Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Teorie množin

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.
E-mail: Petr.Simon@mff.cuni.cz

Anotace: Seznámení se základními pojmy teorie množin v rozsahu nezbytném k porozumění dalším matematickým přednáškám.

Sylabus:

1. Historické pozadí vzniku teorie množin, zdůvodnění její axiomatické výstavby.
2. Axiomy teorie množin.
3. Základní operace: Inkluse, sjednocení, průnik, diference, dvojice, kartézský součin, relace, funkce.
4. Uspořádání, dobré uspořádání, ordinální čísla, přirozená čísla, základy ordinální aritmetiky.
5. Spočetné a nespočetné množiny, kardinální čísla, Cantor-Bernsteinova věta, kardinální aritmetika,Königova nerovnost.
6. Třídy a relace, princip transfinitní indukce a rekurse.
7. Axiom výběru a jeho ekvivalenty.
8. Základy nekonečné kombinatoriky: Princip kompaktnosti, Lemma o Delta- systému, lemma o disjunktním zjemnění, stacionární množiny, Ulamova matice, pressing down lemma, Ramseyova věta.

Cíl předmětu: Naučit základy teorie množin.

Literatura:

1. B. Balcar, P. Štěpánek, Teorie množin, Academia, Praha 1986
2. K. Kunen, Set Theory, North Holland 1980
3. B. Balcar, P. Štěpánek, Teorie množin, skriptum MFF UK, Praha 1974, 1980

19.02.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

R. BALCAR, P. ŠTEPÁNEK : TEORIE MNOŽIN, ACADEMIA
K. KUNEN : SET THEORY, NORTH-HOLLAND
X R. BALCAR, P. ŠTEPÁNEK : TEORIE MNOŽIN, SKRIPTA

MIESTNOSŤ : 304
KONZULTÁCIA : PIATOK 10.30 - 12.00

ZAKLADATEĽ TEÓRIE MNOŽÍN : G. CANTOR

"MNOŽINOU ROZUMIEME KAŽDÉ ZHRNUTIE URČITÝCH A NAVZÁJOM RÔZNYCH PREDMETOV m NÁŠHO MYSLENIA, KTORÉ SA NAZÝVAJÚ PRVKY, DO JEDINÉHO CELKU M."

B. RUSSEL

$m \in M$ m PATRÍ DO MNOŽINY M

L = MNOŽINA VŠETKÝCH MNOŽÍN
ZREJME L MNOŽINA, JEDNOZNAČNE URČENÁ SVOJIMI PRVKAMI

K = MNOŽINA VŠETKÝCH MNOŽÍN m TAKÝCH, ŽE $m \notin m$

OTÁZKA : $K \in K$?

$K \in K \Rightarrow$ PODĽA DEF. $K \notin K$
$K \notin K \Rightarrow$ PODĽA DEF. $K \in K$

TZV. RUSSELOV PARADOX

$\Rightarrow$ TEÓRIA MNOŽÍN JE SPORNÁ

RICHARDSOV PARADOX

"BUĎ n NAJMENŠIE PRIRODZENÉ ČÍSLO, KTORÉ NEMOŽNO DEFINOVAŤ MENEJ NEŽ TRIDSIATMI ČESKÝMI SLOVAMI."

JAZYK TEÓRIE MNOŽÍN

OBSAHUJE NASLEDUJÚCE SYMBOLY:

(i) PREMENNÉ PRE MNOŽINY: $x, y, z, m, n, \ldots$

(ii) DVA BINÁRNE PREDIKÁTY: $\in$, $=$

(iii) SYMBOLY PRE LOGICKÉ SPOJKY $\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

(iv) $(\forall x)$, $(\exists x)$

(v) POMOCNÉ SYMBOLY $($, $)$, ..

= LOGIKA PRVÉHO RÁDU S JAZYKOM $L = \{\in\}$. (S ROVNOSŤOU)

$x \in y$ ČÍTAME "x JE PRVKOM y"

$x = y$ ČÍTAME "MNOŽINA x JE ROVNÁ MN. y"

POUŽÍVAME SKRATKY

$x \notin y$ ZA $\neg(x \in y)$

$x \neq y$ ZA $\neg(x = y)$

FORMULE

(i) KEĎ SÚ x, y PREMENNÉ PRE MNOŽINY, POTOM VÝRAZY $(x = y)$ A $(x \in y)$ SÚ FORMULE JAZYKA TEÓRIE MNOŽÍN, KTORÉ NAZÝVAME ATOMICKÉ

NAIL063 TEÓRIA MNOŽÍN

(ii) KEĎ SÚ φ A ψ FORMULE, POTOM AJ VÝRAZY:

$\neg\varphi$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

SÚ FORMULE

(iii) KEĎ JE x PREMENNÁ PRE MNOŽINY, φ FORMULA, POTOM VÝRAZY

$(\forall x)\varphi$ A $(\exists x)\varphi$

SÚ FORMULE

(iv) KAŽDÁ FORMULA VZNIKÁ KONEČNOU APLIKÁCIOU PRAVIDIEL (i), (ii), (iii).

$x\,y\,($ NIE JE FORMULA

$((\exists x)(x=y) \& (\forall z)(z \in x))$ JE FORMULA

DEFINÍCIA: HOVORÍME, ŽE VÝSKYT PREMENNEJ x VO FORMULI φ JE VIAZANÝ, AK JE SÚČASŤOU NEJAKEJ PODFORMULE TVARU $(\exists x)\psi$ ALEBO $(\forall x)\varphi$. AK NIE JE VÝSKYT PREMENNEJ x VO FORMULI φ VIAZANÝ, POTOM SA TAKÝ VÝSKYT NAZÝVA VOĽNÝ.

HOVORÍME, ŽE PREMENNÁ x JE VIAZANÁ VO FORMULI φ, KEĎ MÁ V NEJ VIAZANÝ VÝSKYT.

PREMENNÁ x JE VO FORMULI φ VOĽNÁ, KEĎ MÁ V NEJ VOĽNÝ VÝSKYT.

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((x=y) \& ((y=z) \& (x=z)))$

$$((x \in z) \,\&\, (\exists x)(x \in y)) = \varphi$$

$\uparrow$ VOĽNÝ VÝSKYT $\uparrow$ VIAZANÝ VÝSKYT

x JE VOĽNÁ AJ VIAZANÁ VO φ

KEĎ JE φ FORMULA, $x_1, x_2, \dots, x_n$ PREMENNÉ VO FORMULI φ, KTORÉ SÚ VŠETKY VOĽNÉ VO φ TÚTO SKUTOČNOSŤ ZAPISUJEME $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

SUBSTITÚCIA: MAJME FORMULU $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$
POTOM $\varphi(x_1, \dots, u, \dots, x_n)$ OZNAČUJE FORMULU, KTORÁ VZNIKNE Z FORMULE φ

a) KAŽDÝ VOĽNÝ VÝSKYT PREMENNEJ x_i NAHRADÍME PREMENNOU u

b) KEĎ SA VO FORMULI φ VYSKYTUJÚ VIAZANÉ VÝSKYTY PREMENNEJ u, NAHRADÍME ICH VŠETKY PREMENNOU, KTORÁ SA VO FORMULI φ VÔBEC NEVYSKYTUJE

$$\varphi(x, y, z) = ((\exists x)(x = y) \,\&\, (x \in z))$$
$$\varphi(u, y, z) = ((\exists x)(x = y) \,\&\, (u \in z))$$

FORMULA, V KTOREJ MAJÚ VŠETKY PREMENNÉ IBA VIAZANÝ VÝSKYT, SA NAZÝVA UZAVRENÁ FORMULA

19.02.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEÓRIA MNOŽÍN

AXIÓMY TEÓRIE MNOŽÍN (ZERMELO-FRAENKEL)

0. AXIÓM EXISTENCIE

$(\exists x)(x = x)$

"EXISTUJE ASPOŇ JEDNA MNOŽINA."

1. AXIÓM EXTENSIONALITY

$((\forall u)((u \in x) \leftrightarrow (u \in y)) \rightarrow (x = y))$

"MNOŽINY, KTORÉ MAJÚ TIE ISTÉ PRVKY, SA SEBE ROVNAJÚ."

2. SCHÉMA AXIÓMU VYDELENIA

KEĎ JE $\varphi(x)$ FORMULA, KTORÁ NEOBSAHUJE VOĽNE PREMENNÚ z, POTOM FORMULA

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \leftrightarrow ((x \in a) \& \varphi(x)))$

JE AXIÓM TEÓRIE MNOŽÍN, KTORÝ NAZÝVAME AXIÓM VYDELENIA PRE φ.

3. AXIÓM DVOJICE

$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$

"ĽUBOVOĽNÉ DVE MNOŽINY URČUJÚ DVOJPRVKOVÚ MNOŽINU."

4. AXIÓM SUMY

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (\exists y)((x \in y) \& (y \in a)))$

"KU KAŽDEJ MNOŽINE a EXISTUJE MNOŽINA VŠETKÝCH PRVKOV, KTORÉ NÁLEŽIA NEJAKÉMU PRVKU MNOŽINY a."

5. AXIOM POTENCIE

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)((x \in z) \leftrightarrow (x \subseteq a))$$

"KU KAŽDEJ MNOŽINE JE DANÁ MNOŽINA VŠETKÝCH JEJ PODMNOŽÍN."

6. SCHÉMA AXIOMOV

KEĎ JE $\psi(u,v)$ FORMULA, KTORÁ NEOBSAHUJE VOĽNE PREMENNÉ w A z, POTOM FORMULA

$$(\forall a)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \& \psi(u,w)) \to (v = w)) \to$$
$$(\forall a)(\exists z)(\forall v)((v \in z) \leftrightarrow (\exists u)((u \in a) \& \psi(u,v)))$$

JE AXIÓM TEÓRIE MNOŽÍN, AXIÓM NAHRADENIA PRE FORMULU ψ.

"DEFINOVATEĽNÉ ZOBRAZENIE, ZOBRAZENIE MNOŽINY NA MNOŽINU."

7. AXIÓM NEKONEČNA

$$(\exists z)(0 \in z \ \& (\forall x)((x \in z) \to (x \cup \{x\} \in z)))$$

"EXISTUJÚ NEKONEČNÉ MNOŽINY."

8. AXIÓM FUNDOVANOSTI

$$(\forall a)((a \neq 0) \to (\exists x)((x \in a) \& (x \cap a = 0)))$$

26.02.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

0. AXIOM EXISTENCIE
1. AXIOM EXTENSIONALITY

$(\forall x)(\forall y)((\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y)$

DEF.: ([VLASTNÁ] PODMNOŽINA, INKLÚZIA)

$x \subseteq y \leftrightarrow (\forall u)(u \in x \to u \in y)$

$x \subset y \leftrightarrow (x \subseteq y \ \& \ x \neq y)$

LEMMA: i) $x \subseteq x$, $\neg(x \subset x)$

ii) $(x \subseteq y \ \& \ y \subseteq z) \to (x \subseteq z)$

$(x \subset y \ \& \ y \subseteq z) \to (x \subset z)$

$(x \subseteq y \ \& \ y \subset z) \to (x \subset z)$

iii) $(x \subseteq y \ \& \ y \subseteq x) \to (x = y)$

2. SCHÉMA AXIOMU VYDELENIA: AK $\varphi(x)$ NEOB. VOLNÉ z, POTOM $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \ \& \ \varphi(x)))$ JE AXIOM TEORIE MNOŽÍN

POVEDZME, ŽE $\varphi(x) = x \notin z$

$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \ \& \ x \notin z))$

TREBA ZAKÁZAŤ VOĽNÝ VÝSKYT z !!!

ĎALEJ SI VŠIMNIME, ŽE MNOŽINA z JE AXIÓMOM VYDELENIA PRE φ URČENÁ JEDNOZNAČNE (Z AXIOMU EXTENZIONALITY)

PRE $\varphi(x) = x \in b$ MÁME ZARUČENÚ EXISTENCIU $a \cap b$, KDE

DEF.: (PRIENIK) $x \in a \cap b \leftrightarrow (x \in a \ \& \ x \in b)$

KONVENCIA $\{x : x \in a \ \& \ \varphi(x)\} = \{x \in a : \varphi(x)\}$ OZNAČUJEME TÚ JEDINÚ MNOŽINU z URČENÚ AXIOMOM VYDELENIA PRE φ.

PODOBNE ROZDIEL MNOŽÍN $a \setminus b = \{x \in a : x \notin b\}$.

Z AXIÓMU EXISTENCIE A AXIÓMU VYDELENIA PRE $\varphi(x) = x \neq x$ DOSTÁVAME EXISTENCIU PRÁZDNEJ MNOŽINY 0.

DEF.: MNOŽINY a, b SÚ DISJUNKTNÉ, KEĎ $a \cap b = 0$

LEMMA: (i) $\neg(\exists y)(y \in 0)$

(ii) $(\forall x)(0 \subseteq x)$

(iii) $x \subseteq 0 \Leftrightarrow x = 0$

LEMMA: $(\forall a)\quad a = \{x : x \in a \;\&\; x = x\}$

VETA: $\neg(\exists z)(\forall x)(x \in z)$

DÔKAZ: SPOROM. NECH TAKÁ MNOŽINA z EXISTUJE
UVAŽUJME FORMULU $\varphi(x) = x \notin x$.
MÁME (PODĽA AXIÓMU VYDELENIA PRE φ), ŽE
$\{x \in z : x \notin x\} = t$ JE MNOŽINA.
PODĽA PREDPOKLADU $t \in z$.
KEĎ JE $t \in t$, POTOM $t \notin t$ PODĽA VYDELENIA
KEĎ JE $t \notin t$, POTOM $t \in t$, SPOR $\lightning$.

V TEJTO TEÓRII S AXIÓMAMI 0., 1., 2. EXISTUJE MODEL (S JEDINÝM PRVKOM 0)

3. AXIÓM DVOJICE

$$(\forall a)(\forall b)(\exists z)(\forall x)(x \in z \Leftrightarrow (x \in a \vee x \in b))$$

$\Downarrow$

NEUSPORIADANÁ DVOJICA MNOŽÍN a, b
ZNAČÍME $\{a, b\}$.

26.02.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEÓRIA MNOŽÍN

NAMIESTO $\{a,a\}$ PÍŠEME $\{a\}$.

LEMMA: (i) $\{x\} = \{y\} \leftrightarrow x = y$

(ii) $\{x\} = \{x,y\} \leftrightarrow x = y$

(iii) $\{x,y\} = \{u,v\} \leftrightarrow ((x=u \;\&\; y=v) \vee (x=v \;\&\; y=u))$

DEF.: USPORIADANÁ DVOJICA MNOŽÍN a, b JE MNOŽINA $\{\{a\}, \{a,b\}\}$. ZNAČÍME JU $\langle a,b \rangle$.

LEMMA: $\langle a,b \rangle = \langle u,v \rangle \leftrightarrow (a=u \;\&\; b=v)$

DEF.: k PRIRODZENÉ ČÍSLO, MNOŽINY $a_1, \ldots, a_k$. POTOM USPORIADANÚ k-TICU DEFINUJEME AKO $\langle a_1 \rangle = a_1$ A ĎALEJ INDUKCIOU
$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle, a_k \rangle$

LEMMA: $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \leftrightarrow$
$(a_1 = b_1 \;\&\; \ldots \;\&\; a_k = b_k)$

UŽ MÁME NASLEDUJÚCE MNOŽINY
$0, \{0\}, \{0,\{0\}\}, \underbrace{\{0, \{0\}, \{0,\{0\}\}\}}_{\text{TOTO EŠTE NIE! 3 PRVKY!}}$

4. AXIOM SUMY:
$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists t)(x \in t \;\&\; t \in a))$

$\downarrow$

OZNAČUJEME $\bigcup a = \{x : (\exists t)(x \in t \;\&\; t \in a)\}$

LEMMA: BUĎ $a = \{b,c\}$. POTOM
$\bigcup a = \{x : x \in b \vee x \in c\}$ (NEVYPLÝVA Z AX. VYDELENIA)
ZNAČÍME $b \cup c$.

ZNAČENIE (NEUSPORIADANÁ k-TICA)

$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$

$\{a_1, \dots, a_k\} = \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \cup \{a_k\}$

POZOR!

DEFINÍCIA: PRE <u>NEPRÁZDNU</u> MNOŽINU a

$\bigcap a = \{x : (\forall b)(b \in a \to x \in b)\}$

LEMMA: $\bigcap a$ EXISTUJE

KEĎŽE $a \neq 0$ $\exists b : b \in a$. POTOM

MÔŽEME PÍSAŤ

$\bigcap a = \{x : x \in b \ \& \ (\forall c)(c \in a \to x \in c)\}$

EXISTENCIU DOSTÁVAME Z AXIÓMU VYDELENIA.

PRE $a = 0$ JE $\bigcup a = 0$, $\bigcap a$ NIE JE DEF.

6. SCHÉMA AXIOMU NAHRADENIA

KEĎ JE $\psi(u, v)$ FORMULA, KT. NEOBSAHUJE VOLNE PREMENNÉ w A z, POTOM FORMULA

$(\forall u)(\forall v)(\forall w)((\psi(u,v) \ \& \ \psi(u,w)) \to v = w) \to$

$\to (\forall a)(\exists z)(\forall v)(v \in z \Leftrightarrow (\exists u)(u \in a \ \& \ \psi(u,v)))$

AXIOM NAHRADENIA PRE ψ.

NEOBSAHUJE VOLNE w KVÔLI BEZPROBLÉMOVEJ SUBST.

