Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Složitost I

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Ondřej Čepek, Ph.D.
E-mail: Ondrej.Cepek@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://ktiml.mff.cuni.cz/~cepek/`

Anotace: Základní přednáška o teorii složitosti algoritmů. Zhruba první polovina přednášky je věnována studiu složitosti konkrétních algoritmů různých typů (grafové, rozděl a panuj, hladové na matroidech) pracujících v polynomiálním čase. Složitost je zkoumána jak "klasicky"(složitost v nejhorším případě), tak amortizovaně. Druhá polovina přednášky je pak věnována studiu třídy NP, polynomiální převoditelnosti problémů a důkazům NP-úplnosti problémů. Závěr přednášky je věnován tématům souvisejícím se studiem NP-úplnosti: pseudopolynomiálním algoritmům a silné NP-úplnosti, početním úlohám a třídě $\sharp$P.

Sylabus:

1. Časová složitost algoritmů a prostředky pro její popis.

2. Algoritmy typu Rozděl a Panuj (hledání mediánu v lineárním čase, Strassenův algoritmus na násobení matic), metody řešení rekurentních rovnic popisujících časovou složitost těchto algoritmů.

3. Hladové algoritmy na váženém matroidu a jejich aplikace (hledání minimální kostry grafu, rozvrhovací problémy).

4. Grafové algoritmy založené na DFS (hledání dvojsouvislých komponent grafu, topologické třídění a hledání silně souvislých komponent orientovaného grafu) a na BFS (hledání planárního separátoru v lineárním čase).

5. Dolní odhady složitosti problémů, rozhodovací stromy, dolní odhad pro třídění pomocí porovnávání prvků.

6. Amortizovaná složitost, binomiální a Fibonacciho haldy a jejich použití v Dijkstrově algoritmu na hledání nejkratších cest v grafu.

7. Formální definice tříd P a NP, polynomiální převoditelnost problémů, pojem NP-úplnosti, příklady NP-úplných problémů, důkazy NP-úplnosti.

8. Pseudopolynomiální algoritmy a silná NP-úplnost.

9. Početní úlohy, třída ♯P, ♯P-úplnost.

10. Aproximace NP-těžkých úloh, úplně polynomiální aproximační schémata.

Cíl předmětu: Naučit základy z teorie složitosti algoritmů, včetně NP-úplnosti a převoditelnosti.

Literatura:

1. L. Kučera: Kombinatorické algoritmy

2. J. Plesník: Grafové algoritmy

3. Cormen, Leiserson, Rivest : Introduction to algorithms, Mc Graw Hill 1990

4. Kozen : Design and analysis of algorithms, Springer-Verlag 1992

5. Tarjan : Data structures and network algorithms, SIAM, 1983

6. Garey, Johnson : Computers and intractability - a guide to the theory of NP-completeness, W.H.Freeman 1978

This page is intentionally left blank.

01.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

ONDŘEJ ČEPEK

http://kti.mff.cuni.cz/~cepek

$$f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

DôKAZ MASTER THEOREM

OBECNÁ VERZIA : PRÍPAD c)
NESTAČÍ DOSADIŤ d DO $a_1^x + \ldots + a_k^x = 1$

STRASSENOV ALGORITMUS NA RÝCHLE NÁSOBENIE MATÍC

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

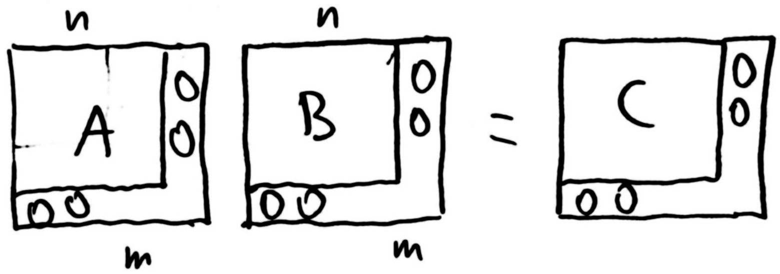
1 KOMPL. NÁS. = 4 REÁL. NÁS. + 2 REÁL. SČÍT.

$$m_1 = \boxed{c(b-a)} = bc - ac$$
$$m_2 = \boxed{a(d+c)} = ad + ac$$
$$m_3 = \boxed{d(a+b)} = ad + bd$$

$$\boxed{m_1 + m_2} = ad + bc$$
$$\boxed{m_2 - m_3} = ac - bd$$

3 REÁL. NÁS.
3 REÁL. SČÍT.

+ 2 REÁL SČÍT.

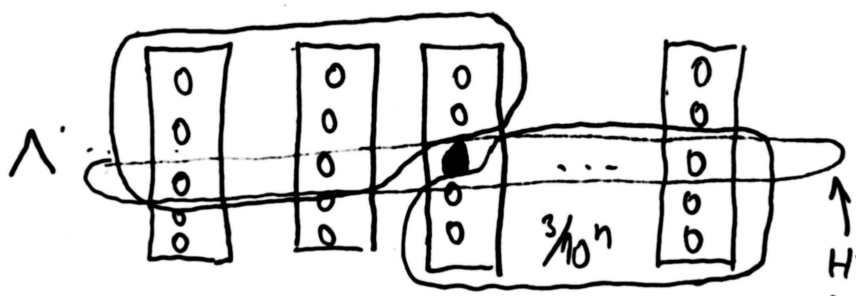


$m=2^k$, $\quad n \le m < 2n$

$$n^{\log_2 7} \le m^{\log_2 7} < 2^{\log_2 7}\, n^{\log_2 7}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta(n^{\log_2 7})$$

HĽADANIE k-TEHO NAJMENŠIEHO PRVKU
ALGORITMUS (BLUM ET AL.)



HĽADÁME MEDIÁN (REKURZÍVNE)

$\lceil \frac{n}{5} \rceil$ 5-tíc

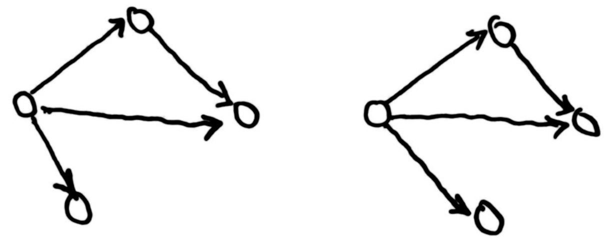
02.10.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN066 SLOŽITOSŤ I

$$T(n) = 7 \cdot \frac{n}{5} + T\left(\frac{n}{5}\right) + (n-1) + T\left(\frac{7}{10}n\right)$$

PROSTREDNÝ PRVOK NA 7 POROVNANÍ

$\underbrace{\cancel{o}}_{\text{NAJMENŠÍ}}\ o\ o\ o\ \underbrace{\cancel{o}}_{\text{NAJVÄČŠÍ}}$



ZOSTANÚ TRI PRVKY
POROVNÁM KAŽDÝ
S KAŽDÝM

$$T(n) \leq kn + c$$

$$T(n) \leq 7 \cdot \frac{n}{5} + k \cdot \frac{n}{5} + c + (n-1) + k \cdot \frac{7}{10}n + c =$$

$$= \left(\frac{7}{5} + \frac{k}{5} + 1 + \frac{7}{10}k\right)n + c - 1 + c =$$

$$= \left(\frac{12}{5} + \frac{9}{10}k\right)n + 2c - 1 \leq kn + c$$

$$\frac{12}{5} + \frac{9}{10}k \leq k \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k \geq 24}}$$

$$2c - 1 \leq c \quad \Rightarrow \quad c \leq 1$$

$$\overset{\Theta(n^d)}{\widetilde{F}}$$

a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^2$

b) $T(n) = T(\frac{9}{10}n) + n$

c) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$

d) $T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$

e) $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$

f) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

g) $T(n) = T(n-1) + n$

$T(n) = aT(\frac{n}{c}) + \underbrace{F(n)}_{\Theta(n^d)}$

$z = \log_c a$

$z < d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^d)$

$z = d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

$z > d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

a) $z = \log_2 2 = 1 < 2$ $\quad T(n) \in \Theta(n^2)$

b) $z = \log_{10/9} 1 = 0 < 1$ $\quad T(n) \in \Theta(n)$

c) $z = \log_4 16 = 2 = 2$ $\quad T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

d) $z = \log_3 7 < 2$ $\quad T(n) \in \Theta(n^2)$

e) $z = \log_2 7 > 2$ $\quad T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$

f) $z = \log_4 2 = \frac{1}{2}$ $\quad T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$

g) $T(n) = T(n-1) + n = n + (n-1) + \dots + 1 = \binom{n+1}{2} \in \Theta(n^2)$

h) $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\lceil \log \log_2 n \rceil} \in \Theta(\log \log n)$

$n^{\frac{1}{2^k}} \leq 2$

$k \geq \log_2 \log_2 n$

02.10.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN066 SLOŽITOST I

$n = 2^m, \quad T(2^m) = T(\sqrt{2^m}) + 1 = T(2^{\frac{m}{2}}) + 1$

$S(m) = T(2^m) \quad S(m) = S(\frac{m}{2}) + 1$

VYJDE $S(m) \in \Theta(\log m)$

$m = \log_2 n \Rightarrow T(n) = S(m) \in \underline{\underline{\Theta(\log \log n)}}.$

i) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

$n = 2^m \quad T(2^m) = 2T(\sqrt{2^m}) + \log 2^m$

$S(m) = T(2^m) \quad S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$

$z = \log_2 2 = 1 \Rightarrow S(m) \in \Theta(m \log m)$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(n)}} \in \Theta(\log n \cdot \log \log n).$

j) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n \log_2 n$

$T_L(n) = 3T_L(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$ LOWER BOUND

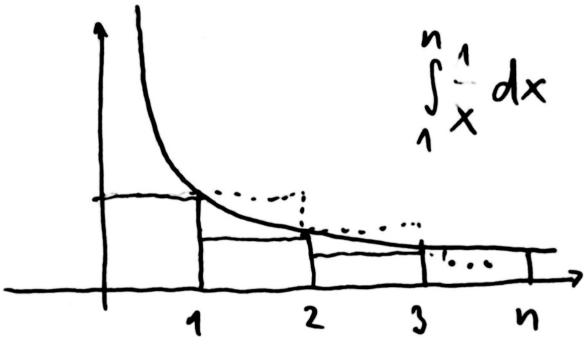
$T_U(n) + 3T_U(\frac{n}{2}) + \Theta(n^{1+\varepsilon})$ UPPER BOUND

$\log_2 3 > 1, \quad 1+\varepsilon \Rightarrow \underline{\underline{T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})}}$

PRE MALÉ $\varepsilon > 0$

k) $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$

$T(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \in \Theta(\ln n)$



$\int_1^n \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx =$

$= 1 + [\ln x + C]_1^n$

a) $T(n) = 2T(\frac{n}{5}) + T(\frac{n}{2}) + n$

b) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 4T(\frac{n}{4}) + n^2$

c) $T(n) = 2T(\frac{2}{3}n) + T(\frac{n}{3}) + n\sqrt{n}$

$T(n) = T(a_1 n) + \dots + T(a_k n) + \overbrace{F(n)}^{\Theta(n^d)}$

$\sum_{i=1}^{k} a_i^z = 1$

$z < d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^d)$

$z = d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^z \log n)$

$z > d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^z)$

a) $a_1 = \frac{1}{5},\ a_2 = \frac{1}{5},\ a_3 = \frac{1}{2} \qquad d = 1$

$2\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

PRE $x = d = 1$ JE $2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10} < 1$

$\Rightarrow z < d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n)$

02.10.2008Th
PETER ČERNO

EX: NTIN066 SLOŽITOST I

b) $3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1 \qquad d=2$

PRE $x = d = 2$ JE $3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow z = d$

$T(n) \in \Theta(n^2 \log n)$

c) $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad d = \frac{3}{2}$

$z = 2, \quad 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$

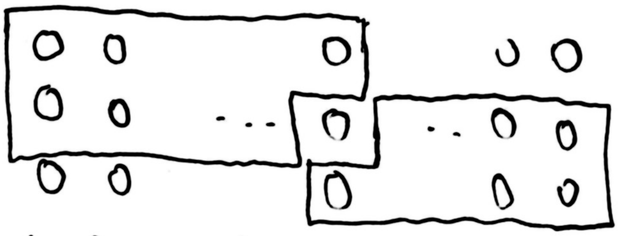
$z > d \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

HOMEWORK

$T(n) = T(n-1) + \log n$

08.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}n = \frac{1}{3}n$$

$$T(n) = 3\cdot\frac{n}{3} + T\left(\frac{n}{3}\right) + (n-1) + T\left(\frac{2n}{3}\right) \Rightarrow O(n\log n)$$

HLADOVÉ ALGORITMY

PROBLÉM 1: MINIMÁLNA KOSTRA

PROBLÉM 2: MNOŽINA $S = \{1,\dots,n\}$ ÚLOH JEDNOTKOVEJ DĹŽKY, DEADLINE $d_i \in \{1,\dots,n\}$, POKUTA w_i

ÚLOHA: NÁJSŤ ROZVRH (PERMUTÁCIU) MINIMALIZUJÚCI CELKOVÚ PENALIZÁCIU

PROBLÉM 3: MNOŽINA $S = \{1,\dots,n\}$ ÚLOH

s_i – ČAS ZAHÁJENIA, f_i – ČAS DOKONČENIA

i,j SÚ KOMPATIBILNÉ $\Leftrightarrow \langle s_i, f_i) \cap \langle s_j, f_j) = \emptyset$

ÚLOHA: NÁJSŤ NAJVÄČŠIU MNOŽINU NAVZÁJOM SA NEPREKRÝVAJÚCICH ÚLOH

MATROIDY

$M = (S, I)$

1) S KONEČNÁ NEPRÁZDNA MNOŽINA PRVKOV
2) $I \subseteq \mathcal{P}(S)$, $I \neq \emptyset$ (NEZÁVISLÉ PODMNOŽINY)
   a) DEDIČNOSŤ: $B \in I, A \subseteq \Rightarrow A \in I$
   b) VÝMENNOSŤ: $A, B \in I$, $|A| < |B|$
   $\Rightarrow \exists x \in B \setminus A : A \cup \{x\} \in I$.

PRÍKLADY : 1) MATICOVÝ MATROID

$T \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow M_T = (S_T, I_T)$

S_T .. STĹPCE T : $\{T_{\cdot 1}, \dots, T_{\cdot n}\}$

$A \in I_T \Leftrightarrow$ A JE NEZÁVISLÁ MN. STĹPCOV

2) GRAFOVÝ MATROID

$G = (V, E)$ NEORIENT. $\Rightarrow M_G = (S_G, I_G)$

$S_G = E$, $A \in I_G \Leftrightarrow G[A]$ JE ACYKLICKÝ

LEMMA: NECH $G = (V, E)$ JE NEORIENT. GRAF A E' MNOŽINA HRÁN NEOBSAHUJÚCA CYKLUS, POTOM $G' = (V, E')$ POZOSTÁVA Z $|V| - |E'|$ STROMOV.

NECH $A, B \in I_G$, $|A| < |B|$:

LES A MÁ VIAC STROMOV NEŽ LES B

$\Rightarrow$ EXISTUJE STROM T V B, KTORÉHO VRCHOLY PATRIA ASPOŇ DO DVOCH RÔZNYCH STROMOV LESU A.

$\Rightarrow \exists$ HRANA e STROMU T, KTOREJ KRAJE LEŽIA V RÔZNYCH STROMOCH LESA A.

$e \in B$ & $A \cup \{e\}$ JE LES.

VETA: VŠETKY MAXIMÁLNE NEZÁVISLÉ MNOŽINY V MATROIDE MAJÚ ROVNAKÚ VEĽKOSŤ.

V M_T JE TO BÁZA STĹPCOVÉHO PRIESTORU T

V M_G SÚ TO KOSTRY KOMPONENT GRAFU G

08.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

VÁŽENÝ MATROID $M = (S, I)$: $w: S \to \mathbb{R}^+$

$A \subseteq S$ $\quad w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$

MATROIDOVÝ PROBLÉM - NÁJSŤ $A \in I$ S MAXIM. $w(A)$.
(OPTIMÁLNA MNOŽINA M)

ZREJME OPT. MN. JE MAXIMÁLNA NEZÁVISLÁ

PROBLÉM 1 JE ŠPECIÁLNY PRÍPAD MP (MATR. PROB.)

DEF.: $w(e) := c - d(e)$, $\quad c > \max d(e)$.

$\triangleleft$ $\forall$ KOSTRY MAJÚ ROVNAKÝ POČET HRÁN $|V|-1$

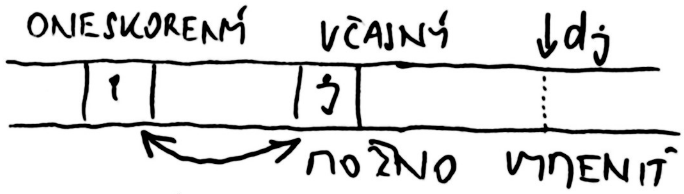
PROBLÉM 2 JE ŠPECIÁLNY PRÍPAD MP

NECH $X \in S_n$ JE ROZVRH

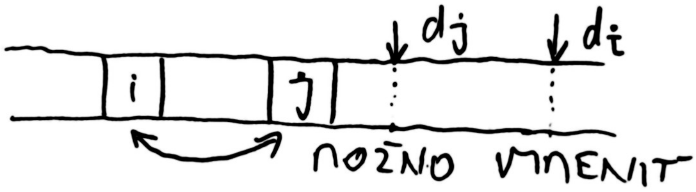
i JE VČASNÝ V X $\iff$ JE UKONČENÝ V ČASE $X^{-1}(i) \leq d_i$

INAK JE i ONESKORENÝ.

$\triangleleft$ 1) STAČÍ UVAŽOVAŤ ROZVRHY, KDE VŠETKY VČASNÉ ÚLOHY SÚ ROZVRHNUTÉ PRED $\forall$ ONESK. ÚLOH.



$\triangleleft$ 2) VČASNÉ ÚLOHY SÚ USPORIADANÉ PODĽA NEKLESAJÚCICH DEADLINOV
(PRI ZHODE ROZHODUJE ČÍSLO ÚLOHY)



1) + 2) = KANONICKÉ ROZVRHY
JE JEDNOZNAČNE URČENÝ MNOŽINOU SVOJICH VČASNÝCH ÚLOH

DEF. S = MNOŽINA ÚLOH

DEF. $A \subseteq S$ JE NEZÁVISLÁ $\Leftrightarrow$ $\exists$ KANONICKÝ ROZVRH X, ŽE A SÚ VČASNÉ V X

FAKT: MNOŽINA VČASNÝCH ÚLOH V ĽUBOVOĽNOM KANONICKOM ROZVRHU JE NEZÁVISLÁ MNOŽINA

MINIMALIZÁCIA CELKOVEJ POKUTY =
= MINIMALIZÁCIA SÚČTU POKÚT ONESK. ÚLOH =
= MAXIMALIZÁCIA SÚČTU VÁH VČASNÝCH ÚLOH

VETA: $M = (S, I)$ JE MATROID

DEF. $N_t(C) := |\{ i \in C \mid d_i \leq t \}|$

LEMMA: C JE NEZÁVISLÁ $\Leftrightarrow$
$\forall t \in \{0, \dots, n\} : N_t(C) \leq t$

$\Rightarrow$) SPOROM: NECH $\exists t \in \{0, \dots, n\} : N_t(C) > t$.
$\Rightarrow$ NIE JE MOŽNÉ ZARIADIŤ, ABY $\forall$ ÚLOHY C BOLI VČASNÉ V NEJAKOM ROZVRHU, PRETOŽE DO $\langle 0, t \rangle$ NENAPRATÁME $N_t(C)$ ÚLOH.

