Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Vyčíslitelnost II

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Antonín Kučera, CSc.
E-mail: Antonin.Kucera@mff.cuni.cz

Anotace: Navazující přednáška na Vyčíslitelnost I. Různé typy rekurzivně spočetných množin. Vztah k matematické logice. Relativní vyčíslitelnost. Operace skoku. Aritmetická hierarchie.

Sylabus:

1. Prosté množiny.
2. Relativní vyčíslitelnost, T-převeditelnost.
3. Operace skoku, její význam jako relativizovaného halting problému a její základní vlastnosti.
4. Věta o limitní vyčíslitelnosti.
5. Aritmetická hierarchie. Věta o hierarchii, souvislost s operací skoku. Aplikace teorie vyčíslitelnosti.

Cíl předmětu: Naučit další navazující teorii vyčíslitelnosti.

Literatura:

1. Demuth O., Kryl R., Kučera A.: Teorie algoritmů I, II. SPN, 1984, 1989
2. Soare R. I.: Recursively enumerable sets and degrees. Springer-Verlag, 1987
3. Odifreddi P.: Classical recursion theory. North-Holland, 1989

23.02.2009 Po
PETER ČERNO

NTINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$A \leq_1 B \Leftrightarrow \exists$ PROSTÁ ORF f : $a \in A \Leftrightarrow f(a) \in B$ (1-PREVOD.)

$\leq_m$ .. m-PREVODITEĽNOSŤ

$\leq_{tt}$ .. TRUTH-TABLE PREVODITEĽNOSŤ

$\leq_{wtt}$ .. WEAK TRUTH-TABLE —||—

$\leq_T$ .. TURINGOVSKÁ —||—

$A \leq_{tt} B \Leftrightarrow \exists$ ORF, KT. KAŽDÉMU x PRIRADÍ n-ÁRNU BOOL. FCIU. α

$A \quad Y_1, \dots, Y_n$: $x \in A \Leftrightarrow \alpha(c_B(Y_1), \dots, c_B(Y_n))$

α JE DEFINOVANÁ VŠADE (= TOTÁLNA)

PRÍKLAD: $\bar{K} \leq_{tt} K$; K PRVKU x PRIRADÍME x A $\alpha := \neg$.

T-PREVODITEĽNOSŤ

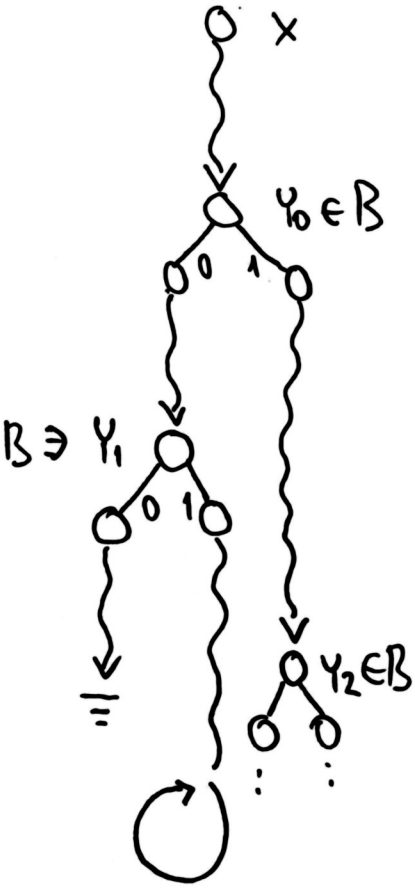
ORÁKULUM = HYPOTETICKÉ ZARIADENIE, KT. ODPOVEDÁ NA OTÁZKY "PATRÍ Y DO B?"

B-ČRF SÚ TAKÉ FCIE., KTORÉ DOSTANEME AK ROZŠÍRIME ZÁKL. FCIE. (NULA, NÁSLEDNÍK, PROJEKCIA) O c_B.

PRE TURINGOV STROJ MÔŽEME ZAVIESŤ ORÁKULOVÚ PÁSKU.

PODOBNE B-PASCAL .. OBSAHUJE FCIU. B(x: Integer): Boolean;

PREDSTAVME SI PROGRAM P SO VSTUPMI B (MNOŽINA) A x (ČÍSLO). VÝPOČET MOŽNO ZAKRESLIŤ DO VÝPOČTOVÉHO STROMU.



TENTO STROM ZACHYTUJE VŠETKY SCENÁRE BEHU PROGRAMU PRE VSTUP x PRE KAŽDÚ MNOŽINU B.

MNOŽINA KONEČNÝCH VETIEV NÁPOČTOVÉHO STROMU JE R.S.:

PREHĽADÁVANÍM DO ŠÍRKY PRECHÁDZAM STROMOM A EFEKTÍVNE GENERUJEM VŠETKY KONEČNÉ VETVY.

$\Rightarrow$ DOKÁŽEME VYROBIŤ R.S. MNOŽINU W, KTORÁ OBSAHUJE ŠTVORICE $\langle x, y, u, v \rangle$

x JE VSTUP, y JE VÝSTUP

u, v SÚ INDEXY KONEČNÝCH MNOŽÍN

NA ZAČIATKU u, v REPREZENTUJÚ KÓD PRÁZDNEJ MNOŽINY

AK PRI ROZHODOVANÍ $y_i \in B$ PLATÍ, VLOŽÍME y_i DO u, INAK VLOŽÍME y_i DO v.

PLATÍ $P(B, x) = y \Leftrightarrow \exists u, v :$
$\langle x, y, u, v \rangle \in W \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B}$.

02.03.2009 M.
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

DOPÍSAŤ POZNÁMKY

$$P(B;x) \simeq y \underset{(*)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\exists u,v,s\,(\langle x,y,u,v\rangle \in W \text{ ZA } s \text{ KROKOV } \underbrace{\& \; D_u \subseteq B \;\&\; D_v \subseteq \overline{B}}_{B\text{-REK.}})}_{B\text{-REK. SPOČ.}}$$

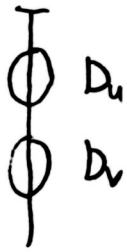
MNOŽINA

$\Downarrow$

TOTO JE B-ČRF

BUDEME STOTOŽŇOVAŤ B A c_B

BIN. STRINGY $\sigma \preccurlyeq \tau$, $\sigma \prec \tau$, $\sigma \prec B$ JE EKV. $\sigma \prec c_B$

NAMIESTO 

SA PÝTAM NA POČIATOČNÝ ÚSEK, NIEČO IGNORUJEM

ČRFUNKCIONÁL Φ JE ("JE ZADANÝ")

R.S. MNOŽINA TROJIC $\langle \sigma, x, y\rangle$ T.Ž.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \sigma, x, y\rangle \in \Phi \\ \langle \sigma', x, y'\rangle \in \Phi \\ \sigma \preccurlyeq \sigma' \end{array}\right\} \Rightarrow y = y'$$

≡ PODMIENKA KONZISTENCIE VÝPOČTOV

POZNÁMKA: Φ JE R.S. MNOŽINA A ZÁROVEŇ ZADÁVA ZOBRAZENIE

DEF.: Φ JE ČRF-ÁL

$\Phi(\sigma)(x) \simeq y$ AK $\langle \sigma, x, y\rangle \in \Phi$

$\Phi(\sigma)(x) \simeq y$ AK $\langle \sigma, x, y \rangle \in \Phi$ PRE NEJAKÉ $\sigma \leq \tau$

$\Phi(B)(x) \simeq y$ AK $\Phi(\sigma)(x) \simeq y$ PRE NEJAKÉ $\sigma \leq B$.

FUNKCIONÁL Φ .. APLIKUJEME NA B $\Rightarrow$ $\Phi(B)$ JE FCIA.

POZN. Φ JE ČRFCIONÁL $\Rightarrow$ $\Phi(B)$ JE VŽDY KOREKTNE DEFINOVANÁ FCIA.

POZN. $\Phi(B)$ JE ISTOTNE B-EF. VYČÍSLITEĽNÉ

EFEKTÍVNE GENERUJ Φ

AK DOSTANEŠ DOTAZ $\langle \sigma, x, y \rangle$

POLOŽ DOTAZ $\sigma \leq B$ $\begin{cases} \text{TRUE} \\ \text{FALSE} \end{cases}$

POZN. ZAHŔŇA VŠETKY TAKÉ ... VIĎ (*)

FORMALIZÁCIA PODĽA B-EF. VYČÍSLITEĽNOSTI

ČASTO POUŽÍVAME NEFORMÁLNY PRÍSTUP ... FUNCTION B

DEF.: $A \leq_T B$ (TURINGOVSKY PREVODITEĽNÉ K B)

A JE REKURZÍVNE RELATÍVNE K B,

A JE B-REKURZÍVNE, ...)

AK EXISTUJE ČRF-AĽ Φ : $A = \Phi(B)$

TZN. $A(x) = \Phi(B)(x)$ PRE $\forall x$

TJ. $C_A(x) = \Phi(B)(x)$

POJMY: <u>B-ČRF</u> ... $\Phi(B)$, KDE Φ JE ČRF-AĽ

ISLO BY DEFINOVAŤ AJ B-PRF

(INDUKTÍVNY PRÍSTUP)

02.03.2009 Po
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

DÔLEŽITÉ: <u>RELATIVIZÁCIA VOČI B</u> ... EFEKT. VYČ.

NAPRÍKLAD:

A JE B-REK. SPOČETNÁ (JE R.S. V B)

AK $A = dom(\phi(B))$ PRE NEJAKÝ ČRFÁL ϕ

<u>POSTOVA VETA</u>: A JE B-REKURZÍVNA $\Leftrightarrow$ A, $\bar{A}$ SÚ B-REK. SPOČETNÉ.

ROVNAKÝ DÔKAZ PRE $\Leftarrow$): 2 PROGRAMY SPÚŠŤAM SÚČASNE

LOKÁLNY CIEĽ: s-m-n VETA

POTREBUJEME NUMERÁCIU ZOVŠEOBECNENÝCH PROGRAMOV

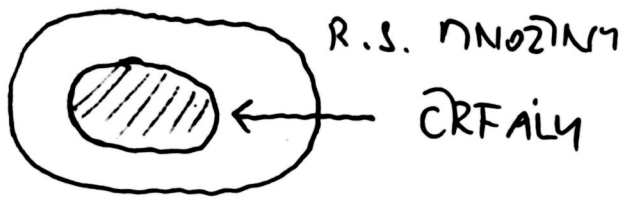
ISTOTNE IDE: PROG. LANGUAGE .. e-TÝ PROGRAM,

Φ_e JE ZADANÉ e-TÝM PROGRAM ... ZLYHÁ...

MY MÁME VÝHODU: UŽ MÁME φ_e, P_e, $W_e = dom(\varphi_e)$

CHCEME VYUŽIŤ TÚTO e NUMERÁCIU, KT. UŽ MÁME, NA ENUMERÁCIU ČRFÁLOV.

MALÁ ZÁVADA:

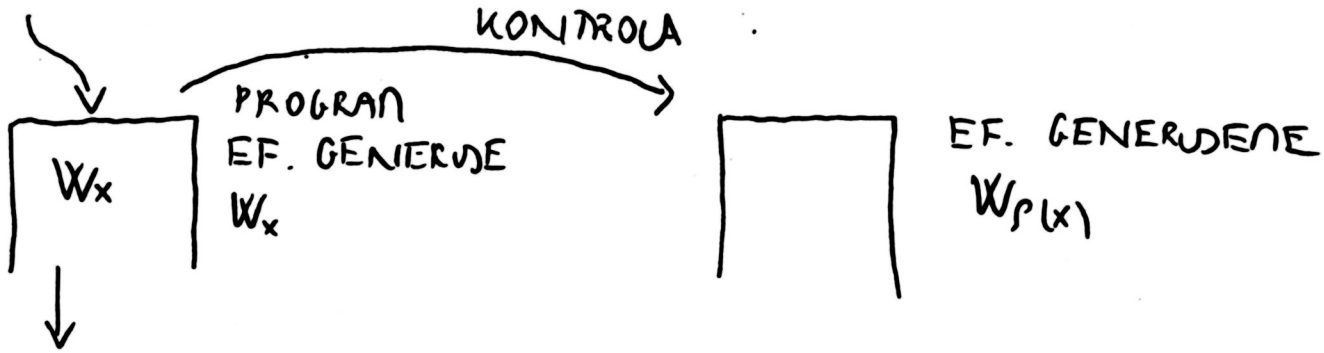


<u>LEMMA</u>: EXISTUJE PRF ρ (REGULARIZAČNÁ FUNKCIA) T.Ž. PRE $\forall x$ $W_{\rho(x)}$ JE ČRF-ÁL

(JE SPLNENÁ PODMIENKA KONZISTENCIE)

AK W_x JE ČRFÁL $\Rightarrow$ $W_{\rho(x)} = W_x$

DÔKAZ: s ... ZÍSKAME POMOCOU S-M-N VETY



VŽDY KEĎ SA TU OBJAVÍ $\langle \sigma, x, y \rangle$ $\longrightarrow$ SPÝTAM SA, ČI TO JE KONZISTENTNÉ S TÝM ČO UŽ MI GENEROVAL

- ÁNO $\Rightarrow$ DAJ NA VÝSTUP
- NIE $\Rightarrow$ MIMOŽ

KAŽDÝ NOVÝ PRVOK DO W_x ... KONTROLA S TÝM, ČO JE DOPOSIAĽ DO $W_{s(x)}$

FORMÁLNE: $\mathcal{L}(x, w) \simeq \varphi_{s(x)}(w)$ $\downarrow$

AK V KROKU s SA OBJAVÍ $w = \langle \sigma, x, y \rangle$ DO W_x TAK KONZISTENTNÉ S TÝM ... DO KROKU s V DEF. OBORE $\mathcal{L}$

TÝMTO ZÍSKAME NUMERÁCIU ČRFÁLOV

DEF. $\Phi_e := W_{s(e)}$

02.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$$\Phi_e(B)(x) \simeq y \Leftrightarrow \exists \sigma \left(\langle \sigma, x, y \rangle \in W_{\rho(e)} \ \& \ \sigma \preceq B \right)$$

POČÍTANIE V KROKOCH:

s - KROKOV VÝPOČTU .. INTUITÍVNE JASNÉ

FORMÁLNE:

$$\phi_{e,s}(B)(x) \simeq y \Leftrightarrow \exists \sigma \left(\langle \sigma, x, y \rangle \in W_{\rho(e),s} \ \& \ \sigma \preceq B \ \& \ |\sigma| \leq s \right)$$

$$W_{x,s} \overset{def}{:=} \{ y \mid \exists j \leq s : T_1(x, y, j) \}$$

$\phi_{e,s}(\sigma)(x)\downarrow$ ... REKURZÍVNE

$\phi_{e,s}(\sigma)(x) \simeq y$ ... REKURZÍVNE V PREM. e, s, σ, x, y

$\phi_e(\sigma)(x)\downarrow$ ... REKURZÍVNE SPOČETNÉ

$\phi_e(B)(x)\downarrow$ ... B - R.S.