VOLNE z KVÔLI: $\psi(u,v) = u = v \ \& \ v \notin z$

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEF.: BUĎ a, b MNOŽINY. KARTÉZSKY SÚČIN
$$a \times b = \{\langle u, v\rangle : u \in a \ \& \ v \in b\}$$

OVERÍME, ŽE $a \times b$ EXISTUJE

VOĽNÁ PREMENNÁ

$\psi(x, v)$ NECH JE FORMULA $v = \langle x, y\rangle$

PRE $\psi(x, v)$ A $\psi(x, w)$ MÁME
$v = \langle x, y\rangle \quad w = \langle x, y\rangle \quad \Rightarrow \quad v = w$

PRE MNOŽINU a EXISTUJE MNOŽINA z_y
$$v \in z_y \leftrightarrow (\exists x \in a)\ v = \langle x, y\rangle$$
z_y JE MNOŽINA PODĽA AXIÓMU NAHRADENIA PRE ψ

MÁME FORMULU $\psi_1(y, v) \;:\; v = z_y$
$\psi_1(y, v)$ A $\psi_1(y, w)$ DÁVA $v = w$

PRE MNOŽINU b EXISTUJE MNOŽINA
$$M = \{v : y \in b \ \& \ v = z_y\}$$

KAŽDÝ NAHLIADNE, ŽE $a \times b = \bigcup M$.

16.03.2008 Su
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEFINÍCIA: BINÁRNA RELÁCIA JE MNOŽINA R, KTOREJ PRVKY SÚ USPORIADANÉ DVOJICE

DEFINIČNÝ OBOR RELÁCIE $dom(R) = \{x : (\exists y) \langle x, y \rangle \in R\}$

OBOR HODNÔT RELÁCIE $rng(R) = \{y : (\exists x) \langle x, y \rangle \in R\}$

$dom(R)$ i $rng(R)$ SÚ MNOŽINY A PLATÍ:

$R \subseteq dom(R) \times rng(R)$.

INVERZNÁ RELÁCIA K R: $R^{-1} = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$

PLATÍ $(R^{-1})^{-1} = R$.

KEĎ SÚ R, S RELÁCIE, POTOM ZLOŽENIE RELÁCIÍ R A S JE RELÁCIA $S \circ R = \{\langle x, z \rangle \mid (\exists y)(\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in S)\}$

PLATÍ
$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$
$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

MNOŽINA f SA NAZÝVA FUNKCIA, KEĎ f JE RELÁCIA, PRE KTORÚ PLATÍ:

$$(\forall x \in dom(f))\big((\langle x, y \rangle \in f \ \& \ \langle x, y' \rangle \in f) \Rightarrow y = y'\big)$$

$f : A \to B$ OZNAČUJE, ŽE f JE FUNKCIA $A = dom(f)$, $B \supseteq rng(f)$

KEĎ JE $f : A \to B$ FUNKCIA, $x \in A$, POTOM $f(x)$ OZNAČUJE TO JEDINÉ $y \in B$, ŽE $\langle x, y \rangle \in f$.

$f : A \to B$, $C \subseteq A$, POTOM $f \upharpoonright C = f \cap (C \times B)$.
NAZÝVA SÚ ZÚŽENIE FUNKCIE f NA MNOŽINU C.

OBOR MNOŽINY C: $f''C = rng(f \upharpoonright C) = \{f(x) : x \in C\}$

NIEKEDY SA PRE FUNKCIU $f : A \to B$ POUŽÍVA ZNAČENIE
$$f = \langle f(x) : x \in A \rangle$$

FUNKCIA $f: A \to B$ SA NAZÝVA PROSTÁ, KEĎ JE f^{-1} FUNKCIA.

FUNKCIA $f: A \to B$ SA NAZÝVA SURJEKTÍVNA, KEĎ $B = rng(f)$.
„f JE Z A NA B"

$f: A \to B$ SA NAZÝVA BIJEKCIA, KEĎ JE SÚČASNE PROSTÁ AJ NA (SURJEKTÍVNA).

OSTRO USPORIADANÁ MNOŽINA JE DVOJICA $\langle a, r \rangle$, KDE a JE MNOŽINA, r JE RELÁCIA, $r \subseteq a \times a$ A r SPĹŇA PRE VŠETKY $x, y, z \in a$:

$(\langle x,y \rangle \in r \ \& \ \langle y,z \rangle) \to \langle x,z \rangle \in r$ (TRANZITIVITA)

$(\forall x \in a) \neg \langle x,x \rangle \in r$ (ANTIREFLEXIVITA)

OSTRÉ USPORIADANIE NAZÝVAME LINEÁRNE, KEĎ $(\forall x,y \in a)(\langle x,y \rangle \in r \vee \langle y,x \rangle \in r \vee x = y)$.

NECH $\langle a, r \rangle$ JE USPORIADANÁ MNOŽINA, $x, y \in a$
x, y SÚ r-NEPOROVNATEĽNÉ, KEĎ
$\langle x,y \rangle \notin r \ \& \ \langle y,x \rangle \notin r \ \& \ x \neq y$.

KEĎ SÚ R, S RELÁCIE, $R \subseteq a \times a$, $S \subseteq b \times b$, HOVORÍME, ŽE $\langle a, R \rangle$ JE IZOMORFNÁ S $\langle b, S \rangle$, KEĎ EXISTUJE BIJEKCIA $f: a \to b$ TAKÁ, ŽE
$(\forall x,y \in a) \ \langle x,y \rangle \in R \leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in S$.

ZOBRAZENIE f SA NAZÝVA IZOMORFIZMUS.

KEĎ JE r USPORIADANIE NA MNOŽINE a, $m \subseteq a$, POVIEME, ŽE $x \in a$ JE NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY m, KEĎ
$x \in m \ \& \ (\forall y)(y \in m \to (x = y \vee x \, r \, y))$

16.03.2008 Su
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIA MNOŽÍN

HOVORÍME, ŽE USPORIADANIE r NA MNOŽINE a JE DOBRÉ, (EKVIVALENTNE $\langle a, r\rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA), KEĎ KAŽDÁ NEPRÁZDNA $m \subseteq a$ MÁ NAJMENŠÍ PRVOK.

TVRDENIE: DOBRÉ USPORIADANIE JE LINEÁRNE

DÔKAZ: ZVOĽME $x, y \in a$, PREDPOKLADAJME, ŽE $x \neq y$. POLOŽME $m = \{x, y\}$. MÁME $m \neq 0$, TAKŽE m OBSAHUJE NAJMENŠÍ PRVOK.
KEĎ JE NAJMENŠÍ PRVOK x, JE $x \, r \, y$,
KEĎ JE NAJMENŠÍ PRVOK y, JE $y \, r \, x$.

KEĎ JE $\langle a, r\rangle$ USPORIADANÁ MNOŽINA, $x \in a$, BUDEME ZNAČIŤ $(\leftarrow, x)$ MNOŽINU $\{y,\ y \in a \ \&\ y \, r \, x\}$
(POČIATOČNÝ ÚSEK URČENÝ PRVKOM x)
$(\leftarrow, x)$ BUDEME UVAŽOVAŤ S USPORIADANÍM

$$r \cap ((\leftarrow, x) \times (\leftarrow, x))$$

$$\langle (\leftarrow, x), r\rangle.$$

LEMMA 1: KEĎ JE $\langle a, r\rangle$ DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA, $x \in a$, POTOM $\langle a, r\rangle$ NIE JE IZOMORFNÁ S $\langle (\leftarrow, x), r\rangle$.

DÔKAZ. (SPOROM) NECH $f : a \to (\leftarrow, x)$ JE IZOMORFIZMUS $\langle a, r\rangle$ A $\langle (\leftarrow, x), r\rangle$

OZNAČME $m = \{ y \in a : f(y) \neq y \}$

ZREJME $f(x) \neq x$, PRETOŽE $x \notin (\leftarrow, x)$, TAKŽE $m \neq 0$.

$\langle a, r \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ, TAKŽE $\exists t \in m$, ŽE t JE r-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY m.

MÁME $f(t) \neq t$. KEDYKOĽVEK $v \in a$, $v \, r \, t$, POTOM $f(v) = v$.
SÚ DVE MOŽNOSTI:

1) $f(t) \, r \, t$. POLOŽME $v = f(t)$. MÁME $v \, r \, t$, TAKŽE $v \neq t$, $f(v) = v$, TEDA $f(t) = f(v) = v$
$\Rightarrow$ SPOR S PREDPOKLADOM, ŽE f JE PROSTÉ.

2) $t \, r \, f(t)$. MÁME $f(t) \in (\leftarrow, x)$, TEDA $t \in (\leftarrow, x)$.
KEDYKOĽVEK JE $v \in a$, $v \, r \, t$ $f(v) = v \neq t$.
KEDYKOĽVEK JE $v \in a$, $t \, r \, v$, PRETOŽE f ZACHOVÁVA USPORIADANIE, NUTNE $f(t) \, r \, f(v)$, TJ. $f(v) \neq t$
NAKONIEC PRE t PLATÍ $f(t) \neq t$, TAKŽE f NIE JE NA $(\leftarrow, x)$, SPOR. $\square$

LEMMA 2: KEĎ SÚ $\langle a, r \rangle$, $\langle b, s \rangle$ IZOMORFNÉ, DOBRE USPORIADANÉ MNOŽINY, POTOM MEDZI NIMI EXISTUJE JEDINÝ IZOMORFIZMUS.

DÔKAZ (SPOROM). PREDPOKLADAJME, ŽE $f, g : \langle a, r \rangle \to \langle b, s \rangle$ SÚ DVA RÔZNE IZOMORFIZMY. MNOŽINA
$m = \{ y \in a : f(y) \neq g(y) \}$ JE TEDA NEPRÁZDNA.
MNOŽINA a JE DOBRE USPORIADANÁ, TAKŽE EXISTUJE $t \in m$: t JE r-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY m.
KEDYKOĽVEK $y \, r \, t$, NUTNE $f(y) = g(y)$,
ALE $f(t) \neq g(t)$.

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

1) PREDPOKLADAJME, ŽE $f(t)$ s $g(t)$.
PRETOŽE $g : a \to b$ JE SURJEKTÍVNA, MUSÍ EXISTOVAŤ NEJAKÉ y_0 : $g(y_0) = f(t)$

$g(y_0)$ s $g(t)$

g JE IZOMORFIZMUS $\Rightarrow$ $y_0 \; r \cdot t \Rightarrow f(y_0) = g(y_0)$

PRITOM $f(y_0) = g(y_0) = f(t) \Rightarrow f$ NIE JE PROSTÁ.

PRÍPAD 2) $g(t)$ s $f(t)$ JE SYMETRICKÝ. $\square$

VETA: BUĎTE $\langle a, r \rangle$ A $\langle b, s \rangle$ DVE DOBRE USPORIADANÉ MNOŽINY. POTOM NASTÁVA PRÁVE JEDNA Z NASLEDUJÚCICH TROCH MOŽNOSTÍ:

a) $\langle a, r \rangle$ JE IZOMORFNÁ S $\langle b, s \rangle$

b) $\exists x \in a$: $\langle (\leftarrow, x), r \rangle$ JE IZOMORFNÁ S $\langle b, s \rangle$

c) $\exists y \in b$: $\langle a, r \rangle$ JE IZOMORFNÁ S $\langle (\leftarrow, y), s \rangle$.

DŮKAZ: POLOŽME $f = \{ \langle v, w \rangle : v \in a \;\&\; w \in b \;\&$
$\langle (\leftarrow, v), r \rangle \underbrace{\text{JE IZOMORFNÉ S}}_{\text{ZNAČENIE } \cong} \langle (\leftarrow, w), s \rangle \}$

MÁME $f \subseteq a \times b$

a) f JE ZOBRAZENIE:

$\langle v, w \rangle \in f$, $\langle v, w' \rangle \in f$

$\Rightarrow \langle (\leftarrow, v), r \rangle \cong \langle (\leftarrow, w), s \rangle \cong \langle (\leftarrow, w'), s \rangle$

TAKŽE PODĽA LEMMY 1 NUTNE $w = w'$.

b) f JE PROSTÉ ZOBRAZENIE. ANALOGICKY

$\langle v, w \rangle \in f$, $\langle v', w \rangle \in f \Rightarrow$ PODĽA LEMMY 1 $v = v'$

C) f ZACHOVÁVA USPORIADANIE:

$\langle v, w\rangle \in f$, $\langle v_1, w_1\rangle \in f$

CHCEME UKÁZAŤ: $v \, r \, v_1 \Leftrightarrow w \, s \, w_1$

NECH $v \, r \, v_1$, TJ. $v \in (\leftarrow, v_1)$

$\langle v_1, w_1\rangle \in f \Rightarrow$ EXISTUJE IZOMORFIZMUS

$h: \langle(\leftarrow, v_1), r\rangle \to \langle(\leftarrow, w_1), s\rangle$

POLOŽME $t := h(v)$.

AK BY $t \neq w$

VIEME, ŽE $\langle v, w\rangle \in f \Rightarrow \langle(\leftarrow, v), r\rangle \cong \langle(\leftarrow, w), s\rangle$

ZREJME $h \restriction (\leftarrow, v)$ JE IZOMORFIZMUS

$\langle(\leftarrow, v), r\rangle \to \langle(\leftarrow, h(v)), s\rangle$

TAKŽE $\langle(\leftarrow, w), s\rangle \cong \langle(\leftarrow, t), s\rangle$, ČO JE SPOR.

NUTNE TEDA $t = h(v) = w \in (\leftarrow, w_1) \Rightarrow w \, s \, w_1$. (ANALOGICKY $\Leftarrow$)

POLOŽME $o :=$ NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY

$\{v \in a : \neg\exists w \in b : \langle v, w\rangle \in f\}$

POKIAĽ JE TÁTO MNOŽINA NEPRÁZDNA.

$e :=$ NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY

$\{w \in b : \neg\exists v \in a : \langle v, w\rangle \in f\}$

POKIAĽ JE TÁTO MNOŽINA NEPRÁZDNA

1) AK o ANI e NIE SÚ DEFINOVANÉ, POTOM f JE IZOMORFIZMUS USPORIADANÝCH MNOŽÍN $\langle a, r\rangle$ A $\langle b, s\rangle$. (PRÍPAD a))

16.03.2008 S_4
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

2) AK EXISTUJE o, NEEXISTUJE e
ZNAMENÁ TO, KEDYKOĽVEK $v \in a$, $v\, r\, o$
POTOM NUTNE $\exists w \in b : \langle v, w \rangle \in f$.
KEDYKOĽVEK $w \in b$, NUTNE $\exists v \in a : \langle v, w \rangle \in f$
V TOMTO PRÍPADE JE $v\, r\, o$
PRETOŽE $o \neq v$ A KEBY $o\, r\, v$, POTOM
IZOMORFIZMUS MEDZI $(\leftarrow, v)$ A $(\leftarrow, w)$
ZOBRAZUJE TAKISTO $(\leftarrow, o)$ NA $(\leftarrow, f(o))$
TJ. $f(o)$ BY BOLO DEFINOVANÉ ↯
MÁME TEDA $\langle (\leftarrow, o), r \rangle \cong \langle b, s \rangle$

3) AK EXISTUJE e, NEEXISTUJE o,
DOSTANEME ANALOGICKY $\langle a, r \rangle \cong \langle (\leftarrow, e), s \rangle$

4) AK EXISTUJE o AJ e
V TOMTO PRÍPADE JE f IZOMORFIZMUS
MEDZI $\langle (\leftarrow, o), r \rangle$ A $\langle (\leftarrow, e), s \rangle$, TJ.
$\langle (\leftarrow, o), r \rangle \cong \langle (\leftarrow, e), s \rangle \Rightarrow \langle o, e \rangle \in f$,
ČO JE SPOR. ↯ ■

17.03.2008Mo
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEFINÍCIA: MNOŽINA X SA NAZÝVA TRANZITÍVNA, KEĎ PLATÍ: $(\forall y)(y \in x \to y \subseteq x)$
EKVIVALENTNE $(\forall y)(\forall z)((y \in x \,\&\, z \in y) \to z \in x)$.

MNOŽINA X SA NAZÍVA ORDINÁL, KEĎ JE TRANZITÍVNA A DOBRE USPORIADANÁ RELÁCIOU $\in$.

VETA O ORDINÁLOCH:

1) KEĎ JE X ORDINÁL A KEĎ JE $y \in x$, POTOM JE Y ORDINÁL A $y = \langle (\in, y), \in \rangle$
2) KEĎ SÚ x, y ORDINÁLY A $x \cong y$, POTOM $x = y$.
3) KEĎ SÚ x, y ORDINÁLY, POTOM PLATÍ PRÁVE JEDNA Z MOŽNOSTÍ $x \in y$, $y \in x$, $x = y$.
4) KEĎ SÚ x, y, z ORDINÁLY, $x \in y$, $y \in z$, POTOM $x \in z$.
5) KEĎ JE C NEPRÁZDNA MNOŽINA ORDINÁLOV $(\exists x \in C)(\forall y \in C)(x \in y \vee y = x)$.

DOKAZ: (1) NECH X JE ORDINÁL A $y \in x$.
DOKÁŽME NAJSKÔR, ŽE Y JE TRANZITÍVNA MNOŽINA
ZVOĽME ĽUBOVOĽNE $t \in y$, $z \in t$.
VIEME, ŽE X JE TRANZITÍVNA MNOŽINA, MÁME $t \in y \,\&\, y \in x$, TAKŽE NUTNE $t \in x$.
MÁME $t \in x$, $z \in t$ A KEĎŽE X JE TRANZITÍVNA $\Rightarrow z \in x$.
TEDA $y, z, t \in x$.
PLATÍ $t \in y$, $z \in t$ A PRETOŽE $\in$ JE RELÁCIA USPORIADANIA NA X, NUTNE $z \in y$.
DOKÁZALI SME $(\forall t)(\forall z)((t \in y \,\&\, z \in t) \to z \in y)$,
TAKŽE Y JE TRANZITÍVNA MNOŽINA.