$\Leftarrow$) ZORADÍM $\forall$ ÚLOHY C PODĽA DEADLINEOV

VÝMENNÁ VLASTNOSŤ: $A, B \in I$, $|A| < |B|$

OZNAČME $k = \max \{ t \mid N_t(B) \leq N_t(A) \}$.

ZA PREDPOKLADU, ŽE $\forall i : d_i \leq n$

$N_n(B) = |B| > N_n(A) = |A| \Rightarrow k < n$

$\forall t \in \{k+1, \dots, n\} : N_t(B) > N_t(A)$

$\Rightarrow \exists$ ÚLOHA x S $d_x = k+1$, KTORÝ JE V $B \setminus A$

$\Rightarrow A \cup \{x\}$ JE NEZÁVISLÁ, T.J. $\forall t \in \{0, \dots, n\} : N_t(A \cup \{x\}) \leq t$.

15.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

HLADOVÝ ALGORITMUS PRE MP

GREEDY $(M=(S,I), w)$
$A := \emptyset$
ZOTRIEĎ S PODĽA w ZOSTUPNE: $w(x_1) \geq \dots \geq w(x_n)$
for $i := 1$ to n do
if $A \cup \{x_i\} \in I$ then $A := A \cup \{x_i\}$

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ:
$\Theta(n \cdot \log n)$ ZOTRIEDENIE
\+ n KRÁT TEST NA NEZÁVISLOSŤ $\Big\} = \Theta(n \log n + n f(n))$
$f(n)$ JE ZLOŽITOSŤ TESTU NA NEZÁVISLOSŤ

LEMMA: NECH PRE $x \in S$ $\{x\} \notin I$, POTOM $\neg \exists A \in I : x \in A$. (Z DEDIČNOSTI)

TJ. KEĎ ALGORITMUS NA ZAČIATKU NEJAKÉ PRVKY PRESKOČÍ, TAK NEUROBÍ CHYBU.

LEMMA: NECH S JE ZOTRIEDENÁ PODĽA VÁH ZOSTUPNE A x JE PRVÝ PRVOK S PRE KTORÝ $\{x\} \in I$, POTOM EXISTUJE OPTIMÁLNA $A \in I : x \in A$.
(PRÍPUSTNOSŤ HLADOVÉHO ALGORITMU)

NECH B JE OPTIMÁLNA MNOŽINA, $x \notin B$
1) $\forall y \in B : w(y) \leq w(x)$
$B \in I \Rightarrow \{y\} \in I \Rightarrow w(y) \leq w(x)$ PODĽA VÝBERU x.
2) A SKONŠTRUUJEME TAKTO:
$A := \{x\}$

POMOCOU VÝMENNEJ VLASTNOSTI BUDEME ZVÄČŠOVAŤ A O PRVKY Z B AŽ DO OKAMIHU KEĎ JE $|A| = |B|$.

$\Rightarrow \quad A = B \setminus \{y\} \cup \{x\}$

Z (1) HNEĎ $w(A) = w(B) - w(y) + w(x) \geq w(B)$.

$\Rightarrow$ A JE OPTIMÁLNA MNOŽINA. $\square$

LEMMA: NECH x JE PRVÝ PRVOK VYBRANÝ ALGORITMOM GREEDY (M, w), POTOM NÁJDENIE OPTIMÁLNEJ MNOŽINY V M OBSAHUJÚCEJ x JE EKVIVALENTNÉ NÁJDENIU OPTIMÁLNEJ MNOŽINY V MATROIDE $M' = (S', I')$, $w' = w|_{S'}$

KDE $S' = \{y \in S \mid \{x, y\} \in I\}$

$I' = \{B \subseteq S' \setminus \{x\} \mid B \cup \{x\} \in I\}$

M' SA NAZÝVA KONTRAKCIA M PRVKOM x

($\equiv$ EXISTENCIA OPTIMÁLNEJ PODŠTRUKTÚRY)

(1) M' JE MATROID:

(a) DEDIČNOSŤ: $A \in I'$, $B \subseteq A$

$A \cup \{x\} \in I$, $B \cup \{x\} \subseteq A \cup \{x\} \Rightarrow$

$B \cup \{x\} \in I \Rightarrow B \in I'$

(b) VÝMENNOSŤ: $A, B \in I'$, $|A| < |B|$

$A \cup \{x\}, B \cup \{x\} \in I$, $|A \cup \{x\}| < |B \cup \{x\}|$

$\Rightarrow \exists z \in (B \cup \{x\}) \setminus (A \cup \{x\}) : A \cup \{x\} \cup \{z\} \in I$

$\Rightarrow A \cup \{z\} \in I'$, KDE $z \in B$.

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE A JE OPTIMÁLNA V M, OBSAHUJÚCA x $\Leftrightarrow$ $A \setminus \{x\}$ JE OPTIMÁLNA V M'.

$\Rightarrow$) NECH $A \ni x$ JE OPTIMÁLNA V M, $B \in I'$. DOKÁŽME, ŽE $w(A \setminus \{x\}) \geq w(B)$.

$B \cup \{x\} \in I \Rightarrow w(A) \geq w(B \cup \{x\}) \Rightarrow$ PRETOŽE $x \in A$

$\Leftarrow$) NECH $A \setminus \{x\}$ JE OPTIMÁLNA V M', $B \in I$, $x \in B$.

$B \setminus \{x\} \in I' \Rightarrow w(A \setminus \{x\}) \geq w(B \setminus \{x\})$

$\Rightarrow w(A) \geq w(B)$, $A \in I$.

$\Rightarrow$ A JE OPTIMÁLNA MEDZI NEZÁV. MN. OBSAHUJÚCIMI x. AVŠAK Z LEMMY (2) $\exists$ OPTIMÁLNA MNOŽINA V M OBSAHUJÚCA x $\Rightarrow$ A JE OPTIMÁLNA. $\square$

PROBLÉM: MNOŽINA $S = \{1, \dots, n\}$, PRE ÚLOHU i : $\langle s_i ; f_i)$
HĽADÁME MAX. MNOŽINU PO DVOCH KOMPATIB. INTERVALOV

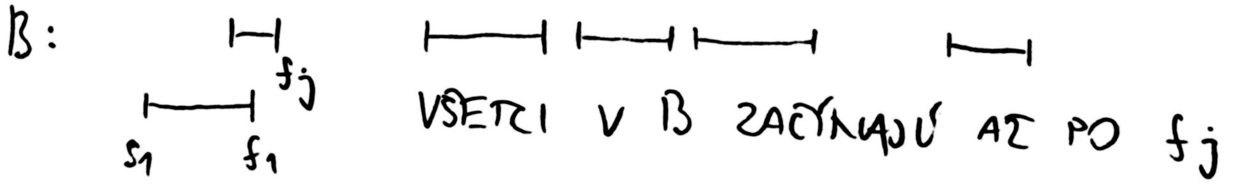
```
GREEDY-SELECT(s, f)
  A := ∅ ,  f_0 := 0,  j := 0
  ZOTRIEĎ s, f VZOSTUPNE PODĽA f_i
  for i := 1 to n do
     if s_i ≥ f_j then A := A ∪ {i}, j := i
```

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ: $\Theta(n \cdot \log n + n)$

LEMMA 1 (PRÍPUSTNOSŤ HLADOVÉHO VÝBERU):
EXISTUJE OPTIMÁLNA MN., KTORÁ OBSAHUJE $\langle s_1, f_1 \rangle$

LEMMA 2 (EXISTENCIA OPTIMÁLNEJ PODŠTRUKTÚRY):
$1 \in A$ JE OPTIMÁLNA PRE S $\Leftrightarrow$
$A \setminus \{1\}$ JE OPTIMÁLNA PRE $S' = \{ i \mid f_1 \leq s_i \}$

DÔKAZ 1: NECH B JE OPTIMÁLNA MNOŽINA NEOBSAHUJÚCA ÚLOHU 1.



NECH j JE ÚLOHA V B S NAJMENŠÍM f_j
$\Rightarrow$ $B \setminus \{j\} \cup \{1\}$ JE KOMPATIBILNÁ MN. $\Rightarrow$ OPTIMÁLNA. $\square$

DÔKAZ 2: $\Rightarrow$) NECH $1 \in A$ JE OPT. PRE S, $B \subseteq S'$ kom.
ZREJME $B \cup \{1\}$ JE KOMPAT. $\Rightarrow$ $|A| \geq |B \cup \{1\}|$
$\Rightarrow$ $|A \setminus \{1\}| \geq |B|$.

$\Leftarrow$) $A \setminus \{1\}$ JE OPTIMÁLNA PRE S', $1 \in B \subseteq S$ JE KOMPAT.
$\Rightarrow$ $B \setminus \{1\}$ JE KOMPATIBILNÁ V S' $\Rightarrow$
$|A \setminus \{1\}| \geq |B \setminus \{1\}|$ $\Rightarrow$ $|A| \geq |B|$ $\Rightarrow$
A JE OPTIMÁLNA MEDZI KOMPATIBILNÝMI MN. OBSAH. 1
A PODĽA LEMMY 1 $\exists$ OPTIMÁLNA MN. OBSAHUJÚCA 1
$\Rightarrow$ A JE OPTIMÁLNA V S. $\square$

15.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

GRAFOVÉ ALGORITMY

GRAF $G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$,

REPREZENTÁCIA: ZOZNAMY SUSEDOV (DATA $\Theta(n+m)$)

BFS (G,s)

foreach $u \in V$ do
  colour $[u] \leftarrow$ WHITE, $d[u] \leftarrow \infty$, $\pi[u] \leftarrow$ NIL
colour $[s] \leftarrow$ GRAY, $d[s] \leftarrow 0$, $Q \leftarrow \{s\}$
while $Q \neq \emptyset$ do
  $u \leftarrow$ DEQUEUE (Q)
  foreach $(u,v) \in E$ do if colour $[v]$ = WHITE
    colour $[v] \leftarrow$ GRAY, $d[v] \leftarrow d[u]+1$, $\pi[v] \leftarrow u$
    ENQUEUE (Q, v)
  colour $[u] \leftarrow$ BLACK

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ : $\Theta(n+m)$

```
DFS(G)
  foreach u∈V do colour[u] ← WHITE, π[u] ← NIL
  foreach u∈V do if colour[u] = WHITE then
      DFS-VISIT(u)

DFS-VISIT(u)
  colour[u] ← GRAY
  foreach (u,v) ∈ E
  |  if colour[v] = WHITE then
  |  |    (u,v) := TREE-EDGE
  |  |    π[v] ← u
  |  |    DFS-VISIT(v)
  |  else if colour[v] = GRAY then
  |  |    (u,v) := BACK-EDGE
  colour[v] ← BLACK
```

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ : $\Theta(n+m)$

TESTOVANIE 2-SÚVISLOSTI

$G = (V, E)$ JE SÚVISLÝ

(1) $v \in V$ JE ARTIKULÁCIA $\Leftrightarrow$ $G - v$ JE NESÚVISLÝ

(2) G JE 2-SÚVISLÝ $\Leftrightarrow$ NEOBSAHUJE ARTIKULÁCIE

(3) MNOŽINA HRÁN $K \subseteq E$ JE 2 SÚVISLÁ KOMPONENTA KEĎ JE VZHĽADOM K INKLÚZII $\subseteq$ MAXIMÁLNA MNOŽINA TAKÁ, ŽE KAŽDÉ DVE HRANY Z K LEŽIA NA PROSTEJ KRUŽNICI $\underline{x_0, x_1, \dots, x_n, x_0}$ $\boxed{n \geq 1}$

16.10.2008 Th

PETER ČERNO

EX: TIN062 SLOŽITOST I

2 MATICE $kn \times n$, ÚLOHA: SPOČÍTAŤ ASYMPTOTICKÚ ČASOVÚ ZLOŽITOSŤ NÁSOBENIA AB, BA

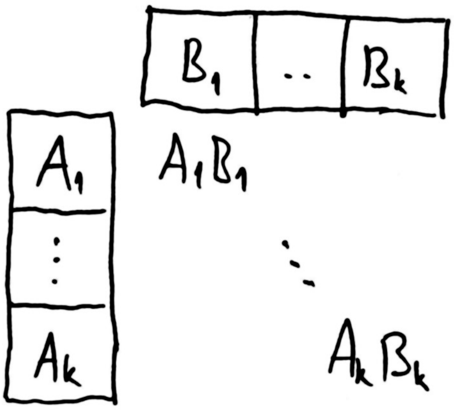
a) PRI KLASICKOM NÁSOBENÍ

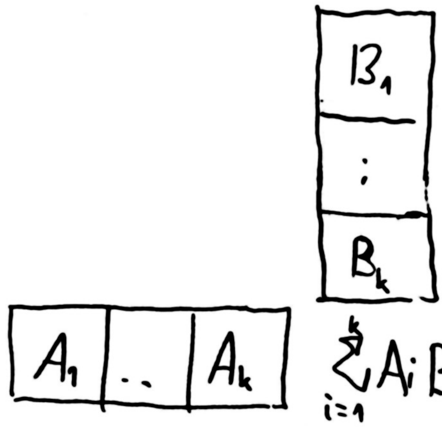
b) PRI POUŽITÍ STRASSENA

a) $(kn \times n) \cdot (n \times kn)$ $\Theta((kn)^2 \cdot n)$

$(n \times kn) \cdot (kn \times n)$ $\Theta(n^2 \cdot (kn))$

b) $\Theta((kn)^{\log_2 7})$





$\sum_{i=1}^{k} A_i B_i$

$\Theta(k^2 n^{\log_2 7})$

$\Theta(k\, n^{\log_2 7} + kn^2) =$

$= \Theta(k\, n^{\log_2 7})$

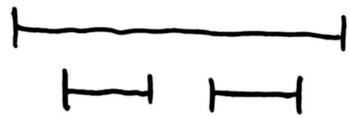
$S = \{1, \dots, n\}$ $\langle s_i; f_i)$

ALGORITMUS: 1) HLADOVO VYBER ÚLOHU

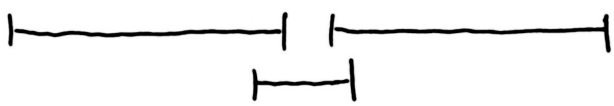
2) ZAHOĎ VŠETKO, ČO S VYBRANOU ÚLOHOU KOLIDUJE

(a) ÚLOHA S NAJMENŠÍM s_i :

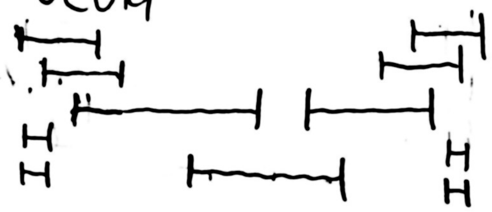
NEFUNGUJE!

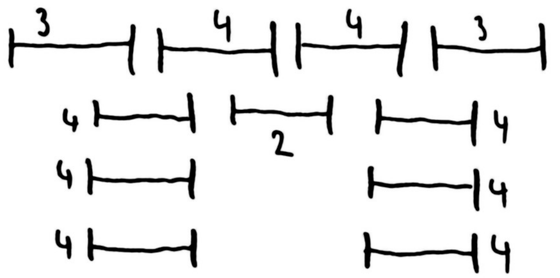


b) NAJKRATŠIA ÚLOHA : NEFUNGUJE!



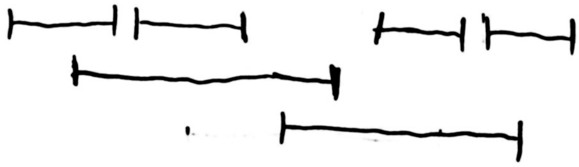
c) ÚLOHA, KT. SA PREKRÝVA S NAJMENŠÍM POČTOM ÚLOH





PROBLÉM : ROZVRHNÚŤ ∀ DO ČO NAJMENŠIEHO POČTU KOMPATIBILNÝCH MNOŽÍN

NÁVRH: ITEROVANÉ POUŽITIE NAŠEHO GREEDY ALG.



NEFUNGUJE

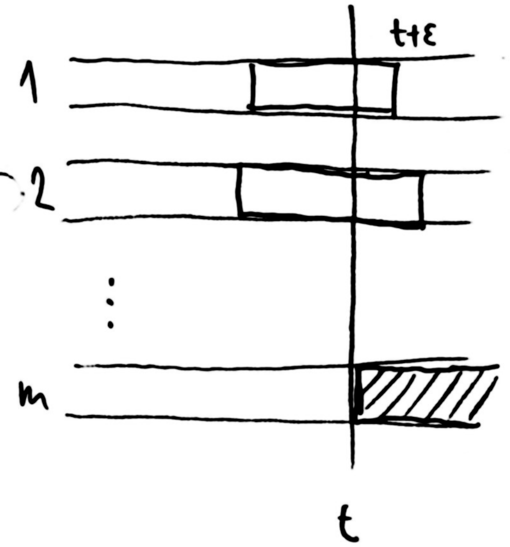
NÁVRH: ZOTRIEDIM PODĽA s_i A HÁDŽEM DO VOĽNÝCH POSLUCHÁRNÍ

SKUTOČNE FUNGUJE

16.10.2008 Th
PETER ČERNO

EX: TIN062 SLOŽITOSŤ I

DÔKAZ: NECH ALGORITMUS ZABRAL m POSLUCHÁRNÍ. NECH t JE OKAMŽIK, V KTOROM ALGORITMUS ROZHODOL ÚLOHU DO POSLUCHÁRNE ČÍSLO m:

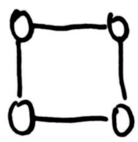


MÁME m ÚLOH TAKÝCH, ŽE KAŽDÉ DVE SA PREKRÝVAJÚ !!!

ÚLOHY, KOLIDUJÚCE ÚLOHY

≡ MINIMÁLNE OFARBENIE GRAFU $G = (V, E)$

TZV. INTERVALOVÝ GRAF

NAPR.  NIE JE INTERVALOVÝ GRAF

CHROMATICKÉ ČÍSLO = KLIKOVÉ ČÍSLO

VO VŠEOBECNOSTI PLATÍ ≥.