$\phi_e(B)(x) \simeq y$ ... B - R.S.

$\phi_{e,s}(B)(x) \simeq y$ ... B - REK.

! (ROZMYSLIEŤ SI) !

09.03.2009 M_0
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITELNOST II

Φ_z ... $W_{p(z)}$

$\Phi_z(B)(x) \simeq y \Leftrightarrow \exists \sigma, s : (\langle \sigma, x, y \rangle \in W_{p(z),s} \ \& \ \sigma \leq B)$

$\Phi_{z,s}(B)(x) \simeq y$ ... B-REKURZÍVNY PRED.

$\Phi_z(B)(x)\downarrow$. B-R.S. PREDIKÁT

(1) $A \leq_T B \Leftrightarrow$ PRE NEJAKÉ z : $A = \Phi_z(B)$

TJ. $A(x) = c_A(x) = \Phi_z(B)(x)$

$\downarrow$ A JE REKURZÍVNE V B, B-REKURZÍVNE

(2) A JE B REK. SPOČETNÁ

A JE REK. SP. RELATÍVNE VZHĽADOM K B

$\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{dom}(\Phi_z(B))$ PRE NEJAKÉ z

$W_z^B \overset{def}{:=} \mathrm{dom}(\Phi_z(B)) = \{y : \Phi_z(B)(y)\downarrow\}$

$W_{z,s}^B \equiv W_z^B$ ZA s KROKOV $\equiv$ KONEČNÁ MNOŽINA TÝCH y, KT. SÚ VO VNÚTRI W_z^B ZA s KROKOV

VETA: (1) $\leq_T$ REFL. A TRANZITÍVNA

(2) A REK. $\Rightarrow$ $A \leq_T B$ PRE $\forall B$

(3) $\left.\begin{array}{l} A \leq_T B \\ B \text{ JE REK.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A REK.

DÔKAZ: (1) $A \leq_T A$ JE ZREJMÉ

$A \leq_T B$ A $B \leq_T C$ $\Rightarrow$ JE IHNEĎ VIDIEŤ, ŽE $A \leq_T C$

VŽDY KEĎ SA PÝTAM $y \in B$?... ROZBEHNEM PROGRAM, KT. SPOČÍTA B Z C ... PREVEDIEM OTÁZKU NA C VÝPOČET.

(2) ZREJMÉ, NEPÝTAM SA NIČ B

(3) OTÁZKA $y \in B$? JE VŽDY ALG. ROZHODNUTEĽNÁ $\square$

RELÁCIA $A \equiv_T B \Leftrightarrow A \leq_T B \ \& \ B \leq_T A$

JE RELÁCIOU EKVIVALENCIE

$\Rightarrow$ MÁME TRIEDY EKVIVALENCIE

TAKÁTO 1 TRIEDA = ALG. ROVNAKO ZLOŽITÉ

$\equiv$ NAZÝVAJÚ SA <u>STUPNE NEROZHODNUTEĽNOSTI</u> (DEGREES OF UNSOLVABILITY), <u>T-STUPNE</u>

PODOBNE MOŽNO ZAVIESŤ 1-STUPNE, m-STUPNE, tt-STUPNE ...

$\underset{\sim}{0} \equiv$ T-STUPEŇ PRÁVE VŠETKÝCH REKURZÍVNYCH MNOŽÍN

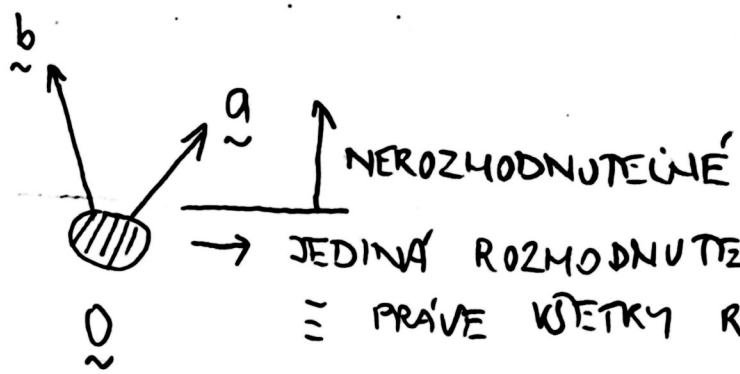
$\underset{\sim}{a} \equiv$ T-STUPEŇ

$A \ldots dg_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\} = [A]_{\equiv_T}$

$\leq_T$ NA MNOŽINÁCH PRIR. SPÔSOBOM INDUKUJE ČIASTOČNÉ USPORIADANIE NA T-STUPŇOCH

$\underset{\sim}{a} \leq \underset{\sim}{b} \Leftrightarrow A \leq_T B$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $A \in \underset{\sim}{a}$, $B \in \underset{\sim}{b}$

PLATÍ $\underset{\sim}{0} \leq \underset{\sim}{a}$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $\underset{\sim}{a}$ ((2) Z VETY)



$\rightarrow$ JEDINÁ ROZHODNUTEĽNÁ TRIEDA

$\equiv$ PRÁVE VŠETKY REK. MNOŽINY

09.03.2009 M6
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$\{\varphi_x\}_x$ ... ŠTANDARDNÁ ENUMERÁCIA ČRF

$\{\Phi_x(\emptyset)\}_x$ ... NUMERÁCIA TAKISTO VŠETKÝCH ČRF

ĽAHKO SA UKÁŽE, ŽE OBE NUMERÁCIE SÚ REKURZÍVNE IZOMORFNÉ

$\Rightarrow$ REK. PERMUTÁCIA π : $\varphi_x = \Phi_{\pi(x)}(\emptyset)$

$\mathcal{V}_z^{\emptyset}$ .. PRÁVE VŠETKY R.S. MNOŽINY

$\Phi_z(B)$ ... JE "UNIVERZÁLNEJŠÍ" PRÍSTUP
PREŤO JE NIEKEDY VÝHODNEJŠIE UVAŽOVAŤ $\Phi_z(\emptyset)$

$\boxed{\text{S-m-n VETA}}$

$$\Phi_z(B)(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def.}}{\simeq} \Phi_z(B)(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$$

VETA: $\Phi_z(B)(x_1, \dots, x_n)$ JE UNIV. B-ČRF, PRE KTORÚ PLATÍ S-M-N VETA

$\Rightarrow$ EXISTUJE PRF $\bar{S}_m$

$$\Phi_z(B)(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) \simeq$$
$$\Phi_{\bar{S}_m(z, y_1, \dots, y_m)}(B)(x_1, \dots, x_n)$$

V PÔVODNEJ S-M-N VETE JE $S_m(z, \vec{y})$ JE PROGRAM:

INŠTRUKCIE
$z, y_1, \dots, y_m$

INPUT $\vec{x}$ $\rightarrow$ PRIDAJ $\vec{x}$ ZA $\vec{y}$
SPUSTI PROGRAM z

FORMÁLNE Z PÔVODNEJ s-m-n VETY

POMOCNÁ R.S. $W = \{ \langle \sigma, x, t \rangle :$
$\langle \sigma, \langle y, x \rangle, t \rangle \in W_{p(2)} \}$

UVAŽUJME ČRF α:

$\alpha(z, y, w)\downarrow \Leftrightarrow w = \langle \sigma, x\ t \rangle$ T.Ž.
$\langle \sigma, \langle y, x \rangle, t \rangle \in W_{p(2)}$

$\simeq \varphi_{s_2(e,z,y)}(w)$

$\bar{s}_2(z,y) := s_2(e,z,y)$.

CHCEME ZACHYTIŤ, ABY $\Phi_z(B)(y,x) \simeq \Phi_{\bar{s}_2(z,y)}(B)(x)$

PRESNE ČO CHCEME, DÔLEŽITÁ POZNÁMKA TOTO CHCEME

$W_{\bar{s}_2(z,y)}$ JE REGULÁRNA, TJ.

$$W_p(\bar{s}_2(z,y)) = W_{\bar{s}_2(z,y)}$$

TO JE JASNÉ, PRETOŽE VYBERÁM Z $W_{p(2)}$! ∎

POZNÁMKA: s-m-n VETA PLATÍ ABSOLÚTNE

$\exists \bar{s}_m\ \forall B\ \forall$ ČÍSELNÝ VSTUP $\vec{y}, \vec{x}$

$$\Phi_z(B)(\vec{y}, \vec{x}) \simeq \Phi_{\bar{s}_m(z, \vec{y})}(B)(\vec{x})$$

(TJ. PLATÍ UNIFORMNE, ROVNOMERNE, ...)

NIEČO INÉ BY BOLO: $\forall B\ \exists \bar{s}_m$ ... !!!

09.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

ZIMNÝ SEMESTER: MOŽNO ĽAHKO RELATIVIZOVAŤ:

$A \leq_T B \iff A$ AJ $\bar{A}$ SÚ B-R.S.

A JE B-R.S. $\iff \exists$ B-Č.R.F.

PROSTÁ, ÚSEKOVÁ, GENERUJÚCA A

...

DEF. OPERÁCIA SKOKU (RELATIVIZOVANÝ HALTING PROBLEM)

$A' = \{x \mid \Phi_x(A)(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in W_x^A\} =$ JUMP SKOK A

PÔVODNE: $K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\} = \{x \mid x \in W_x\}$

A' JE NIEČO AKO K^A (TOTO ZNAČENIE NEPOUŽÍVAME)

$K = \{x \mid x \in W_x\}$

$\emptyset' = \{x \mid x \in W_x^\emptyset\}$ JE R.S. (VIEME)

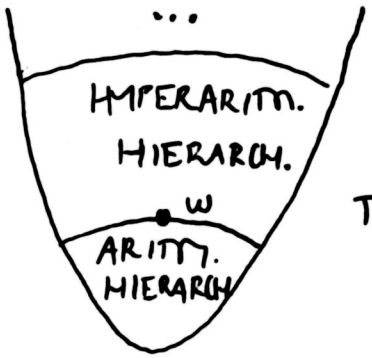
ĽAHKO JA UKÁŽE, ŽE $\emptyset' \equiv K$ (REK. IZOMORFNÉ)

$A^{(0)} = A$, $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$

$A^{(\omega)} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A^{(y)}\}$ <u>ω-SKOK</u>

MOŽNO ITEROVAŤ POZDĽŽ REK. ORDINÁLNYCH ČÍSIEL

$$\begin{tikzcd} \bullet & K^K \equiv \emptyset'' \\ \bullet \arrow[u] & K \equiv \emptyset' \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet & K^A \equiv A' \\ A \arrow[u] & \end{tikzcd}$$



VIĎ
TEÓRIA MNOŽÍN

$A' \equiv$ RELATIVIZOVANÝ HALTING PROBLEM VZHĽADOM K A

<u>VETA</u>: (1) A' JE A-R.S. (OBDOBA: K JE R.S.)

(2) A' NIE JE A-REK. (K NIE JE REK.)

$\overline{A'}$ NIE JE A-R.S. ($\overline{K}$ NIE JE R.S)

(3) B JE A-R.S. $\Leftrightarrow B \leq_1 A'$ (K JE 1-ÚPLNÁ)

(4) A JE B-R.S., $B \leq_T C$

$\Rightarrow A$ JE C-R.S.

POZOR! <u>NEMUSÍ PLATIŤ</u>:

$A \leq_T B$, B JE C-R.S.

$\Rightarrow A$ JE C-R.S.

(5) $A \leq_T B \Leftrightarrow A' \leq_1 B'$

(6) $A \equiv_T B \Leftrightarrow A' \equiv_1 B'$

16.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

VETA: (1) A' JE A-REK. SPOČ. (ANALOG. K JE R.S.)

(2) A' NIE JE A-REK. (K NIE JE REK.)