DOKÁŽME, ŽE MNOŽINA Y JE USPORIADANÁ RELÁCIOU $\in$.
NECH $u,v,w \in Y$. PREDPOKLADAJME, ŽE $u \in v$ & $v \in w$.
PRETOŽE X JE TRANZITÍVNA MNOŽINA, $Y \subseteq X$,
MÁME $u,v,w \in X$.
MNOŽINA X JE RELÁCIOU $\in$ USPORIADANÁ, TAKŽE $u \in w$.

DOKÁŽME, ŽE $\langle Y, \in \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ:
NECH $C \subseteq Y$, $C \neq 0$. STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE
C MÁ NAJMENŠÍ PRVOK.
$Y \in X$, $(\forall t \in C)\, t \in Y$. KEĎŽE X JE TRANZITÍVNA, NUTNE $C \subseteq X$.
KEĎŽE $C \neq 0$ A $\langle X, \in \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ,
$\exists u \in C$ $\in$-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY C.
$\Rightarrow \langle Y, \in \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ.

ĎALEJ $t \in \langle (\leftarrow, Y), \in \rangle \Leftrightarrow t \in Y$,
$\{t : t \in Y\} = Y$

TAKŽE $Y = \langle (\leftarrow, Y), \in \rangle$.

(2) NECH X, Y SÚ ORDINÁLY A NECH EXISTUJE
IZOMORFIZMUS $h: \langle X, \in \rangle \to \langle Y, \in \rangle$

POLOŽME $m = \{z \in X : h(z) \neq z\}$,
AK $m = 0$, POTOM h JE IDENTITA, TJ. $X = Y$.
NECH $m \neq 0$. PRETOŽE $\langle X, \in \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ,
MNOŽINA m MÁ NAJMENŠÍ PRVOK t.

KEDYKOĽVEK $z \in t$, POTOM $h(z) = z$.
h JE IZOMORFIZMUS, TJ. $z \in t \Leftrightarrow h(z) \in h(t)$
TJ. $h(t) = \{h(z) : z \in t\} = \{z : z \in t\} = t$, ČO JE SPOR S TÝM. $\lightning$

$\square$

17.03.2008 Mo
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

(3) NECH x, y SÚ ORDINÁLY. PODĽA VETY O DOBRE USPORIADANÝCH MNOŽINÁCH
BUĎ $x \cong y \overset{(2)}{\Rightarrow} x = y$, ALEBO
$(\exists t \in x)((\leftarrow, t) \cong y)$, KDE PODĽA (1) $(\leftarrow, t) = t$,
TAKŽE $t \cong y \overset{(2)}{\Rightarrow} t = y \Rightarrow y \in x$.
ALEBO $(\exists v \in y)(x \cong (\leftarrow, v)) \Rightarrow x = v \Rightarrow x \in y$.

(4) z JE ORDINÁL $\Rightarrow$ z JE TRANZITÍVNA MNOŽINA.

(5) $C \neq 0$, POTOM ZVOLME ĽUBOVOĽNE $t \in C$.
AK $(\forall y)(y \in C \rightarrow (y = t \vee t \in y))$ POLOŽME $x := t$.
AK $(\exists y)(y \in C \,\&\, y \in t)$, POLOŽME $m = \{y \in C : y \in t\} \neq 0$.
t JE ORDINÁL $\Rightarrow \exists x$ $\in$-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY m.
ZREJME x JE TIEŽ NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY C.

VETA: $\neg(\exists z)(\forall x)(x \text{ JE ORDINÁL} \rightarrow x \in z)$

DÔKAZ: AK BY TAKÁ MNOŽINA z EXISTOVALA, POTOM z JE TRANZITÍVNA, DOBRE USPORIADANÁ RELÁCIOU $\in$ $\Rightarrow z$ JE ORDINÁL. $\Rightarrow z \in z$.
PODĽA (3) PRE ŽIADEN ORDINÁL NEPLATÍ $x \in x$. SPOR $\lightning$.
PARADOX BURALI-FORTI

LEMMA 3: KEĎ JE a MNOŽINA ORDINÁLOV A KEĎ PLATÍ $(\forall x \in a)(\forall y \in x)\, y \in a$ (TJ. a JE TRANZITÍVNA MN. ORDINÁLOV) POTOM a JE ORDINÁL.

DÔKAZ. PODĽA PREDPOKLADU a JE TRANZITÍVNA MNOŽINA.
MUSÍME UKÁZAŤ, ŽE $\langle a, \in \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ

$x, y, z \in a$, $x \in y$, $y \in z$, POTOM Z VETY O ORDINÁLOCH (4) DOSTÁVAME $x \in z$.

DOKÁŽME, ŽE $\in$ JE DOBRÉ USPORIADANIE MNOŽINY a.

NECH $c \subseteq a$, $c \neq 0$, TJ. c JE NEPRÁZDNA MNOŽINA ORDINÁLOV. PODĽA VETY O ORDINÁLOCH (5) c MÁ $\in$-NAJMENŠÍ PRVOK.

$\Rightarrow$ a JE ORDINÁL. $\square$

VETA (O IZOMORFIZME DOBRE USPORIADANEJ MNOŽINY A ORDINÁLE): KEĎ JE $\langle a, r \rangle$ DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA, POTOM EXISTUJE PRÁVE JEDEN ORDINÁL d TAK, ŽE $\langle a, r \rangle \cong \langle d, \in \rangle$.

DÔKAZ: UNICITA (JEDNOZNAČNOSŤ)

AK $\langle a, r \rangle \cong \langle c, \in \rangle$ A $\langle a, r \rangle \cong \langle d, \in \rangle$, POTOM Z VETY O ORDINÁLOCH (2) $\langle c, \in \rangle \cong \langle d, \in \rangle \Rightarrow c = d$.

EXISTENCIA: POLOŽME $b = \{ c \in a :$
$(\exists x)(x$ JE ORDINÁL & $\langle x, \in \rangle \cong \langle (\leftarrow, c), r \rangle) \}$

NECH f JE FUNKCIA DEFINOVANÁ PREDPISOM

$dom(f) = b$

PRE $c \in b$: $f(c) = x$ TAKÉ, ŽE $\langle x, \in \rangle \cong \langle (\leftarrow, c), r \rangle$

$rng(f) = d$

KEĎ MÁME FORMULU $\varphi(c, x)$ $\langle (\leftarrow, c), r \rangle \cong x$ POTOM PODĽA NAHRADENIA PRE TÚTO FORMULU d JE MNOŽINA

d JE TRANZITÍVNA MNOŽINA ORDINÁLOV

$\Rightarrow$ PODĽA PREDCHÁDZAJÚCEJ LEMMY d JE ORDINÁL.

f JE POTOM IZOMORFIZMUS $\langle b, r \rangle \to \langle d, \in \rangle$.

17.03.2008 Mo
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

ZOSTÁVA OVERIŤ, ŽE $b = a$. AK NIE, POTOM MNOŽINA $a \setminus b$ JE NEPRÁZDNA $\Rightarrow$ MÁ NAJMENŠÍ PRVOK c_0. PLATÍ $(\leftarrow, c_0) = b$, $b \cong d$
$\Rightarrow (\leftarrow, c_0) \cong d \Rightarrow c_0 \in b$, $f(c_0) = d \Rightarrow d \in d$, SPOR ↯ $\square$

DEFINÍCIA: KEĎ JE $\langle a, r \rangle$ DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA, POTOM TYP $\langle a, r \rangle$ JE (JEDINÝ) ORDINÁL c TAKÝ, ŽE $\langle a, r \rangle \cong c$.

ZNAČENIE: PRE ORDINÁLY BUDEME POUŽÍVAŤ MALÉ GRÉCKE PÍSMENÁ $\alpha, \beta, \kappa, \mu, \ldots$
$\alpha < \beta$ BUDE SLÚŽIŤ NAMIESTO $\alpha \in \beta$.
$\alpha \leq \beta$ —‖— $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

DEFINÍCIA: KEĎ JE X MNOŽINA ORDINÁLOV, OZNAČME:
$\sup(X) = \bigcup X$. KEĎ $X \neq 0$ OZNAČME:
$\min(X) = \bigcap X$.

LEMMA 4: PRE ORDINÁLY α, β PLATÍ:
(1) $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$
(2) KEĎ JE X MNOŽINA ORDINÁLOV, POTOM $\sup(X)$ JE NAJMENŠÍ ORDINÁL, KTORÝ JE $\geq$ NEŽ VŠETKY PRVKY X. PODOBNE, KEĎ JE $X \neq 0$, POTOM $\min(X)$ JE NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY X.

DÔKAZ: (1) KEĎ JE $\alpha \leq \beta$, BUĎ $\alpha = \beta$, ALEBO $\alpha \in \beta$.
OPAČNÁ IMPLIKÁCIA $\Rightarrow$ CVIČENIE.

(2) PODĽA AXIÓMU SUMY $\bigcup X$ JE MNOŽINA.

$\gamma \in \bigcup X \Leftrightarrow \exists \alpha \in X : \gamma \in \alpha$.

$\Rightarrow$ DOSTÁVAME, ŽE $\bigcup X$ JE MNOŽINA ORDINÁLOV.

ĎALEJ KEĎ $\gamma \in \bigcup X$, TJ. $\exists \alpha \in X : \gamma \in \alpha$
A $\delta \in \gamma$, POTOM $\delta \in \alpha \Rightarrow \delta \in \bigcup X$.

$\Rightarrow \bigcup X$ JE TRANZITÍVNA MNOŽINA.
$\Rightarrow \bigcup X$ JE ORDINÁL.

KEĎ JE $\alpha \in X$, $\alpha \subseteq \bigcup X$
α JE ORDINÁL AJ $\bigcup X$ JE ORDINÁL $\Rightarrow \alpha \leq \bigcup X$.

DOKÁŽME, ŽE $\bigcup X$ JE NAJMENŠÍ TAKÝ ORDINÁL.

ZVOĽME $\beta < \bigcup X$. MÁME $\beta \in \bigcup X \Rightarrow \exists \alpha \in X : \beta \in \alpha$
TAKŽE NIE JE PRAVDA, ŽE β JE $\geq$ VŠETKÝM PRVKOM X.

$X \neq 0$, POTOM $\bigcap X$ JE MNOŽINA

KEĎ JE $\alpha \in \bigcap X$, $\beta \in \alpha$
$\Rightarrow (\forall \gamma \in X) \alpha \in \gamma$, TJ. $(\forall \gamma \in X)\ \beta \in \gamma$
$\Rightarrow \beta \in \bigcap X$.

$\bigcap X$ JE TEDA TRANZITÍVNA MNOŽINA POZOSTÁVAJÚCA IBA Z ORDINÁLOV $\Rightarrow \bigcap X$ JE ORDINÁL.

ZVOĽME $\alpha \in X$. BUĎ $\alpha < \bigcap X$, $\alpha > \bigcap X$, $\alpha = \bigcap X$.

$\alpha < \bigcap X$ NEMÔŽE NASTAŤ. $(\forall \gamma \in X)\ \alpha \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \alpha$ SPOR

ZOSTÁVA UKÁZAŤ, ŽE $\bigcap X \in X$.

X JE MNOŽINA ORDINÁLOV, $X \neq 0$. PODĽA VETY O ORDINÁLOCH (5) X MÁ $\in$-NAJMENŠÍ PRVOK α.
TJ. $(\forall \gamma \in X)\ \alpha \leq \gamma$, TJ. $\alpha \subseteq \gamma$, $\alpha \in X \Rightarrow \bigcap X = \alpha$.

$\square$

18.03.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEFINÍCIA (ORDINÁL. NÁSLEDNÍK). PRE ORDINÁL α ORDINÁLNY NÁSLEDNÍK JE $\alpha \cup \{\alpha\} \overset{\text{def.}}{=}: S(\alpha)$.

LEMMA 5: KEĎ JE α ORDINÁL, POTOM $S(\alpha)$ JE ORDINÁL, $\alpha < S(\alpha)$ A $(\forall \beta)(\beta < S(\alpha) \Leftrightarrow \beta \leq \alpha)$

DÔKAZ: $S(\alpha)$ JE TRANZITÍVNA MNOŽINA:
ZVOĽME $x \in S(\alpha)$, $y \in x$.
1) $x \in \alpha \Rightarrow y \in \alpha \Rightarrow y \in \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.
2) $x \in \{\alpha\}$, T.J. $x = \alpha \Rightarrow y \in \alpha \Rightarrow y \in \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.

DEFINÍCIA: ORDINÁL α SA NAZÝVA IZOLOVANÝ, KEĎ EXISTUJE ORDINÁL β : $\alpha = S(\beta)$ ALEBO $\alpha = 0$
V OPAČNOM PRÍPADE HOVORÍME, ŽE α JE LIMITNÝ ORD.

DEFINÍCIA: $0 = \emptyset$, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, $3 = S(2)$, ...
DEFINÍCIA: ORDINÁL α JE PRIRODZENÉ ČÍSLO, KEĎ $(\forall \beta)(\beta \leq \alpha \rightarrow \beta$ JE IZOLOVANÝ$)$.

7. AXIOM NEKONEČNEJ: MÁME ZARUČENÉ, ŽE:
$(\exists x)(0 \in x \;\&\; (\forall y)(y \in x \rightarrow S(y) \in x))$

MNOŽINA x <u>OBSAHUJE</u> VŠETKY PRIRODZENÉ ČÍSLA.

DÔKAZ (SPOROM). BUĎ n PRIRODZENÉ ČÍSLO $n \notin x$, $n \neq 0$. TEDA EXISTUJE m TAKÉ, ŽE $n = S(m)$.
AK $m \in x$, DOSTÁVAME SPOR S AXIÓMOM NEKONEČNEJ.
MÔŽEME TEDA PREDPOKLADAŤ, ŽE $m \notin x$.
$\Rightarrow n \setminus x \neq 0$, PRETOŽE OBSAHUJE m.

n JE ORDINÁL $\Rightarrow \exists\ \tilde{m}$ NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY $n \setminus x$. (ZREJME $\tilde{m} \leq n \Rightarrow \tilde{m}$ JE IZOLOVANÝ)

PRE $\tilde{m}$ SÚ DVE MOŽNOSTI:

1) $\tilde{m} = 0$, ČO JE ALE SPOR S TÝM, ŽE $0 \in x$

2) $\tilde{m} = S(\tilde{n})$. FORMÁLNE, ŽE $\tilde{m}$ JE NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY $n \setminus x \Rightarrow \tilde{n} \in x$ A DOSTÁVAME SPOR S AXIÓMOM NEKONEČNÉ. $\square$

MÁME ZARUČENÉ, ŽE EXISTUJE MNOŽINA PRIRODZENÝCH ČÍSIEL

$$\{ n \in x : n \text{ JE PRIRODZENÉ ČÍSLO} \}$$

Z AXIÓMU VYDELENIA PRE FORMULU n JE PRIR. ČÍSLO.

DEFINÍCIA: ω JE MNOŽINA VŠETKÝCH PRIR. ČÍSIEL.

ω JE ORDINÁL (ω JE TRANZITÍVNA MNOŽINA ORDINÁLOV)

VŠETKY ORDINÁLY MENŠIE AKO ω SÚ IZOLOVANÉ

ω JE LIMITNÝ ORDINÁL (AK NIE, POTOM BY $\omega \in \omega$ ČO JE V ROZPORE S VETOU O ORDINÁLOCH)

ω JE NAJMENŠÍ LIMITNÝ ORDINÁL

VETA (PEANOVE AXIÓMY):

1) $0 \in \omega$

2) $(\forall n)(n \in \omega \rightarrow S(n) \in \omega)$

3) $(\forall n, m)(n \neq m \rightarrow S(n) \neq S(m))$

4) (AXIÓM NEKONEČNA) $(\forall x)((x \subseteq \omega \rightarrow (0 \in x \ \&\ (\forall n)(n \in x \rightarrow S(n) \in x)) \rightarrow x = \omega)$

18.03.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DÔKAZ[(4)] (SPOROM)

$x \neq \omega$.

$x \subseteq \omega \Rightarrow \omega \setminus x \neq 0$, ω JE ORDINÁL, TAKŽE EXISTUJE $n \in \omega \setminus x$, n JE NAJMENŠÍ PRVOK $\omega \setminus x$. KEĎŽE n JE IZOLOVANÝ, EXISTUJÚ 2 MOŽNOSTI:

1) $n = 0$. TO JE ALE SPOR S $0 \in x$.
2) $n = S(m)$. Z MINIMALITY n JE $m \in x$, ČO JE SPOR S $n \notin x$, PRETOŽE $m \in x \rightarrow S(m) \in x$. $\square$

DEFINÍCIA: BUĎ α, β ORDINÁLY. ORDINÁLNY SÚČET

$$\alpha + \beta = \text{typ} \langle \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R \rangle,$$

KDE
$$R = \{ \langle\langle \xi, 0\rangle, \langle \eta, 0 \rangle\rangle : \xi < \eta < \alpha \} \cup \{ \langle\langle \xi, 1\rangle, \langle \eta, 1 \rangle\rangle : \xi < \eta < \beta \} \cup \{ \langle\langle \xi, 0\rangle, \langle \eta, 1 \rangle\rangle : \xi < \alpha, \eta < \beta \}.$$

LEMMA 6: PRE ĽUBOVOĽNÉ ORDINÁLY α, β, γ PLATÍ:

1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2) $\alpha + 0 = \alpha$
3) $\alpha + 1 = S(\alpha)$
4) $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$
5) KEĎ JE β LIMITNÝ ORDINÁL, POTOM $\alpha + \beta = \sup \{ \alpha + \xi : \xi < \beta \}$.

VO VŠEOBECNOSTI NEPLATÍ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$!!!