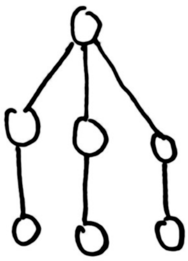
1) S NEPRÁZDNA KONEČNÁ MNOŽINA O n PRVKOCH

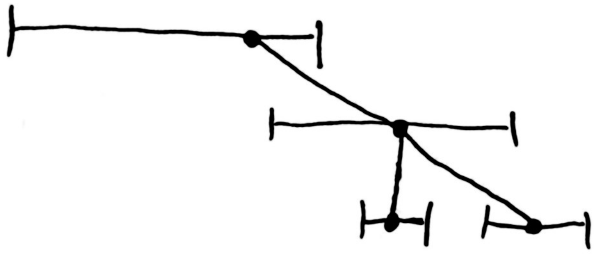
$$I_k = \{A \subseteq S \mid |A| \le k\}$$

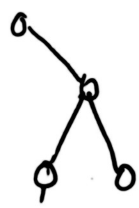
DOKÁŽTE, ŽE (S, I_k) JE MATROID PRE $\forall 1 \le k \le n$.

DEDIČNOSŤ: ZREJMÁ

VYMENITEĽNOSŤ: $|A| < |B| \le k$ ZREJMÁ







2) S NEPRÁZDNA, KONEČNÁ S ROZKLADOM $S_1, \dots, S_m$.

$$I = \{A \subseteq S \mid \forall i : |A \cap S_i| \le 1\}$$

(S, I) JE MATROID (ZREJMÉ)

NEZÁVISLÁ MNOŽINA JE MNOŽINA NEJAKÝCH REPREZENTANTOV

3) NECH (S, I) JE MATROID

DEFINUJME $I' = \{A' \subseteq S \mid S \setminus A'$ OBSAHUJE ASPOŇ JEDNU <u>MAXIMÁLNU</u> NEZÁVISLÚ MNOŽINU Z $I\}$

DOKÁŽTE, ŽE (S, I') JE <u>DUÁLNY MATROID</u>

HOMEWORK!!

22. 10. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

(1) $v \in V$ JE ARTIKULÁCIA $G = (V, E) \iff \exists x, y \in V, x \neq y$ KAŽDÁ CESTA V G MEDZI x A y PRECHÁDZA VRCHOLOM v.

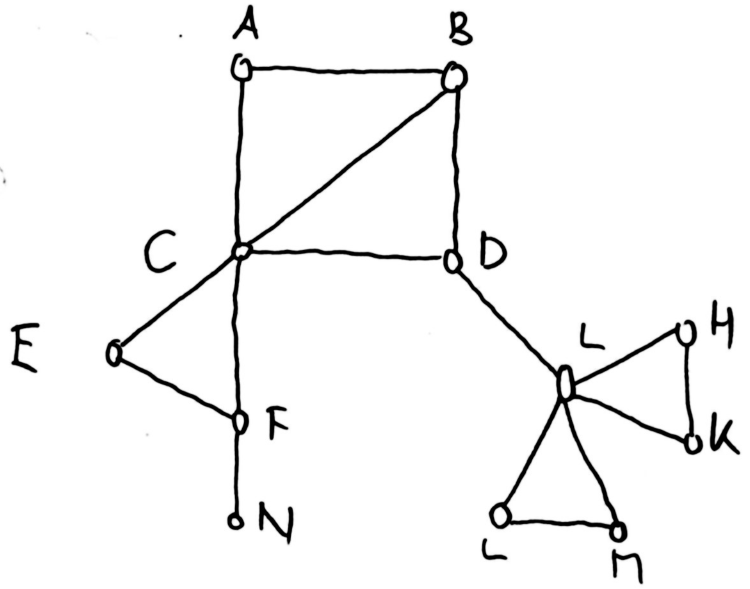
PREDPOKLADÁME $|G| \geq 3$.

(2) G JE 2-SÚVISLÝ $\iff \forall x, y \in V$ $x \neq y$ EXISTUJÚ ASPOŇ 2 VRCHOLOVO DISJUNKTNÉ CESTY V G MEDZI x A y.

ALGORITMY NA TESTOVANIE 2-SÚVISLOSTI

TRIVIÁLNY : TESTOVANIE SÚVISLOSTI $G \setminus \{v\}$ $\forall v \in V$ V ČASE $\Theta(n(n+m)) = \Theta(nm)$ (G JE SÚVISLÝ $\Rightarrow m \geq n-1$)

SOFISTIKOVANÝ : ROZHODNE O 2-SÚVISLOSTI, OZNAČÍ VŠETKY ARTIKULÁCIE, 2-SÚVISLÉ KOMPONENTY JEDINÉ SPUSTENIE OBOHATENÉHO DFS.



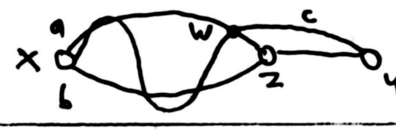
A	BC
B	ACD
C	ABDEF
D	BCL
E	CF
F	CEN
G	LM
H	KL
K	HL
L	DGHKM
M	GL
N	F

DÔKAZ (2) : $\Leftarrow$) ZREJMÉ ; $\Rightarrow$) MAJME $x \neq y$, EXISTUJE CESTA p $x \rightsquigarrow y$

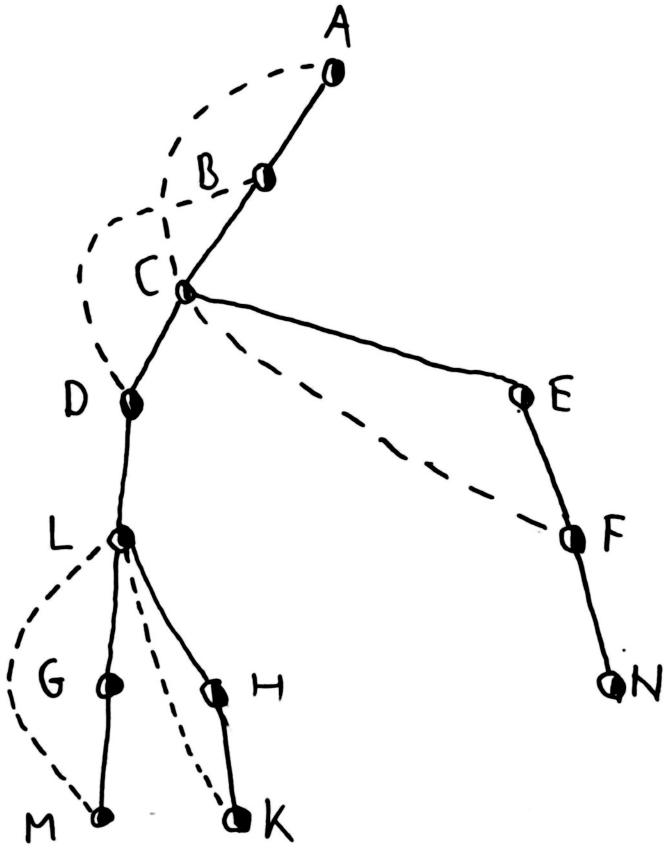
TVRDENIE DOKÁŽEME INDUKCIOU PODĽA DĹŽKY d CESTY p

$d=1$ x — y z ZREJMÉ ; $d > 1$ $x \rightsquigarrow z$ — y . PODĽA PREDP. x a b z

z NIE JE ARTIKULÁCIA $\Rightarrow$ EX. CESTA c, OZN. w POSL. VRCHOL BÚNO NA a $\neq z$

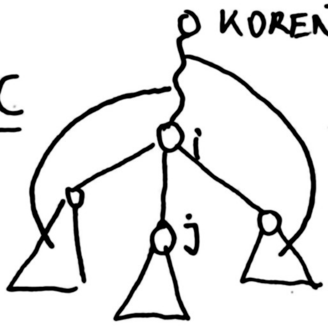


$\Rightarrow$ 2 CESTY: $x a w y$
$x b z y$ $\square$

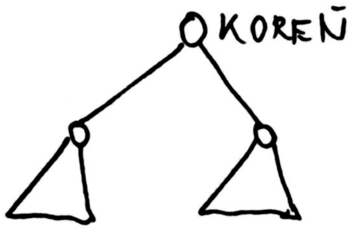


i JE ARTIKULÁCIA $\iff$

(1) AK i NIE JE KOREŇ DFS:
MÁ POTOMKA j TAKÉHO, ŽE Z PODSTROMU S KOREŇOM j NEVEDIE ŽIADNA SPÄTNÁ HRANA DO NEJAKÉHO PREDCHODCA VRCHOLU i



NAPR. C



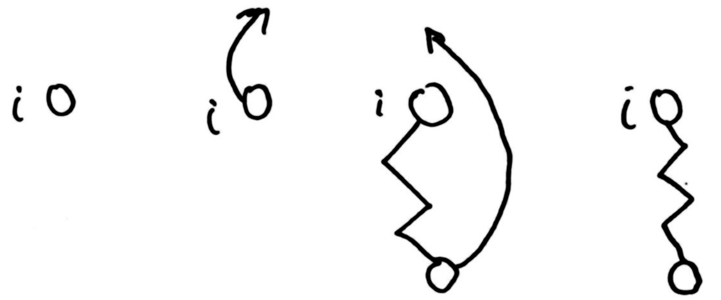
(2) AK i JE KOREŇ DFS:
MÁ ASPOŇ DVOCH POTOMKOV

22.10.2008 We
PETER ČERNO

NMIN062 SLOŽITOSŤ I

BUDEME SI PAMÄTAŤ $d(i)$ ČAS NAVŠTÍVENIA i A SPOČÍTAME $low(i)$:

CESTA Z VRCHOLU i JE PRÍPUSTNÁ, KEĎ VEDIE Z i DOLU PO ĽUBOVOĽNOM (AJ NULOVOM) POČTE HRÁN A POTOM KONČÍ NAJVIAC JEDNÝM SKOKOM PO SPÄTNEJ HRANE



DEF. : $low(i) := \min \{ d(j) \mid$ Z i DO j VEDIE PRÍP. CESTA $\}$

REKURZÍVNE : $low(i) = \min \{x, y, z\}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= d(i) \\ y &= \min \{ d(j) \mid (i,j) \text{ JE SPÄTNÁ} \} \\ z &= \min \{ low(j) \mid (i,j) \text{ JE STROMOVÁ HRANA} \} \end{aligned}}$$

NEKOREŇOVÝ VRCHOL i JE ARTIKULÁCIA KEĎ $\exists$ POTOMOK j : $low(j) \geq d(i)$

POZRI KÓD NA SLIDEOCH

NEPOTREBUJEME colour , STAČÍ d

ZLOŽITOSŤ $\Theta(n+m)$

DFS NA ORIENTOVANOM GRAFE

```
DFS(G)
  for i ← 1 to n do colour[i] ← WHITE
  time ← 0
  for i ← 1 to n do if colour[i] = WHITE then
      DFS-VISIT(i)

DFS-VISIT(i)
  colour[i] ← GRAY
  d[i] ← ++time
  foreach (i,j) ∈ E do if colour[j] = WHITE then
      DFS-VISIT(j)
  f[i] ← ++time
  colour[i] ← BLACK
```

KLASIFIKÁCIA HRÁN

(i,j) STROMOVÁ	PRI PREHĽADANÍ (i,j) JE j BIELY
(i,j) SPÄTNÁ	j JE ŠEDÝ
(i,j) DOPREDNÁ	j JE ČIERNY A $d[i] < d[j]$
(i,j) PRIEČNA	j JE ČIERNY A $d[i] > d[j]$

VLASTNOSTI DFS

(1) STROMOVÉ HRANY TVORIA ORIENT. LES

(2) WHITE-PATH THEOREM: j JE NÁSLEDNÍK i $\Leftrightarrow$ V ČASE $d[i]$ EXISTOVALA BIELA CESTA Z i DO j

(3) $[d[i], f[i]]$ TVORIA DOBRÉ UZÁTVORKOVANIE

j JE NÁSLEDNÍK i $\Leftrightarrow$ $[d[j], f[j]] \subset [d[i], f[i]]$

29.10.2008 We
PETER ČERNO

NTIN 062 SLOŽITOST I

TOPOLOGICKÉ ČÍSLOVANIE VRCHOLOV GRAFU

$t : V \to \{1, \dots, n\}$ $\qquad (i,j) \in E \Rightarrow t(i) < t(j)$

$\triangleleft$ IBA PRE ACYKLICKÉ GRAFY

G JE CYKLICKÝ $\Leftrightarrow$ DFS NÁJDE SPÄTNÚ HRANU

$\Rightarrow$) NETRIVIÁLNA IMPLIKÁCIA

VETA: OČÍSLOVANIE VRCHOLOV ACYKLICKÉHO GRAFU PODĽA KLESAJÚCEHO $f(i)$ JE TOPOLOGICKÉ.

STAČÍ DOKÁZAŤ $(i,j) \in E \Rightarrow f(i) > f(j)$

(1) FARBA j PRI SKENOVANÍ HRANY (i,j) JE BIELA

$\Rightarrow [d(j), f(j)] \subset [d(i), f(i)] \Rightarrow f(i) > f(j)$

(2) ŠEDÁ $\Rightarrow$ CYKLUS, ČO JE SPOR

(3) ČIERNA $\Rightarrow$ ZREJME $f(i) > f(j)$. $\square$

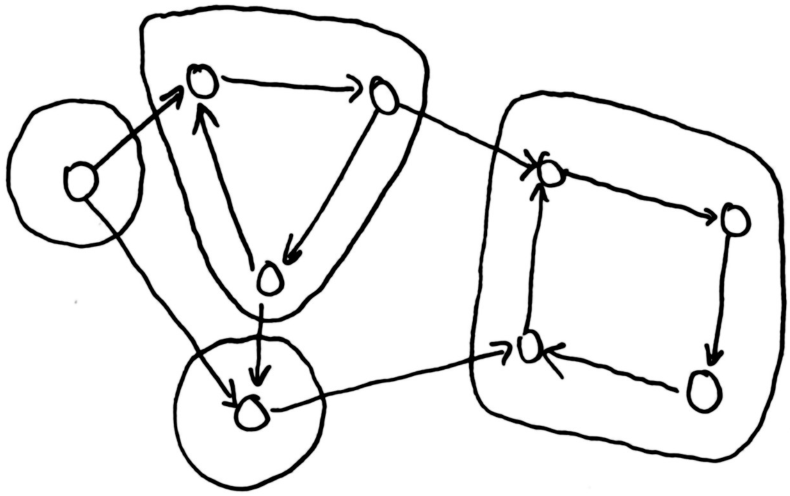
SILNOSÚVISLÉ KOMPONENTY

$K \subseteq V$ JE SILNO SÚVISLÁ $\Leftrightarrow$

(1) $\forall i,j \in K \; i \neq j \; \exists$ CESTA $i \rightsquigarrow j$ AJ $j \rightsquigarrow i$

(2) NEEXISTUJE $L \supset K$, KTORÁ BY SPĹŇALA (1)

TRANSPONOVANÝ GRAF $G^T = (V, E^T)$.



KONDENZOVANÝ GRAF JE NUTNE ACYKLICKÝ

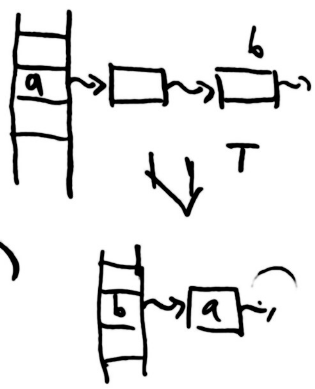
⚠ JE ĽAHKÉ POMOCOU DFS NÁJSŤ VRCHOL, KTORÝ JE V TOPOLOGICKY PRVEJ KOMPONENTE. JE TO VRCHOL S NAJVÄČŠÍM f.

ALGORITMUS:

FÁZA 1: DFS(G) ⇒ FRONTA VRCHOLOV USPORIADANÝCH PODĽA KLESAJÚCEHO f

FÁZA 2: G^T

FÁZA 3: DFS(G^T) VRCHOLY SÚ V HLAVNOM CYKLE SPRACOVÁVANÉ V PORADÍ PODĽA ZOZNAMU VYGENEROVANOM VO FÁZI 1.



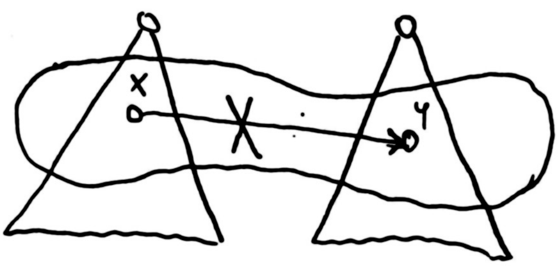
LEMMA: NECH K JE SSK

(1) K JE PODMNOŽINOU JEDINÉHO DFS STROMU

(2) V DANOM STROME TVORÍ PODSTROM

DÔKAZ.

(1)

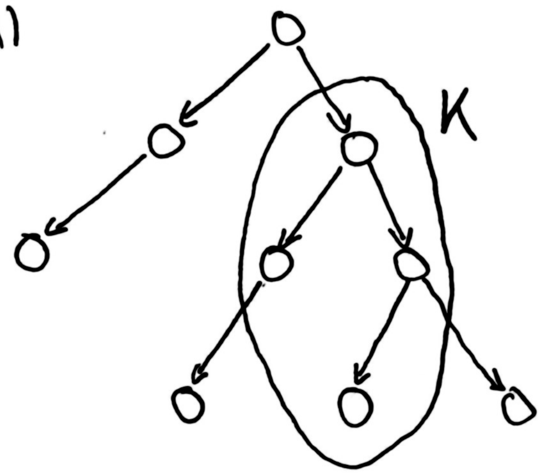


MEDZI RÔZNYMI DFS STROMAMI VEDÚ IBA PRIEČNE HRANY ALE IBA ZPRAVA DOĽAVA ⇒ ¬∃ CESTA Z x DO y.