$\overline{A'}$ NIE JE A-R.S. ($\overline{K}$ NIE JE R.S.)

(3) B JE A-R.S. $\Leftrightarrow$ $B \leq_1 A'$ (K JE 1-ÚPLNÁ)

(4) $\left.\begin{array}{l} A \text{ JE } B\text{-R.S.} \\ B \leq_T C \end{array}\right\} \Rightarrow A$ JE C-R.S.

(OBECNE $A \leq_T B$, B JE C-R.S. $\not\Rightarrow$ A JE C-R.S.)

(5) $A \leq_T B \Leftrightarrow A' \leq_1 B'$

(6) $A \equiv_T B \Leftrightarrow A' \equiv_1 B'$

DÔKAZ: (1) Z DEFINÍCIE + K' JE R.S.

(2) $\overline{A'}$ NIE JE A-R.S.

SPOROM. NECH $\overline{A'} = W^A_{x_0}$

$x_0 \in \overline{A'} \Rightarrow x_0 \notin W^A_{x_0} = \overline{A'}$

$x_0 \notin \overline{A'} \Rightarrow x_0 \in W^A_{x_0} = \overline{A'}$

(3) • $B \leq_1 A' \Rightarrow \exists$ ORF $f : x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A'$

$\Rightarrow B$ JE A-R.S.

$x \in B \Leftrightarrow f(x) \in W^A_{f(x)} \Leftrightarrow \phi_{f(x)}(A)(f(x))\downarrow$ .. A-R.S. PODM.

• B JE A-R.S.

$\mathcal{L}^A(x,y,w) \simeq \varphi_x(A)(y)$

$\wr\wr$

$\phi_{g(x,y)}(A)(w)$ $\qquad g(x,y) = \bar{S}_2(a, x, y)$, a .. ČÍSLO $\mathcal{L}$

ZA w DOSAĎ $g(x,y)$: $y \in W_x^A \Leftrightarrow g(x,y) \in A'$

$B = W_{x_1}^A$ PRE NEJAKÉ x_1

$y \in B \Leftrightarrow g(x_1, y) \in A'$

$\Rightarrow$ A' JE 1-ÚPLNÁ PRE A-R.S. MNOŽINY

(A' JE Σ_1^A - ÚPLNÁ)

(4) $\left.\begin{array}{l} A \text{ JE } \emptyset\text{-R.S.} \\ B \leq_T C \end{array}\right\} \Rightarrow A$ JE $\emptyset$-R.S.

P_1 .. PROGRAM, KTORÝ S POMOCOU B GENERUJE A

P_2 .. —||— S POMOCOU C POČÍTA B

POZNÁMKA: POMOCOU RELAXÁCIE

$\bar{K} \leq_1 K$, K JE R.S. $\not\Rightarrow$ $\bar{K}$ JE R.S.

DOSTANEME $A \leq_T B$, B JE C-R.S. $\not\Rightarrow$ A JE C-R.S.

(5) $\triangleleft$ $A \leq_1 A'$: A JE A-REK. $\Rightarrow$ A JE A-R.S. $\Rightarrow A \leq_1 A'$

- $A \leq_T B$, A' JE A-R.S. $\Rightarrow$ A' JE B-R.S.

  $B \leq_1 B' \Rightarrow A' \leq_1 B'$

- $A' \leq_1 B'$, A AJ $\bar{A}$ SÚ A-REK.

$\Rightarrow$ $A, \bar{A}$ SÚ $\leq_1 A'$

$\Rightarrow$ $A, \bar{A} \leq_1 B'$, B' JE B-R.S. $\Rightarrow$ $A, \bar{A}$ SÚ B-R.S.

$\Rightarrow$ (POST) A JE B-REK. $\equiv A \leq_T B$.

(6) Z DEFINÍCIE. $\square$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\leq_1 A'"'] & B' \arrow[d, shift right, "\leq_1 B'"'] \\
A \arrow[r] \arrow[u, shift right] & B \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

A-R.S. $\qquad$ B-R.S.

16.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

POZNÁMKA: (6) UMOŽŇUJE DEFINOVAŤ SKOK NA T-SKUPINÁCH: $A \equiv_T B \Rightarrow A' \equiv_1 B' \Rightarrow A' \equiv_T B'$

DEF. $\mathcal{A}'$ = SKOK NA T-SKUPINE $\mathcal{A}' = dg_T(A')$ PRE $A \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}^{(n+1)} = (\mathcal{A}^{(n)})'$, $\mathcal{A}^{(0)} = \mathcal{A}$ $\quad dg_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\}$

POZNÁMKA: VZHĽADOM K UNIFORMITE TVRDENIA MOŽNO DEFINOVAŤ $\mathcal{A}^{(\omega)} = dg_T(A^{(\omega)})$, $A \in \mathcal{A}$.

TVRDENIE: $K \equiv \emptyset'$

DÔKAZ: K JE R.S. $\Rightarrow$ K JE $\emptyset$-R.S. $\Rightarrow K \leq_1 \emptyset'$

$\emptyset'$ JE $\emptyset$-R.S. $\Rightarrow$ $\emptyset'$ JE R.S. $\Rightarrow \emptyset' \leq_1 K$.

$x \in A' \Leftrightarrow \Phi_x(A)(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists \sigma \exists y \,($
$\langle \sigma, x, y\rangle \in W_{p(x)}$ & $\sigma \leqslant A\,) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists \sigma \exists y\,(\langle \sigma, x, y\rangle \in W_{z_0}$ & $\sigma \leqslant A)$ $\qquad W_{z_0} = W_{p(x)}$
$\Leftrightarrow x \in W_{z_0}^A$

PODOBNE: $A \leq_T B \Leftrightarrow A' \leq_1 B$

$\Rightarrow \exists$ ORF f: $\forall z\ \forall A, B$:

$A \leq_T B$ POMOCOU z $\Rightarrow$ $A' \leq_1 B'$ POMOCOU $f(z)$
TJ. $\Phi_z(B) = A$ $\qquad$ (PROSTÁ ORF)

POZNÁMKA: $A \equiv_T B \Rightarrow A^{(\omega)} \equiv_1 B^{(\omega)}$

POZNÁMKA: A REK. $\Rightarrow \exists$ ORF f: $f(x) = A(x)$

A R.S. $\Leftrightarrow$ EF. GENEROVATEĽNÁ ... $\exists$ ORF g:

$g(x,0) = 0$

$g(x,j) =$ MÁ SAMÉ 0, A POTOM SAMÉ 1

$x \in A \Leftrightarrow \lim_{j \to \infty} g(x,j) = 1$

$$g(x,j) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \text{ ZA } j \text{ KROKOV} \end{cases}$$

1- R.S. ... V KAŽDOM "STĹPCI" NAJVIAC 1 ZMENA

2- R.S. ... —||— $\leq$ 2 ZMENY

2- R.S. $\equiv$ ROZDIEL $A - B$, A, B SÚ R.S.

n- R.S. ... $\leq n$ ZMIEN

ω- R.S ... $\exists$ ORF g ... V j-TOM STĹPCI $\leq g(j)$ ZMIEN

DEF. A LIMITNE VÝPOČTEĽNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ORF h:

$\forall x \quad A(x) = \lim_{s \to \infty} h(x,s)$

POZNÁMKA: V KAŽDOM STĹPCI KONEČNÝ POČET ZMIEN

NEMUSÍ EXISTOVAŤ EFEKTÍVNY HORNÝ ODHAD PRE # ZMIEN

VETA: $A \leq_T \emptyset' \Leftrightarrow A$ JE LIMITNE VÝPOČTEĽNÁ

POZNÁMKA: ŠPECIÁLNY PRÍPAD $\emptyset'$ - ČRF

TU JE A TOTÁLNA ... $\emptyset'$ - ČRF.

23.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NMINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

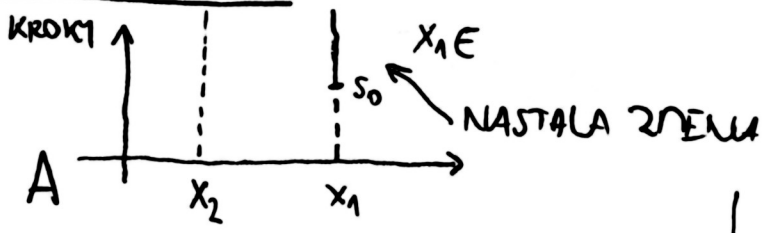
DOPÍSAŤ POZNÁMKY ZO 16.03.2009 ✓

$A \equiv_T B \Leftrightarrow A' \equiv_1 B'$

UNIFORMNOSŤ (ROVNOMERNOSŤ) $\exists z_0 \forall A : A' = W^A_{z_0}$

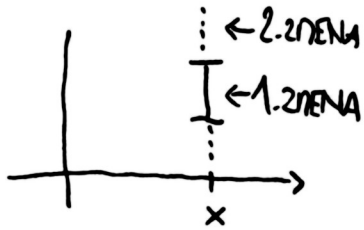
LIMITNÁ VYČÍSLITEĽNOSŤ

REK. SPOČETNOSŤ



2-REK. SPOČ. : $A - B$, KDE A, B SÚ R.S.

...



A JE LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ORF f

$\forall x \; A(x) = \lim_s f(x,s)$ ($\equiv$ KONEČNE VEĽA ZMIEN)

VETA: $A \leq_T \emptyset' \Leftrightarrow A$ JE LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ

(ŠPECIÁLNY PRÍPAD $\emptyset'$ - ČRF ...

TU JE A TOTÁLNA, TJ. IDE O $\emptyset'$ - ORF !!)

DOKAZ: $\Rightarrow$) $A \leq_T \emptyset' \Rightarrow \exists z : A(x) = \Phi_z(\emptyset')(x)$

PROBLÉM $\emptyset'$ JE NEEFEKTÍVNE (HALTING PROBLEM)

ALE $\emptyset'$ JE REK. SPOČ. $\Rightarrow$ DOKÁŽEME EF. GENEROVAŤ

$\Rightarrow$ EF. APROXIMOVAŤ

$\emptyset'$ JE R.S. A $\exists z_0 : \emptyset' = W^{\emptyset}_{z_0}$

OZNAČME $\emptyset'_s := W^{\emptyset}_{z_0,s}$ ($\equiv$ ZA s KROKOV)

$$f(x,s) := \begin{cases} \Phi_{z,s}(\emptyset'_s)(x) & \text{IF } \Phi_{z,s}(\emptyset'_s)(x)\downarrow \\ s+1 & \end{cases}$$

ZREJME $f(x,s)$ JE ORF.

ZOSTÁVA UKÁZAŤ, ŽE: $A(x) = \lim_s f(x,s)$.

TU JE PODSTATNÉ, ŽE $\Phi_z(\emptyset')(x)\downarrow$ PRE $\forall x$!!!

$\Rightarrow$ <u>PRE KAŽDÉ x</u> MUSÍ NUTNE EXISTOVAŤ $\sigma \preccurlyeq \emptyset'$:

$A(x) = \Phi_z(\sigma)(x)$

σ JE KONIEČNÝ REŤAZEC 0 A 1.

$\sigma(j) = 0 \Rightarrow j \notin \emptyset'$

$\sigma(j) = 1 \Rightarrow j \in \emptyset'$ ... EXISTUJE KROK t : $j \in \emptyset'_t$.

(A PRE $\forall v \geq t$: $j \in \emptyset'_v$)

$\Rightarrow \exists s_0 : \forall s \geq s_0 : \sigma(j) = 1 \Rightarrow j \in \emptyset'_s$ (SLOGAN: POČKAJ NA VŠETKY)

TAKŽE $A(x) = \Phi_z(\emptyset'_s)(x)$ PRE $\forall s \geq s_0$

FORMÁLNE: $\emptyset' \restriction_{|\sigma|} = \emptyset'_s \restriction_{|\sigma|}$

$\uparrow$ RESTRIKCIA NA HODNOTY $0, \dots, |\sigma|-1$

KDE $B \restriction_Y = B(0), \dots, B(Y-1)$

DOBA VÝPOČTU ... EXISTUJE s_1

$A(x) = \Phi_{z,s_1}(\emptyset'_{s_0})(x)$

VEZMEME $s_2 := \max\{s_0, s_1\}$

A DOSTANEME $\forall s \geq s_2 : A(x) = \Phi_{z,s}(\emptyset'_s)(x) = f(x,s)$.

<u>POZNÁMKA</u>: OBECNE NEMOŽNO URČIŤ σ K DANÉMU x.

23.03.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$\Leftarrow$) $A(x) = \lim_s f(x,s)$, f JE ORF.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $A \leq_T \emptyset'$

PEVNÉ x. EXISTUJE s_0 : $\forall s \geq s_0 \; A(x) = f(x,s)$

OTÁZKA : AKO MOC JE ZLOŽITÉ NÁJSŤ s_0 ?

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\emptyset'$ DOKÁŽE NÁJSŤ s_0.