$\forall n \in \omega : n + \omega = \omega$

$\sup \{n : n \in \omega\} = \omega$

$\sup \{n+\omega, n \in \omega\} \neq \sup \{n : n \in \omega\} + \omega = \omega + \omega$

DEFINÍCIA (ORDINÁLNY SÚČIN): KEĎ SÚ α, β ORDINÁLY, POTOM $\alpha \cdot \beta = \text{typ} \langle \beta \times \alpha, <_{LEX} \rangle$

KDE $<_{LEX}$ SA NAZÝVA LEXIKOGRAFICKÉ USPORIADANIE DEFINOVANÉ AKO

$$\langle \xi, \eta \rangle <_{LEX} \langle \zeta, \delta \rangle \equiv \xi, \zeta \in \beta, \eta, \delta \in \alpha$$

$$\xi < \zeta \text{ ALEBO } (\xi = \zeta \ \& \ \eta < \delta)$$

LEMMA 7: PRE ĽUBOVOĽNÉ ORDINÁLY α, β, γ PLATÍ:

1) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
2) $\alpha \cdot 0 = 0$
3) $\alpha \cdot 1 = \alpha$
4) $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
5) KEĎ JE β LIMITNÝ ORDINÁL, POTOM $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$
6) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

OPÄŤ NÁSOBENIE NIE JE VO VŠEOBECNOSTI KOMUTATÍVNE

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ PLATÍ PRE $\alpha, \beta \in \omega$.

18.03.2008 Ty
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

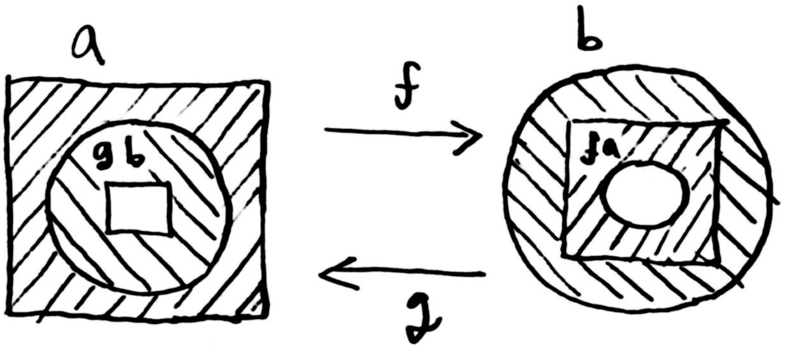
DEFINÍCIA: BUĎ a, b MNOŽINY

1) POVIEME, ŽE MOHUTNOSŤ MNOŽINY a JE MENŠIA ROVNÁ MOHUTNOSTI MNOŽINY b (a JE SUBVALENTNÁ b), KEĎ EXISTUJE PROSTÉ ZOBRAZENIE $a \to b$. ZNAČÍME $a \precsim b$.
2) POVIEME, ŽE MOHUTNOSŤ MNOŽINY a JE ROVNÁ MOHUTNOSTI MNOŽINY b, AK EXISTUJE BIJEKCIA MEDZI MNOŽINAMI a, b. ZNAČÍME $a \approx b$.
3) POVIEME, ŽE MOHUTNOSŤ MNOŽINY a JE OSTRO MENŠIA NEŽ MOHUTNOSŤ MNOŽINY b, KEĎ $a \precsim b$ A $\neg(a \approx b)$. ZNAČÍME $a \prec b$.

LEMMA: 1) $x \approx x$
2) $x \approx y \to y \approx x$
3) $(x \approx y \,\&\, y \approx z) \to x \approx z$
4) $x \precsim x$
5) $(x \precsim y \,\&\, y \precsim z) \to x \precsim z$

VETA (CANTOR - BERNSTEIN):
$$(a \precsim b \,\&\, b \precsim a) \to a \approx b$$

DÔKAZ: BUĎ $f : a \to b$ PROSTÉ ZOBRAZENIE, BUĎ $g : b \to a$ PROSTÉ ZOBRAZENIE
AK f ALEBO g JE BIJEKCIA, SME HOTOVÍ.
PREDPOKLADAJME NAĎALEJ, ŽE $f[a] \neq b$, $g[b] \neq a$.



DEFINUJME PRE VŠETKY PRIRODZENÉ ČÍSLA n INDUKCIOU :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

$$a_{n+1} = g''b_n, \quad b_{n+1} = f''a_n$$

PLATÍ: $a_1 = g''b_0 \subset a_0 = a$

$a_2 \subset a_1$

$\dots$ PODOBNE PRE b

$a_n \subset a_{n-1}$

POLOŽME $a_\omega = \bigcap_{n\in\omega} a_n, \quad b_\omega = \bigcap_{n\in\omega} b_n$

DEFINUJME ZOBRAZENIE $h: a \to b$ PREDPISOM

$h(x) = f(x)$ PRE $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$

$h(x) = g^{-1}(x)$ PRE $x \in \bigcup_{n\in\omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

h JE HĽADANÁ BIJEKCIA.

NAIL 063 TEORIE MNOŽIN

h JE PROSTÁ: NECH $x, y \in a$, $x \neq y$

1) KEĎ JE $x, y \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$

$\Rightarrow h(x) = f(x) \neq f(y) = h(y)$

2) KEĎ JE $x, y \in \bigcup a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$

$\Rightarrow h(x) = g^{-1}(x) \neq g^{-1}(y) = h(y)$

3) KEĎ $x \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1} \cup a_\omega$,

$y \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$, POTOM

$h(x) = f(x)$, $h(y) = g^{-1}(y)$

AK $x \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n} \setminus a_{2n+1}$, POTOM

$f(x) \in \bigcup_{n \in \omega} b_{2n+1} \setminus b_{2n+2}$

AK $y \in \bigcup_{n \in \omega} a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}$, POTOM

$g^{-1}(y) \in \bigcup_{n \in \omega} b_{2n} \setminus b_{2n+1}$

PRETOŽE $\left(\bigcup_{n \in \omega} b_{2n+1} \setminus b_{2n+2}\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \omega} b_{2n} \setminus b_{2n+1}\right) = 0$

NUTNE $h(x) \neq h(y)$.

AK $x \in a_\omega$, POTOM $f(x) \notin \bigcup_{n \in \omega} b_n$.

(PRETOŽE $f(x) \in \bigcup_{n \in \omega} b_n \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \omega} a_n$)

KEĎŽE $g^{-1}(y) \in \bigcup_{n \in \omega} b_n$, NUTNE $h(x) \neq h(y)$.

h JE NA: ZVOĽME $t \in b$.

1) AK EXISTUJE n TAKÉ, ŽE $t \in b_n \setminus b_{n+1}$

a) $n = 2k \Rightarrow$ PRE $x = g(t)$ JE $h(x) = t$

b) $n = 2k+1 \Rightarrow \exists x \in a : t = f(x)$. ZREJME $h(x) = f(x) = t$.

2) AK TAKÉ n NEEXISTUJE, POTOM $t \in \bigcap_{n \in \omega} b_n = b_\omega$.

$b_\omega \subseteq b_1 = f''a \Rightarrow \exists x \in a : f(x) = t$.

NEMÔŽE PLATIŤ $x \in \bigcup_{n \in \omega} a_n \setminus a_\omega$, PRETOŽE V TAKOM PRÍPADE JE $f(x) \notin b_\omega$.

NUTNE TEDA $x \in a_\omega \Rightarrow h(x) = f(x) = t$. $\square$

DEFINÍCIA: BUĎ A MNOŽINA. POTOM NA A EXISTUJE DOBRÉ USPORIADANIE. BUĎ $|A|$ NAJMENŠÍ ORDINÁL α, PRE KTORÝ JE $A \approx \alpha$.

DEFINÍCIA: ORDINÁL α SA NAZÝVA KARDINÁL, AK $\alpha = |\alpha|$.

PRÍKLAD: ω JE KARDINÁL, $\omega + \omega$ NIE JE.

ORDINÁL α JE KARDINÁL $\Leftrightarrow (\forall \beta)(\beta < \alpha \rightarrow \neg(\beta \approx \alpha))$.

LEMMA 8: BUĎTE α, β ORDINÁLY. AK $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, POTOM $|\beta| = |\alpha|$.

DÔKAZ: $\beta \subseteq \alpha$, TAKISTO $\beta \preccurlyeq \alpha$.

$\alpha \approx |\alpha| \wedge |\alpha| \subseteq \beta \Rightarrow \alpha \preccurlyeq \beta$.

$\Rightarrow$ (CANTOR-BERNSTEIN) $\alpha \approx \beta$.

18.03.2008 T4
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

LEMMA 9. KEĎ JE $n \in \omega$, POTOM
1) $n \not\approx n+1$ (INDUKCIOU)
2) $(\forall \alpha)(\alpha \approx n \rightarrow \alpha = n)$ (LEMMA 8 + 1))

DÔSLEDOK: ω JE KARDINÁL A KAŽDÉ $n \in \omega$ JE KARDINÁL.

DEFINÍCIA: MNOŽINA A JE KONEČNÁ, KEĎ $|A| < \omega$.
MNOŽINA A JE SPOČETNÁ, KEĎ $|A| \leq \omega$
MNOŽINA A JE NESPOČETNÁ, KEĎ NIE JE SPOČETNÁ.
(A - DOBRE USPORIADATEĽNÁ)

DEFINÍCIA: (SČÍTANIE A NÁSOBENIE KARDINÁLOV).
KEĎ SÚ κ, λ KARDINÁLY, POTOM:
$$\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$$
$$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|.$$

NA ROZDIEL OD ORDINÁLNEHO SČÍTANIA A NÁSOBENIA, $\oplus$ A $\otimes$ SÚ KOMUTATÍVNE.

LEMMA 10. PRE $n, m < \omega$ PLATÍ
$$n \oplus m = n + m < \omega$$
$$n \otimes m = n \cdot m < \omega$$

DÔKAZ: STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE $n \oplus m < \omega$, $n \otimes m < \omega$. ZVYŠOK PLYNIE Z LEMMY 9. 2)

$n + 0 = n < \omega$. ĎALEJ INDUKCIOU NECH $n+m < \omega$.

$n + S(m) = S(n+m) < \omega$

$n \cdot 0 = 0 < \omega$.

$n \cdot 1 = n < \omega$

$n \cdot S(m) = n \cdot m + m < \omega$. $\square$

LEMMA 11. KAŽDÝ NEKONEČNÝ KARDINÁL JE LIMITNÝ ORDINÁL.

DÔKAZ: NECH k JE NEKONEČNÝ KARDINÁL. PRE SPOR PREDPOKLADAJME, ŽE $k = \alpha + 1$.

PRETOŽE α JE NEKONEČNÝ ORDINÁL, $1 + \alpha = \alpha$

$|k| = |\alpha + 1| = |1 + \alpha| = |\alpha|$.

AK BY $k = |k|$ SPOR, PRETOŽE $\alpha < k$.

25.03.2008 Tu
PETER CERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

VETA: KEĎ JE k NEKONEČNÝ KARDINÁL, POTOM
$k \otimes k = k$.

DÔKAZ: 1) $k = \omega$. UVAŽUJME ZOBRAZENIE
$f: \omega \times \omega \to \omega$ DEFINOVANÉ PREDPISOM:
$f(\langle n, k \rangle) = 2^n(2k+1) - 1$.
ZREJME f JE PROSTÉ AJ NA, TJ.
JE TO BIJEKCIA MEDZI $\omega \times \omega$ A ω.

2) $k > \omega$. PREDPOKLADAJME
(*) PRE KAŽDÝ KARDINÁL λ, KEĎ $\omega \leq \lambda < k$,
POTOM $|\lambda \times \lambda| < k$.

ZOBRAZENIE $g: k \to k \times k$ DEFINOVANÉ PREDPISOM
$g(\alpha) = \langle \alpha, 0 \rangle$ JE PROSTÉ, TAKŽE $k \preccurlyeq k \times k$.

MNOŽINU $k \times k$ USPORIADAME MAXIMO-LEXIKOGRAFICKY.
$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$, POTOM
$\langle \alpha, \beta \rangle \lhd_{MLEX} \langle \gamma, \delta \rangle \iff \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$
ALEBO $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ & $\langle \alpha, \beta \rangle <_{LEX} \langle \gamma, \delta \rangle$

KDE $\langle \alpha, \beta \rangle <_{LEX} \langle \gamma, \delta \rangle \iff \alpha < \gamma$ ALEBO $\alpha = \gamma$ & $\beta < \delta$.

$\langle k \times k, \lhd_{MLEX} \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA.

TYP $\langle k \times k, \lhd_{MLEX} \rangle \leq k$.

DÔKAZ SPOROM. KEBY TYP $\langle k \times k, \lhd_{MLEX} \rangle > k$

BUĎ b IZOMORFIZMUS $k \times k \to \alpha$.

PRETOŽE $\alpha > k$: $b^{-1}[(\leftarrow, k)] = \langle (\leftarrow, \langle \gamma, \delta \rangle), \lhd_{MLEX} \rangle$

BUĎ $\eta = \max\{\gamma, \delta\} + 1$.

$(\in, \langle \eta, \eta \rangle)$, $\triangleleft_{MLEX}$: $|(\in, \langle \eta, \eta \rangle| \geq k$

$(\in, \langle \eta, \eta \rangle) \subseteq \eta \times \eta$

JE $\eta < k$ A PODĽA $(*)$ DOSTÁVAME

$|\eta \times \eta| < k$, ČO JE SPOR.

$\Rightarrow$ typ $\langle k \times k, \triangleleft_{MLEX} \rangle \leq k$

$\Rightarrow$ $k \times k \preccurlyeq k$ $\Rightarrow$

CANTOR-BERNSTEIN: $k \times k \approx k$.

DÔKAZ $(*)$: NECH $(*)$ NEPLATÍ, TAKŽE EXISTUJE KARDINÁL λ, PRE KTORÝ $\omega \leq \lambda < k$, $|\lambda \times \lambda| \geq k$.

Z PRVEJ ČASTI DÔKAZU ZREJME $\lambda \neq \omega$.

BUĎ λ_0 NAJMENŠÍ KARDINÁL SPĹŇAJÚCI $\omega < \lambda_0 < k$ A ZÁROVEŇ $|\lambda_0 \times \lambda_0| \geq k$.

TEDA PRE VŠETKY KARDINÁLY μ : $\omega \leq \mu < \lambda_0$ MÁME $|\mu \times \mu| < \lambda_0$

TEDA PODĽA DÔKAZU VETY $|\lambda_0 \times \lambda_0| = \lambda_0 < k$, SPOR. $\square$

DÔSLEDOK: BUĎTE k, λ NEKONEČNÉ KARDINÁLY. POTOM $k \oplus \lambda = k \otimes \lambda = \max\{k, \lambda\}$.

DÔKAZ: PLATÍ $k \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\} \preccurlyeq k \times \lambda$

$k \times \lambda \preccurlyeq \max\{k, \lambda\} \times \max\{k, \lambda\}$

PODĽA PREDCHÁDZAJÚCEJ VETY

$\max\{k, \lambda\} \times \max\{k, \lambda\} \preccurlyeq \max\{k, \lambda\}$

NAKONIEC $\max\{k, \lambda\} \preccurlyeq k \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$.

VETA PLYNIE Z CANTOR-BERNSTEINOVEJ VETY. $\square$

25.03.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

5. AXIOM POTENCIE: $(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \subseteq a \rightarrow x \in z)$

DEFINÍCIA: POTENČNÁ MNOŽINA MNOŽINY a

$$\mathcal{P}(a) = \{x : x \subseteq a\}$$

VETA (CANTOR): PRE KAŽDÚ MNOŽINU x : $x \prec \mathcal{P}(x)$.

DÔKAZ: $x \preceq \mathcal{P}(x)$. DEFINUJME $f : x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ PREDPISOM $f(t) = \{t\}$. ZREJME f JE PROSTÉ ZOBR.

UKÁŽEME, ŽE $\neg(x \approx \mathcal{P}(x))$.

DOKÁŽEME VIAC: NEEXISTUJE ZOBRAZENIE Z x NA $\mathcal{P}(x)$.

BUĎ $g : x \rightarrow \mathcal{P}(x)$ ĽUBOVOĽNÉ ZOBRAZENIE.

POLOŽME $m = \{t : t \in x \,\&\, t \notin g(t)\}$.

ZREJME $m \subseteq x$ (VYDELENÍM PRE FORMULU $t \notin g(t)$)

$m \in \mathcal{P}(x)$, $m \notin rng(g)$. ROZLÍŠME 2 MOŽNOSTI:

1) $t \in g(t) \rightarrow t \notin m \Rightarrow g(t) \neq m$
2) $t \notin g(t) \leftrightarrow t \in m \Rightarrow g(t) \neq m$. □

CANTOROV DIAGONÁLNY TRIK

$\omega \prec \mathcal{P}(\omega)$ PREDPOKLADAJME, ŽE $\{a_n : n \in \omega\} = \mathcal{P}(\omega)$.

	0	1	2	3	4	5	... ← ω
a_0	0	1	0	1	0	1	
a_1	0	0	1	0	0	0	...
a_2	1	0	1	0	0	1	
		...					

a_n OBSAHUJE IBA PRVKY, KDE JE 1

ZNEGOVANÍM DOSTANEM NOVÚ PODMNOŽINU

VETA: $(\forall \alpha)\left(\alpha \text{ JE ORDINÁL} \rightarrow (\exists k)\left(\begin{matrix} k \text{ JE KARDINÁL } \& \\ k > \alpha \end{matrix}\right)\right)$

DÔKAZ: KEĎ JE $\alpha < \omega$, STAČÍ POLOŽIŤ $k = \omega$.

KEĎ JE $\alpha \geq \omega$:

$W = \{R \subseteq \alpha \times \alpha : \langle \alpha, R \rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ$\}$

W JE MNOŽINA, PRETOŽE:

α JE MNOŽINA, TJ. $\alpha \times \alpha$ JE MNOŽINA, TJ. $\mathcal{P}(\alpha \times \alpha)$ JE MNOŽINA A VYDELENÍM FORMULA „$R \in \mathcal{P}(\alpha \times \alpha)$: R JE DOBRE USP." DOSTÁVAME, ŽE AJ W JE MNOŽINA.