29. 10. 2008 We
PETER ČERNO

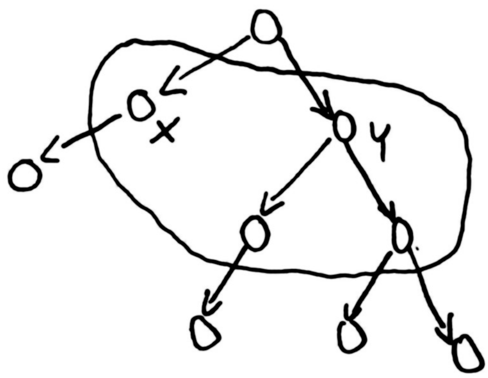
NTIN062 SLOŽITOST I

a)



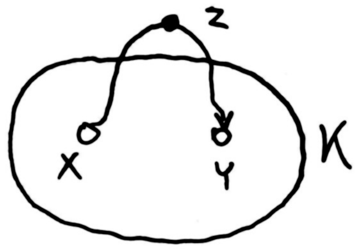
OK ✓

b) VRCHOLY V K NEMAJÚ SPOL. PREDKA



b) $\Rightarrow \exists\, x, y$, V K NIE JE ICH ŽIADEN PREDCHODCA

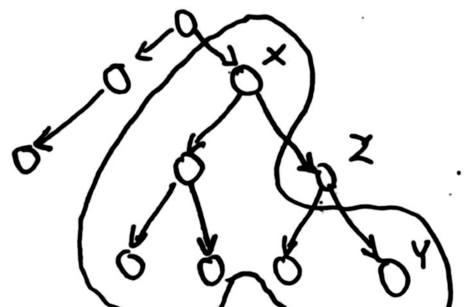
ZREJME $\neg\exists$ CESTA Z X DO Y MIMO K



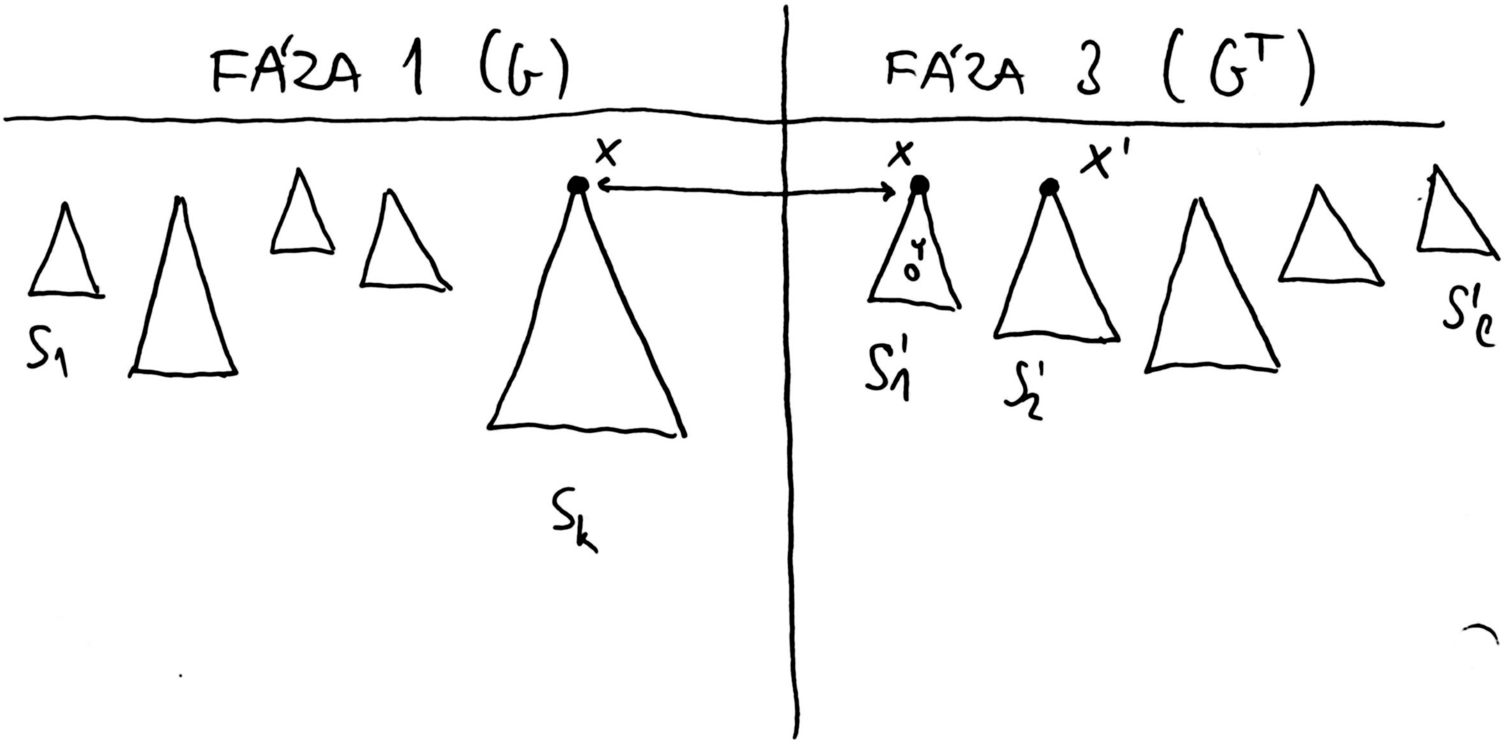
POTOM BY Z MUSELO PATRIŤ DO K

$\Rightarrow$ CESTA Z X DO Y MUSÍ BYŤ CELÁ V K $\Rightarrow$ MUSÍ POUŽIŤ PRIEČNU HRANU ZĽAVA DOPRAVA, ČO JE SPOR. ↯

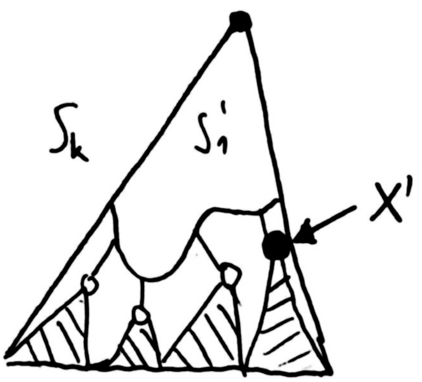
c) K NIE JE PODSTROM, ALE EXISTUJE SPOLOČNÝ PREDOK V K



$\exists\, x, y \in K$ TAKÉ, ŽE X JE PREDCHODCA Y A NA CESTE Z X DO Y $\exists\, z \notin K$.
$\Rightarrow$ SPOR S VLASTNOSŤAMI SSK. ↯



NECH x JE KOREŇ S_1' (PRVÝ DFS STROM FÁZE 3)
⇒ x JE KOREŇ S_k (POSLEDNÝ DFS STROM FÁZE 1)
NECH $y \in S_1'$ JE ĽUBOVOĽNÉ
$y \in S_1'$ ⇒ ∃ CESTA V G^T Z x DO y ⇒
EXISTUJE CESTA Z y DO x V G.
⇒ NUTNE $y \in S_k$ ⇒ V G EXISTUJE CESTA Z x DO y.
⇒ x,y PATRIA DO ROVNAKEJ SSK.
⇒ $S_1' \subseteq$ SSK. ZREJME S_1' JE NAJVÄČŠIA TAKÁ MNOŽINA, PRETOŽE DO VRCHOLOV Z KOMPONENT $S_2', \dots, S_c'$ NEVEDIE CESTA Z x.



KEĎ ODSTRÁNIME S_1' Z S_k (POUŽI LEMMU) DOSTÁVAME ANALOGICKÚ SITUÁCIU ⇒ APLIKUJEME INDUKCIU.

□

29.10.2008 We
PETER ČERNO

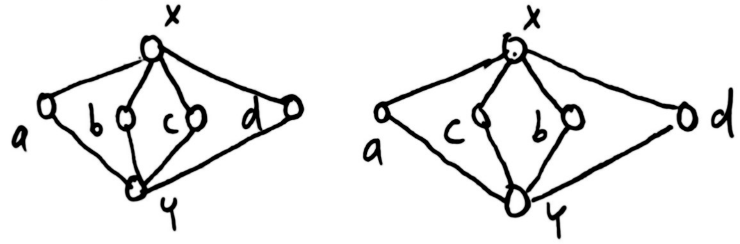
NTIN062 SLOŽITOSŤ I

ROVINNÉ GRAFY

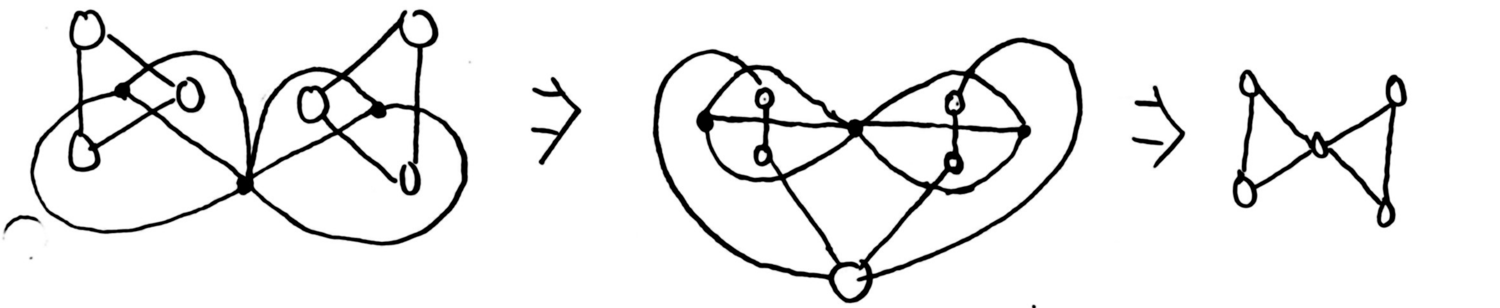
PLATÍ: V ČASE $\Theta(n+m)$ MOŽNO ZISTIŤ, ČI JE DANÝ GRAF ROVINNÝ + NAKRESLIŤ JEHO ROVINNÉ VNORENIE.

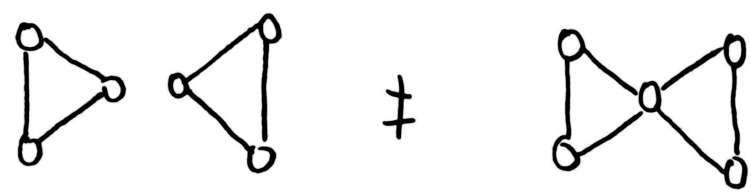
DUÁLNY GRAF (MULTIGRAF) $G^* = (V^*, E)$: $\begin{cases} \text{STENY } G \Leftrightarrow \text{VRCHOLY } G^* \\ \text{HRANY } G \Leftrightarrow \text{HRANY } G^* \end{cases}$

POZOR:



PRE G^* POTREBUJEM MAŤ ZADANÉ AJ ROVINNÉ VNORENIE G.

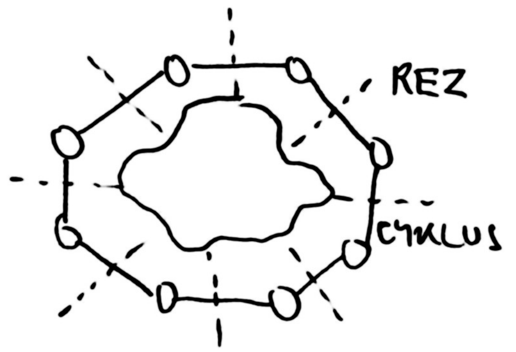




VETA: G^* JE SÚVISLÝ. AK G JE SÚVISLÝ, POTOM G A G^{**} SÚ IZOMORFNÉ: STENY $G^* \Leftrightarrow$ VRCHOLY G

LEMMA 1: $E' \subseteq E$. (V, E') OBSAHUJE CYKLUS $\Leftrightarrow$ PODGRAF $(V^*, E \setminus E')$ GRAFU G^* NIE JE SÚVISLÝ

DÔKAZ: CYKLUS V $G \leftrightsquigarrow$ REZ V G^*



LEMMA 2: $E' \subseteq E$, (V, E') JE KOSTRA G
$\Leftrightarrow$ $(V^*, E \setminus E')$ JE KOSTRA G^*.

(V, E') JE KOSTRA $\Rightarrow$ (V, E') JE SÚVISLÝ (
$\overset{L1}{\Longleftrightarrow}$ $(V^*, E \setminus E')$ NEOBSAHUJE CYKLUS

KOSTRA $\Rightarrow$ (V, E') NEOBSAHUJE CYKLUS
$\overset{L1}{\Longleftrightarrow}$ $(V^*, E \setminus E')$ JE SÚVISLÝ

$\square$

G JE TRIANGULOVANÝ $\Leftrightarrow$ $\forall$ STENY SÚ Δ

PLATÍ: G JE TRIANGULOVANÝ $\Rightarrow$ G^* JE 3-REG.
TRIANGULÁCIU MOŽNO SKONŠTRUOVAŤ V ČASE $\Theta(n+m)$.

VETA O PLANÁRNOM SEPARÁTORE

NECH $G=(V, E)$ JE ROVINNÝ. POTOM EXISTUJE ROZKLAD V NA A, B, S:

BÚNO: BUDEME PREDPOKLADAŤ SÚVISLOSŤ G

(1) $A \cup B \cup S = V$
(2) $(A \times B) \cap E = \emptyset$ (S SEPARUJE A OD B)
(3) $|A| \leq 2/3\, n$
(4) $|B| \leq 2/3\, n$
(5) $|S| \leq 4\sqrt{n}$

TOTO ROZDELENIE MOŽNO SKONŠTRUOVAŤ V ČASE $\Theta(m+n)$

1/2

30.10.2008 Th
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I - HOMEWORK

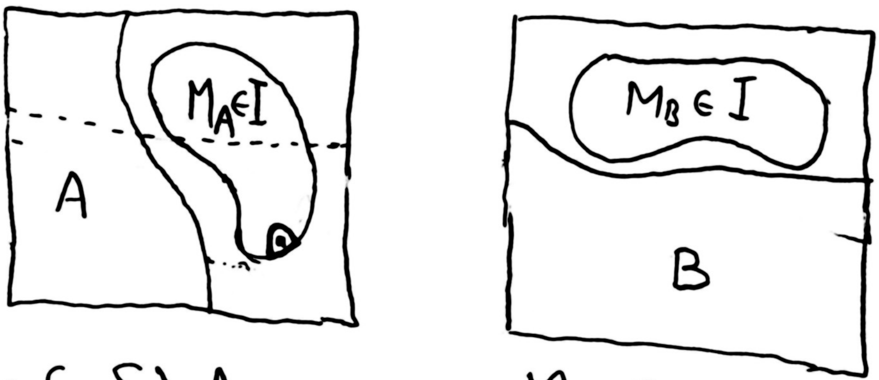
$M=(S,I)$

$M^*=(S,I^*)$

$A \in I^* \Leftrightarrow S\setminus A$ OBSAHUJE MAXIMÁLNU MN. $\in I$

DEDIČNOSŤ .. ZREJMÁ

MAJME $A,B \in I^*$ $|A|<|B|$



$M_A \subseteq S\setminus A$ $M_B \subseteq S\setminus B$

NEPRÍJEMNÝ PRÍPAD:

$B\setminus A \subseteq M_A$ (PRE KAŽDÚ MAXIMÁLNU $M_A \in I$ $\subseteq S\setminus A$)

VEZMIME NEJAKÉ $a \in B\setminus A$ A UVAŽUJME $M_A\setminus\{a\} \in I$

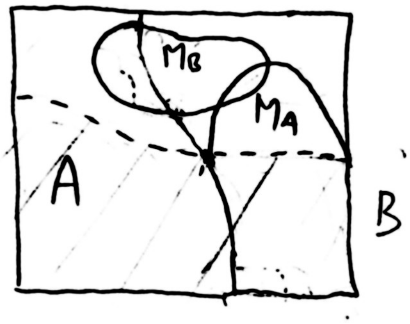
$|M_A\setminus\{a\}| < |M_B|$, $a \notin M_B$ ($a\in M_B \Rightarrow a\notin B \Rightarrow a \notin B\setminus A$)

$\Rightarrow \exists\, b \in M_B\setminus M_A$: $M_A\setminus\{a\}\cup\{b\} \in I$ (+ JE MAX.)

~~NECH b ∈ A. DO ISTÉ APLIKUJEME NA~~
~~BÚNO $b_{a_1},\dots,b_{a_m}$ SÚ RÔZNE [illegible]~~

30.10.2008 Th
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I - HOMEWORK



ZVOLÍME MNOŽINU $M_B \setminus A$
A DOPLNÍME NA MAXIMÁLNU NEZ. MN. X
Z MNOŽINY M_A

ZREJME $|A| < |B| \Rightarrow$
$|A \cap M_B| < |B \setminus A|$

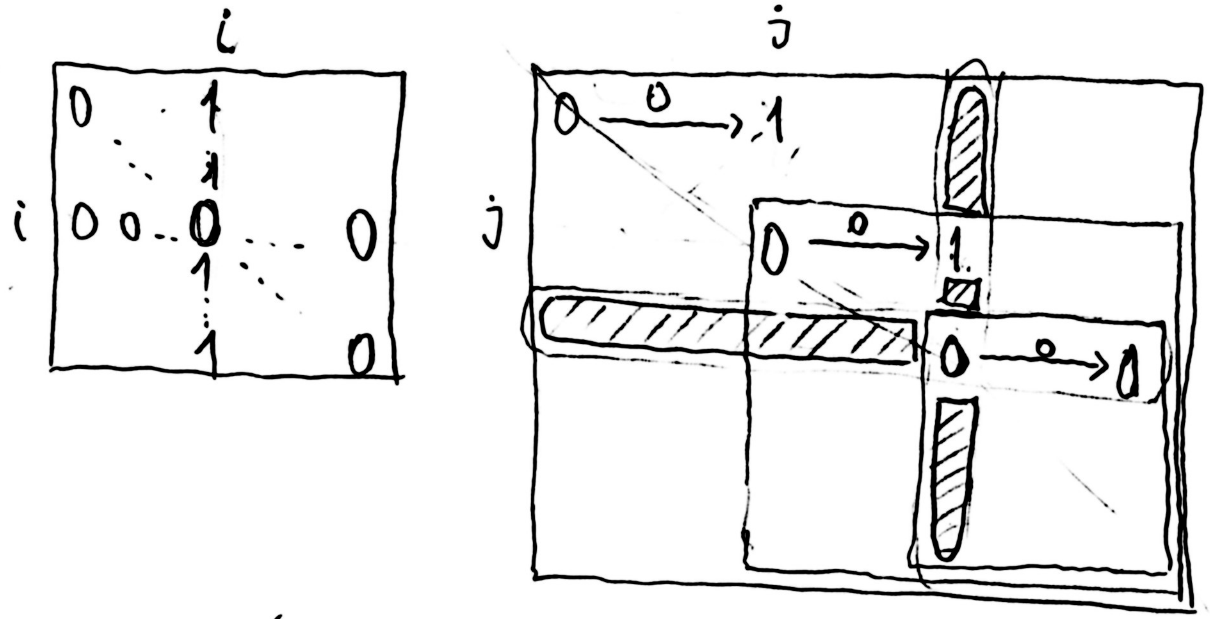
$\Rightarrow \exists a \in B \setminus A : a \notin X$

$\Rightarrow A \cup \{a\} \in I'$

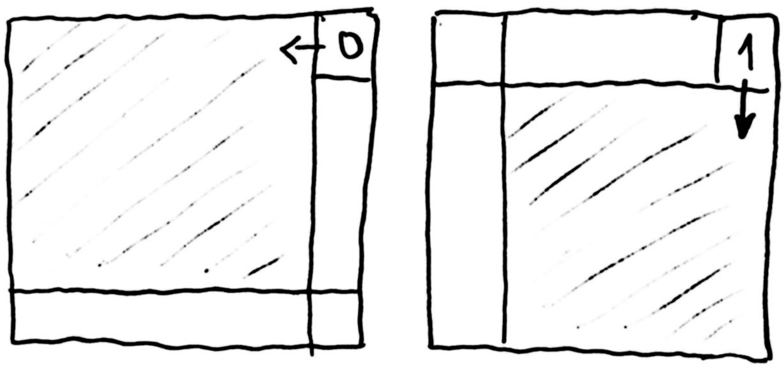
30.10.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOSŤ I

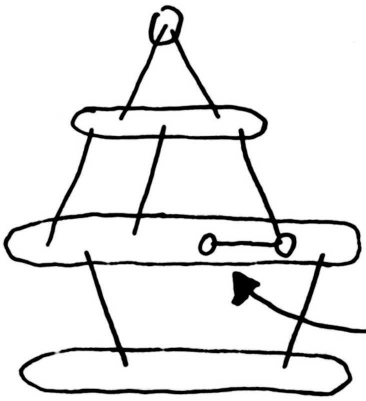
PRÍKLAD: ORIENTOVANÝ GRAF $G=(V,E)$ ZADANÝ MATICOU SUSEDNOSTI $\mathbb{A}$, NÁJDITE V ČASE $O(|V|)$ STOK v: $\deg_- v = |V|-1$, $\deg_+ v = 0$



2. STRATÉGIA:



PRÍKLAD: NAVRHNITE ALG. ZALOŽENÝ NA BFS, KTORÝ ROZHODNE O BIPARTITNOSTI GRAFU



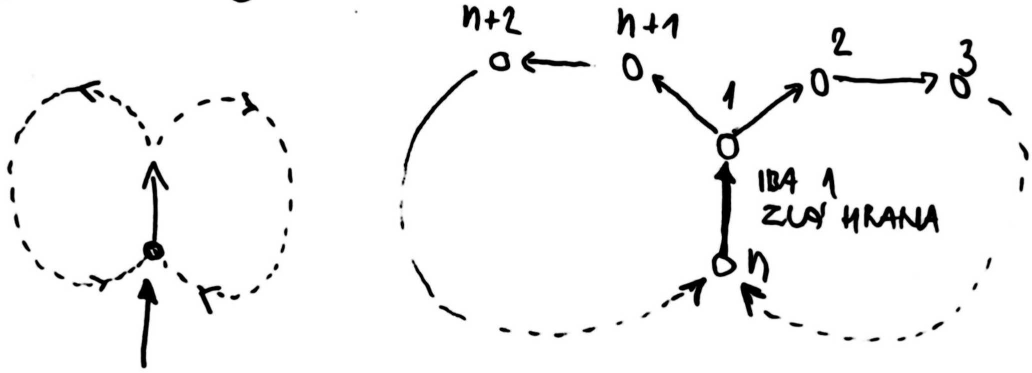
G JE BIPARTITNÝ $\Leftrightarrow$ $\neg\exists$ HRANA V 1 VRSTVE

PRÍKLAD: NECH $t : V \to \{1, \dots, |V|\}$ JE OČÍSLOVANIE VRCHOLOV ORIENT. GRAFU $G = (V, E)$.