PROBLÉM, ČI $\exists j \geq 1 : f(x,s) \neq f(x,s+j)$

(TJ. ČI EŠTE NASTANE ZMENA)

TOTO JE R.S. PODMIENKA $\exists$(ORP)

$\Rightarrow$ JE PREVEDITEĽNÁ $\leq_1 \emptyset'$ (RESP K)

$\Rightarrow$ TEDA $\leq_T \emptyset'$

$\Rightarrow$ AJ NEGÁCIA $\forall j \geq 1 \, (f(x,s) = f(x,s+j)) \leq_T \emptyset'$

$\equiv$ STABILNÉ NAD x,s

STAČÍ NÁJSŤ (POMOCOU μ) NAJMENŠIE s_0 TAKÉ, ŽE NAD x, s_0 STABILNÉ

$\Rightarrow$ μ($\emptyset'$-REK. PODMIENKA) $\equiv$ $\underline{\underline{\emptyset'\text{-ČRF}}}$

VZHĽADOM K TOMU, ŽE TÁ LIMITA EXISTUJE, DOSTÁVAME $\emptyset'$-ORF.

VETA: (1) f ORF $\Rightarrow$ $\lim_s f(x,s)$ JE $\emptyset'$-ČRF

(2) KAŽDÁ $\emptyset'$-ČRF JE "LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ"

φ JE $\emptyset'$-ČRF $\Rightarrow$ $\exists$ ORF f : $\forall x \, (\varphi(x) \simeq \lim_s f(x,s))$

DOKONCA $\exists$ ORF h : $\Phi_z(\emptyset')(x) \simeq \lim_s h(z,x,s)$

ZA CHVÍLU .. RELATIVIZÁCIA

<u>POZNÁMKA</u>: JEDEN LIMITNÝ PRECHOD $\equiv$ +1 SKOK

DÔKAZ: PODOBNÝ, ODLIŠNOSŤ – NIE VŽDY PLATÍ $\Phi_z(\emptyset')(x)\downarrow$, TJ. MÔŽE $\uparrow$

(1) $\Rightarrow$) ÚPLNE ROVNAKO

$\mu_s(\underbrace{\emptyset' \text{ - REK. PODMIENKA}}_{\forall j\,(f(x,s)=f(x,s+j))})$, $\varphi(x)\simeq f(x,\underbrace{\mu_s(..)}_{\emptyset'\text{- ČRF}})$

(SO NEMUSÍ EXIST.)

$\Rightarrow \lim_s f(x,s)$ JE $\emptyset'$-ČRF.

(2) MÁME PEVNÉ z A MÁME $\Phi_z(\emptyset')(x)\simeq\varphi(x)$

$$g(x,s):=\begin{cases}\langle\sigma,x,y\rangle & \Leftrightarrow \Phi_{z,s}(\sigma)(x)\simeq y,\ \sigma\leq\emptyset'_s\\ s+1\end{cases}$$

PREDTÝM SME TAM DÁVALI IBA y, TERAZ VŠ TAM DÁVAME AJ VÝPOČET

HESLO: NIE IBA LIMITNÁ HODNOTA, MY VYŽADUJEME STABILIZÁCIU VÝPOČTU

$$f(x,s)\simeq\begin{cases}\text{"TO } y\text{"}, \text{ TZN. } (g(x,s))_{3,3} & \text{IF } g(x,s)\simeq g(x,s-1)\\ \text{INAK } s+1\end{cases}$$

$\lim_s f(x,s)$ EXISTUJE $\Leftrightarrow$ $\lim_s g(x,s)$ EXISTUJE

$\lim_s g(x,s)$ EXISTUJE $\Leftrightarrow$ STABILIZÁCIA VÝPOČTU NA $\langle\sigma,x,y\rangle$

TJ. $\sigma\leq\emptyset'_s$, $s\geq s_0$ $\Phi_{z,s}(\sigma)(x)\simeq y \Rightarrow \lim_s f(x,s)=y$

30.03.2009
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

VETA: f ORF $\Rightarrow$ $\lim_s f(x,s)$ $\emptyset'$-ČRF

$\emptyset'$-ČRF φ $\Rightarrow$ $\varphi(x) \simeq \lim_s f(x,s)$

POZOR $\Phi_z(\emptyset')(x)$ OBECNE NEMUSÍ $\downarrow$

APROXIMUJEME NIELEN OUTPUT, ALE:

$\langle \sigma, x, y \rangle \ldots \Phi_{z,s}(\sigma)(x) = y \ \& \ \sigma \leq \emptyset'_s$ $\quad h$

$\lim_s g(x,s) \downarrow \Leftrightarrow \lim_s h(x,s) \downarrow$

3. ZLOŽKA "y"

MY TRVÁME NA STABILIZÁCII "LIMITNÉHO VÝPOČTU"!

DODATOK: EXISTUJE ORF h

$$\underbrace{\Phi_z(\emptyset')(x) \simeq \lim_s h(z,x,s)}$$

<u>VETA (RELATIVIZÁCIA)</u>: (1) f JE A-ORF

$\Rightarrow \lim_s f(x,s)$ JE A'-ČRF

(2) PRE ĽUBOVOĽNÚ A'-ČRF φ EXISTUJE

A-ORF g $\quad \varphi(x) \simeq \lim_s g(x,s)$

(3) DOKONCA EXISTUJE a:

$$\forall A: \Phi_z(A')(x) \simeq \lim_s \underbrace{\Phi_a(A)}_{g}(z,x,s)$$

$g = \Phi_a(A)$, KDE a NEZÁVISÍ NA A!

KDE $\Phi_a(A)$ JE VŠADE DEFINOVANÁ

DÔKAZ. RELATIVIZÁCIA DÔKAZU

$\emptyset'$ R.S. $\Rightarrow$ $\emptyset'_s = W^{\emptyset}_{z_0,s}$ $\qquad \forall A (W^A_{z_0} = A')$

A' JE A-R.S., NIEČO $A' = W^A_{z_0}$

$A'_s := W^A_{z_0,s}$ ... ROVNAKÝ DÔKAZ AKO UŽ BOL ...

DÔSLEDOK: $\Phi_z(\emptyset^{(n+1)})(x) \simeq \lim_{t_0} \dots \lim_{t_n}$

$f(z, x, t_0, \dots, t_n)$

VŠETKY VNÚTORNÉ LIMITY $t_1, \dots, t_n$ EXISTUJÚ
A TÁ VONKAJŠIA CEZ t_0 MÔŽE/NEMUSÍ EXISTOVAŤ

DÔKAZ. ITERÁCIOU (TRIVIÁLNE)

VSUVKA: $A = \{x : W_x = \emptyset\}$

$B = \{x : W_x \neq \emptyset\}$

$Fin = \{x : W_x$ JE KONEČNÁ$\}$

$Inf = \{x : W_x$ JE NEKONEČNÁ$\}$

$Tot = \{x : W_x = \mathbb{N}$ TJ. φ_x JE TOTÁLNA$\}$

$Rek = \{x : W_x$ JE REKURZÍVNA$\}$

B JE R.S. (TO JE ZREJMÉ)

$B = \{x : \exists s (W_{x,s} \neq \emptyset)\} = \{x : \exists y, s (y \in W_{x,s})\}$

$B \equiv_1 K$

DÔKAZ:

NTIN065 VYČÍSLITELNOST II

(a) (s-m-n) $\varphi_{\alpha(x)}(j)\downarrow \Leftrightarrow x \in K \Leftrightarrow \underbrace{\varphi_x(x)\downarrow}_{B(x,j) \simeq \varphi_{\alpha(x)}(j)}$

$\alpha(x) = s_1(b,x)$

ROLA PROGRAMU $\alpha(x)$ ... ČAKÁ, KÝM $x \in K$.

VIDÍME, ŽE $K \leq_1 B$.

TÝM SME TAKTIEŽ DOKÁZALI $K \leq_1 Tot$

(b) $B \leq_1 K$: $\varphi_{\beta(x)}(j)\downarrow \Leftrightarrow W_x \neq \emptyset$ (s-m-n)

PROGRAM $\beta(x)$ ČAKÁ, ÁK $W_x \neq \emptyset$

HĽADÁ $y \in W_x$

TJ. HĽADÁ y,s : $y \in W_{x,s}$

(STAČÍ 1-ÚPLNOSŤ K)

$A = \bar{B} \Rightarrow A \equiv_1 \bar{K} \Rightarrow$ A NIE JE R.S. $\square$

2 KVANTIFIKÁTORY:

$Fin = \{x : \exists s_0 \forall s \geq s_0 (s \notin W_x)\} =$ $\exists\forall$

$= \{x : \exists s_0 \forall s \geq s_0 \forall t (s \notin W_{x,t})\}$

$Inf = \{x : \forall s \exists j (j > s \ \& \ j \in W_x)\} =$ $\forall\exists$

$= \{x : \forall s \exists j \exists t (j > s \ \& \ j \in W_{x,t})\}$

$Tot = \{x : \forall s \exists t (s \in W_{x,t})\}$

PLATÍ: $\mathrm{Inf} \equiv \mathrm{Tot}$ $(\equiv_1)$

$\varphi_{\alpha(x)}(j)\downarrow \Leftrightarrow \{0,\dots,j\} \subseteq W_x$

TJ. $\varphi_x(i)\downarrow$ PRE $i = 0,\dots,j$

$x \in \mathrm{Tot} \Leftrightarrow \alpha(x) \in \mathrm{Inf}$

$\Rightarrow$) ZREJME $\quad x \in \mathrm{Tot} \Rightarrow \alpha(x) \in \mathrm{Tot} \Rightarrow \alpha(x) \in \mathrm{Inf}$

$\Leftarrow$) $x \notin \mathrm{Tot} \Rightarrow \exists i_0 : \varphi_x(i_0)\uparrow \Rightarrow$

$\forall j \geq i_0 : \varphi_{\alpha(x)}(j)\uparrow \Rightarrow \alpha(x) \notin \mathrm{Inf}$

OPAČNE: $\varphi_{\beta(x)}(j)\downarrow \Leftrightarrow$ EXISTUJE ASPOŇ j RÔZNYCH PRVKOV VO W_x (PRVKY W_x MÔŽEME EF. GENEROVAŤ)

$x \in \mathrm{Inf} \Leftrightarrow \beta(x) \in \mathrm{Tot}$ (ZREJME)

$\mathrm{Fin} = \overline{\mathrm{Inf}}$.

(i) DOKÁŽEME $\overline{\Phi^{(2)}} \equiv \mathrm{Tot} \Rightarrow \emptyset^{(2)} \equiv \overline{\mathrm{Tot}} \equiv \overline{\mathrm{Inf}} \equiv \mathrm{Fin}$

ARITMETICKÁ HIERARCHIA

VIŠ ANALÝZA: BORELOVSKÁ HIERARCHIA

KLASIFIKÁCIA PREDIKÁTOV RESP. MNOŽÍN PODĽA ARITMETICKEJ ZLOŽITOSTI

30.03.2009 M6
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

DEF. Σ_n - PREFIX (RESP Π_n - PREFIX)

KONEČNÁ SKUPINA KVANTIFIKÁTOROV, KT. MÁ n PODSKUPÍN, KAŽDÁ PODSKUPINA JE HOMOGÉNNA ($\exists\exists\exists$, RESP. $\forall\forall\forall$..) JEDNOTLIVÉ PODSKUPINY SA STRIEDAJÚ

Σ_n .. ZAČÍNA $\exists$ PODSKUPINOU

$\forall_n$ .. ZAČÍNA $\forall$ PODSKUPINOU

NAPR. $\exists\exists\forall\forall\forall\exists$ JE Σ_3

PREFIX SA NAZÝVA REDUKOVANÝ, KEĎ PODSKUPINY SÚ JEDNOGENNÉ.

ARITMETICKÁ HIERARCHIA JE TO KVÔLI TOMU, ŽE KVANTIFIKUJEME ČÍSLA. NIEKEDY SA ZNAČÍ AJ:

Σ_n^0 ← ÚROVEŇ KVANTIFIKÁCIE

EXISTUJE AJ ANALYTICKÁ HIERARCHIA (SÚVISÍ S REKURZÍVNYMI ORDINÁLMI)

$\forall f \exists x$ (KVANTIFIKUJEME CEZ FUNKCIE) ~ Π_2^1 ← FUNKCIE

DEF.: PREDIKÁT PATRÍ DO TRIEDY Σ_n, Π_n (PRESNEJŠIE Σ_n^0, Π_n^0), KEĎ JE VYJADRITEĽNÝ V TVARE

Σ_n - PREFIX (ORP), RESP Π_n - PREFIX (ORP)

PRE n KONEČNÉ

$\Sigma_0 = \Pi_0$ .. PRÁVE ORP $\equiv$ ALGOR. ROZHODNUTEĽNÉ

Σ_1 ... $\exists$ (ORP) $\equiv$ PRÁVE R.S.

Π_1 ... $\forall$ (ORP) $\equiv$ NEGÁCIE R.S.

RELATIVIZÁCIA: TRIEDA $\Sigma_n^{0,A}$ $\equiv$ PRÁVE VŠETKY Σ_n^0-PREFIX (A-ORP)

PODOBNE $\Pi_n^{0,A}$.

DEF.: MNOŽINA / PREDIKÁT JE ARITMETICKÝ KEĎ JE VYJADRITEĽNÝ POMOCOU LOGIKY 1. RÁDU CEZ ORP

<u>VETA</u>: PREDIKÁT JE ARITMETICKÝ $\Leftrightarrow$ PATRÍ DO NEJAKEJ Σ_n, RESP. Π_n.