POLOŽME $S = \{\text{typ} \langle \alpha, R \rangle : R \in W\}$

S JE MNOŽINA, PRETOŽE: W JE MNOŽINA,

FORMULA „$\vartheta \underbrace{\text{ JE TYP}}_{\psi(R,\vartheta)} \langle \alpha, R \rangle$"

NAHRADENIE PRE ψ: S JE MNOŽINA.

S JE MNOŽINA ORDINÁLOV

$\sup S$ JE ORDINÁL, $\vartheta = \sup S + 1$

KEBY $k = |\sup(S)| \leq \alpha$, POTOM $|\vartheta| = |\alpha|$

$\Rightarrow$ EXISTUJE BIJEKCIA $b : \alpha \rightarrow \vartheta + 1$

POMOCOU BIJEKCIE b DEFINUJEME PRE $\eta, \xi \in \alpha$:

$\eta R \xi \leftrightarrow b(\eta) \in b(\xi)$

PRETOTO R JE R DOBRÉ USPORIADANIE MNOŽINY α

$\vartheta + 1 = \text{typ} \langle \alpha, R \rangle \notin S$ SPOR.

$\Rightarrow k$ JE KARDINÁL, $k > \alpha$. $\square$

01.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEFINÍCIA: KEĎ JE α ORDINÁL, α^+ JE NAJMENŠÍ VÄČŠÍ KARDINÁL (KARDINÁLNY NÁSLEDNÍK). KEĎ κ KARDINÁL A AK EXISTUJE ORDINÁL α TAKÝ, ŽE $\alpha^+ = \kappa$, POTOM κ JE NÁSLEDNÍK. INAK JE κ LIMITNÝ KARDINÁL.

TRIEDY A REKURZIA

KEĎ JE $\varphi(x)$ FORMULA JAZYKA TEÓRIE MNOŽÍN, POTOM $\{x : \varphi(x)\}$, AK VZNIKLA ZA POMOCI AXIÓMU VYDELENIA PRE φ, JE MNOŽINA.

PRÍKLAD:

$On = \{x : x \text{ JE ORDINÁL}\}$ TRIEDA VŠETKÝCH ORDINÁLOV
$V = \{x : x = x\}$ UNIVERZÁLNA TRIEDA
$Cn = \{x : x \text{ JE KARDINÁL}\}$ TRIEDA VŠETKÝCH KARDINÁLOV

$\{x : \varphi(x)\}$ BUDEME POUŽÍVAŤ AJ V PRÍPADE, KEĎ SA NEJEDNÁ O MNOŽINU.

NEFORMÁLNE: KEĎ JE φ FORMULA JAZYKA TEÓRIE MNOŽÍN, POTOM KAŽDÝ SÚBOR TVARU $\{x : \varphi(x)\}$ BUDEME NAZÝVAŤ TRIEDOU. VLASTNÁ TRIEDA JE TRIEDA, KTORÁ NIE JE MNOŽINA.

FORMÁLNE: VLASTNÉ TRIEDY NEEXISTUJÚ. TRIEDOVÝ ZÁPIS BUDEME POVAŽOVAŤ IBA ZA VHODNÚ SKRATKU ZÁKLADNÉHO JAZYKA TEÓRIE MNOŽÍN.

PRÍKLAD: $O_u \subseteq V$

KAŽDÝ ORDINÁL JE MNOŽINA

$(\forall x)(x \text{ JE ORDINÁL} \to x = x)$

VETA: TRIEDOVÉ TERMY JE MOŽNÉ Z FORMULÍ VŽDY ELIMINOVAŤ.

MAJME φ, ψ DVE FORMULE JAZYKA TEÓRIE MNOŽÍN A TRIEDY $\{x : \varphi(x)\} =: X$, $\{y : \psi(y)\} =: Y$

$X = Y$ JE SKRATKA $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$

$z = X$ $\quad (\forall x)(x \in z \leftrightarrow \varphi(x))$

$z \in X$ $\quad \varphi(z)$

$X \in Y$ $\quad (\exists u)(u \in Y \ \& \ (\forall x)(x \in u \leftrightarrow \varphi(x)))$

$\equiv (\exists u)(\psi(u) \ \& \ (\forall x)(x \in u \leftrightarrow \varphi(x)))$

FORMÁLNE NIE JE ŽIADEN ROZDIEL MEDZI FORMULOU A TRIEDOU. ROZDIEL JE IBA V NEFORMÁLNOM VYJADROVANÍ.

VETA (TRANSFINITNÁ INDUKCIA NA TRIEDE O_u)

KEĎ JE $C \subseteq O_u$ A $C \neq 0$, POTOM C MÁ NAJMENŠÍ PRVOK.

DÔKAZ: $C = \{x : \varphi(x)\}$, $(\forall x)(\varphi(x) \to x \in O_u)$, $(\exists x)\varphi(x)$.

PRE PRVOK x MÁME DVE MOŽNOSTI:

(1) KEĎ PRE KAŽDÝ ORDINÁL y PLATÍ $y < x \to \neg\varphi(y)$, POTOM x JE NAJMENŠÍ PRVOK TRIEDY C.

(2) KEĎ EXISTUJE ORDINÁL y : $y < x \ \& \ \varphi(y)$

POTOM AX. VYDELENIA DÁVA MNOŽINU $\{y < x : \varphi(y)\}$, KTORÁ JE NEPRÁZDNA A Z VETY O ORDINÁLOCH (5) DOSTÁVAME, ŽE MÁ NAJMENŠÍ PRVOK. □

01.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

POUŽITIE: MÁME UKÁZAŤ, ŽE FORMULA $\varphi(x)$ PLATÍ PRE VŠETKY ORDINÁLY.

POSTUP: 1) OVERÍME $\varphi(0)$

2) OVERÍME $(\forall \beta)(\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)) \rightarrow \varphi(\alpha)$

$\Rightarrow (\forall \alpha \in On)\, \varphi(\alpha)$

VETA (O TRANSFINITNEJ REKURZII)

KEĎ JE $F: V \to V$, POTOM EXISTUJE JEDINÉ $G: On \to V$ TAKÉ, ŽE: $(\forall \alpha)(G(\alpha) = F(G \upharpoonright \alpha))$.

DÔKAZ: UNICITA: NECH G_1, G_2 SPĹŇAJÚ TVRDENIE VETY.

CHCEME UKÁZAŤ $(\forall \alpha)\, G_1(\alpha) = G_2(\alpha)$

POUŽIJEME VETU O TRANSFINITNEJ INDUKCII

$G_1(0) = F(0) = G_2(0)$

NECH α JE ORDINÁL A

$(\forall \beta)(\beta < \alpha \rightarrow G_1(\beta) = G_2(\beta))$

$G_1(\alpha) = F(G_1 \upharpoonright \alpha) = F(G_2 \upharpoonright \alpha) = G_2(\alpha)$

$\Rightarrow (\forall \alpha)(\alpha$ JE ORDINÁL $\rightarrow G_1(\alpha) = G_2(\alpha))$.

EXISTENCIA: ZVOĽME ĽUBOVOĽNÝ ORDINÁL δ.

BUĎ $g: \delta \to V$ FUNKCIA TAKÁ, ŽE

$(\forall \alpha)(\alpha < \delta \rightarrow g(\alpha) = F(g \upharpoonright \alpha))$.

KAŽDÚ TAKÚTO FUNKCIU NAZVEME δ - APROXIMÁCIA.

NECH δ, δ' SÚ ORDINÁLY, g δ-APROX., g' δ'-APROX.

KEĎ JE α ORDINÁL, $\alpha < \min\{\delta, \delta'\}$,

POTOM $g(\alpha) = g'(\alpha)$, TJ. $g \upharpoonright \min\{\delta,\delta'\} = g' \upharpoonright \min\{\delta, \delta'\}$.

DÔKAZ IDE ROVNAKO AKO PRI UNICITE G.

UKÁŽME, ŽE δ - APROXIMÁCIA EXISTUJE.

δ JE ORDINÁL, g JE FUNKCIA, $\mathrm{dom}(g) \subseteq \delta$,

$g : \mathrm{dom}(g) \to V$

$$M = \{ \xi < \delta : g(\xi) = F(g \restriction \xi) \}$$

$0 \in M$: $g \restriction 0 = 0$, TEDA $g(0) = F(0)$

KEĎ POZNÁME $g(\xi)$ PRE VŠETKY $\xi < \eta < \delta$

POTOM POZNÁME $g \restriction \eta$

TAKISTO POZNÁME $F(g \restriction \eta)$, TAKŽE

STAČÍ POLOŽIŤ $g(\eta) = F(g \restriction \eta)$.

ZOSTÁVA POLOŽIŤ $G(\alpha) = g(\alpha)$ PRE NEJAKÚ

δ-APROXIMÁCIU g, KDE $\delta > \alpha$. $\square$

DEFINÍCIA: PRE ORDINÁLY α JE FUNKCIA $\aleph_\alpha$ $(= \omega_\alpha)$ DEFINOVANÁ TRANSFINITNOU REKURZIOU TAKTO:

$$\aleph_0 = \omega_0 = \omega$$

$$\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$$

PRE $\vartheta \in On$, ϑ JE LIMITNÝ ORDINÁL:

$$\aleph_\vartheta = \omega_\vartheta = \sup \{ \omega_\beta : \beta < \vartheta \}$$

POZNÁMKA: $\aleph$ A ω JE TO ISTÉ.

RÔZNE ZNAČENIE JE Z HISTORICKÉHO DÔVODU.

01.04.2008 TU
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

LEMMA 12: 1) KAŽDÝ ω_α JE KARDINÁL
2) KAŽDÝ NEKONEČNÝ KARDINÁL JE ROVNÝ NEJAKÉMU ω_α
3) PRE $\alpha < \beta$ JE $\omega_\alpha < \omega_\beta$
4) ω_α JE LIMITNÝ KARDINÁL $\Leftrightarrow$ α JE LIMITNÝ ORDINÁL
ω_α JE KARDINÁLNY NÁSLEDNÍK $\Leftrightarrow$ α JE ORDINÁLNY NÁSLEDNÍK

DÔKAZ: (1) $\omega_0 = \omega$ JE KARDINÁL
TRANSFINITNOU INDUKCIOU:
α, $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$ JE KARDINÁL

KEĎ JE α LIMITNÝ ORDINÁL, POTOM
$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$.
MÁME UKÁZAŤ, ŽE ω_α JE KARDINÁL.
K TOMU STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE KEDYKOĽVEK $\delta < \omega_\alpha$, POTOM $\delta \not\approx |\omega_\alpha|$.

$\delta < \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$
$\Rightarrow \exists \beta < \alpha : \delta \leq \omega_\beta$
α JE LIMITNÝ ORDINÁL, $\beta < \alpha$, TAKŽE TIEŽ $\beta + 1 < \alpha$

$\delta \leq \omega_\beta < \omega_{\beta+1} \leq \omega_\alpha$
$\Rightarrow \delta \not\approx |\omega_\beta|$.

BUĎ $\kappa \geq \omega$ KARDINÁL

POLOŽME $M = \{\beta : \beta$ JE ORDINÁL & $\omega_\beta < \kappa\}$

KEĎ JE $M = 0$: $\kappa = \omega = \omega_0$

KEĎ JE $M \neq 0$: POLOŽME $\vartheta = \sup M$.

1) $\vartheta \in M$. MÁME $\omega_\vartheta < \kappa$, SÚČASTNE $\vartheta + 1 \notin M$

$\Rightarrow \kappa \leq \omega_{\vartheta+1} = (\omega_\vartheta)^+$: $\kappa = \omega_{\vartheta+1}$

2) $\vartheta \notin M$ POTOM ϑ JE LIMITNÝ ORDINÁL

AK BY $\vartheta = \beta + 1$, $\beta \in M$, $\beta = \sup M \rightarrow$ SPOR $\lightning$

PRE LIMITNÚ ϑ MÁME

$$\omega_\vartheta = \sup\{\omega_\beta : \beta < \vartheta\} \leq \kappa$$

PRITOM NEMÔŽE PLATIŤ $\omega_\vartheta < \kappa$ (POTOM BY $\vartheta \in M$)

$\Rightarrow \omega_\vartheta \geq \kappa \Rightarrow \omega_\vartheta = \kappa$.

3) AK $\alpha < \beta$, $\alpha + 1 = \beta$

$\omega_\alpha < \omega_{\alpha+1} \leq \omega_\beta$ TJ. $\omega_\alpha < \omega_\beta$

4) STAČÍ UKÁZAŤ : κ JE KARDINÁLNY NÁSLEDNÍK PRÁVE VTEDY, KEĎ $\kappa = \omega_{\alpha+1}$

KEĎ JE κ KARDINÁLNY NÁSLEDNÍK, POTOM $\kappa > \omega$, TEDA $\kappa = (\omega_\alpha)^+$ PRE NEJAKÉ α, TJ. $\kappa = \omega_{\alpha+1}$.

KEĎ JE $\kappa = \omega_{\alpha+1}$, POTOM $\kappa = (\omega_\alpha)^+$, TAKŽE κ JE KARDINÁLNY NÁSLEDNÍK. $\square$

08.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

AXIÓM VÝBERU

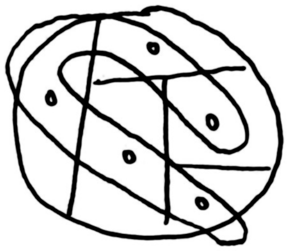
DEF. NECH a JE MNOŽINA, $\langle X_t : t \in a \rangle$ JE SÚBOR MNOŽÍN.
KARTÉZSKYM SÚČINOM NAZÝVAME MNOŽINU

$$\prod_{t \in a} X_t = \{ f : f \text{ JE FUNKCIA},\ \mathrm{dom}(f) = a \ \& \ (\forall t)\, t \in a \to f(t) \in X_t \}.$$

DEF. HOVORÍME, ŽE MNOŽINA r JE ROZKLADOM MN. X, KEĎ JE $X = \bigcup r$, $0 \notin r$, $(\forall u, v)(u \in r \ \& \ v \in r \to u \cap v = 0)$.

PRINCÍP VÝBERU: PRE KAŽDÝ ROZKLAD r MNOŽINY X EXISTUJE MNOŽINA $Y \subseteq X$, PRE KTORÚ PLATÍ

$$(\forall u \in r)(\exists t \in X)\ Y \cap u = \{t\}$$



DEF. FUNKCIA f DEFINOVANÁ NA MNOŽINE X, KTORÁ SPĹŇA $(y \in X \ \& \ y \neq 0) \to f(y) \in y$ SA NAZÝVA SELEKTOR NA MNOŽINE X.

AXIÓM VÝBERU (AC): NA KAŽDEJ MNOŽINE EXISTUJE SELEKTOR (IBA NEPRÁZDNA MNOŽINA)

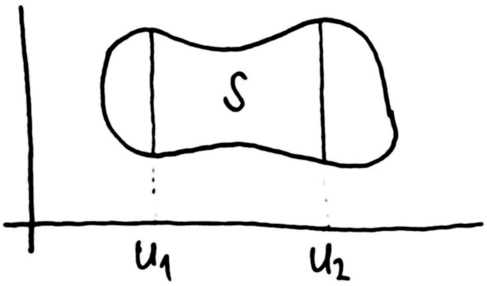
LEMMA 13: NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:
(a) AXIÓM VÝBERU
(b) PRINCÍP VÝBERU

(c) PRE KAŽDÚ RELÁCIU s EXISTUJE FUNKCIA f TAKÁ, ŽE $f \subseteq s$ & $dom(f) = dom(s)$.

(d) KEĎ JE $X \neq 0$ A PRE VŠETKY $t \in X$ JE $Y_t \neq 0$, POTOM $\prod_{t \in X} Y_t \neq 0$.

DÔKAZ: (a) → (b): BUĎ r ROZKLAD MNOŽINY a. PODĽA (a) NA MNOŽINE r EXISTUJE SELEKTOR f, TJ. $(\forall y \in r)\ f(y) \in y$, $f(y) \in a$. ĎALEJ PRE KAŽDÉ y PLATÍ $y \cap rng(f) = \{f(y)\}$. NAŠLI SME VÝBEROVÚ MNOŽINU ROZKLADU r.

(b) → (c):



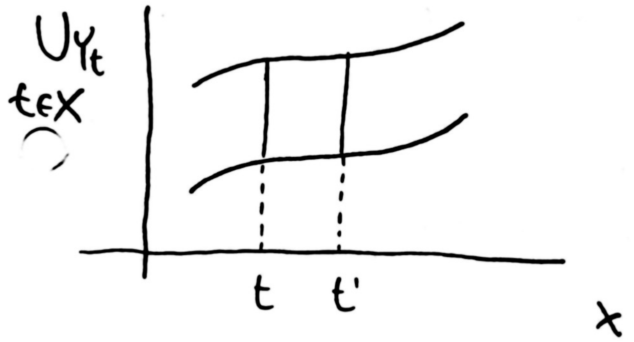
NECH $s \neq 0$. POLOŽME $r = \{\{\langle u,v\rangle \mid \langle u,v\rangle \in s\} \mid u \in dom(s)\}$. ZREJME PLATÍ, ŽE r JE ROZKLADOM MNOŽINY s. PODĽA PRINCÍPU VÝBERU EXISTUJE VÝBEROVÁ MNOŽINA $y \subseteq s$.

ZREJME: KEDYKOĽVEK $u \in dom(s)$, POTOM $y \cap \{\langle u,v\rangle \mid \langle u,v\rangle \in s\}$ V JEDINOM BODE, KTORÝ OZNAČÍME $f(u)$.

f JE FUNKCIA, $f \subseteq s$, $dom(f) = dom(s)$.