$(i,j) \in E$ JE ZLÁ PRE t $\Leftrightarrow$ $t(i) > t(j)$

DOKÁŽTE ALEBO VYVRÁŤTE: OČÍSLOVANIE t ZÍSKANÉ POMOCOU DFS PODĽA KLESAJÚCICH ČASOV f MINIMALIZUJE POČET ZLÝCH HRÁN.

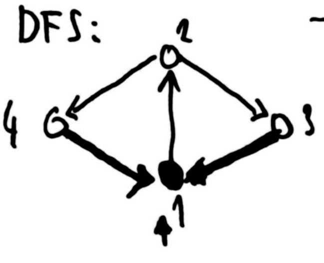
TVRDENIE NEPLATÍ:



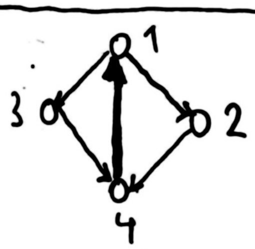
ODTIAĽTO SPUSTÍM DFS

$\Rightarrow$ DOSTANEM 2 ZLÉ HRANY

DFS:



VS



30.10.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOST I

$G = (V,E)$ JE POLOSÚVISLÝ $\Leftrightarrow$
$\forall x,y \in V\ x \neq y\ \exists\ x \rightsquigarrow y \lor y \rightsquigarrow x$.

NAVRHNITE ALGORITMUS TESTUJÚCI POLOSÚVISLOSŤ:

V ČASE $\Theta(m+n)$: NÁJDEME SILNO SÚVISLÉ KOMPONENTY $\rightsquigarrow$ KONDENZOVANÝ GRAF

OTESTUJEM: $\circ \to \circ \to \circ \cdots \to \circ$ $\boxed{\text{INDUKUJE ÚPLNÉ USPORIADANIE}}$

$\triangleleft$ V ČASE $\Theta(n(n+m))$ POMOCOU MATICE DOSIAHNUTEĽNOSTI

05.11.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

DÔKAZ VETY O LIN. SEPARÁTORE:

(1) PREPROCESSING (PREDPOKLADÁME, ŽE G JE SÚVISLÝ)

SKONŠTRUUJEME PLANÁRNE VNORENIE GRAFU G $\Theta(m+n)$

VEZMEME $s \in V$ A SPUSTÍME $BFS(G, s)$

$\Rightarrow$ VRSTVY $L_0, \dots, L_q$, $L_0 = \{s\}$, $+$ $L_{q+1} \overset{def}{:=} \emptyset$

PLATÍ: L_i JE SEPARÁTOR ODDEĽUJÚCI

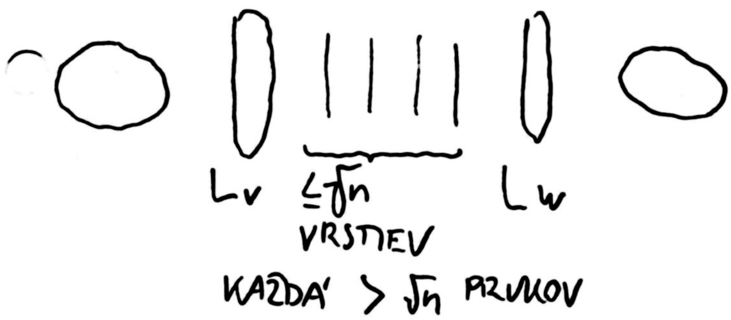
$L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{i-1}$ A $L_{i+1} \cup \dots \cup L_{q+1}$

NECH L_t OBSAHUJE $n/2$-TÝ VRCHOL

$\triangleleft$ AK $|L_t| \leq 4\sqrt{n}$ $\Rightarrow$ SME HOTOVÍ

LEMMA: EXISTUJÚ $v < t$ A $w > t$ TAKÉ, ŽE

$|L_v| \leq \sqrt{n}$, $|L_w| \leq \sqrt{n}$, $(w-v) \leq \sqrt{n}$



$C := L_0 \cup \dots \cup L_{v-1}$, $D := L_{v+1} \cup \dots \cup L_{w-1}$, $E := L_{w+1} \cup \dots \cup L_q$

UŽ VIEME, ŽE $|C|, |E| < \frac{n}{2}$

AK $|D| \leq \frac{2}{3} n$ $\Rightarrow$ SME HOTOVÍ:

$S := L_v \cup L_w$, $A :=$ NAJVÄČŠÍ Z C, D, E (ZREJMÉ)

$B :=$ ZVYŠNÉ DVA Z C, D, E

PLÁN PRE JADRO DÔKAZU

NÁJDEME SEPARÁTOR S' VEĽKOSTI $\leq 2\sqrt{n}$ ROZDEĽUJÚCI D V POMERE $2:1$ ALEBO ROVNOMERN.

POTOM DEFINUJME:

$S := S' \cup L_v \cup L_w$

$A :=$ VÄČŠÍ Z DVOJICE C, E $\cup$ MENŠÍ KUS D

$B :=$ MENŠÍ Z DVOJICE C, E $\cup$ VÄČŠÍ KUS D

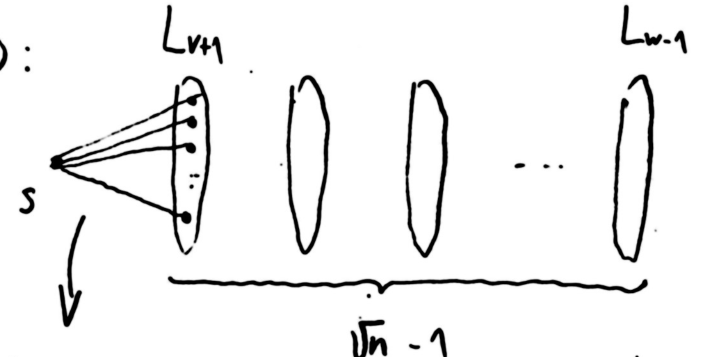
$$|A| \leq (n - |D|) + \frac{1}{2}|D| = n - \frac{1}{2}|D|$$

$$|D| > \frac{2}{3}n \Rightarrow |A| < \frac{2}{3}n$$

$$|B| \leq \frac{1}{2}(n - |D|) + \underbrace{\frac{2}{3}|D|}_{\text{KVÔLI POMERU } 2:1} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}|D| \leq \Big(\frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{6}}^{2/3}\Big)n$$

POSTUP KONŠTRUKCIE S':

D:



OZNAČME G'

POZOR! MUSÍME OVERIŤ, ŽE SME NEPOKAZILI PLANARITU

05.11.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

SKONŠTRUUJEME KOSTRU T GRAFU G':

a) PRE KAŽDÝ VRCHOL $x \in L_{w-1}$ VYBER HRANU IDÚCU Z x DO L_{w-2}

b) OPAKUJ a) AJ PRE OSTATNÉ VRSTVY

c) PRIDAJ $\forall$ HRANY $s \to L_{v+1}$

LEMMA: CESTA Z x DO y MÁ DĹŽKU $\leq 2\sqrt{n}$

NECH $G'' = (V'', E'')$ JE TRIANGULÁCIA G', $(V'' = V')$

ZVYŠOK DÔKAZU: VYBERIEME CESTU p V T TAKÚ, ŽE $S' =$ VRCHOLY p

HRANY V $E'' \setminus T$ NAZVEME PRIEČKY GRAFU G''

OZNAČME $G^* = (V^*, E'')$ DUÁLNY GRAF KU G''.

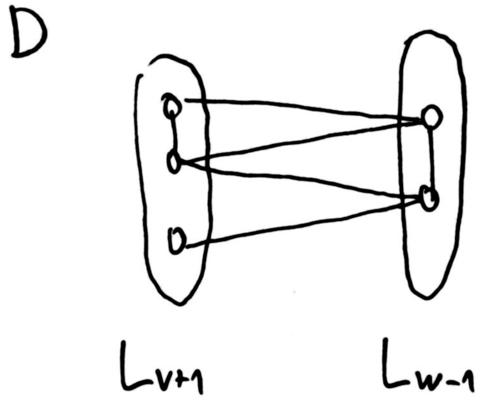
PLATÍ: $(V^*, E'' \setminus T)$ JE KOSTRA GRAFU G^*

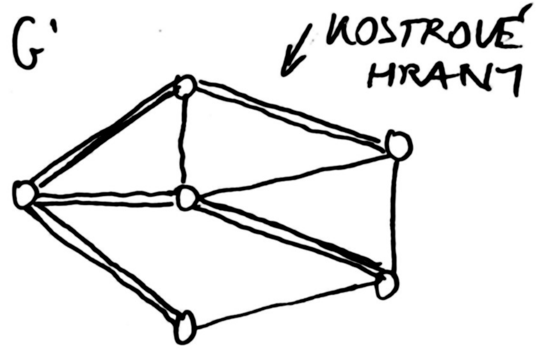
(TJ. PRIEČKY Z G'' TVORIA KOSTRU G^*)

PLATÍ: $\forall e = (u, v) \in E'' \setminus T$ EXISTUJE V T PRÁVE JEDNA CESTA Z u DO v, KTORÁ SPOLU S e TVORÍ CYKLUS C_e.

<u>ĎALŠÍ POSTUP</u>: HĽADÁME HRANU e TAKÚ, ŽE CYKLUS C_e TVORÍ SEPARÁTOR

C_e MUSÍ ODKUSNÚŤ NIEČO MEDZI JEDNOU AŽ DVOMA TRETINAMI $\forall$ VRCHOLOV D

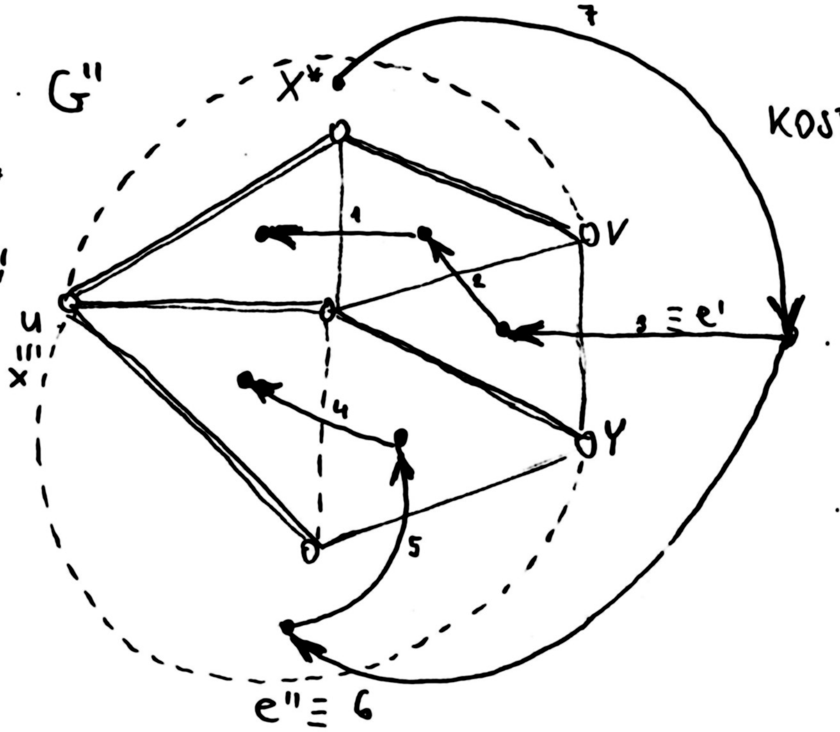




SPUSTÍME DFS Z x^*
OČÍSLUJEME HRANY
PRI BACKTRACKOVANÍ

V POSLEDNOM KROKU : BACKTR. HRANA e_7

$e' = e_3$
$e'' = e_6$



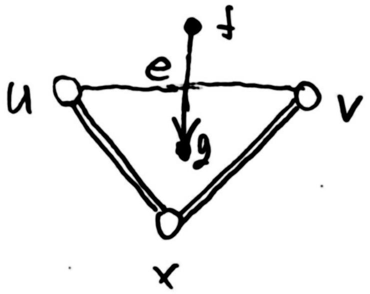
VYBERIEME LIST KOSTRY $E'' \setminus T$ GRAFU G^* $\to x^*$
A ZORIENTUJEME HRANY KOSTRY SMEROM OD x^*
SPUSTÍME DFS NA KOSTRU $E'' \setminus T$ Z x^*
A PRE KAŽDÚ HRANU $e \in E'' \setminus T$ SPOČÍTAME
(PRI BACKTRACKINGU)

V_e = POČET VRCHOLOV G'' VO VNÚTRI CYKLU C_e
D_e = POČET VRCHOLOV CYKLU C_e
C_e = ZOZNAM VRCHOLOV C_e

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

VÝPOČET ZÁVISÍ NA TYPU HRANY $e = (f,g) \in E'' \setminus T$

(1) STENA g GRAFU G'' JE OHRANIČENÁ 2 HRANAMI STROMU T A 1 PRIEČKOU



$V_e = 0$

$D_e = 3$

$C_e = [u, x, v]$

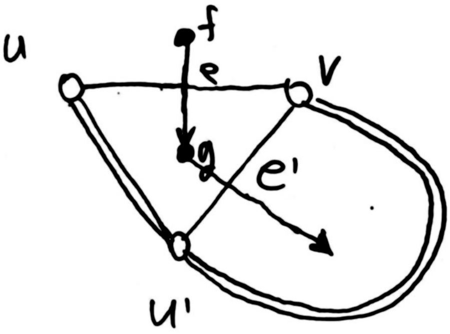
g JE LIST KOSTRY $E'' \setminus T$

V ČASE $\Theta(1)$

(2) 1 HRANA e A 2 PRIEČKY

e MÁ V DFS STROME PRÁVE 1 NÁSLEDNÍKA

a)



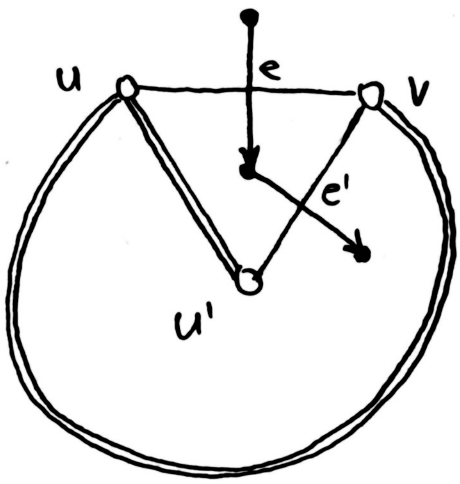
$V_e = V_{e'}$

$D_e = D_{e'} + 1$

$C_e = [u] \circ C_{e'}$

V ČASE $\Theta(1)$

b)



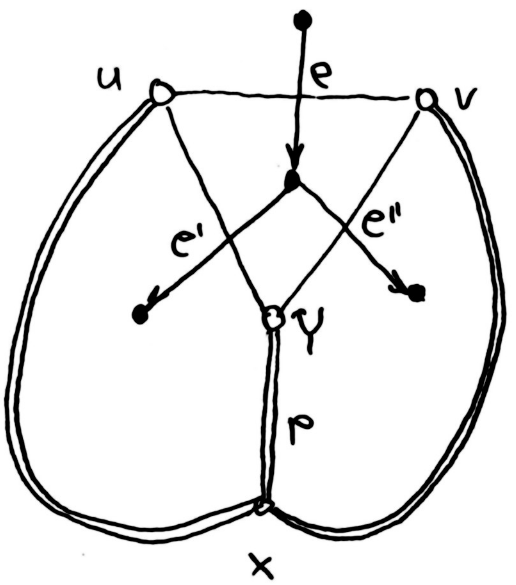
$V_e = V_{e'} + 1$

$D_e = D_{e'} - 1$

$C_e = C_{e'} \setminus [u']$

V ČASE $\Theta(1)$

(3) ST. g GRAFU G'' JE OHRANIČENÁ 3 PRIEČKAMI



e MÁ V DFS STROME PRÁVE 2 NÁSLEDNÍKOV

$$U_e = U_{e'} + U_{e''} + \overbrace{|P|}^{\text{POČET VRCHOLOV !!}} - 1$$

$$D_e = D_{e'} + D_{e''} - 2|P| + 1$$

$$C_e = C_{e'} \circ [x] \circ C'_{e''}$$

KDE $C'_{e'}$ A $C'_{e''}$ VZNIKNE Z $C_{e'}$ A Z $C_{e''}$ ODSTRÁNENÍM P

AMORTIZOVANÁ ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ $\Theta(1)$

POZOR: UMAZÁVACIA PRÁCA JE TU CEZ CELÉ DFS LINEÁRNA.