DÔKAZ: $\Leftarrow$) PRIAMO, $\Rightarrow$) CVIČENIE NA PRENEXNÉ TVARY

<u>PLATÍ</u>: VŽDY MOŽNO DOSTAŤ REDUKOVANÝ PREFIX

<u>POZNÁMKA</u>: OHRANIČENÉ KVANTIFIKÁTORY NEVADIA

(a) $\ldots \underbrace{\forall x \leq t \, \exists y} \ldots (\ldots y \ldots)$

$\ldots \exists w = \langle y_0, \ldots, y_t \rangle \, \forall x \leq t \ldots (\ldots (w)_{t+1,x} \ldots)$

OHRANIČENÝ KVANTIFIKÁTOR NA ORP SA ANIHILUJE ...

(b) $\ldots \exists x \leq t \, \forall y \ldots \overset{\text{PREJDI K NEGÁCII}}{\rightsquigarrow} \ldots \forall x \leq t \, \exists y \ldots \rightsquigarrow \ldots \exists w \, \forall x \leq t \ldots \rightsquigarrow$

$\overset{\text{OPÄŤ NEGÁCIA}}{\rightsquigarrow} \ldots \forall w \, \exists x \leq t \ldots$ ŽIADNA $(t+1)$-TICA NIE JE DOBRÁ!

06.04.2009 M6
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

Tot ... Π^0_2 ← BUDEME VYNECHÁVAŤ

$$Tot = \{x : \underbrace{\forall y \exists s}_{\Pi_2} \underbrace{\varphi_x(y)\downarrow \text{ ZA } \leq s \text{ KROKOV}}_{\text{REKURZÍVNA PODMIENKA}}\}$$

$Rek = \{x : W_x \text{ JE REKURZÍVNA}\}$ ... Σ_3

KAŽDÁ W_x JE REKURZÍVNE SPOČETNÁ
IBA NIEKTORÉ SÚ REKURZÍVNE

$\boxed{x \in Rek \Leftrightarrow \overline{W_x} \text{ JE R.S. (= POSTOVA VETA)}}$

$\exists y : \underbrace{\overline{W_x} = W_y}$

$\Leftrightarrow W_x \cup W_y = \mathbb{N} \;\&\; W_x \cap W_y = \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall z \;\; z \in W_x \cup W_y \;\&\; z \notin W_x \cap W_y$

$\Leftrightarrow \exists y \; \forall z \; \exists s \; \underbrace{(z \in W_{x,s} \cup W_{y,s})}_{\text{REK.}} \;\&\; \forall z \; \forall s \; \underbrace{(z \notin W_{x,s} \cap W_{y,s})}_{\text{REK.}}$

$\underbrace{\exists (\forall \exists \quad \& \quad \forall)}$

$\equiv \exists \forall \exists (\text{REK.}) \equiv \Sigma_3$

DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE LEPŠIE TO NEJDE

PODOBNE Fin ... Σ_2.

<u>VETA</u>: (1) $B \in \Sigma_n \Leftrightarrow \overline{B} \in \Pi_n$ (PRE MNOŽINY ¬ PRE PREDIKÁTY)

(2) $B \in \Sigma_n$ (RESP. Π_n) $\Rightarrow B \in \Pi_m \cap \Sigma_m \quad \forall m > n$

(3) $A \leq_m B$, $B \in \Sigma_n$ (RESP. Π_n) $\Rightarrow A \in \Sigma_n$ (RESP. Π_n).

DÔKAZ: (1) DE MORGAN

(2) KEĎ IDE NIEČO PEKNE $\Rightarrow$ TAK TO IDE AŽ HORŠIE

$\equiv$ KVANTIFIKÁCIA CEZ FIKTÍVNE PREMENNÉ

(3) UŽ VIEME: $A \leq_m B$, B JE R.S. $\Rightarrow$ A JE R.S.

PRE Σ_n JE TO TO ISTÉ

NIECH $x \in B \Leftrightarrow \exists \forall \ldots Q(x, \ldots)$

ORF f $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow \exists \forall \ldots Q(f(x), \ldots)$

NUMERÁCIA A INDEXÁCIA

$\Sigma_0 = \Pi_0$ ... NEMÁ UNIVERZÁLNY ORP

SPOROM: $R(e, x)$

$\neg R(x, x)$ ... e_0 ... $R(e_0, e_0) \equiv \neg R(e_0, e_0)$

Σ_1 ... MÁ UNIVERZÁLNY Σ_1 PREDIKÁT

(UŽ VIEME) DOKONCA PLATÍ S-M-N VETA

MÁ TVAR: $\exists s\, T_1(e, x, s) \equiv Univ(e, x)$

= KLEENEHO VETA O NORMÁLNEJ FORME

VETA: PRE KAŽDÉ $n \geq 1$ EXISTUJE (PRE TRIEDU PREDIKÁTOV 1 PREMENNEJ) UNIVERZÁLNY Σ_n PREDIKÁT PRE TRIEDU Σ_n

Π_n PREDIKÁT PRE TRIEDU Π_n.

06.04.2009 M.
PETER ČERNO

NTINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

<u>DÔSLEDOK</u>: MOŽNO ZAVIESŤ Σ_n - INDEX (Σ_n - GÖDELOVÉ ČÍSLO).

PRE $n=1$ $\quad \exists s\, T_1(e,x,s)$ .... Σ_1

$\forall s\, \neg T_1(e,x,s)$ .... Π_1 → NEGÁCIA Univ PRE Σ_1

INDUKCIA: Σ_n:

DVA PRÍPADY: a) $2 \nmid n$ b) $2 \mid n$

(a) $\exists \forall \ldots \exists\, Q(x, y_1, \ldots, y_n)$

$\exists y_n\, Q(\underbrace{x, y_1, \ldots, y_{n-1}}_{\text{VOLNÉ PREM.}}, y_n)$

$\Leftrightarrow \exists y_n\, T_n(e, x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$

KDE $\exists\, T_n(e, \ldots)$ JE UNIVERZÁLNY PRE Σ_1 S n PREMENNÝMI

$\rightsquigarrow \boxed{\exists \forall \ldots \exists\, T_n(e, x, y_1, \ldots, y_n)}$

(b) $\exists \forall \ldots \forall\, Q(x, y_1, \ldots, y_n)$

NEG. $\equiv$ $\quad \exists \neg Q(x, y_1, \ldots, y_n)$

$\exists\, T_n(e, x, y_1, \ldots, y_n)$

STÁŤ $\equiv$ $\quad \forall \neg T_n(e, x, y_1, \ldots, y_n)$

$\rightsquigarrow \boxed{\exists \forall \ldots \forall \neg T_n(e, x, y_1, \ldots, y_n)}$

VIEME, ŽE $K \in \Sigma_1 - \Pi_1$

TJ. K JE R.S. A K NIE JE Π_1, TJ. $\overline{K}$ NIE JE Σ_1.

<u>VETA:</u>

ARITMETICKÁ HIERARCHIA NEKOLAPSUJE!

$\forall n \geq 1 \quad \Sigma_n - \Pi_n \neq \emptyset$

ROVNAKÝ DÔKAZ AKO PRE $n = 1$.

OZNAČME $Univ^{(n)}(c, x)$ UNIVERZÁLNY PRE Σ_n

VEZMIME $\underbrace{Univ^{(n)}(x, x)}_{\in \Sigma_n - \Pi_n}$ $\equiv$ „OBDOBA K" PRE Σ_n

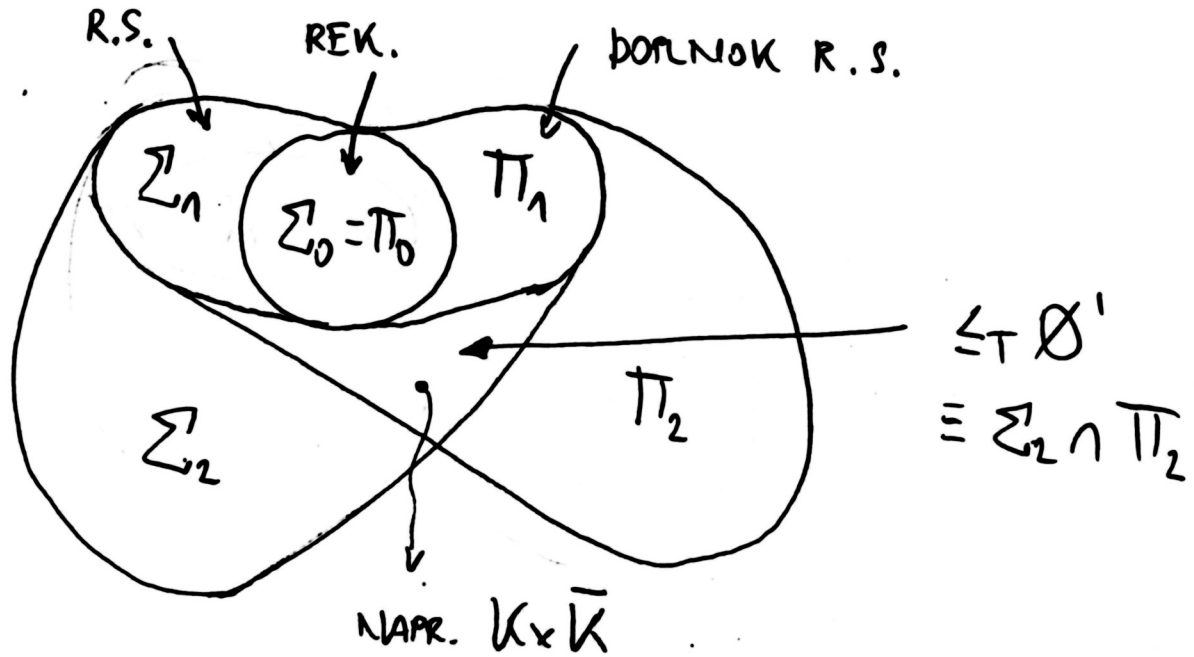
$P(x) \equiv Univ^{(n)}(x, x) \in \Sigma_n$ (VIDIEŤ)

$P(x) \in \Pi_n \Rightarrow \neg P(x) \in \Sigma_n$

TJ. $\neg P(x) \equiv \neg Univ^{(n)}(x, x) \equiv Univ^{(n)}(c_0, x)$

POLOŽ $x = c_0$. $\lightning$ $\square$

<u>FAKT:</u> $\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 = \Pi_0$ ($\equiv$ POSTOVA VETA)



06.04.2009 Po
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

VETA O HIERARCHII:

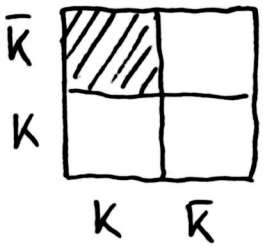
(1) $n \geq 1$ $\quad \emptyset^{(n)}$ JE Σ_n - ÚPLNÁ

(2) $n \geq 0$ $\quad A$ JE R.S. V $\emptyset^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1}$

(3) $n \geq 0$ $\quad A \leq_T \emptyset^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

POZNÁMKA: $\{A : A \leq_T \emptyset'\}$ JE VIAC AKO $\Sigma_1 \cup \Pi_1$

NAPR. $K \times \bar{K}$



DOMÁCE CVIČENIE:

$K \times \bar{K} \notin \Sigma_1 \cup \Pi_1$

PRETOŽE $K \leq_1 K \times \bar{K}$, $\bar{K} \leq_1 K \times \bar{K}$

(PEVNE ZVOLÍM $z_0 \in K$, $z_1 \in \bar{K}$)

$K \times \bar{K}$ JE TRIVIÁLNA BOOLEOVSKÁ KOMBINÁCIA K A $\bar{K}$.

$$K \times \bar{K} = \{\langle x, y \rangle \mid \underbrace{x \in K}_{\Sigma_1} \ \& \ \underbrace{y \notin K}_{\Pi_1}\}$$

DEFINÍCIA: A JE Σ_n - ÚPLNÁ $\Leftrightarrow$

(a) A JE Σ_n

(b) $\forall B \in \Sigma_n : B \leq_1 A$.

$\boxed{K \text{ JE } \Sigma_1\text{-ÚPLNÁ}}$

NAJZLOŽITEJŠIA MEDZI Σ_n PRE 1-PREVEDITEĽNOSŤ

20.04.2009
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

Σ_n-ÚPLNOSŤ (1-ÚPLNOSŤ = Σ_1-ÚPLNOSŤ)

(2) A JE R.S. V $\emptyset^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1}$

(3) $A \leq_T \emptyset^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

(1) $\emptyset^{(n)}$ JE Σ_n-ÚPLNÁ $(n \geq 1)$

TÁTO VETA ZVÄZUJE ARITM. HIERARCHIU S OP. SKOKU

DÔKAZ: (3) OKAMŽITE PLYNIE Z (2) PODĽA RELATIVIZOVANEJ POSTOVEJ VETY

$A \leq_T \emptyset^{(n)} \Rightarrow A, \bar{A}$ SÚ R.S. V $\emptyset^{(n)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ OBE V $\Sigma_{n+1} \Rightarrow A \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

$A \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1} \Rightarrow A, \bar{A}$ SÚ V $\Sigma_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A, \bar{A}$ SU R.S. V $\emptyset^{(n)} \Rightarrow A \leq_T \emptyset^{(n)}$.