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

(c) → (d) : NECH $X \neq 0$, NECH PRE KAŽDÉ $t \in X$: $Y_t \neq 0$.
MÁME $X \times \bigcup \{Y_t \mid t \in X\}$
DEFINUJME $S \subseteq X \times \bigcup \{Y_t \mid t \in X\}$ PREDPISOM
$S = \{\langle t, v\rangle \mid t \in X, v \in Y_t\}$



S JE RELÁCIA ⇒ PODĽA c) EXISTUJE $f \subseteq S$:
f JE FUNKCIA, $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(S) = X$.

PRE KAŽDÉ $t \in X$ JE $\langle t, f(t)\rangle \in S$,
$f(t) \in Y_t$, $f \in \prod_{t \in X} Y_t$.

(d) → (a) : BUĎ X MNOŽINA. MÔŽME PREDPOKLADAŤ, ŽE $X \neq 0$ A $0 \notin X$.
KARTÉZSKY SÚČIN $\prod_{z \in X} z$ JE PODĽA (d) NEPRÁZDNY.
NECH $f \in \prod_{z \in X} z$. PODĽA DEF. KARTÉZSKEHO SÚČINU PRE KAŽDÉ $z \in X$ JE $f(z) \in z$, TEDA
f JE SELEKTOR NA MNOŽINE X.

PRÍKLAD: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in\mathbb{R}$

FUNKCIA f JE SPOJITÁ V BODE x, KEĎ

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y)(|x-y|<\delta\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

ALEBO

$$\forall\langle x_n\mid n\in\omega\rangle:\lim_{n\to\infty}x_n=x\to\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$$

$\Downarrow$) MAJME POSTUPNOSŤ $\langle x_n\mid n\in\omega\rangle$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x$.

ZVOĽME $\varepsilon>0$. HĽADÁME n_0 TAK, ABY

$\forall n\geq n_0: |f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$.

KEĎŽE $\lim_{n\to\infty}x_n=x\Rightarrow\exists n_0:\forall n\geq n_0:|x_n-x|<\delta$

$\Rightarrow\forall n\geq n_0\ |f(x_n)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

$\Uparrow$) SPOROM. NECH $\exists\varepsilon>0$ TAK, ŽE PRE KAŽDÉ $\delta>0$

EXISTUJE y : $|x-y|<\delta$ & $|f(y)-f(x)|\geq\varepsilon$.

VOLÍME POSTUPNE $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots$, DOSTANEME $x_1,x_2,x_3,\dots$

ZREJME $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, $|f(x_n)-f(x)|\geq\varepsilon\Rightarrow\neg\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$.

PREČO JE $\langle x_n : n\in\omega\rangle$ MNOŽINA ?

$\forall n\in\omega\setminus\{0\}: m_n=\{y\in\mathbb{R}\mid |y-x|<\frac{1}{n}\ \&\ |f(y)-f(x)|\geq\varepsilon\}$

JE NEPRÁZDNA MNOŽINA

$\{m_n\mid n\in\omega\setminus\{0\}\}$ JE MNOŽINA

$\langle x_n\mid n\in\omega\rangle$ JE JEJ SELEKTOR.

BEZ AXIÓMU VÝBERU BY TIE DEFINÍCIE SPOJITOSTI NEBOLI EKVIVALENTNÉ.

08.04.2008 Tu
PETER ČERNO

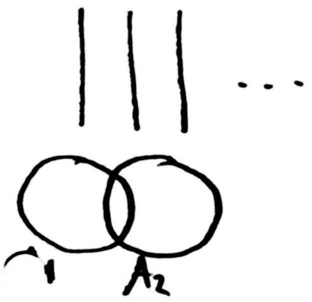
NAIL 063 TEORIE MNOŽIN

(AC) → ZJEDNOTENIE SPOČETNÉHO SÚBORU SPOČETNÝCH MNOŽÍN JE SPOČETNÁ MNOŽINA

$\omega \times \omega = \omega$

$\{A_n \mid n \in \omega\}$

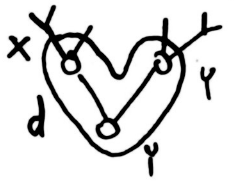
$\forall n \; \exists$ BIJEKCIA $b_n : A_n \xrightarrow{NA} \{n\} \times \omega$



... ALE TO JE IBA RELÁCIA. CHCEME FUNKCIU, A NA TO POTREBUJEME AC.

DEFINÍCIA: BUĎ $\langle a, \leq \rangle$ USPORIADANÁ MNOŽINA, $c \subseteq a$. MNOŽINU c NAZVEME REŤAZCOM, AK JE c USPORIADANÁ RELÁCIOU $\leq$ LINEÁRNE.

DEFINÍCIA: NECH $\langle a, \leq \rangle$ JE USPORIADANÁ MNOŽINA, $d \subseteq a$. PRVOK $x \in a$ SA NAZÝVA HORNÁ MEDZ MNOŽINY d, KEĎ $\forall y \in d : y \leq x$.
PRVOK x SA NAZÍVA MAXIMÁLNYM PRVKOM MNOŽINY d, KEĎ $x \in d$ A $(\forall y \in d)(y \neq x \rightarrow \neg(y > x))$



PRINCÍP MAXIMALITY (PM) (ZORNOVO LEMMA, ZORNOVO-KURATOWSKÉHO LEMMA):

NECH $\langle a, \leq \rangle$ JE USPORIADANÁ MNOŽINA TAKÁ, ŽE KAŽDÝ REŤAZEC V a MÁ HORNÚ MEDZ. POTOM PRE KAŽDÉ $x \in a$ $\exists m \in a$ TAKÉ, ŽE m JE MAXIMÁLNYM PRVKOM MNOŽINY a A $x \leq m$.

POZNÁMKA: PRINCÍP MAXIMALITY NIE JE MOŽNÉ VYVRÁTIŤ ANI DOKÁZAŤ, IBA TO, ŽE JE EKVIVALENTNÝ S AC.

VETA: Z PM PLYNIE: PRE KAŽDÉ DVE MNOŽINY M, N PLATÍ BUĎ $M \preccurlyeq N$ ALEBO $N \preccurlyeq M$.

DÔKAZ: POLOŽME $a = \{ f : f$ JE PROSTÉ ZOBRAZENIE, $\mathrm{dom}(f) \subseteq M, \mathrm{rng}(f) \subseteq N \}$

USPORIADAJME a INKLÚZIOU $\subseteq$, $\langle a, \subseteq \rangle$.

BUĎ c REŤAZEC V a, POLOŽME $g = \bigcup c$.

1) g JE FUNKCIA: KEĎ $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in g$

$\Rightarrow \exists$ FUNKCIA $f_1 \in c$: $\langle x, y \rangle \in f_1$

$\exists$ FUNKCIA $f_2 \in c$: $\langle x, y' \rangle \in f_2$

c JE REŤAZEC $\Rightarrow$ BUĎ $f_1 \subseteq f_2$, ALEBO $f_2 \subseteq f_1$.

V OBOCH PRÍPADOCH $y = y'$

2) g JE PROSTÁ FUNKCIA : $\langle x, y \rangle, \langle x', y \rangle \in g$

$\exists f_1, f_2 \in c$: $\langle x, y \rangle \in f_1$, $\langle x', y \rangle \in f_2$

$x = x'$, PRETOŽE BUĎ $f_1 \subseteq f_2$, ALEBO $f_2 \subseteq f_1$

A OBE FUNKCIE f_1, f_2 SÚ PROSTÉ.

3) KEDYKOĽVEK $f \in c$, $f \subseteq \bigcup c = g$

$\Rightarrow g$ JE HORNÁ MEZ c.

BUĎ m MAXIMÁLNY PRVOK MNOŽINY a.

m JE PROSTÁ FUNKCIA, $\mathrm{dom}(m) \subseteq M$, $\mathrm{rng}(m) \subseteq N$.

08.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

PLATÍ BUĎ $rng(m) = N$, ALEBO $dom(m) = M$.
AK NIE, POTOM $\exists x \in M \setminus dom(m)$,
$\exists y \in N \setminus rng(m)$
$m \cup \{\langle x, y\rangle\} \in a$, SPOR S MAXIMALITOU m.

AK $dom(m) = M$, POTOM $m : M \to N$ JE PROSTÁ, TJ. $M \preceq N$,
AK $rng(m) = N$, POTOM $m^{-1} : N \to M$ JE FCIA., TJ. $N \preceq M$. ∎

PRINCÍP DOBRÉHO USPORIADANIA (PDU)

(ZERMELOVA VETA) : NA KAŽDEJ MNOŽINE m EXISTUJE RELÁCIA r TAKÁ, ŽE $\langle m, r\rangle$ JE DOBRE USPORIADANÁ MNOŽINA.

VETA: NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:
(a) AC
(b) PM
(c) PDU

DÔKAZ: (a) → (c) :

AK $m = 0$, POLOŽME $r = 0$.
NECH $m \neq 0$. UVAŽUJME $b = P(m) \setminus \{0\}$.
PODĽA (a) NA MNOŽINE b EXISTUJE SELEKTOR f,
TJ $\forall z \subseteq m$; $z \neq 0$: $f(z) \in z$.

BUDEME HĽADAŤ PROSTÉ ZOBRAZENIE Z NEJAKÉHO ORDINÁLU α NA MNOŽINU m.

$\gamma < \beta < \alpha$ $\quad g(\gamma) \neq g(\beta)$

$g : \alpha \xrightarrow{NA} m$

TRANSFINITNOU INDUKCIOU:

$g(0) = f(m)$

MAJME $\gamma \in On$, POZNÁME $g \upharpoonright \gamma$

$m \setminus \{ g(\beta) \mid \beta < \gamma \}$

KEĎ JE TÁTO MNOŽINA PRÁZDNA, POLOŽME $\gamma = \alpha$.

AK JE NEPRÁZDNA, DEFINUJME

$$g(\gamma) = f\left(m \setminus \{ g(\beta) : \beta < \gamma \}\right)$$

PRETOŽE m JE MNOŽINA, MUSÍ EXISTOVAŤ α, KDE INDUKCIA KONČÍ.

15.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

(b) → (a) a MNOŽINA, HĽADÁME SELEKTOR NA a
PREDPOKLADÁME PM.

$m = \{ f : f$ JE FUNKCIA, $dom(f) \subseteq a$, $\forall x \in dom(f)\ x \neq 0 : f(x) \in x \}$

$(m, \subseteq)$. MUSÍME OVERIŤ, ŽE KAŽDÝ REŤAZEC V $(m, \subseteq)$ MÁ HORNÚ MEZ Z.

BUĎ $c \subseteq m$ REŤAZEC, $h = \bigcup c$.

h JE MNOŽINA USPORIADANÝCH DVOJÍC, h JE FUNKCIA:
$x \in a$, $\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in h'$
$\exists f \in c : f(x) = y$
$\exists g \in c : g(x) = z$

PRETOŽE c JE REŤAZEC, MUSÍ NASTAŤ BUĎ $f \subseteq g$, ALEBO $g \subseteq f$. V OBOCH PRÍPADOCH: $y = z$.

h JE HORNÁ MEZ REŤAZCA c: KEDYKOĽVEK $f \in c$, MÁME $f \subseteq h$.

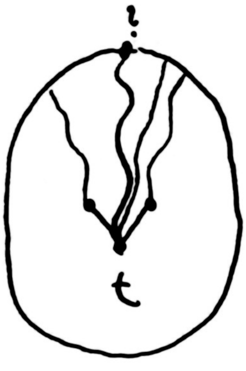
PRETOŽE (b), V m EXISTUJE MAXIMÁLNY PRVOK h.

PRETOŽE $h \in m$, KEDYKOĽVEK $x \in dom(h)$, POTOM $h(x) \in x$.

ZOSTÁVA DOKÁZAŤ $dom(h) = a$. SPOROM $\exists x \in a$, $x \notin dom(h)$.
AK $x \neq 0$, ZVOĽME $y \in x$.
DEFINUJME $dom(h') = dom(h) \cup \{x\}$, $h'(x) = y$
PRE $x' \in dom(h)$: $h'(x') = h(x')$.

MÁME: $h \in m$, $h' \supset h$, SPOR S MAXIMALITOU h.

(c) → (b) JE DANÉ $(a, \leq)$. PREDPOKLADÁME, ŽE KAŽDÝ REŤAZEC V $(a, \leq)$ MÁ HORNÚ MEZ.
BUĎ $t \in a$ ĽUBOVOĽNÝ PRVOK.



CHCEME DOKÁZAŤ EXISTENCIU MAXIMÁLNEHO PRVKU

ZVOĽME NA MNOŽINE a DOBRÉ USPORIADANIE $\prec$.

VLASTNOSŤ (*): REŤAZEC $c \subseteq a$ SPĹŇA VLASTNOSŤ (*), AK PLATÍ, ŽE c MÁ NAJMENŠÍ PRVOK t &
$(\forall x \in c)$ x JE $\prec$-NAJMENŠÍM PRVKOM MNOŽINY VŠETKÝCH HORNÝCH MEDZÍ $\{y \in c : y = t \lor y < x\}$

BUĎ $d = \bigcup \{c \subseteq a : c$ JE REŤAZEC SPĹŇAJÚCI (*)$\}$

d JE REŤAZEC. SPOROM: $\exists y, z \in d$:
$\neg(y < z) \;\&\; \neg(z < y) \;\&\; \neg(y = z)$
(TJ. y JE NEPOROVNATEĽNÉ SO z)

$\exists y_1 \in d$: y_1 JE $\prec$-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY
$\{y \in d : (\exists z \in d)\ y, z$ SÚ NEPOROVNATEĽNÉ$\}$

$\exists y_2 \in d$: y_2 JE $\prec$-NAJMENŠÍ PRVOK MNOŽINY
$\{z \in d :$ y_1 A z SÚ NEPOROVNATEĽNÉ$\}$

KEĎ JE $x < y_1$, POTOM $x < y_2$. AK NIE,
x, y_2 SÚ NEPOROVNATEĽNÉ.

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

$\exists c$ REŤAZEC SPĹŇAJÚCI $(*)$, PRE KTORÝ $x \in c$.
PRETOŽE c SPĹŇA $(*)$, x JE $\prec$-NAJMENŠÍ PRVOK Z MNOŽINY HORNÝCH MEDZÍ MNOŽINY $\{y \in c : y = t \vee y < x\}$.
y_1 JE TAKISTO HORNÁ MEZ MNOŽINY $\{y \in c : y = t \vee y < x\}$.
$x \prec y_1$ - x NEPOROVNATEĽNÝ S y_2, SPOR S VOĽBOU y_2..

MÁME $y_2 \in d$. MUSÍ TEDA EXISTOVAŤ REŤAZEC $\tilde{c}$ SPĹŇAJÚCI $(*)$, $y_2 \in \tilde{c}$.
$\{x \in \tilde{c} : x < y_2\} \supseteq \{x \in \tilde{c} ; x < y_1\}$
PRETOŽE $\tilde{c}$ JE REŤAZEC SPĹŇAJÚCI $(*)$, MUSÍ PLATIŤ:
y_2 HORNÁ MEZ MNOŽINY $\{x \in \tilde{c} : x < y_1\}$
$y_2 < y_1$. SPOR ↯

$d = \bigcup \{c : c$ REŤAZEC V a, c SPĹŇA $(*)\}$ JE REŤAZEC.
ANALOGICKY: d SPĹŇA $(*)$.

EXISTUJE HORNÁ MEZ m REŤAZCA d.
m JE MAXIMÁLNY PRVOK MNOŽINY a.
AK BY NIE, $\exists x_0 \in a : \forall y \in d : y < x_0$.
MNOŽINA VŠETKÝCH OSTATNÝCH HORNÝCH MEDZÍ MNOŽINY d JE NEPRÁZDNA, MÁ TEDA $\prec$-NAJMENŠÍ PRVOK y, $d \cup \{y\}$ JE REŤAZEC SPĹŇAJÚCI $(*)$, ČO JE SPOR S DEFINÍCIOU d. ∎

DÔSLEDKY: a) (AC) $\rightarrow$ PRE KAŽDÚ MNOŽINU A, $|A|$ EXIST.

b) (AC) $\rightarrow$ KEĎ JE A NEKONEČNÁ MNOŽINA, POTOM

$$A \approx A \times A \approx A \times \{0,1\}$$

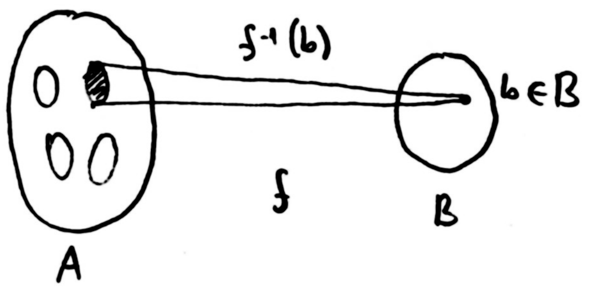
$$\kappa \otimes \kappa = \kappa = \kappa \oplus \kappa$$

c) (AC) $\rightarrow$ KAŽDÚ NEKONEČNÚ MNOŽINU MOŽNO ROZDELIŤ NA NEKONEČNE VEĽA NEKONEČNÝCH ČASTÍ

($b : A \rightarrow A \times A$ BIJEKCIA,

$a \in A$, $r_a = b^{-1}[\{a\} \times A]$)

d) (AC) $\rightarrow$ KEĎ A, B SÚ MNOŽINY A EXISTUJE SURJEKTÍVNE $f : A \rightarrow B$, POTOM $B \preceq A$.



BUĎ $r(b) = f^{-1}(b)$ PRE $b \in B$.
$\{r(b) : b \in B\}$ TVORÍ ROZKLAD MNOŽINY a.