LEMMA: EXISTUJE PRIEČKA e TAKÁ, ŽE $U_e \le 2n'/3$ A $n' - (U_e + D_e) \le 2n'/3$, KDE $n' = |V''|$. NAVIAC e NÁJDENÉ V PRIEBEHU DFS NA KOSTRE $E'' \setminus T$ V ČASE $\Theta(n+m)$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7^*
TYP HR.	1	2a)	2a)	1	2a)	2b)	3
U_e	0	0	0	0	0	1	3
D_e	3	3+1	4+1	3	3+1	4-1	3

*: $e' = e_3$, $e'' = e_6$

VŽDYCKY VYJDE $n'-3$!

PO NÁJDENÍ e POLOŽÍME: $S' := C_e \setminus \{s\}$, $X := U_e$, $Y := V'' \setminus (U_e \cup C_e)$. □

VIĎ OBRÁZOK VYŠŠIE

05.11.2008 We
PETER ČERNO

NMIN062 SLOŽITOST I

DÔKAZ (LEMMY O EXISTENCII e)

NECH e JE PRVÁ TAKÁ, ŽE NASTANE

$$U_e + D_e \geq \frac{1}{3} n'$$

TAKÁ PRIEČKA EXISTUJE, PRETOŽE V LISTOCH JE $U_e + D_e = 3$ A V KORENI: $U_e + D_e = n'$ (VŠETKO JE OBKLÚČENÉ V KORENI)

PRE TAKÉ e PLATÍ $n' - (U_e + D_e) \leq \frac{2}{3} n'$.

ZOSTÁVA UKÁZAŤ, ŽE $U_e \leq \frac{2}{3} n'$.

ROZBOR PRÍPADOV PODĽA TYPU e:

(1) $U_e = 0$, PLATÍ ✓

(2a) $U_e = U_{e'}$

$D_e = D_{e'} + 1$

$U_{e'} + D_{e'} < \frac{1}{3} n'$

$U_e + D_e = U_{e'} + D_{e'} + 1 \leq \frac{1}{3} n'$ $\Rightarrow U_e \leq \frac{2}{3} n'$

(2b) $U_e + D_e = U_{e'} + D_{e'}$ TENTO PRÍPAD NEMÔŽE NASTAŤ

(3) $U_e + D_e = U_{e'} + U_{e''} + |p| - 1 +$

$$+ D_{e'} + D_{e''} - 2|p| + 1 =$$

$$= \underbrace{(U_{e'} + D_{e'})}_{< \frac{1}{3} n'} + \underbrace{(U_{e''} + D_{e''})}_{< \frac{1}{3} n'} - |p| < \frac{2}{3} n'. \quad \square$$

12. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

ALGORITMUS PRE KONŠTRUKCIU PLANÁRNEHO SEP.
(VIĎ SLIDEY)

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ

ODHAD ČASOVEJ ZLOŽITOSTI POSTUPNOSTI OPERÁCIÍ

AMORTIZOVANÁ ANALÝZA: ÚČTOVNÁ METÓDA,
[AGREGAČNÁ A POTENCIÁLOVÁ METÓDA]

DIJKSTROV ALGORITMUS

```
DIJKSTRA (G, w, s)
  foreach v ∈ V d[v] ← +∞ , π[v] ← NIL
  S := ∅, Q := V, d[s] ← 0
  while Q ≠ ∅ do
    u ← EXTRACT-MIN (Q)
    S ← S ∪ {u}
    foreach (u,v) ∈ E do
      if d[v] > d[u] + w(u,v) then
        d[v] ← d[u] + w(u,v)
        π[v] ← u
```

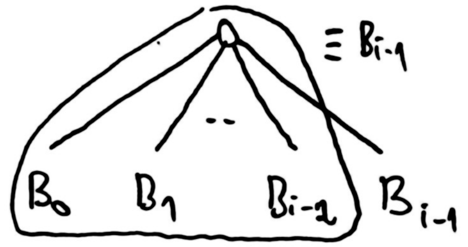
	Q = ARRAY	MIN-HEAP	FIB. HEAP
NAPLN. POĽA/HALDY	$\Theta(n)$	$O(n)$	$O(n)$
EXTRACT-MIN	$\Theta(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
DECREASE-KEY	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$ AMORT.
TOTAL	$O(n^2+m)$	$O((n+m)\log n)$	$O(n\log n + m)$

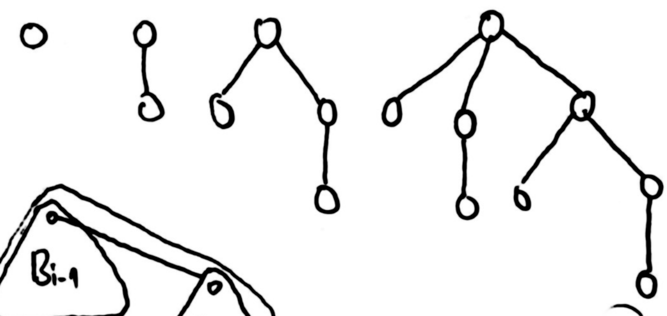
BINOMIÁLNA HALDA

DEF. BINOMIÁLNY STROM B_i, B_0 = JEDEN VRCHOL (KOREŇ)

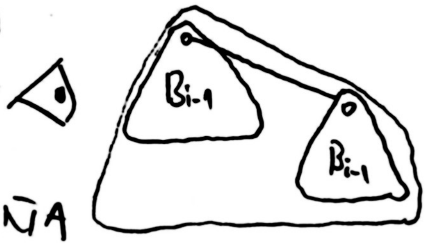
B_i JE KOREŇ + DETI $B_0, \dots, B_{i-1}$

B_i :





+ VLASTNOSŤ MINHEAP



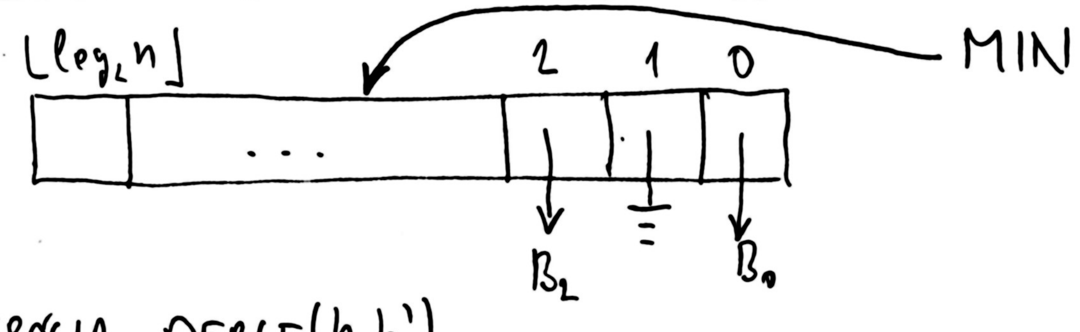
RAD UZLU = POČET SYNOV

RAD STROMU = RAD KOREŇA

BINOMIÁLNA HALDA = SÚBOR BINOM. STROMOV S NAVZÁJOM RÔZNYMI RÁDMI + UKAZATEĽ MIN

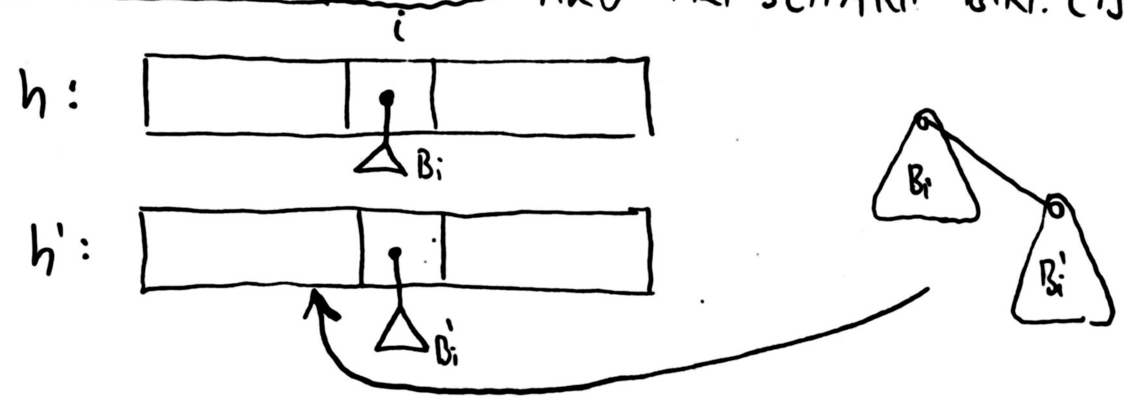
LEMMA: $|B_i| = 2^i$, ⇒ KAŽDÝ STROM S n VRCHOLMI MÁ RÁD NAJVIAC $\log_2 n$

REPREZENTÁCIA BINOMIÁLNEJ HALDY:



OPERÁCIA MERGE(h,h') AKO PRI SČÍTANÍ BIN. ČÍSIEL

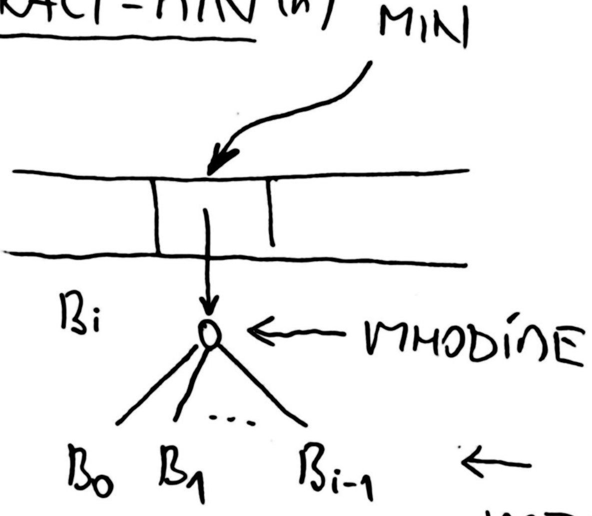
$O(\log_2 n)$



12.11.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

EXTRACT-MIN (h)



← Z TÝCHTO SYNOV ($\leq \lfloor \log_2 n \rfloor$) VYTVORÍME NOVÚ HALDU (+MIN)

A TÚTO NOVÚ HALDU ZMERGUJEM S PÔVODNOU V ČASE $O(\log_2 n)$

INSERT (h, i)

INSERT (h, i) := MERGE (h, MAKEHEAP (i))

AMORTIZOVANÝ ČAS $O(1)$

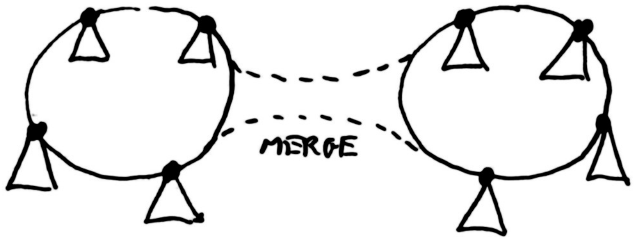
$\boxed{\text{INVARIANT}}$: KAŽDÝ BINOMIÁLNY STROM V HALDE MÁ NA SVOJOM ÚČTE (V KORENI STROMU) 1 EURO, KT. BOLO ZAPLATENÉ OPERÁCIOU, KT. TENTO STROM VYTVORILA.

LENIVÁ REPREZENTÁCIA BINOM. HALDY

KORENE STROMOV SÚ ZVIAZANÉ DVOJSMERNÝM KRUHOVÝM ZOZNAMOM

ZOZNAM MÔŽE DOČASNE OBSAHOVAŤ VIAC STROMOV ROVNAKÉHO RÁDU.

MERGE : O(1)
INSERT : O(1)

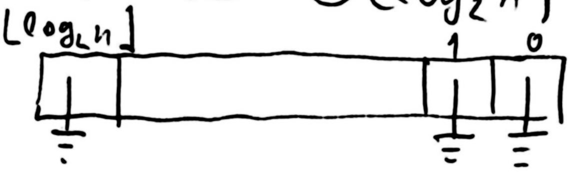


EXTRACT-MIN VOLÁ <u>CONSOLIDATION</u>

PREVEDIE LENIVÚ REPREZENTÁCIU NA PILNÚ

CHCEME IMPLEMENTÁCIU V ČASE $O(\log_2 n)$

(1) VYTVORÍM POLE

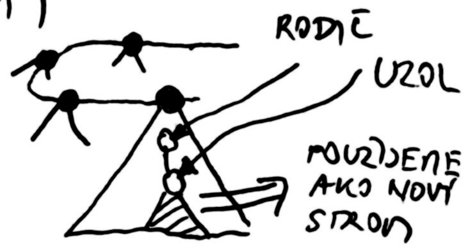


(2) POSTUPNE BERIEM STROMY ZO SPOJÁKU A ZAVESUJEM ICH DO POĽA:

(a) S TÝM, ŽE ZA STROMY, KTORÝCH KORENE ZOSTANÚ KOREŇMI I PO SPRACOVANÍ VŠETKÝCH STROMOV ZAPLATÍ KONSOLIDÁCIA

(b) ZA STROMY, KTORÝCH KORENE PRESTANÚ BYŤ KOREŇMI, ZAPLATÍ ÚČET STROMU

(3) Z POĽA OPÄŤ VYTVORÍME SPOJÁK A NASTAVÍME MIN $O(\log_2 n)$



FIBONACCIHO HALDY

<u>DECREASE-KEY</u> : 4 EURÁ

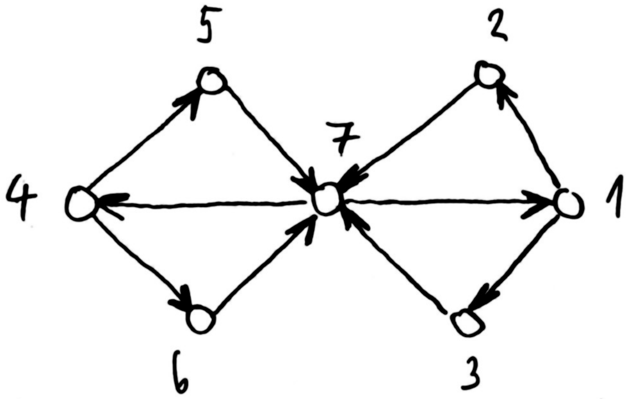
1 EURO NA PRÁCU (ODREZANIE UZLU, ZAVEDENIE DO SPOJÁKU)
1 EURO NA ÚČET NOVÉHO STROMU
2 EURÁ POŠLEM RODIČOVI

KEĎ UZOL STRÁCA 2. SYNA, TAK MÁ NAŠPORENÉ 4 EURÁ, KTORÉ POUŽIJE ROVNAKO AKO JE POPÍSANÉ VYŠŠIE

1/2

13.11.2008 Th
PETER ČERNO

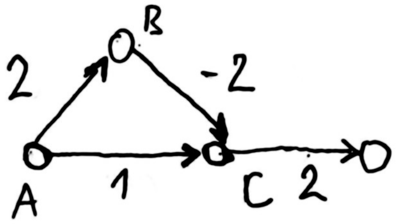
EX: NTIN062 SLOŽITOSŤ I



ALE KEĎ SPUSTÍME DFS Z ĽUBOVOĽNÉHO VRCHOLU, VŽDY DOSTANEME ASPOŇ 3 BACK-EDGES.

PRÍKLAD: DIJKSTRA

NAJDITE ORIENTOVANÝ GRAF SO ZÁPORNÝMI VÁHAMI, ALE BEZ ZÁPORNÝCH CYKLOV, NA KTOROM DIJKSTRA ZLYHÁ



PRÍKLAD: NECH $w(x,y) \in \langle 0,1 \rangle$ JE SPOĽAHLIVOSŤ HRANY xy. PREDPOKLADAJME, ŽE TIETO SPOĽAHLIVOSTI SÚ NEZÁVISLÉ VELIČINY.

NAVRHNITE ALGORITMUS, KTORÝ PRE DVOJICU VRCHOLOV u, v SPOČÍTA NAJSPOĽAHLIVEJŠIU CESTU Z u DO v

POLOŽME $v(x,y) := -\ln(w(x,y))$

PRE $w(x,y)=0$ KLADIEME $v(x,y) = +\infty$

(POPR. (x,y) NEUVAŽUJEME)

DIJKSTRA:

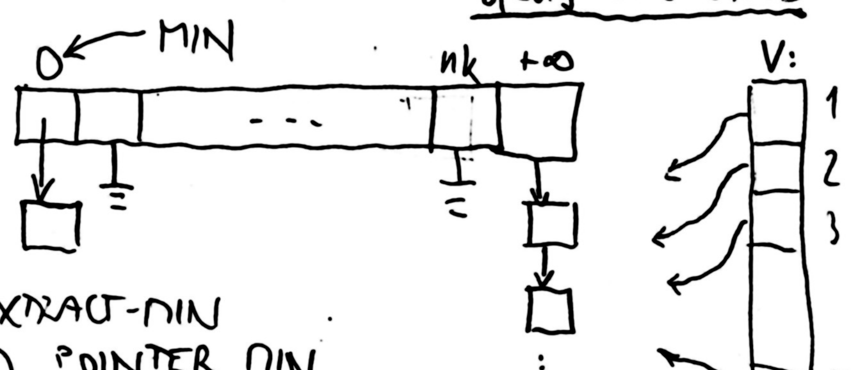
$$\min_{C:u\leadsto v}\left(\sum_{(x,y)\in C} v(x,y)\right) = \min_{C:u\leadsto v}\left(-\ln\prod_{(x,y)\in C} w(x,y)\right) = -\ln \boxed{\max_{C:u\leadsto v}\left(\prod_{(x,y)\in C} w(x,y)\right)}$$

PRÍKLAD: NECH $w: E \to \{1,\dots,k\}$

a) IMPLEMENTUJTE DIJKSTR. ALG. V ČASE $O(nk+m)$

```
foreach u ∈ V do d[u] ← +∞, π[u] ← NIL
d[s] ← 0
Q ← V, S ← ∅
while Q ≠ ∅ do
nx  [ u ← EXTRACT-MIN(Q)            NAJSTAVUJEM MIN
    [ S ← S ∪ {u}                   (AMORTIZOVANE V ČASE O(nk))
    [ foreach (u,v) ∈ E do          m x AMORTIZOVANE
    [     RELAX(u, v, w)
```

d[u] DECREASED V ČASE $O(1)$



PRI EXTRACT-MIN POSÚVAM POINTER MIN AMORTIZOVANE V ČASE $O(nk)$

13.11.2008 Th
PETER ČERNO

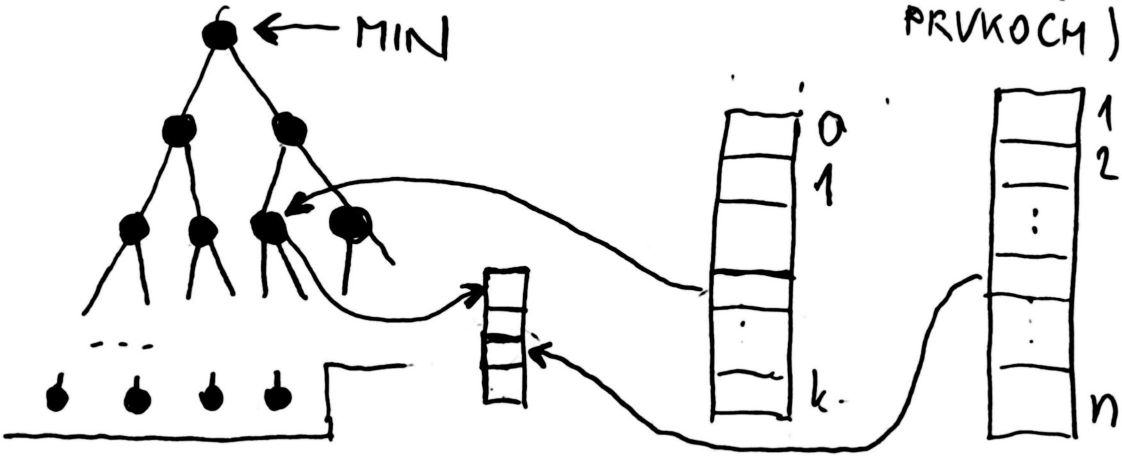
EX: NTIN062 SLOŽITOST I

b) TO ISTÉ V ČASE $O(n \log k + m)$

NEZAPLNENÉ POLÍČKA:

1) JE ICH NAJVIAC $k+1$
2) LEŽIA VŠETKY V NEJAKEJ KOMPAKTNEJ ČASTI POLA VEĽKOSTI NAJVIAC $k+1$

NAMIESTO POĽA BUDEME MAŤ HALDU (O NAJVIAC $k+1$ PRVKOCH)



EXTRACT-MIN MÁME V ČASE $O(\log k)$

PROBLÉM: DECREASE-KEY

BUDEM MAŤ POLE $0..k$,
KDE BUDEM MAŤ PRIAMY PRÍSTUP K HLAVÁM ZOZNAMOV PODĽA LABELOV mod k.