EXISTUJE AJ ZNAČENIE: $\Delta^0_{n+1} = \Sigma^0_{n+1} \cap \Pi^0_{n+1}$

PRÁVE $\forall A \leq_T \emptyset^{(n)}$

(1) ... IHNEĎ

(i) $\emptyset^{(n)}$ JE R.S. V $\emptyset^{(n-1)}$ (VLASTNOSŤ SKOKU)

A PODĽA (2) JE Σ_n

(ii) $B \in \Sigma_n \Rightarrow B$ JE R.S. V $\emptyset^{(n-1)} \Rightarrow B \in \leq_1 \emptyset^{(n)}$

(2) INDUKCIA PODĽA n:

PRE $n = 0$ PLATÍ A JE R.S. $\Leftrightarrow A \in \Sigma_1$

INDUKČNÝ KROK:

$A \in \Sigma_{n+1}$ TJ. $A \equiv \exists \overset{\text{REZ}}{\mid} \underbrace{\forall \ldots Q(\ldots)}_{B \in \Pi_n}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{MÁME O 1} \\ \text{VOLNÚ PREM.} \\ \text{VIAC} \end{array} \right.$

PLATÍ $B \leq_T \emptyset^{(n)}$

PRETOŽE NEGÁCIA JE Σ_n

IND. PREDPOKLAD $\rightarrow$ B JE R.S. V $\emptyset^{(n-1)}$

$\leq_1 \emptyset^{(n)}$

TÝM SKÔR $\leq_T \emptyset^{(n)}$

TAKŽE PÔVODNÁ B ... $\leq_T \emptyset^{(n)}$

TJ. $A \equiv \exists (\leq_T \emptyset^{(n)})$
$\exists (\text{REK. V } \emptyset^{(n)})$ $\Big\} \Rightarrow$ A JE R.S. V $\emptyset^{(n)}$. $\square$

OPAČNE: <u>2 SPÔSOBY</u>

A JE R.S. V $\emptyset^{(n)}$

A = DEFINIČNÝ OBOR $\mathrm{dom}(\Phi_z(\emptyset^{(n)}))$

PRE NEJAKÉ z

$$x \in A \Leftrightarrow \exists \sigma \exists y, s \underbrace{\left(\underbrace{\Phi_{z,s}}_{\text{KROKY}}(\sigma)(x) \underbrace{=}_{\substack{\text{DEFINOVANIE} \\ A = Y}} y \ \& \ \sigma \leq \emptyset^{(n)} \right)}_{\text{REK. V } z, s, \sigma, x, y}$$

20.04.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$\exists \sigma \exists y, s \, (\text{REK.} \,\&\, \sigma \preccurlyeq \emptyset^{(n)})$

$\equiv \quad \exists (\sigma \preccurlyeq \emptyset^{(n)})$

AKO JE ZLOŽITÁ $\sigma \preccurlyeq \emptyset^{(n)}$?

KONEČNÁ KONJUNKCIA DĹŽKY $|\sigma|$

$\begin{cases} \sigma(j) = 1 \Rightarrow j \in \emptyset^{(n)} \\ \sigma(j) = 0 \Rightarrow j \notin \emptyset^{(n)} \end{cases}$ PRE $\forall j < |\sigma|$

σ JE $\sigma(0)\sigma(1) \ldots \sigma(|\sigma|-1)$

ZLOŽITOSŤ $j \notin \emptyset^{(n)}$?

PODĽA IND. PREDPOKLADU

$j \in \emptyset^{(n)} \ldots \Sigma_n$

$j \notin \emptyset^{(n)} \ldots \Pi_n$

$(\overline{\emptyset^{(n)}}$ JE $\Pi_n)$

PRETOŽE $\emptyset^{(n)}$ JE R.S. V $\emptyset^{(n-1)} \overset{\text{IND.PR.}}{\Rightarrow} \emptyset^{(n)}$ JE Σ_n

$\exists (\Sigma_n \,\&\, \Pi_n)$

AK TO UROBÍM ŠIKOVNE, DOSTANEM:

$\exists (\Pi_{n-1} \,\&\, \Pi_n) \equiv \Sigma_{n+1}$ $\square$

<u>DRUHÝ SPÔSOB</u> : POMOCOU VETY O LIMITNEJ VYČÍSLITEĽNOSTI.

$$A = \mathrm{dom}\left(\Phi_z(\emptyset^{(n)})\right)$$

PODĽA VETY O LIMITNEJ VYČÍSLITEĽNOSTI

$$\Phi_z(\emptyset^{(n)}) = \lim_s h(z, x, s)$$

KDE h JE $\emptyset^{(n-1)}$ ORF.

$$x \in A \Leftrightarrow \Phi_z(\emptyset^{(n)})(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists \text{ TÁ LIMITA}$$

$$\Leftrightarrow \exists s_0 \, \forall s \geq s_0 \, (\underbrace{h(z, x, s) = h(z, x, s_0)}_{\text{REK. V } \emptyset^{(n-1)}})$$

PODĽA IND. PR. .... $\Sigma_n \cap \Pi_n$

TEDY ŠPECIÁLNE JE Π_n

TJ. $$\underbrace{\exists s_0 \underbrace{\forall s \geq s_0 (\Pi_n)}_{\Pi_n}}_{\Sigma_{n+1}} . \quad \square$$

RELATIVIZOVANÁ FORMA :

$$A \leq_T B^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma^B_{n+1} \cap \Pi^B_{n+1}$$

$$A \text{ JE R.S. V } B^{(n)} \Leftrightarrow A \in \Sigma^B_{n+1}$$

20.04.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

PRÍKLAD: Tot JE Π_2 - ÚPLNÁ.

VIEME, ŽE Tot JE Π_2

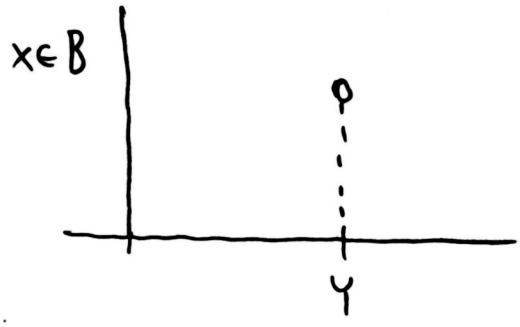
$$Tot = \{x : \forall y \exists s \underbrace{(\varphi_x(y)\downarrow \text{ ZA } \leq s \text{ KROKOV})}_{\equiv\ \varphi_{x,s}(y)\downarrow}$$

CHCEME UKÁZAŤ $B \in \Pi_2 \Rightarrow B \leq_1 Tot$.

$$x \in B \Leftrightarrow \forall y \exists s\ \underset{\sim}{Q}(x,y,s)$$

POMOCNÁ ČRF α

$$\alpha(x,y) \simeq \mu_s\, Q(x,y,s)$$



$x \in B \Leftrightarrow \forall y\ \exists\ \Sigma_1$ - SVEDOK s.

$x \notin B \Leftrightarrow \exists y_0\ \forall s\ (\neg Q(x,y_0,s))$

y_0 JE Σ_2 - SVEDOK

s-m-n: $\alpha(x,y) \simeq \varphi_{g(x)}(y)$

$x \in B \Leftrightarrow g(x) \in Tot$

$x \in B \Rightarrow$

$g(x)$ JE PROGRAM, KT. PRE $\forall y$ NÁJDE Σ_1-SVEDKA s_0

$x \notin B \Rightarrow$

y_0 JE Σ_2 - SVEDOK ...

VETA: Fin JE Σ_2 - ÚPLNÁ

Tot, Int SÚ Π_2 - ÚPLNÉ

$$\mathrm{Fin} \equiv \emptyset^{(2)}$$

$$\mathrm{Tot} \equiv \overline{\emptyset^{(2)}}$$

INTUITÍVNE: $\emptyset^{(n)}$ ... Σ_n - ÚPLNÁ

" PRAVDA V $\mathbb{N}$ O n KVANTIF. FORMULIACH "

$\leq_T \emptyset^{(n)}$ ... $\Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

PRÍKLAD: Rek JE Σ_3 - ÚPLNÁ.

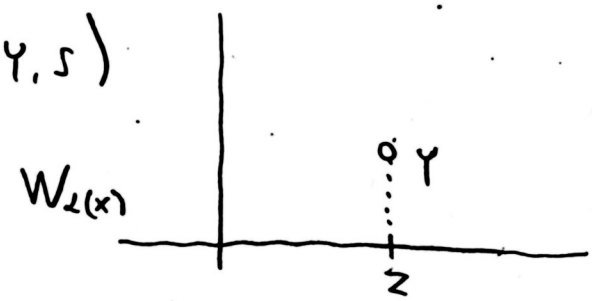
$\mathrm{Rek} = \{ x \mid W_x \text{ JE REK.} \} \in \Sigma_3$ (UŽ VIEME)

NECH $B \in \Sigma_3$

$x \in B \Leftrightarrow \exists z \forall y \exists s \; Q(x, z, y, s)$

$\downarrow$

Σ_3 - SVEDOK



POSTUPNÉ ÚPRAVY:

$W_{z(x)} = \{ \langle z, y \rangle : \exists s \; Q(\ldots) \}$

$W_{B(x)}$ = KAŽDÝ STĹPEC .. SÚVISLÝ POČIATOČNÝ ÚSEK

$= \{ \langle z, y \rangle : \forall j \leq y \; \exists s \; Q(x, z, j, s) \}$

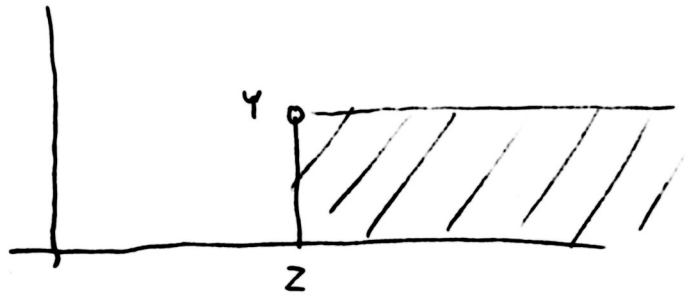
20.04.2009
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$x \in B \Rightarrow$ EXISTUJE STĹPEC z ... JE PLNÝ

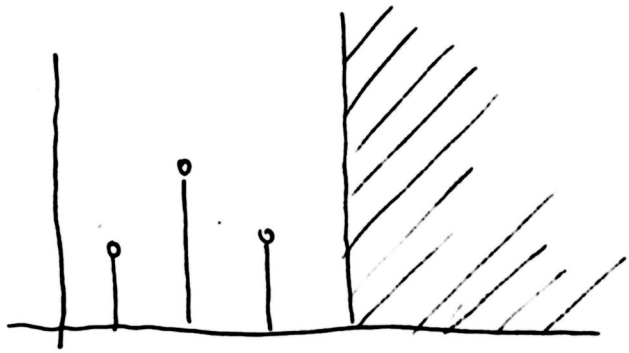
$x \notin B \Rightarrow W_{B(x)}$ .. $\forall$ STĹPCE KONEČNÉ

$W_{2(x)}$ = STĹPCE RASTÚ SMEROM DOPRAVA



S BODOM $\langle z, y \rangle$ PRIDAJ VŠETKY $\langle i, j \rangle$
$i > z$, $j \leq y$.

$x \in B \Rightarrow$ NIEKOĽKO KONEČNÝCH STĹPCOV
A POTOM VŠETKO ...



JE TO REKURZÍVNA MNOŽINA

$x \notin B \Rightarrow$ VŠETKY STĹPCE KONEČNÉ

POSLEDNÁ ÚPRAVA ...

$E = \{ \langle z, j \rangle : z \in K \ \& \ j \leq$ POČET KROKOV, KEDY z VSTÚPI DO $K \}$

HORNÝ ODHAD POČTU KROKOV, POKEDY $z \in K$.

$W_{\delta(x)} = W_{\vartheta(x)} \cup E$ ... HĽADANÁ MNOŽINA

$x \in B \Rightarrow$ NIEKOĽKO KONEČNÝCH STĹPCOV ZVYŠOK VŠETKO $\rightarrow$ REK. MNOŽINA

$x \notin B \Rightarrow$ VŠETKY STĹPCE KONEČNÉ

ALE $W_{\delta(x)}$ JE ISTOTNE NEREKURZÍVNA !

SPOROM. AK BY BOLA $W_{\delta(x)}$ REK.

$\Rightarrow \exists$ ORF $H(z)$: $H(z) = \mu_y \left(\langle z, y \rangle \notin W_{\delta(x)} \right)$

$z \in K \Leftrightarrow z \in K$ ZA $\leq H(z)$ KROKOV

$\Rightarrow K$ JE REKURZÍVNA, ČO JE SPOR $\lightning$.

$\boxed{x \in B \Leftrightarrow W_{\delta(x)} \text{ JE REKURZÍVNA.}}$ $\square$

20.04.2009 Mo
PETER ČERNO

NTINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

Rek JE Σ_3 - ÚPLNÁ $\Rightarrow$ NIEJDE VYJADRIŤ AKO Σ_2, ANI Π_2.

$\mathrm{Rek} \equiv \emptyset^{(3)}$

$\emptyset^{(3)} = (\emptyset^{(2)})'$

$\emptyset^{(3)}$ NIE JE REK. V $\emptyset^{(2)}$.