NECH s JE SELEKTOR NA $\{r(b) : b \in B\}$

$s(r(b)) \in r(b)$.

POTOM $g : B \rightarrow A$ $\quad g(b) = s(r(b))$

g JE PROSTÉ.

ÚMLUVA: PLATNOSŤ (AC) BUDEME PREDPOKLADAŤ AUTOMATICKY.

DEFINÍCIA: KEĎ SÚ A, B MNOŽINY, BUDEME ZNAČIŤ ${}^{A}B = \{ f : f$ JE FUNKCIA, $f : A \rightarrow B \}$.

(AC) $\rightarrow$ PRE KARDINÁLY κ, λ : $\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$.

15. 04. 2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

POZOROVANIE: NECH $\kappa \geq \omega$. POTOM PRE VŠETKY $n \in \omega$, $n \neq 0$, $\kappa^n = \kappa$.

DÔKAZ: $\kappa^2 = |^2\kappa| = \kappa \times \kappa = \kappa$.
ĎALEJ INDUKCIOU.

VETA: (AC): BUĎTE κ, λ KARDINÁLY, $\kappa \geq 2$ ~~$\kappa \geq \omega$~~, $\kappa \leq \lambda$.
POTOM $\kappa^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

DÔKAZ: ${}^\lambda 2 = \{ f : f \text{ JE FUNKCIA } f : \lambda \to 2 \} \subseteq$
$\subseteq \{ f : f \text{ JE FUNKCIA } f : \lambda \to \kappa \} = {}^\lambda\kappa \subseteq$
$\subseteq \{ f : f \text{ JE FUNKCIA } f : \lambda \to \lambda \} = {}^\lambda\lambda$ $(\kappa \leq \lambda)$

$2^\lambda \preccurlyeq \kappa^\lambda \preccurlyeq \lambda^\lambda \preccurlyeq \mathcal{P}(\lambda)$

${}^\lambda\lambda \subseteq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$, $\lambda \geq \omega \Rightarrow \lambda \times \lambda \approx \lambda$, $\mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \approx \mathcal{P}(\lambda)$.

DOKÁŽME $\mathcal{P}(\lambda) \approx {}^\lambda 2$:

PRE $M \subseteq \lambda$ DEFINUJME $\chi(M) : \lambda \to 2$ PREDPISOM

$$\chi(M)(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{AK } \xi \notin M \\ 1 & \text{AK } \xi \in M \end{cases}$$

ZREJME JE $\chi : \mathcal{P}(\lambda) \to {}^\lambda 2$ BIJEKCIA.

TVRDENIE POTOM PLYNIE Z CANTOR-BERNSTEINOVEJ VETY. □

POZOROVANIE: BUĎTE A, B, C NEPRÁZDNE MNOŽINY.
${}^C({}^B A) \approx {}^{C \times B} A$.

KEĎ SÚ B, C DISJUNKTNÉ:
${}^B A \times {}^C A \approx {}^{B \cup C} A$.

DÔSLEDOK: (AC): κ, λ, μ KARDINÁLY: $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$
$\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$.

DÔKAZ: KEĎ JE $f \in {}^{C}({}^{B}A)$, $\mathrm{dom}(f) = C$

PRE KAŽDÉ $c \in C$ JE $f(c) \in {}^{B}A$.

TEDA $f(c)$ JE FUNKCIA, $\mathrm{dom}(f(c)) = B$.

PRE KAŽDÉ $b \in B$ $f(c)(b) \in A$.

KEĎ JE $g \in {}^{C \times B}A$: g JE FUNKCIA, $\mathrm{dom}(g) = C \times B$.

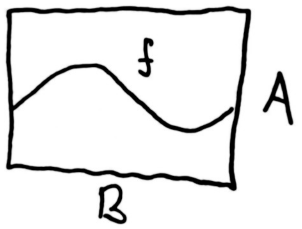
KEDYKOĽVEK $\langle c, b \rangle \in C \times B$: $g(c,b) \in A$.

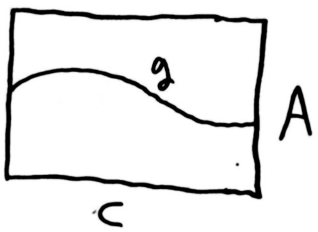
POLOŽME $\psi : {}^{C}({}^{B}A) \to {}^{C \times B}A$.

$\psi(f) = g$, KDE $g : {}^{C \times B}A$, $g(c,b) = f(c)(b)$.

ψ JE BIJEKCIA.

DRUHÁ ČASŤ POZOROVANIA:





POLOŽME $\Phi : {}^{B}A \times {}^{C}A \to {}^{B \cup C}A$

$\Phi(f, g) = f \cup g$.

Φ JE BIJEKCIA. $\square$

22.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

(AC) $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

λ	1	2	3	...	κ	κ^+	...
$\omega \le \kappa$	κ	κ	κ	...	2^λ	2^λ	

DEFINÍCIA: BUĎTE α, β ORDINÁLY, $f: \alpha \to \beta$.
POVIEME, ŽE f ZOBRAZUJE α DO β KOFINÁLNE
(f JE KOFINÁLNE ZOBRAZENIE), KEĎ
$(\forall \gamma \in \beta)(\exists \xi \in \alpha)\ \gamma \le f(\xi)$.

DEFINÍCIA: KEĎ JE β ORDINÁL, POTOM KOFINALITA β ($cf(\beta)$) JE NAJMENŠÍ ORDINÁL α TAKÝ, ŽE EXISTUJE KOFINÁLNE ZOBRAZENIE $f: \alpha \to \beta$.

JASNÉ: $cf(\beta) \le \beta$, β JE ORDINÁLNY NÁSLEDNÍK, $\beta = \gamma + 1$
$f: 1 \to \beta$, $f(0) = \gamma$, $f(1) = \beta$ JE KOFINÁLNE.

LEMMA 16: EXISTUJE KOFINÁLNE ZOBRAZENIE $f: cf(\beta) \to \beta$, KTORÉ JE OSTRO RASTÚCE.

DÔKAZ: UVAŽUJME β LIMITNÝ ORDINÁL.
ZVOĽME $g: cf(\beta) \to \beta$ ĽUBOVOĽNÉ KOFINÁLNE ZOBRAZENIE.
DEFINUJME TRANSFINITNOU INDUKCIOU:

$f(0) = g(0)$

$\xi \le cf(\beta)$, POZNÁME $f(\eta)$ PRE VŠETKY $\eta < \xi$

$f(\xi) = \sup\left(\{f(\eta), g(\eta) : \eta < \xi\} \cup \{g(\xi)\}\right) + 1$

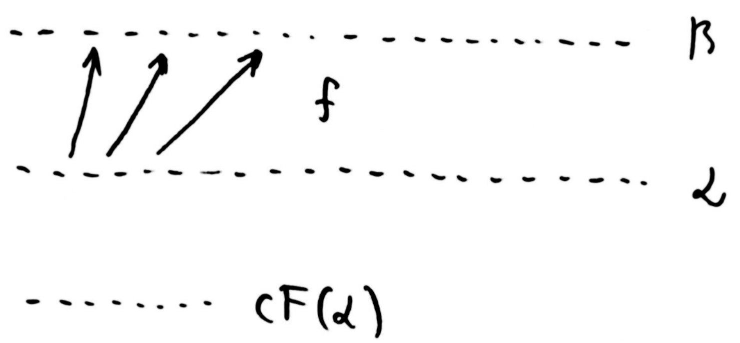
$f(\xi) < \beta$

KEĎ JE $\eta < \xi < cf(\beta)$, $f(\eta) < f(\xi)$

f JE TEDA OSTRO RASTÚCE.

KEDYKOĽVEK $\rho < \beta$ $\exists\, \xi$ $\rho \leq g(\xi)$,
PRETOŽE g JE KOFINÁLNE
$\rho \leq g(\xi) < f(\xi)$
f JE KOFINÁLNE. $\square$

LEMMA 17: BUĎTE α, β ORDINÁLY. NECH EXISTUJE KOFINÁLNE OSTRO RASTÚCE ZOBRAZENIE $f : \alpha \to \beta$. POTOM $cF(\alpha) = cF(\beta)$.



DÔKAZ: PODĽA PREDCHÁDZAJÚCEJ LEMMY EXISTUJE OSTRO RASTÚCE KOFINÁLNE ZOBRAZENIE $g : cF(\alpha) \to \alpha$.
ZOBRAZENIE $f \circ g : cF(\alpha) \to \beta$ JE KOFINÁLNE
$\Rightarrow cF(\beta) \leq cF(\alpha)$.
PRE $cF(\beta)$: $g : cF(\beta) \to \beta$
DEFINUJME ZOBRAZENIE $h : cF(\beta) \to \alpha$ NASL. PREDPISOM:
$h(\xi) = f^{-1}\left(\min\{ f(\iota) : f(\iota) > g(\xi) \}\right)$.
h JE KOFINÁLNE: $\rho \in \alpha$ $f(\rho) < \beta$
g JE KOFINÁLNE: EXISTUJE $\xi \in cF(\beta)$: $g(\xi) > f(\rho)$.
TEDA $h(\xi) \geq g(\xi)$
$\Rightarrow cF(\alpha) \leq cF(\beta)$. $\square$

22.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DÔSLEDOK: $cf(cf(\beta)) = cf(\beta)$.

LEMMA 18: PRE KAŽDÝ LIMITNÝ ORDINÁL β $cf(\beta)$ JE KARDINÁL.

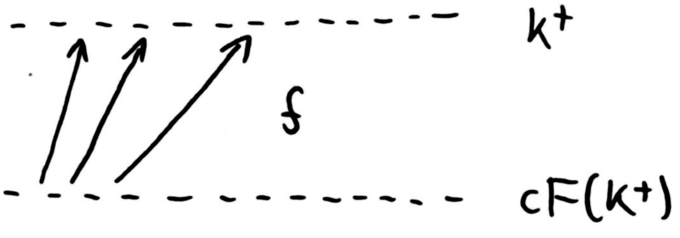
DÔKAZ SPOROM. NECH $|cf(\beta)| < cf(\beta)$.
MÁME BIJEKCIU $f : |cf(\beta)| \to cf(\beta)$.
MÁME $g : cf(\beta) \to \beta$ KOFINÁLNE.
$\frown$ ZOBRAZENIE $g \circ f : |cf(\beta)| \to \beta$
JE KOFINÁLNE, ČO JE SPOR. ↯ □

DEFINÍCIA: KARDINÁL κ JE REGULÁRNY, AK $cf(\kappa) = \kappa$.
AK $cf(\kappa) < \kappa$ HOVORÍME, ŽE κ JE SINGULÁRNY KARDINÁL.

LEMMA 19: ω JE REGULÁRNY KARDINÁL.

LEMMA 20: (AC) KEĎ JE $\kappa \geq \omega$ KARDINÁL, POTOM κ^+ JE REGULÁRNY KARDINÁL.

DÔKAZ (SPOROM). NECH $cf(\kappa^+) < \kappa^+$.
$cf(\kappa^+) \leq \kappa$
MÁME $f : cf(\kappa^+) \to \kappa^+$ OSTRO RASTÚCE KOFINÁLNE ZOBR.



$|f(\xi)| \leq \kappa$, PRETOŽE $f(\xi) < \kappa^+$ $(\xi < cf(\kappa^+))$

$$\kappa^+ = \bigcup_{\xi < cf(\kappa^+)} f(\xi) \qquad \Big|\bigcup_{\xi < cf(\kappa^+)} f(\xi)\Big| \underset{(AC)}{\leq} \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

□

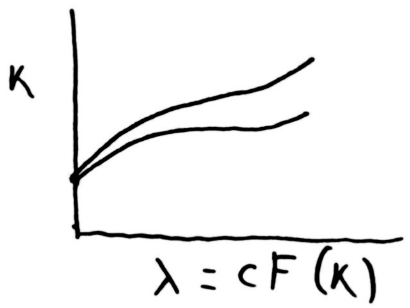
LEMMA 21: Keď je α limitný ordinál, potom $cf(\omega_\alpha) = cf(\alpha)$.

DÔKAZ: Plynie ihneď z lemmy 17.

LEMMA 22: (Königovo lemma)
(AC) Nech κ, λ sú kardinály, $\kappa \geq \omega$, $\lambda \geq cf(\kappa)$, potom $\kappa^\lambda > \kappa$.

λ	1	2	...	$cf(\kappa)$	...	κ	...
κ	κ	κ		$> \kappa$		2^λ	

DÔKAZ: Stačí nerovnosť dokázať pre $\lambda = cf(\kappa)$ pretože keď je $\lambda \leq \lambda'$, $\kappa^\lambda \leq \kappa^{\lambda'}$.



Buď $f : \kappa \to {}^\lambda\kappa$.

Stačí ukázať, že f nie je na.

Pretože $\lambda = cf(\kappa)$, zadefinujeme ostro rastúce zobrazenie $h : \lambda \to \kappa$.

Pre $g \in rng(f)$ označme $g = g_\alpha$, keď $g = f(\alpha)$.

Keď je $\xi < \lambda$, potom $h(\xi) < \kappa$.

Uvažujme $\{ g_\alpha(\xi) : \alpha < h(\xi) \}$.

22.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

$\kappa \setminus \underbrace{\{ g_\alpha(\xi) : \alpha < h(\xi) \}}$ JE NEPRÁZDNA, POLOŽME:
$F(\xi) := \min \left(\kappa \setminus \{ \dots \} \right)$.

F JE ZOBRAZENIE Z λ DO κ.

$F \notin rng(f)$, TJ NEEXISTUJE α TAK, ABY $F = g_\alpha$.

ZVOĽME ĽUBOVOĽNE $\alpha < \kappa$.

EXISTUJE $\xi < \lambda$ TAKÉ, ŽE $h(\xi) > \alpha$.

PODĽA DEFINÍCIE F, $F(\xi) \notin \{ g_\beta(\xi) : \beta < h(\xi) \}$.
$F(\xi) \neq g_\alpha(\xi)$.
$F \neq g_\alpha$

[↑ JE TO DIAGONÁLNY TRIK]. □

DÔSLEDOK: (AC) KEĎ JE $\lambda \geq \omega$ KARDINÁL,
POTOM $cf(2^\lambda) > \lambda$.

DÔKAZ: POLOŽME $\kappa = 2^\lambda$.
MÁME $\kappa^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^\lambda = \kappa$.
KEBY PLATILO, ŽE $cf(2^\lambda) \leq \lambda$ MÁME
$cf(\kappa) \leq \lambda$, PODĽA KÖNIGOVHO LEMMATU POTOM
$\kappa^\lambda > \kappa$, ČO JE SPOR S $cf(2^\lambda) \leq \lambda$.

HYPOTÉZA KONTINUA: $2^\omega = \omega_1$ (CH)

ZOVŠEOBECNENÁ HYPOTÉZA KONTINUA:
$(\forall \alpha)\ 2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ (GCH)

GÖDEL - CH A GCH NIE SÚ V SPORE S TM
KOHEN - ¬CH A ¬GCH TAKTIEŽ NIE SÚ V SPORE S TM.

LEMMA 23 (AC + GCH) NECH $\kappa, \lambda \geq 2$ KARDINÁLY A ASPOŇ JEDEN Z NICH JE NEKONEČNÝ. POTOM:

a) KEĎ JE $\kappa \leq \lambda$, POTOM $\kappa^\lambda = \lambda^+$

b) KEĎ JE $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, POTOM $\kappa^\lambda = \kappa^+$

c) KEĎ JE $\lambda < cf(\kappa)$, POTOM $\kappa^\lambda = \kappa$.

DÔKAZ. a) $\kappa \leq \lambda$, $\kappa \geq 2$, $\kappa^\lambda = 2^\lambda \underset{(GCH)}{=} \lambda^+$

b) KEĎ JE $cf(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$

PODĽA KÖNIGOVHO LEMMATU: $\kappa < \kappa^\lambda$

$$\kappa^+ \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa \underset{(GCH)}{=} \kappa^+ .$$

c) $\lambda < cf(\kappa)$, ${}^\lambda\kappa$

JE VŽDY POD α

KEĎ JE $f \in {}^\lambda\kappa$, POTOM f NIE JE KOFINÁLNA, TEDA EXISTUJE $\alpha < \kappa$, $f \in {}^\lambda\alpha$.

$${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha \in \kappa} {}^\lambda\alpha .$$

$$\kappa \leq \kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa| \leq \kappa \otimes |{}^{\max\{\lambda,\alpha\}}\max\{\lambda,\alpha\}| \leq$$

$$\leq \kappa \otimes 2^{|\max\{\lambda,\alpha\}|} \underset{(GCH)}{=} \kappa \otimes |\max\{\lambda,\alpha\}|^+ \leq \kappa$$

$\Rightarrow \kappa^\lambda = \kappa$.

$\square$

22.04.2008 Ty
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

DEFINÍCIA (PREDPOKLADÁ AC): BUĎ $I \neq \emptyset$. PRE KAŽDÉ $i \in I$ BUĎ κ_i KARDINÁLNE ČÍSLO. DEFINUJME $\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\dot{\bigcup}_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}\right|$

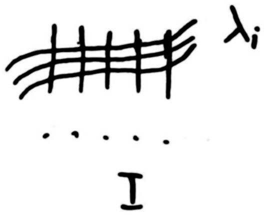
$\prod_{i\in I} \kappa_i = \left|\prod_{i\in I} \kappa_i\right|$

PRÍKLAD: $\kappa_i = \{0,1\}$, $I = \omega$

$\sum_{i\in\omega} \kappa_i = \omega$, $\prod_{i\in\omega} \kappa_i = 2^\omega$

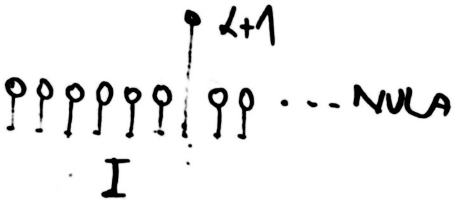
VETA (KÖNIGOVA NEROVNOSŤ) (AC): KEĎ JE $I \neq 0$ A PRE KAŽDÉ $i \in I$ κ_i A λ_i SÚ KARDINÁLNE ČÍSLA, $\kappa_i < \lambda_i$, POTOM $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$

DÔKAZ:



MNOŽINA FUNKCIÍ

NAJSKÔR EXISTUJE $f: \bigcup_{i\in I} \kappa_i \times \{i\} \to \prod_{i\in I} \lambda_i$ PROSTÉ



BUĎ $\alpha \in \kappa_i$, $i \in I$, $f(\langle\alpha, i\rangle) = g \in \prod_{i\in I} \lambda_i$ DEFINOVANÉ PREDPISOM $g(j) = 0$, $j \in I$, $j \neq i$, $g(i) = \alpha + 1$.

