_L$ JE MODEL T S NEKONEČNÝM
UNIVERZOM, ČO JE SPOR.