AK BY BOLA V Σ_2 (RESP. V Π_2) $\Rightarrow \in \Sigma_3 \cap \Pi_3 \Rightarrow \leq_T \emptyset^{(2)}$ ↯

27.04.2009
PETER ČERNO

NTINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

TRIEDY NEKONEČNÝCH VETIÍ CEZ REKURZÍVNE STROMY (Π^0_1 TRIEDY)

REK. STROM $\subseteq 2^{<\omega}$ = PRÁVE VŠETKY 0,1 - REŤAZKY (STRINGY)

ALEBO $\omega^{<\omega}$ = KONEČNÉ REŤAZKY Z ω

MY ... $2^{<\omega}$ (KVÓLI KOMPAKTNOSTI)

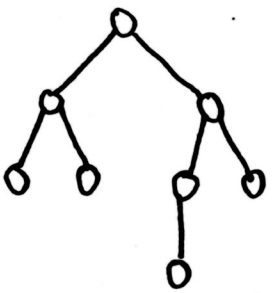
2^ω ... CANTOROV PRIESTOR

(ÚPLNÝ METRICKÝ KOMPAKTNÝ PRIESTOR)

$$\rho(f,g) = \begin{cases} 0 & f=g \\ 2^{-x_0} & x_0 = \text{NAJMENŠIE } x : f(x) \neq g(x) \end{cases}$$

$2^{<\omega}$ STROM ... PODMNOŽINA $2^{<\omega}$ UZAVRETÁ NA POČIATOČNÉ SEGMENTY

$T \quad \sigma \in T \ \& \ \tau \leq \sigma \rightarrow \tau \in T$



NAŠE STROMY → BINÁRNE

REKURZÍVNY STROM

STROM, KT. JE REKURZÍVNY (MNOŽINA)

$\sigma \in T$ → ÁNO / NIE

Π^0_1 TRIEDY MNOŽIN (= 0,1 FUNKCIÍ)

PRÁVE TRIEDY 0,1 - FUNKCIÍ

TRIEDY VŠETKÝCH NEKONEČNÝCH VETIEV CEZ NEJAKÝ REK. STROM

T .. STROM ... f NEKONEČNÁ VETVA CEZ T

$f\restriction_n$ = POČIATOČNÝ ÚSEK DĹŽKY n: $f(0)\ldots f(n-1)$

INTUÍCIA: $\{ f : \forall n \underbrace{(f\restriction_n \in T)}_{\text{REK. PODMIENKA}} \}$ T JE REK.

$\Rightarrow \Pi^0_1$

$T = 2^{<\omega}$

NESPOČETNE VEĽA NEK. VETIEV

DÔLEŽITOSŤ Π^0_1 TRIED

ROZUMNÁ TEÓRIA 1. RÁDU AXIOMATIZOVATEĽNÁ (TJ. FORMULA JE DOKÁZATEĽNÁ V TEJTO TEÓRII $\equiv$ R.S.)

MNOŽINA VŠETKÝCH ÚPLNÝCH (KOMPLETNÝCH) ROZŠÍRENÍ ... JE Π^0_1.

27.04.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

PRÍKLAD: ROBINSON, PA, TM

R JE TEÓRIA 1. RÁDU, KT. JE AXIOMATIZOV.

CHCEME ... REKURZÍVNY STROM T TAK, ABY
NEKONEČNÉ VETVY T ~ ÚPLNÉ ROZŠÍRENIA T

$\alpha \in T \Leftrightarrow$ "α" JE BEZSPORNÝ DO $|\alpha|$ KROKOV

$\alpha = \underbrace{\alpha(0), \ldots, \alpha(|\alpha|-1)}$

true/false OHODNOTENIE PRVÝCH $|\alpha|$ FORMULÍ
(V FORMULE MÁME OČÍSLOVANÉ)

& α MUSÍ BYŤ KOMPATIBILNÉ PRE
FORMULE S ČÍSLAMI $0, \ldots, |\alpha|-1$
S TÝM, ČO SA DOKÁŽE V R ZA $|\alpha|$ KROKOV

TJ. KEĎ SA FORMULA $j < |\alpha|$ DOKÁŽE
DO $|\alpha|$ KROKOV $\rightarrow \alpha(j) = 1$
VYVRÁTI $\rightarrow \alpha(j) = 0$

α JE NÁDEJNÝ ZAČIATOK KOMPLETNÉHO ROZŠÍRENIA
R .... ZA $|\alpha|$ KROKOV

VIDÍME, ŽE T JE REKURZÍVNY STROM.

PLATÍ: TRIEDA $\{f : \forall n (f\restriction_n \in T)\} =$

= PRÁVE VŠETKY NEKONEČNÉ VETVY STROMU T

= PRÁVE VŠETKY KOMPLETNÉ ROZŠÍRENIA R.

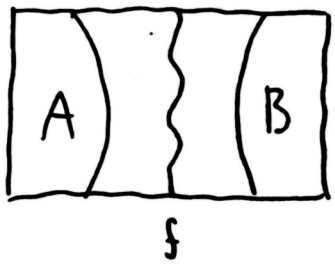
TO JE VIDIEŤ:

f JE KOMPL. ROZŠÍRENIE R $\rightarrow$ JE "VŽDY NÁDEJNÉ"

$\forall n (f\restriction_n \in T) \rightarrow f$ JE KOMPLETNÉ ROZŠÍRENIE

PRÍKLAD: A, B ... R.S. MNOŽINY, DISJUNKTNÉ

$Sep(A, B) = \{f : f$ SEPARUJE $A, B\}$



$\forall x (x \in A \rightarrow f(x) = 1$
$x \in B \rightarrow f(x) = 0)$

AK A, B SÚ R.S. $\Rightarrow$ $Sep(A, B)$ JE Π^0_1

DÔKAZ: α .. NÁDEJNÝ RETAZOK

TJ. α SEPARUJE A_s, B_s, KDE $s = |\alpha|$.

SPOMEŇTE SI: A, B EF. NEODDELITEĽNÉ

$Sep(A, B)$ NEMÁ <u>ŽIADNU</u> NEKONEČNÚ REKURZÍVNU VETVU !!!

(EF. NEODDELITEĽNOSŤ $\Rightarrow$ REK. NEODDELITEĽNOSŤ)

27. 04. 2003 M.
PETER ČERNO

NTINO65 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$Sep(A,B)$ A, B EFEKT. NEODD., R.S.

NEPRÁZDNA Π_1^0 TRIEDA

DOKONCA MÁ NESPOČETNE VEĽA PRVKOV

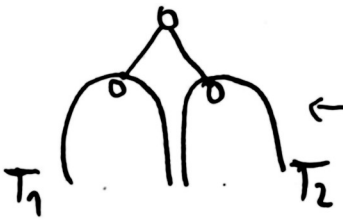
ALE: NEMÁ ŽIADEN REK. PRVOK

ŽIADNU NEKONEČNÚ REKURZÍVNU VETVU

NEKONEČNÝ REKURZÍVNY STROM, KTORÝ MÁ NESPOČETNE VEĽA NEKONEČNÝCH VETIEV ALE ŽIADNA REKURZÍVNA

≡ BIN. BLUDISKO – VEĽA NEKONEČNÝCH CIEST, ŽIADNA REKURZÍVNA

KÖNIGOVO LEMMA: BIN. STROM JE NEKONEČNÝ $\Leftrightarrow$ MÁ NEKONEČNÚ VETVU (KOMPAKTNOSŤ)



← OBA PODSTROMY KONEČNÉ → CELÝ STROM KONEČNÝ

$\Rightarrow$ ASPOŇ 1 PODSTROM NEKONEČNÝ

→ VYROB NEKONEČNÚ VETVU

(TOTO NIE JE EFEKTÍVNE ANI PRE REK. STROMY)

AKÁ ZLOŽITÁ JE OTÁZKA: PODSTROM T_1 JE KONEČNÝ

$\exists$ HĹBKA (VŠETKO V T_1 V TEJTO HĹBKE UMRIE)

$\exists h \forall \alpha \, (|\alpha| = h \rightarrow \alpha \notin T_1)$

OHRANIČ.

Σ_1-OTÁZKA

$\emptyset'$ ... DOKÁŽE ODPOVEDAŤ

INŠPEKCIA ŠTAND. DÔKAZU KÖNIGOVHO LEMMATU

$\rightarrow$ NEK. REK. STROM T ... MÁ NEK. VETVU JE REK. V $\emptyset'$.

$\emptyset'$ JE DOBRÝ SPRIEVODCA ... DOKÁŽE NÁJSŤ NEKONEČNÚ CESTU CEZ BINÁRNE REK. BLUDISKO.

PRÍKLAD: EXISTUJE KOMPLETNÉ ROZŠÍRENIE PEANOVEJ ARITMETIKY, KT. JE $\leq_T \emptyset'$ (HODNE DIVOKÉ)

ŠTANDARDNÁ PRAVDA $\mathbb{N} \models PA$ ... $\underset{\sim}{0}^{(\omega)}$

ODBOČKA: VZŤAH K MODELOM TEORIÍ

KOMPLETNÉ ROZŠÍRENIE $\longrightarrow$ MODEL

(JE ALE ZLOŽITEJŠIE)

OTÁZKA: AKÉ SÚ T-STUPNE (INFORMÁCIE), KTORÉ SÚ TAKÍTO SPRIEVODCI

$\underset{\sim}{a}$ ... PRE KAŽDÝ NEK. REK. STROM T

$\exists f \, (f$ NEK. VETVA T & $\deg(f) \leq \underset{\sim}{a})$

27.04.2006
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

$\underset{\sim}{a}$ JE TAKÁ INFORMÁCIA ... NÁJDE CESTU V ĽUBOVOĽNOM NEK. REK. STROME

VETA: EKVIVALENTNÉ:

(1) $\underset{\sim}{a}$ JE STUPEŇ KOMPLETNÉHO ROZŠÍRENIA ROBINSON, PA, ZAS (ZIMNÝ SEMESTER)
TJ. ROZUMNÉ AXIOM. TEÓRIE S MIN. ARITM. SILOU

(2) $\underset{\sim}{a}$ JE STUPEŇ MNOŽINY SEPARUJÚCEJ NIEJAKÚ EFEKT. NEODDELITEĽNÚ DVOJICU R.S. MN.

(3) $\underset{\sim}{a}$ JE SPRIEVODCA: PRE KAŽDÝ NEK. REK. STROM T EXISTUJE f NEK. CESTA V T A $dg(f) \leq \underset{\sim}{a}$ ... $\underset{\sim}{a}$ DOKÁŽE NÁJSŤ f.

BEZ DÔKAZU
SÚ I TAKÉ ... $< \underset{\sim}{0}'$.

04.05.2009 Mo
PETER ČERNO

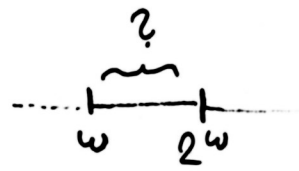
NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

ARITMETICKÝ FORCING - GENERIČNOSŤ

. TOPOLOGICKY "VEĽA"
TOPOLOGICKY "TYPIČNOSŤ" } VZHĽADOM K NEJAKEJ TRIEDE PODMIENOK

PRESNEJŠIE: OTVORENÉ MN., HUSTÉ, RIEDKE,
1. KATEGÓRIA, 2. KATEGÓRIA = "VEĽA"

V TEÓRII MNOŽÍN: HYPOTÉZA KONTINUA



COHEN: HC NEZÁVISÍ NA
"ŠTANDARDNÝCH AXIÓMOCH TEÓRIE MNOŽÍN"

NESKÔR SA ZISTILO
⇝ ZOVŠEOBECNENIE "BAIROVEJ VETY O KATEGÓRIACH":
ÚPLNÝ METRICKÝ PRIESTOR NIE JE 1. KATEGÓRIE
(TJ. JE 2. KATEGÓRIE)

JEDNODUCHŠIA VERZIA (V TEÓRII REKURZIE,
NIE MNOŽINOVÝ FORCING, ALE ARITM. FORCING)

VEZMIME ČRF Φ, ZVOĽME PEVNE x_0 (NAPR. $=0$)
A SKÚMAJME $\{X : \Phi(X)(x_0)\downarrow\}$

OTVORENÁ V $2^\omega = \{0\text{-}1 \text{ FCIE. } \omega \to \omega\}$
= ÚPLNÝ METRICKÝ PRIESTOR

NAPR. PRE METRIKU $\rho(f,g) = \begin{cases} =0 & f=g \\ 2^{-y_0} & y_0 \text{ NAJM. } f(y_0) \neq g(y_0) \end{cases}$

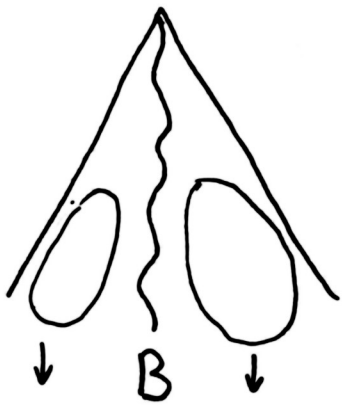
AK $\Phi(X)(x_0)\downarrow$, POTOM KONVERGUJE VĎAKA NEJAKÉMU
$\rho \preccurlyeq X$ ... TAKŽE PRE $\forall Y \succcurlyeq \rho \;\; \Phi(Y)(x_0)\downarrow$

DÔLEŽITÝ JE KONEČNÝ ZAČIATOK

$\{ X : \Phi(X)(x_0)\uparrow \}$ ... ISTE UZAVRENÁ

JE MOŽNÉ, ŽE OPÄŤ EXISTUJE ZAČIATOK X, KTORÝ ROZHODNE?
V TOMTO PRÍPADE NIE ...