DEFINUJME $g \in \prod_{i\in I} \lambda_i$ TAKTO:

$i \in I$ PRE KAŽDÉ $\alpha \in \kappa_i$ POZNÁME $f(\alpha) \in \prod_{i\in I} \lambda_i$.

POZNÁME TAKISTO $f(\alpha)(i) \in \lambda_i$.

PRETOŽE $\lambda_i > \kappa_i$, MNOŽINA $\lambda_i \setminus \{f(\alpha)(i), \alpha \in \kappa_i\} \neq \emptyset$

DEF. $g(i) = \min(\lambda_i \setminus \{f(\alpha)(i), \alpha \in \kappa_i\})$

$g \in \prod_{i \in I} \lambda_i$, $g \notin rng(f)$,

KEĎ JE $\langle \alpha, i \rangle \in \bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\}$ TAKÉ, ŽE $g = f(\langle \alpha, i \rangle)$,

POTOM $g(i) \neq f(\alpha)(i)$, ČO JE SPOR. $\square$

VETA (HAUSDORFFOVA FORMULA): (AC)

KEĎ SÚ κ, λ NEKONEČNÉ KARDINÁLY, POTOM

$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$.

DÔKAZ: a) $\kappa^+ \otimes \kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda \otimes (\kappa^+)^\lambda = (\kappa^+)^\lambda$.

b) DVA PRÍPADY:

$\lambda \geq \kappa^+$, POTOM $(\kappa^+)^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$.

$\lambda < \kappa^+$, VIEME, ŽE κ^+ JE REGULÁRNY KARDINÁL,

TEDA $f: \lambda \to \kappa^+$, POTOM EXISTUJE $\alpha < \kappa^+$

$f: \lambda \to \alpha$ (f NEMÔŽE BYŤ KOFINÁLNA)

$$|{}^\lambda \kappa^+| = |\bigcup_{\alpha \in \kappa^+} {}^\lambda \alpha| \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$$

$\uparrow$

$|{}^\lambda \alpha| \leq \kappa^\lambda$

$\alpha \leq \kappa^+$, $\alpha \leq \kappa$

29. 04. 2008 Tu
PETER ČERNO

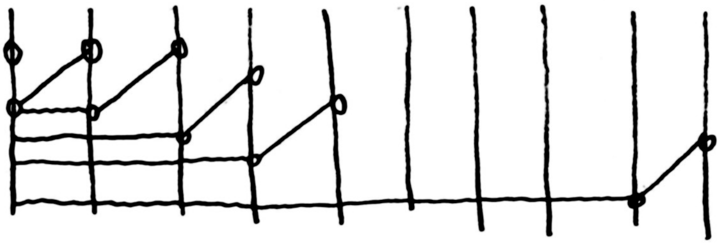
NAIL063 TEORIE MNOŽIN

NEKONEČNÁ KOMBINATORIKA

NAĎALEJ BUDEME PREDPOKLADAŤ AC, NEBUDEME UVÁDZAŤ.

PRINCÍP KOMPAKTNOSTI

MAJME SÚBOR MNOŽÍN $A = \langle A_i : i \in I \rangle$.
ČIASTOČNÝ SELEKTOR NA SÚBORE A JE KAŽDÉ ZOBRAZENIE f, TAKÉ, ŽE $dom(f) \subseteq I$ A $\forall i \in I$ $f(i) \in A_i$.
BUĎ S MNOŽINA ČIASTOČNÝCH SELEKTOROV A.
HOVORÍME, ŽE S POKRÝVA KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I, KEĎ PRE KAŽDÚ KONEČNÚ $u \subseteq I$ $\exists f \in S$ TAKÉ, ŽE $u \subseteq dom(f)$.
ZOBRAZENIE g SA NAZÝVA FILTROVANÝM PREDĹŽENÍM MNOŽINY ČIASTOČNÝCH SELEKTOROV S, KEĎ JE $dom(g) = I$ A $(\forall u \subseteq I$, u JE KONEČNÁ$)(\exists f \in S)$ $f \restriction u = g \restriction u$.



$I = \omega$

VETA (PRINCÍP KOMPAKTNOSTI) KEĎ JE $A = \langle A_i : i \in I \rangle$ SÚBOR KONEČNÝCH MNOŽÍN, POTOM KAŽDÝ SYSTÉM ČIASTOČNÝCH SELEKTOROV, KTORÝ POKRÝVA KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I, MÁ FILTROVANÉ PREDĹŽENIE.

DÔKAZ: MAJME S SÚBOR ČIASTOČNÝCH SELEKTOROV, KTORÝ POKRÝVA VŠETKY KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I.

BÚNO MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE PRE KAŽDÝ ČIASTOČNÝ SELEKTOR $f \in S$ JE $dom(f)$ KONEČNÁ MNOŽINA.

$$Z = \left\{ g : dom(g) \subseteq I, (\forall i \in dom(g))\, g(i) \in A_i, \atop (\forall u \subseteq dom(g), u \text{ JE KONEČNÁ}) \{f \in S : f \upharpoonright u = g \upharpoonright u\} \text{ POKRÝVA VŠETKY KONEČNÉ PODMNOŽINY MN. } I \right\}.$$

$(Z, \subseteq)$.

BUĎ $L \subseteq Z$ REŤAZEC V $(Z, \subseteq)$. POLOŽME $\tilde{g} = \bigcup L$.

$\tilde{g}$ JE FUNKCIA. KEDYKOĽVEK $i \in dom(\tilde{g})$, EXISTUJE $g \in L$, $i \in dom(g)$, $\tilde{g}(i) = g(i)$.

NA VOĽBE g NEZÁLEŽÍ: AK $g' \in L$, $i \in dom(g')$. PRETOŽE L JE LINEÁRNE USPORIADANÉ, BUĎ $g \subseteq g'$, ALEBO $g' \subseteq g$ V OBOCH PRÍPADOCH $g(i) = g'(i)$.

ZREJME PRE $g \in L$ JE $\tilde{g} \supseteq g$, $\tilde{g}$ JE HORNÁ MEZ L.

ZOSTÁVA OVERIŤ, ŽE $\tilde{g} \in Z$. BUĎ u KONEČNÁ, $u \subseteq dom(\tilde{g})$.
PRE KAŽDÉ $i \in u$ EXISTUJE $g_i \in L$, ŽE $i \in dom(g_i)$.
KEĎ $i \neq j$, $i \in u$, $j \in u$, $g_i \supseteq g_j$, ALEBO $g_j \supseteq g_i$.
PRETOŽE u JE KONEČNÁ, L JE LINEÁRNE USPORIADANÁ, EXISTUJE $g \in L$: $u \subseteq dom(g)$.

MÁME $g \in Z$, TEDA $\{f \in S : f \upharpoonright u = g \upharpoonright u\}$ POKRÝVA VŠETKY KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I.
$\tilde{g} \upharpoonright u = g \upharpoonright u \Rightarrow$ DOSTÁVAME, ŽE $\tilde{g} \in Z$.

PODĽA PM Z OBSAHUJE MAXIMÁLNY PRVOK h.
KEDYKOĽVEK $u \subseteq dom(h)$, u JE KONEČNÁ, $\{f \in S : f \upharpoonright u = h \upharpoonright u\}$ POKRÝVA VŠETKY KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY $I \Rightarrow$ JE $\neq \emptyset$, $\exists f \in S : f \upharpoonright u = h \upharpoonright u$.

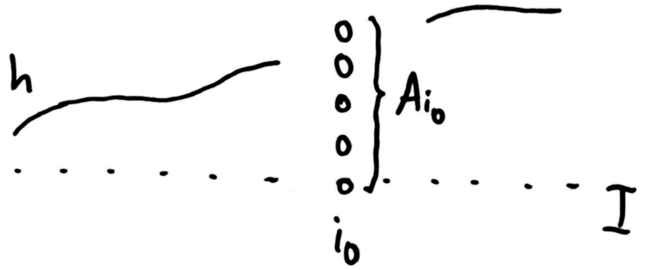
29.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

ZOSTÁVA OVERIŤ, ŽE $\mathrm{dom}(h) = I$.

SPOROM: BUĎ $i_0 \in I$ TAKÉ, ŽE $i_0 \notin \mathrm{dom}(h)$.

A_{i_0} JE KONEČNÁ, TAKŽE $A_{i_0} = \{a_0, \dots, a_k\}$



PRETOŽE h JE MAXIMÁLNY PRVOK MNOŽINY Z,
h NEJDE PREDĹŽIŤ NA $I \cup \{i_0\}$.

TEDA PRE KAŽDÚ FUNKCIU:

$h_0 = h \cup \{\langle i_0, a_0 \rangle\}$,
$h_1 = h \cup \{\langle i_0, a_1 \rangle\}$,
...
$h_k = h \cup \{\langle i_0, a_k \rangle\}$.

MÁME $h_j \notin Z$ $(j = 0, \dots, k)$

$\forall j = 0, 1, \dots, k$ EXISTUJE KONEČNÁ MNOŽINA $u_j \subseteq \mathrm{dom}(h_j)$,
PRE KTORÚ PLATÍ: $\{f \in S : f \restriction u_j = h_j \restriction u_j\}$ <u>NEPOKRÝVA</u>
KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I.

TEDA PRE KAŽDÉ $j = 0, \dots, k$ EXISTUJE KONEČNÁ
MNOŽINA $v_j \subseteq I$, KTORÁ SPĹŇA:

KEDYKOĽVEK $f \in S$ TAKÉ, ŽE $f \restriction u_j = h_j \restriction u_j$,
POTOM $v_j \nsubseteq \mathrm{dom}(f)$.

PRETOŽE $h \in Z$, $h_j \notin Z$, MUSÍ PLATIŤ $i_0 \in u_j$.

$$w = \left(\bigcup_{j=0}^{k} u_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{k} v_j\right) \setminus \{i_0\} \subseteq \mathrm{dom}(h).$$

$\{f \in S : f \restriction w = h \restriction w\}$ POKRÝVA VŠETKY KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY I. TEDA TÁTO MNOŽINA TAKISTO OBSAHUJE f, PRE KTORÚ $\mathrm{dom}(f) \supseteq w \cup \{i_0\}$.

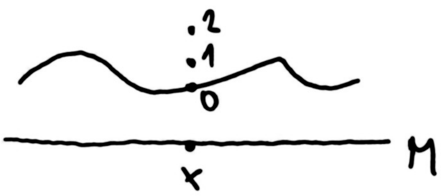
MÁME: $\exists f \in S : w \cup \{i_0\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$, $f \restriction w = h \restriction w$, $f(i_0) = a_j$ PRE VHODNÉ $j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

PRE TOTO f : $f \restriction w \cup \{i_0\} = h_j \restriction w \cup \{i_0\}$, $v_j \subseteq \mathrm{dom}(f)$, ČO JE SPOR. ↯ $\square$

LEMMA O TROCH MNOŽINÁCH

NECH $f : M \to M$ JE TAKÁ, ŽE PRE $\forall x \in M$ JE $f(x) \neq x$. POTOM $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ PRE $i \neq j$, PRE $\forall i \in \{0,1,2\} : f[M_i] \cap M_i = \emptyset$.

DôKAZ:



CHCEME POUŽIŤ PM. $I = M$, PRE $x \in M$, $A_x = \{0,1,2\}$. S BUDE SÚBOR ČIASTOČNÝCH SELEKTOROV, KTORÉ SPĹŇAJÚ $(\forall x \in \mathrm{dom}(g))\ g(f(x)) \neq g(x)$.

AK S POKRÝVA KONEČNÉ PODMNOŽINY MNOŽINY M, APLIKUJEME PRINCÍP KOMPAKTNOSTI; FILTROVANÉ PREDĹŽENIE h. STAČÍ POLOŽIŤ $M_i = \{x \in M : h(x) = i\}$ PRE $i = 0, 1, 2$.

29.04.2008 Tu
PETER ČERNO

NAIL063 TEORIE MNOŽIN

BUĎ $u \subseteq M$ KONEČNÁ. POTREBUJEME NÁJSŤ $g \in S$, ŽE $u \subseteq dom(g)$.

INDUKCIOU PODĽA $|u|$:

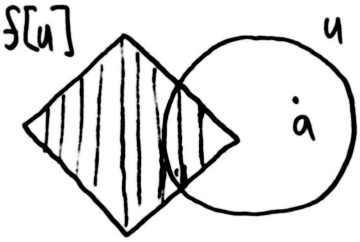
$|u|=2$, $u=\{x_1, x_2\}$, $g(x_1)=0$, $g(x_2)=1$.

NECH EXISTUJE $g \in S$ PRE $u \subseteq M$, $|u|=n$.

MAJME $u \subseteq S$, $|u|=n+1$.

DVE MOŽNOSTI: 1) $f[u] \neq u$.

V TOM PRÍPADE EXISTUJE $a \in u \setminus f[u]$



Z INDUKČNÉHO PREDPOKLADU MÁME $g \in S$, ŽE $dom(g) = u \setminus \{a\}$.

POZNÁME $g(a) \in \{0, 1, 2\}$,
ZVOLME $j \in \{0,1,2\} \setminus \{g(a)\}$,

POLOŽME $g' = g \cup \{\langle a, j \rangle\}$, $g' \in S$.

$u \subseteq dom(g)$.

2) $f[u] = u$

PRETOŽE u JE KONEČNÁ, f JE NA, f MUSÍ BYŤ PROSTÉ.

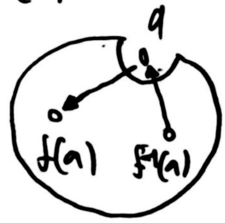
ZVOLÍME $a \in u$ ĽUBOVOLNE.

Z INDUKČNÉHO PREDPOKLADU MÁME $g \in S$, $dom(g) \supseteq u \setminus \{a\}$.

PRETOŽE $f: u \to u$ JE PROSTÉ, EXISTUJE JEDINÉ $x \in u \setminus \{a\}$, ŽE $f(x) = a$. EXISTUJE JEDINÉ $y \in u \setminus \{a\}$: $y = f(a)$.

DEFINUJME $g': u \to \{1,2,3\}$ PREDPISOM

$g' = g \cup \{\langle a, j \rangle\}$ PRE $j \in \{0,1,2\} \setminus \{g(x), g(y)\}$



$(L, <)$ LIN. USPORIADANIE, $\mathcal{D}$ JE SÚBOR INTERVALOV V L,

$\exists n \in \omega \ \forall x \in L \ |\{J \in \mathcal{D} : x \in J\}| \leq n.$

POTOM $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_n$, KAŽDÉ $\mathcal{D}_i$ JE DISJUNKTNÝ SÚBOR.

LEMMA O DISJUNKTNOM ZJEDNOTENÍ

(BERNSTEIN, MENGER, SIERPINSKY, KURATOWSKI, KEISTER, ...)

BUĎ κ NEKONEČNÝ KARDINÁL, BUĎTE $\langle A_\alpha, \alpha \in \kappa \rangle$ MNOŽINY, PRE KAŽDÉ $\alpha \in \kappa$ JE $|A_\alpha| = \kappa$. POTOM EXISTUJE SÚBOR $\{B_\alpha, \alpha \in \kappa\}$ TAKÝ, ŽE:

1) $(\forall \alpha \in \kappa) \ |B_\alpha| = \kappa$
2) $\alpha \neq \beta \quad B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$
3) $(\forall \alpha \in \kappa) \ B_\alpha \subseteq A_\alpha$.

POUŽITIE: EXIST. LEBESGUEVSKY NEMERATEĽNÁ MNOŽINA NA $\mathbb{R}$.

DÔKAZ: KEĎ JE $M \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(M) > 0$, $\exists F \subseteq M$, F UZAVRENÁ, $\mu(F) > 0$.

BUĎ $\{F_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ VŠETKO UZAVRETÉ MNOŽINY O KLADNEJ MIERE

$\exists \{B_\alpha, \alpha \in 2^\omega\}$ DISJUNKTNÉ ZJEDNENIE

$L \subseteq \mathbb{R}$ TAKÉ, ABY $\forall \alpha \ |L \cap B_\alpha| = 1$.

L JE NEMERATEĽNÁ. AK NIE:

1) $\mu(L) > 0$: $\exists F$ UZAVRETÁ, $\mu(F) > 0$, $F \subseteq L$,
$F = F_\alpha$, $B_\alpha \subseteq L$ - SPOR, $|B_\alpha| = 2^\omega$, $|L \cap B_\alpha| = 1$.

2) $\mu(L) = 0$: $\mu(\mathbb{R} \setminus L) > 0$ $\exists F$ UZAVRETÁ, $\mu(F) > 0$,
$F \subseteq \mathbb{R} \setminus L$, $F = F_\alpha$, $B_\alpha \subseteq F_\alpha$,
$B_\alpha \cap L = \emptyset$ - SPOR $|B_\alpha \cap L| = 1$.