PRÍKLAD: ROBÍM DECREASE-KEY NA PRVKU S LABELOM 13 NA 11

$k = 5$ ...

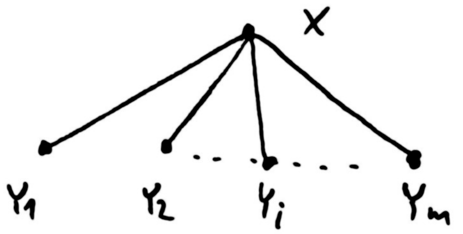
19. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

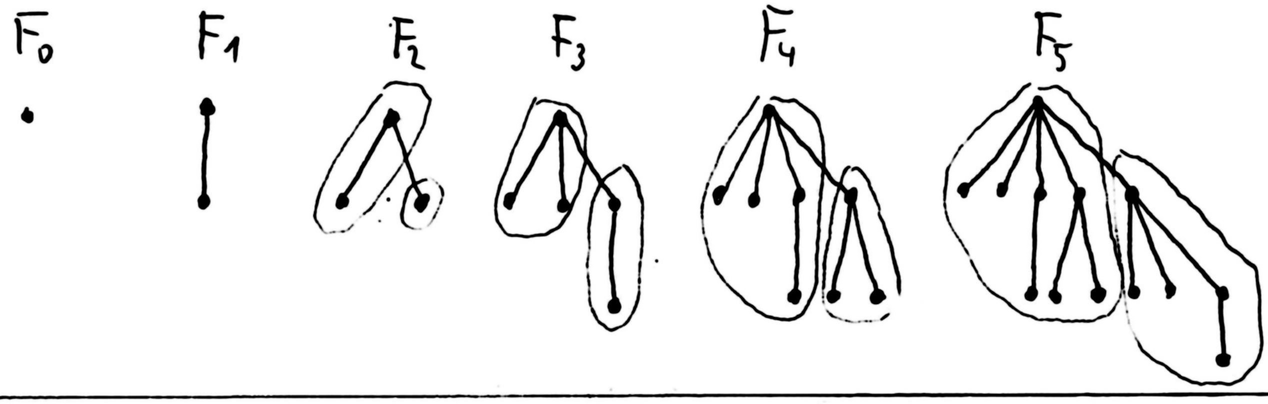
TO, ŽE EXTRACT-MIN FUNGUJE V LOGARITMICKOM ČASE JE DÔSLEDOK TOHO, ŽE STROMY MAJÚ EXP. VEĽA VRCHOLOV VZHĽADOM NA RÁD

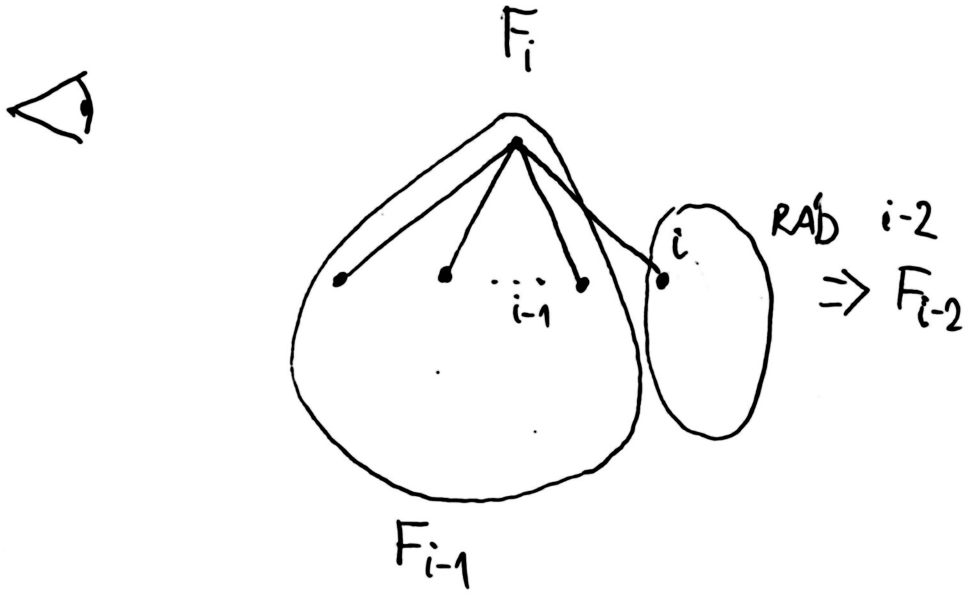
DECREASE-KEY .. 4 EURA

LEMMA: NECH x JE VRCHOL A $y_1, \dots, y_m$ JEHO SYNOVIA V PORADÍ, V KTOROM BOLI POD x ZLIATI. POTOM PRE $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ JE RÁD VRCHOLU y_i ROVNÝ ASPOŇ $i-2$.



V OKAMŽIKU, KEĎ VZNIKLA HRANA xy_i BOLI x A y_i KORENE DVOCH STROMOV ROVNAKÉHO RÁDU, NAVIAC RÁD x BOL V TOM OKAMŽIKU $\geq i-1$, PRETOŽE $y_1, \dots, y_{i-1}$ UŽ BOLI SYNMI x.
OD TEJ DOBY MOHOL y_i STRATIŤ NAJVIAC JEDNÉHO SYNA, INAK BY BOL SÁM ODREZANÝ OD x
$\Rightarrow$ RÁD y_i JE ASPOŇ $i-2$

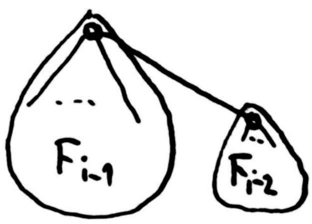




UVAŽUJME F_i. AK VYKONÁME OPERÁCIU DECREASE-KEY NA VRCHOLE i, DOSTANEME LEGÁLNY STROM $\Rightarrow$ Z MINIMALITY F_i TO NUTNE MUSÍ BYŤ F_{i-1}.

VRCHOL i MÁ RÁD $\geq i-2 \Rightarrow$ Z MINIMALITY NUTNE F_{i-2}

TJ. $F_i \equiv$



ZNAČENIE $f_i = |F_i|$.

DOKÁŽME, ŽE $f_i \geq \varphi^i$, KDE

φ JE KOREŇ $x^2 = x+1$, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

PRE $i=0,1$ PLATÍ ✓

$i \geq 2: \; f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \geq \varphi^{i-2}(1+\varphi) = \varphi^i$. □

19.11.2008 We
PETER CERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

ZLOŽITOSTNÉ TRIEDY

POSTUPNE UKÁŽEME, ŽE NASL. 4 ÚLOHY SÚ ROVNAKO ŤAŽKÉ:

(1) KLIKA: NEORIENT. GRAF $G=(V,E)$, NÁJDITE NAJVÄČŠIU KLIKU

(2) SAT: ZISTIŤ SPLNITEĽNOSŤ CNF NA n PREMEN.

(3) TSP: OHODNOTENÝ NEORIENT. GRAF $G=(V,E)$, NÁJDITE HAMILTONOVSKÚ KRUŽNICU MIN. DĹŽKY

(4) SÚČET PODMNOŽINY: $a_1, \ldots, a_n, b$
EXISTUJE $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$: $\sum_{i \in S} a_i = b$?

ÚLOHA ≡ PRE DANÝ VSTUP (INŠTANCIU) JE CIEĽOM ZÍSKAŤ VÝSTUP S DANÝMI VLASTNOSŤAMI

OPTIMALIZAČNÁ ÚLOHA ≡ CIEĽOM JE ZÍSKAŤ OPTIMÁLNY VÝSTUP

ROZHODOVACÍ PROBLÉM ≡ VÝSTUP JE ÁNO / NIE

V ĎALŠOM VÝKLADE SA OBMEDZÍME IBA NA ROZHODOVACIE PROBLÉMY

KU KAŽDEJ OPTIMAL. ÚLOHE JE MOŽNÉ ĽAHKO PRIRADIŤ NAJVIAC ROVNAKO ŤAŽKÝ ROZHODOVACÍ PROBLÉM. (ČASTO JE TO MOŽNÉ AJ NAOPAK)

KÓDOVANIE VSTUPOV

NECH P JE ROZHODOVACÍ PROBLÉM

INŠTANCIA PROBLÉMU P JE REŤAZEC V ABECEDE $\{0,1\}$

KÓDY VŠETKÝCH INŠTANCIÍ : $L(P) \subseteq \{0,1\}^*$

$L(P)_Y$ .. KÓDY S ODPOVEĎOU YES
$L(P)_N$ .. —"— NO

ROZHODOVACÍ PROBLÉM :
PRE DANÝ VSTUP $x \in L(P)$ ROZHODNI, Č
$x \in L(P)_Y$ ALEBO $x \in L(P)_N$

PREDPOKLADÁME, ŽE TEST $x \in L(P)$ JE ĽAHKÝ, POLYNOMIÁLNY VZHĽADOM NA $|x|$

DTS

ABSTRAKTNÝ STROJ, KTORÝ SA SKLADÁ Z :
(1) RIADIACEJ JEDNOTKY (KONEČNÝ POČET STAVOV)
(2) POTENCIÁLNE NEKONEČNEJ (JEDNOSTR.) PÁSKY

PROGRAM PRE DTS

(1) Q .. STAVY, q_0 POČIATOČNÝ STAV
KONCOVÉ STAVY q_Y, q_N

(2) Γ PÁSKOVÉ SYMBOLY, $\Sigma \subseteq \Gamma$ VSTUPNÝCH SYM.
$* \in \Gamma \setminus \Sigma$ PRÁZDNY SYMBOL

(3) PRECH. FCIA. $\delta : (Q \setminus \{q_Y, q_N\}) \times \Gamma \to$
$Q \times \Gamma \times (\leftarrow, \cdot, \rightarrow)$

19.11.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

JAZYK $L(M)$ PRIJÍMANÝ DTS M

M RIEŠI ROZH. PR. P $\Leftrightarrow$ M VŽDY ZASTAVÍ
A $L(M) = L(P)_Y$.

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ M JE
$T_M(n) = \max\{t \mid \exists x \in \Sigma^*\ |x| = n,$
M SKONČÍ NA VSTUPE x PO t KROKOCH$\}$

(PREDP., ŽE M VŽDY ZASTAVÍ)

AK EXISTUJE POLYNÓM p: $T_M(n) \leq p(n)$
$\Rightarrow$ M SA NAZÝVA POLYNOMIÁLNY DTS.

TRIEDA P: ROZHODOVACÍ PROBLÉM P PATRÍ
DO TRIEDY P $\Leftrightarrow$ $\exists$ DTS M, KT. RIEŠI P.

26. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

STÁLE PREDPOKLADÁME, ŽE TS PRACUJÚ S JEDNOSTRANNOU PÁSKOU

NEDETERMINISTICKÝ TS

$$\delta : (Q \setminus \{q_Y, q_N\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \cdot, \rightarrow\})$$

NTS M PRIJÍMA $x \in \Sigma^*$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ PRIJÍMAJÚCI VÝPOČET PROGRAMU M NA VSTUPE x. (KONČIACI V STAVE q_Y)

ČAS = POČET KROKOV V NAJKRATŠOM PRIJÍMAJÚCOM VÝPOČTE

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ T_M :

$T_M(n) = 1$ AK M NEPRIJÍMA ŽIADEN VSTUP $x \in \Sigma^n$

INAK $T_M(n) = \max \{ t \mid \exists x \in \Sigma^n$, M PRIJÍMA x V t KROKOCH $\}$

AK EXISTUJE POLYNÓM p : $\forall n \in \mathbb{N} : T_M(n) \leq p(n)$

$\Rightarrow$ M JE POLYNOMIÁLNY NTS

P JE V TRIEDE NP $\Leftrightarrow$ $\exists$ POLYNOMIÁLNY NTS M : $L(M) = L(P)_Y$.

P JE V TRIEDE co-NP $\Leftrightarrow$ $\exists$ POL. NTS M : $L(M) = L(P)_N$.

ALTERNATÍVNA DEFINÍCIA NTS :

PRIDÁME TZV. HÁDAJÚCU PÁSKU

PRÁCA NTS ZOSTÁVA Z 2 FÁZ :

(1) NA HÁDAJÚCU PÁSKU JE (NEDETERMINISTICKY) ZAPÍSANÝ REŤAZEC $y \in \{1, \dots, k\}^*$

(2) POMOCOU y JE VÝPOČET NA VSTUPE x ZMENENÝ Z NEDETERM. NA DETERMINI.

VSTUP x JE PRIJÍMANÝ $\Leftrightarrow$ $\exists$ CERTIFIKÁT y KÓDUJÚCI PRIJÍMAJÚCI VÝPOČET.

ZATIAĽ SME MALI TS IBA <u>AKCEPTORY</u>

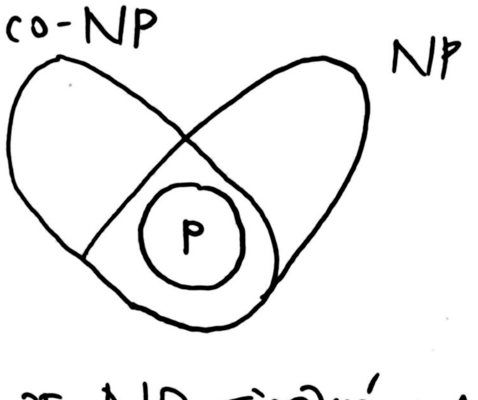
<u>TRANSDUCER</u> : TS (NTS) DOPLNENÝ O VÝSTUPNÚ PÁSKU (MOŽNO IBA ZAPISOVAŤ A POSÚVAŤ SA IBA DOPRAVA). VÝSTUP JE PÁSKA.

$f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ JE POLYN. VYČÍSLITEĽNÁ
$\Leftrightarrow \exists p$ A DTS TRANSDUCER A :
$\forall x \in \{0,1\}^*$ DÁVA A VÝSTUP $f(x)$
PO VYKONANÍ NAJVIAC $p(|x|)$ KROKOV

L JE PREVEDITEĽNÝ NA L' $(L \propto L')$
$\Leftrightarrow$ POL. VYČÍSLITEĽNÁ f :
$\forall x \in \{0,1\}^* : x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L'$

P JE NP-ŤAŽKÝ $\Leftrightarrow \forall Q \in NP : L(Q)_Y \propto L(P)_Y$
P JE NP-ÚPLNÝ $\Leftrightarrow$ P JE NP-ŤAŽKÝ & $P \in NP$

P JE CO-NP-ŤAŽKÝ $\Leftrightarrow \forall Q \in$ CO-NP : $L(Q)_N \propto L(P)_N$
P JE CO-NP-ÚPLNÝ $\Leftrightarrow$ P JE CO-NP-ŤAŽKÝ & $P \in$ CO-NP



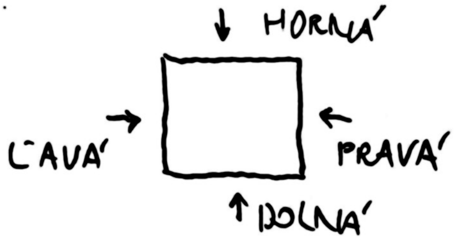
Q JE NP-ŤAŽKÝ A $L(Q)_Y \propto L(P)_Y \Rightarrow P$ JE NP-ŤAŽ.
Q JE CO-NP-ŤAŽKÝ A $L(Q)_N \propto L(P)_N$
$\Rightarrow P$ JE CO-NP-ŤAŽKÝ

26. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

VETA (COOK-LEVIN 1971): EXISTUJE NP-ÚPLNÝ PROBLÉM (PÔVODNE SPRAVENÉ PRE SAT)

KACHLÍKOVÁNÍ: MNOŽINA FARIEB B, ŠTVORCOVÁ SIEŤ S S OBVODOM OFARBENÝM FARBAMI Z B, MNOŽINA K TYPOV KACHLIČIEK, KDE KAŽDÝ TYP JE DEFINOVANÝ SVOJOU HORNOU, DOLNOU, ĽAVOU A PRAVOU FARBOU



KAŽDÝ TYP MÔŽEM POUŽIŤ KOĽKOKRÁT CHCEM

OTÁZKA?: JE MOŽNÉ ŠTVORCOVÚ SIEŤ OKACHLIČKOVAŤ KOREKTNE?

VETA: KACHLIČKOVANIE JE NP-ÚPLNÉ

(a) JE V NP: ZREJMÉ - CERTIFIKÁT = AKÝ TYP JE V KAŽDOM POLÍČKU SIETE

(b) NECH $R \in NP$, M JE POLYNOMIÁLNYM NTS ROZPOZNÁVAJÚCI $L(R)$, OHRANIČENÝ POL. p.

PREDPOKLADAJME, ŽE M PRIJÍMA S PRÁZDNOU PÁSKOU.