ZVOLÍME ĽUBOVOĽNÚ REKURZÍVNU MNOŽINU B
VYROBÍME Φ TAKÉ, ŽE $\boxed{\Phi(X)(\emptyset)\downarrow \Leftrightarrow X \neq B.}$



Φ DIVERGUJE NA IZOLOVANOM BODE B

ORÁKULUM MÁME K DISPOZÍCII

REKURZÍVNA MN.

$$\Phi(X)(\emptyset)\downarrow \Leftrightarrow \exists z\,(X(z) \neq B(z)) \ \ldots$$

TOTO JE PROGRAM S ORÁKULOM PRE X.

$$\mu_z(X(z) \neq B(z))$$

ZIADNY KONEČNÝ ZAČIATOK $\underbrace{\rho \in 2^{<\omega}}$ NEROZHODUJE!
TJ. NEZAISTÍ, ABY VŠETKY $Y \succeq \rho$ ... $\Phi(Y)(\emptyset)\uparrow$

04.05.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

TOPOLOGICKY: $\mathcal{A} = \{X : \Phi(X)(\emptyset)\uparrow\}$ ... UZAVRENÁ

VNÚTRO TEJTO MNOŽINY ... BODY, KTORÉ V TEJTO UZAVRENEJ MNOŽINE LEŽIA S NEJAKÝM OKOLÍM

$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ ... VNÚTRO $\mathcal{A}$

JEDINÉ, ČO VADÍ, JE HRANICA $\mathcal{A}$ ... $\mathcal{A} - \mathrm{Int}(\mathcal{A})$

VIĎ NÁŠ PRÍKLAD REKURZÍVNEJ MNOŽINY $\mathcal{B}$

FAKT: $\mathcal{A} - \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ ... TOPOLOGICKY MÁLO V ÚPLNOM METRICKOM PRIESTORE ... 1. KATEGÓRIA

IDEA: KONEČNÁ APROXIMÁCIA PRAVDY (VLASTNOSTI, SPLNENIA PODMIENKY)

PODMIENKA ... ROZHODNUTÁ KONEČNÝM ZAČIATKOM

1-KVANTIFIKÁTOROVÉ PODMIENKY $\Phi(\ldots)\downarrow$, $\Phi(\ldots)\uparrow$

SÍCE NEJDE VŽDY, ALE V TOPOLOGICKOM ZMYSLE PRE "VÄČŠINU"

$\Rightarrow$ KEĎ TO NIEČO "MÁLO" MHODÍM, TAK TÁ "VÄČŠINA" SA UŽ SPRÁVA PEKNE

DEFINÍCIA: A JE 1-GENERICKÁ $\Leftrightarrow$

$\forall e\, \exists \alpha \preceq A \big(\Phi_e(\alpha)(e)\downarrow$ ALEBO TZV. SILNÁ DIVERGENCIA, TJ. $\forall Y \succeq \alpha \;\; \Phi_e(Y)(e)\uparrow \big)$

$\equiv \forall Y \succeq \alpha \;\; \Phi_e(Y)(e)\downarrow$

α ZÁVISÍ NA e ...

TJ. KONEČNÝM ZAČIATKOM VIEME ROZHODOVAŤ

1-GENERICKÉ MN. MAJÚ "PEKNÉ SPRÁVANIE"
SÚ "TYPICKÉ" A SÚ TOP. "SKORO VŠETKY"
(2. KATEGÓRIA)

<u>VIEME</u>: ŽIADNA REKURZÍVNA MNOŽINA
NIE JE 1-GENERICKÁ.

α_e ... FORCING TEJTO VLASTNOSTI PRE Φ_e

TOTO JE IBA JEDNODUCHÝ ZAČIATOK

$$\underbrace{\Phi(\ldots)(\ldots)\downarrow \quad \text{ALEBO} \quad \Phi(\ldots)(\ldots)\uparrow}_{\text{1-KVANTIFIKÁTOROVÉ VLASTNOSTI}}$$

$\Rightarrow$ PRETO SA NAZÝVA 1-GENERICKÁ

ĎALŠIE ZOVŠEOBECNENIE: 2-GENERICKÁ,
n-GENERICKÁ, ARITMETICKY GENERICKÁ

n-GENERICKÉ MNOŽINY SÚ V TOPOL. ZMYSLE
TYPICKÉ PRE n-KVANTIFIKÁTOROVÉ FORMULE
(VLASTNOSTI, ...)

NAPR. Y NEKONEČNÁ ... $\underbrace{\forall x \exists y}_{\text{2 KVANTIFIKÁTORY}} (y > x \ \& \ y \in A)$

04.05.2009 M.
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

VETA: EXISTUJE 1-GENERICKÁ $A \leq_T \emptyset'$.

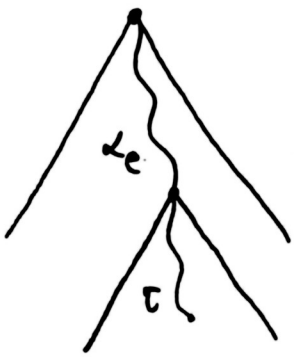
DÔKAZ: MUSÍME SPLNIŤ SPOČETNE VEĽA PODMIENOK:
$\forall e \, \exists \alpha_e$

BUDEM SPĽŇAŤ KAŽDÚ, POSTUPNE, TAKÝM SPÔSOBOM, ŽE NA ĎALŠIE ZOSTANE "DOSŤ PRIESTORU"

INDUKČNÝ KROK: MÁME HOTOVO ... $\alpha_e \in 2^{<\omega}$

BUDEME SPĽŇOVAŤ Φ_{e+1} ... ?

QUESTION: $\boxed{\exists \tau \succ \alpha_e \, \left(\Phi_{e+1}(\tau)(e+1)\downarrow \right)}$?



TJ. $\exists \tau \succ \alpha_e \, \exists s \, \underbrace{\left(\Phi_{e+1,s}(\tau)(e+1)\downarrow \right)}_{= \text{REK. PODMIENKA}}$

$\exists$ (REK.)
$= \Sigma^0_1$ - PODMIENKA
$\Rightarrow \leq_T \emptyset'$

$\emptyset'$ DOKÁŽE ODPOVEDAŤ

CASE YES: PODĽA HESLA "PRVÉ, KT. NÁJDEŠ"
$\alpha_{e+1} := \tau$

CASE NO: $\alpha_{e+1} := \alpha_e$ NIE JE NUTNÉ NIČ ROBIŤ.

$\forall \tau \succeq \alpha_e : \left(\Phi_{e+1}(\tau)(e+1)\uparrow \right)$

STAČÍ POLOŽIŤ: $A = \bigcup_e \alpha_e$.

≡ COHENOV FORCING

≡ METÓDA KONEČNÉHO PREDĆŽENIA

PRÍKLAD: MÁME NEKONEČNÝ REK. STROM.
A PÝTAME SA, či EXISTUJE NEKONEČNÝ REK. PODSTROM, KT. SPĽŇA NEJAKÚ PODM. NEGATÍVNE ALEBO JE CELÝ STROM O.K.

... TZV. FORCING Π^0_1 TRIED

PRÍKLAD: <u>TEÓRIA MIERY</u>

MÁME "PEKNÚ" MNOŽINU ... KLADNEJ MIERY ...
+ ĎALŠIU PODMIENKU

EXISTUJE PODMNOŽINA KLADNEJ MIERY, KT. TIEŽ SPĽŇA PODMIENKU?

18.05.2009 Mo
PETER ČERNO

NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

DNES:

PLANE (ORIGINAL) KOLMOGOROV COMPLEXITY

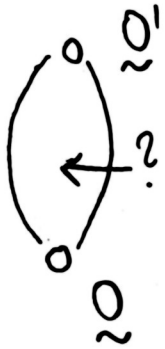
$C(y) = \min\{|x|,\ x \text{ POPIS } y\}$ (my používame K)

PREFIX-FREE KOLMOGOROV COMPLEXITY

$K(y) = \min\{|x|,\ x \text{ JE PREFIX-FREE POPIS } y\}$

(my používame K^p)

KONSTRUKCIA R.-S. MNOŽÍN



R-S. A $\quad \underset{\sim}{0} < dg(A) < \underset{\sim}{0}'$

56-57 FRIEDBERG, MUČNIK

PRIORITNÁ METÓDA < PRIORITY METHOD / INJURY METHOD

VETA: $\exists$ R.S. A, B ... T-NEPOROVNATEĽNÉ

$dg_T(A)$, $dg_T(B)$ T-NEPOROVNATEĽNÉ

$\Rightarrow$ OBE SÚ OSTRO MEDZI $\underset{\sim}{0}$ A $\underset{\sim}{0}'$.

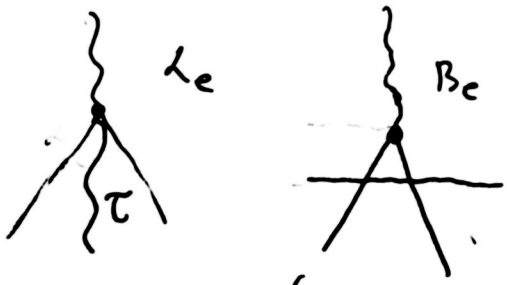
DOKÁŽEME SLABŠIE: <u>NIE</u> R.S. A, B,
OBE POD $\leq_T \emptyset'$.

DÔKAZ V KROKOCH, POMOCOU $\emptyset'$

<u>KROK e:</u>

HOTOVO α_e, β_e
KONEČNÉ RETAZCE,
POČIATKY A, B

$\Phi_e(A) \neq B, \quad \Phi_e(B) \neq A$



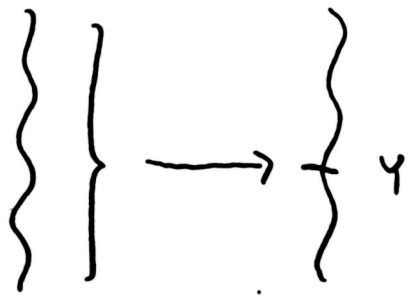
PRVÉ VOLNÉ ČÍSLO $y = |\beta_e|$
(POČÍTANE OD 0)

<u>Q</u>: $\exists \tau \geq \alpha_e \left(\Phi_e(\tau)(y)\downarrow = 0 \right)$

YES $\rightarrow$ $\alpha_{e+1} = \tau$, $\beta_{e+1} = \beta_e * 1$
NO $\rightarrow$ $\alpha_{e+1} = \alpha_e$, $\beta_{e+1} = \beta_e * 0$

PROBLÉM: AKO UROBIŤ R.S. MN. A, B

IZOL. STRATÉGIA



DRŽ MIMO B
$y \notin B$
ZMRAZ KUS A ... DAJ y DO B

GENERUJE A

18.05.2009 Po
PETER ČERNO

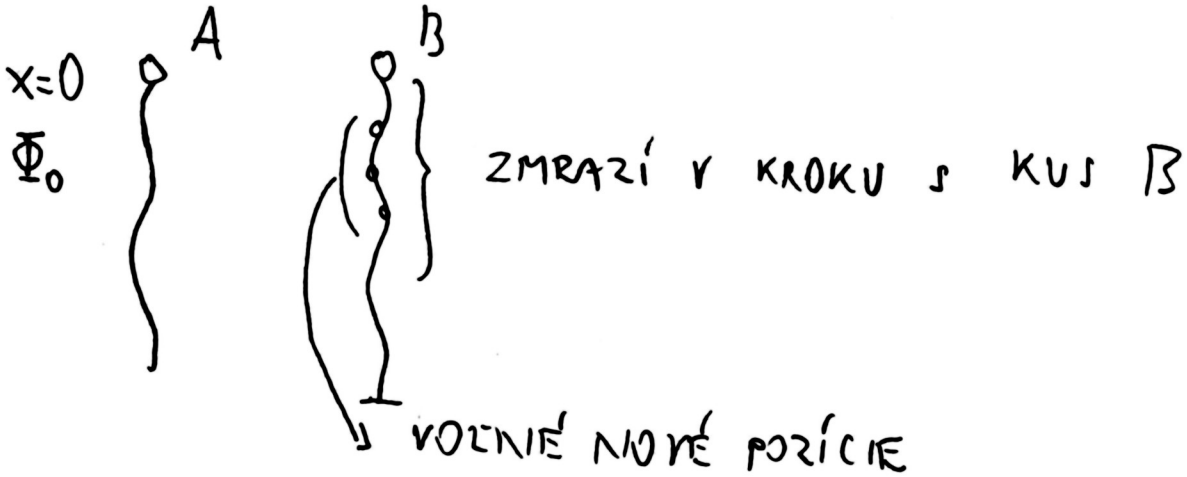
NTIN065 VYČÍSLITEĽNOSŤ II

PROBLÉM : ∞ - VEĽA POŽIADAVIEK

RIEŠENIE : USP. PRIORIT (PRIORITNÁ METÓDA)

$$\Phi_0(A) \neq B, \quad \Phi_0(B) \neq A, \quad \Phi_1(A) \neq B, \ \ldots$$

AK VYŠŠIE POSTAVENÝ NIEČO CHCE ...
DOSTANE TO ... PORUŠÍ NIŽŠIE POSTAVENÝCH



Φ_e JE PORUŠENÝ NAJVIAC 2^e KRÁT
(FINITE INJURY, $\emptyset'$ - INJURY, ...)