(TJ. SKONČÍ V q_Y IBA AK JE CELÁ PÁSKA PRÁZDNA)

NTS → NTS, KTORÝ SI OZNAČUJE ZAČIATOK (ALEBO DVOJNÍK ε') A KONIEC PÁSKY → AK NTS SA DOSTANE DO q_Y, NESKONČÍ, ALE VYMAŽE CELÚ PÁSKU, A AŽ POTOM PREJDE DO „NOVÉHO" KONCOVÉHO STAVU q_Y

NECH M JE DEFINOVANÝ MNOŽINOU STAVOV Q, VSTUPNOU ABECEDOU $\Sigma = \{0,1\}$, PRACOVNOU AB. $\Gamma = \{0,1,*\}$, PRECHOD. FCIOU. δ, POČ. STAV q_0

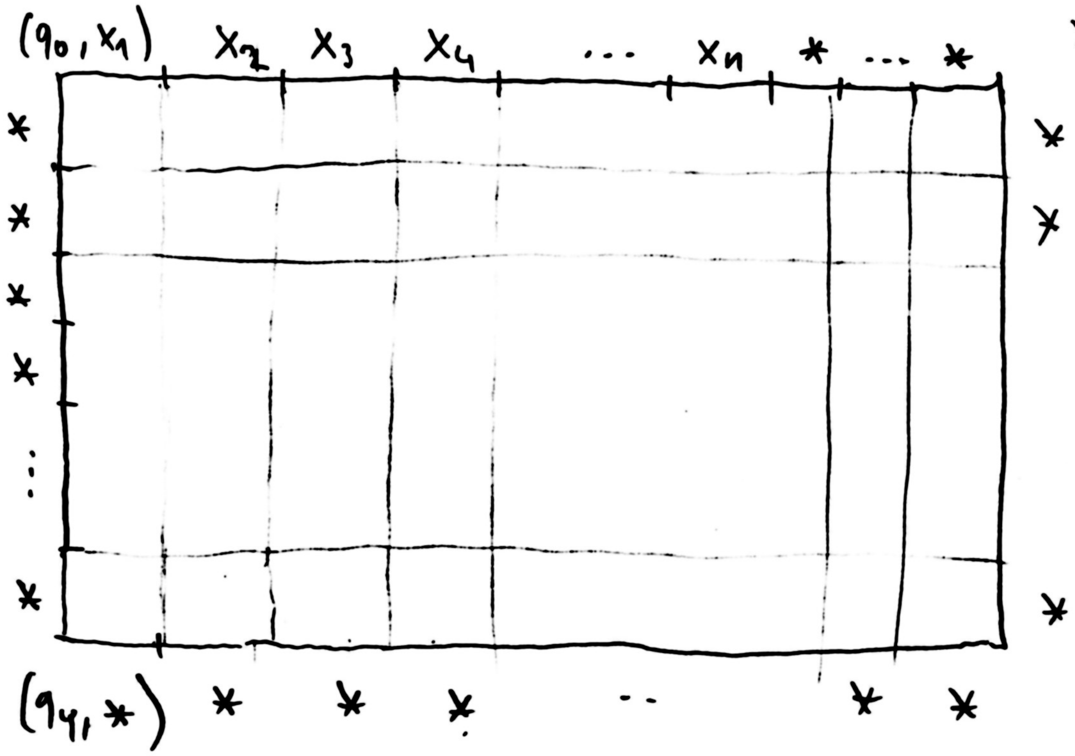
NECH $x \in \Sigma^n$ JE ZADANIE PROBLÉMU R

CHCEME SKONŠTRUOVAŤ ZADANIE $f(x)$ PROBLÉMU KACHLIČKOVANIA TAK, ABY

$$x \in L(R)_Y \Leftrightarrow f(x) \in L(\text{KACHLIČKOVANIE})$$

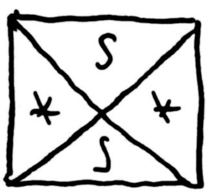
POLOŽME $B := \{0,1,*\} \cup Q \times \{0,1,*\} \cup Q \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$

VEĽKOSŤ S ZÁVISÍ NA x: S JE $p(|x|) \times p(|x|)$.



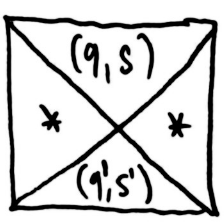
$x = x_1 x_2 \ldots x_n$

KACHLÍKY: (1)



$\forall s \in \{0,1,*\} = \Gamma$

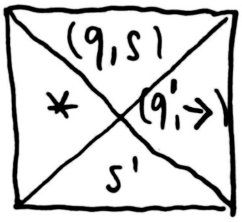
(2)



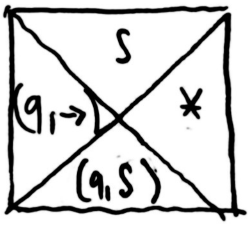
$(q', s', \cdot) \in \delta(q, s)$

26.11.2008 We
PETER ČERNO

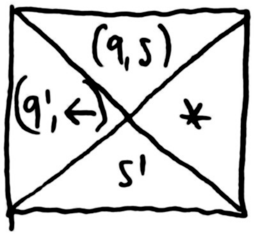
NTIN062 SLOŽITOSŤ I

(3) 

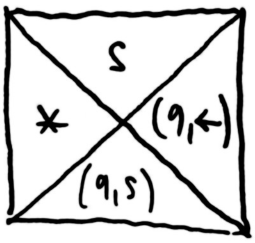
$(q', s', \rightarrow) \in \delta(q,s)$

(4) 

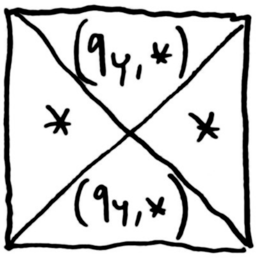
$\forall q \in Q.$
$\forall s \in \Gamma$

(5) 

$(q', s', \leftarrow) \in \delta(q,s)$

(6) 

$\forall q \in Q$
$\forall s \in \Gamma$

(7) 

KAŽDÝ RIADOK KACHLIČIEK KÓDUJE 1 KROK TS. HORNÉ FARBY JEDNOZNAČNE KÓDUJÚ KONFIGURÁCIU TS. DOLNÉ FARBY TIEŽ, TESNE PO VYKONANÍ 1 KROKU.

DVOJICA (q,s) SA V KAŽDOM RIADKU VYSKYTUJE PRÁVE 1x (V HORNEJ ČASTI / RESP. V DOLNEJ) A OZNAČUJE, KDE SA NACHÁDZA HLAVA TS + V AKOM JE STAVE.

VETA: KACHL $\propto$ SAT (ZREJME SAT $\in$ NP)

MÁM FARBY B, SIEŤ $S_{n \times n}$ A KACHLÍKY K

PREMENNÉ:

x_{ijk}, $x_{ijk} = 1 \Leftrightarrow$ NA POZÍCII i,j JE k

$1 \leq i,j \leq n$, $1 \leq k \leq |K|$. $0 \Leftrightarrow$ JE TAM NIEČO INÉ

(1) $\forall i,j$: $(x_{i,j,1} \vee x_{i,j,2} \vee \ldots \vee x_{i,j,k})$

NA POZÍCII i,j JE ASPOŇ 1 KACHLÍK

(2) $\forall i,j \ \forall k \neq k'$: $(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,j,k'})$

NA POZÍCII i,j JE NAJVIAC 1 KACHLÍK

(3) $\forall 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j < n$:

$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,j+1,k'})$

PRE KAŽDÚ DVOJICU k, k' TAKÚ, ŽE
k NEMÔŽE BYŤ VĽAVO OD k'.

(4) $\forall 1 \leq i < n \ \forall 1 \leq j \leq n$

$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i+1,j,k'})$ k NEMÔŽE BYŤ NAD k'

(5) HORNÉ VONKAJŠIE FARBY

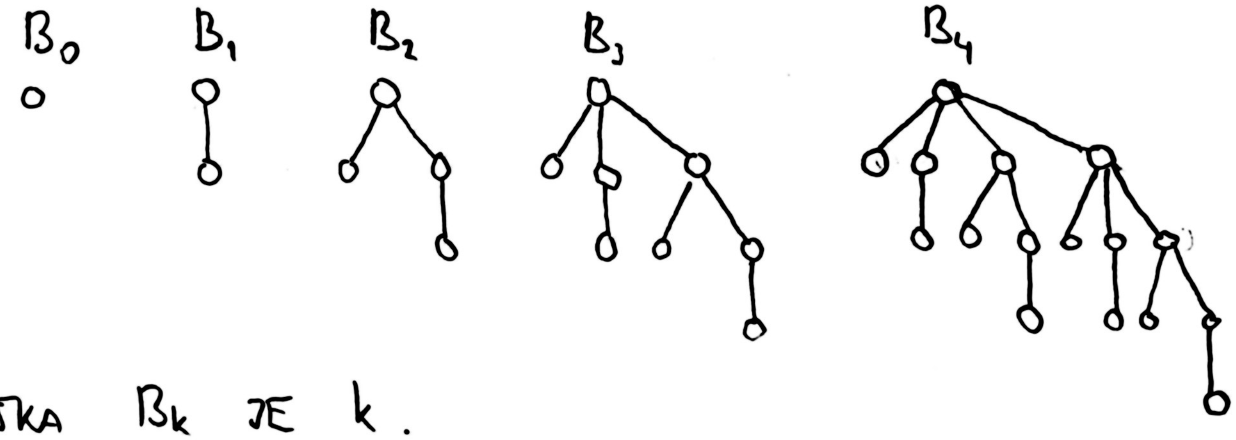
$\forall j$ $(\neg x_{1,j,k})$ KEĎ KACHLÍK TYPU k
NEMÔŽE BYŤ NA POZÍCII $(1,j)$

PODOBNE OSTATNÉ OKRAJE (6), (7), (8).

ZREJME VEĽKOSŤ VÝSLEDNÉHO SAT JE $p(n,k)$ ...

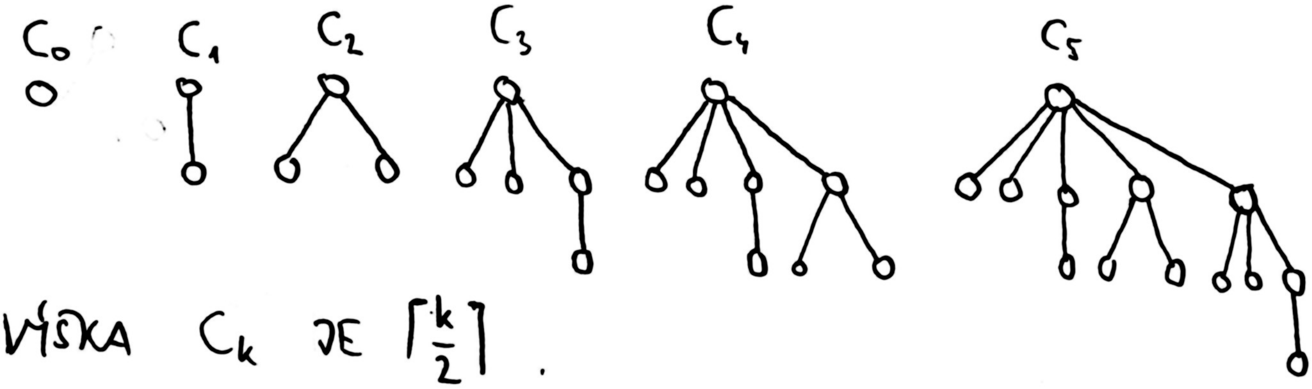
27. 11. 2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOSŤ I



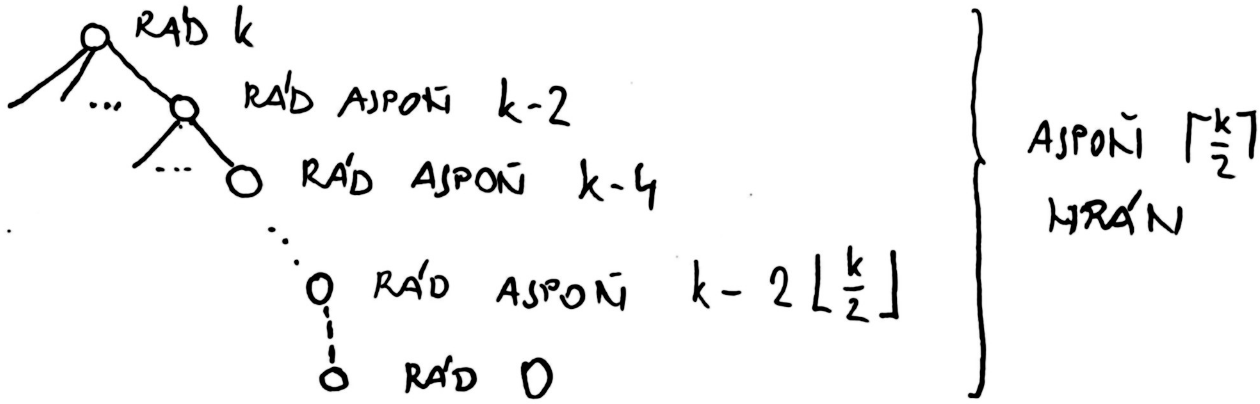
VÝŠKA B_k JE k.

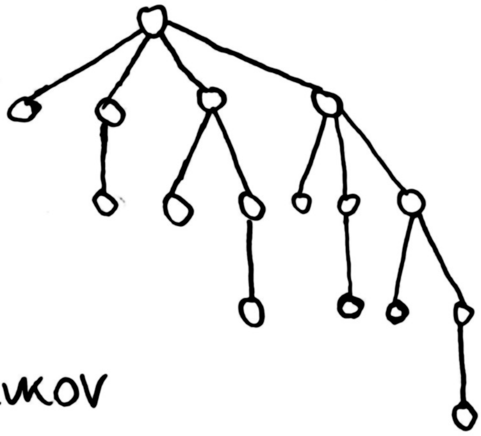
PRÍKLAD: SPOČÍTAJTE HORNÝ A DOLNÝ ODHAD PRE VÝŠKU LEGÁLNEHO STROMU RÁDU k VO FIB. HALDE.



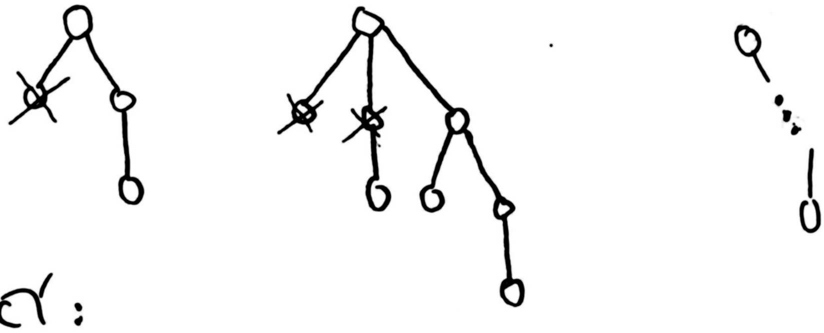
VÝŠKA C_k JE $\lceil \frac{k}{2} \rceil$.

VO VŠEOBECNOSTI





AK MÁME n PRVKOV



STAČÍ:

→ 3 INSERTY (STÁLE NIŽŠIE A NIŽŠIE KĽÚČE)

EXTRACT-MIN

DECREASE-KEY

PRÍKLAD: MÁME BLACK-BOX NA RIEŠENIE SAT-u, KTORÝ ODPOVEDÁ ÁNO / NIE.

SKONŠTRUUJTE ALGORITMUS, KT. V POLYNOMIÁLNOM ČASE VYDÁ SPĹŇAJÚCE OHODNOTENIE VSTUPNEJ FORMULE, POKIAĽ EXISTUJE.

MÁME φ, PREMENNÉ $x_1, \dots, x_n$. SKÚSIME φ. AK ÁNO $\Rightarrow$

SKÚSIME $x_1 \wedge \varphi$ ⟨ ÁNO SKÚŠAME $x_1 \wedge x_2 \wedge \varphi$. / NIE SKÚŠAME $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \varphi$ ... ATĎ. $O(n)$

27.11.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN 062 SLOŽITOST I

PRÍKLAD: TAUT

ZADANIE: FORMULA φ NA PREM. $x_1, \ldots, x_n$
VYTVORENÁ POMOCOU $\neg, \wedge, \vee, (,)$

OTÁZKA: JE φ TAUTOLÓGIA ?

(a) TAUT $\in$ NP ?
(b) TAUT $\in$ co-NP ?
(c) ZLOŽITOSŤ TAUT, KEĎ JE φ CNF
(d) ZLOŽITOSŤ TAUT, KEĎ JE φ DNF

(b) CERTIFIKÁT: OHODNOTENIE, KDE φ NIE JE SPLNENÁ
$\Rightarrow$ TAUT $\in$ co-NP

(c) AK φ OBSAHUJE ASPOŇ 1 KLAUZULU C (V KTOREJ SA NENACHÁDZA PREMENNÁ $x \in C$ TAKÁ, ŽE $\neg x \in C$)
$\Rightarrow$ MOŽNO OHODNOTIŤ PREMENNÉ TAK, ABY $p(C) = 0 \Rightarrow p(\varphi) = 0$.
$\Rightarrow$ POLYNOMIÁLNA ZLOŽITOSŤ

(d) φ JE TAUTOLÓGIA $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ JE NESPLNITEĽNÁ

VEZMIME ĽUBOVOĽNÚ ψ V CNF
ψ JE NESPLNITEĽNÁ $\Leftrightarrow$ $\neg\psi$ JE TAUT.
A NAVYŠE $\neg\psi$ JE V DNF
$\Rightarrow$ ZLOŽITOSŤ: co-NP-ŤAŽKÁ, DOKONCA co-NP-ÚPLNÁ

$TAUT_{DNF}$ JE CO-NP-ŤAŽKÁ ≡

≡ $\underbrace{\neg TAUT_{DNF} \text{ JE NP-ŤAŽKÁ}}$

FALSIFIKOVANOSŤ DNF

SAT PRE CNF $\propto$ FALS PRE DNF

φ V CNF JE SPLNITEĽNÁ $\Leftrightarrow$

$\neg\varphi$ V DNF JE SFALZIFIKOVATEĽNÁ

(a) AK $NP \neq co\text{-}NP$, POTOM $TAUT \notin NP$.

PREDPOKLADAJME, ŽE $TAUT \in NP$ (1)

VIEME, ŽE TAUT JE CO-NP-ÚPLNÝ (2)

$\Rightarrow$ $co\text{-}NP \subseteq NP$, SPOR ↯ (ZO SYMETRIE)

NECH $X \in co\text{-}NP$

DOKÁŽME, ŽE $X \in NP$:

Z (2) VIEME, ŽE $\exists$ POLYNOMIÁLNY DTS TRANSDUCER M_1 VYČÍSĽUJÚCI FUNKCIU f TAKÚ, ŽE $z \in L(X)_N \Leftrightarrow f(z) \in L(TAUT)_N$.

⇝ DOKÁŽEME DETERMINISTICKY PREVIESŤ: $z \in L(X)_Y$ NA $L(TAUT)_Y$

PREDPOKLADAJME, ŽE PRÍSLUŠNOSŤ DO $L(X)$ A $L(TAUT)$ VIEME ROZPOZNAŤ DET. V POLYNOMIÁLNOM ČASE.

$\Rightarrow$ MÔŽME PREDPOKLADAŤ, ŽE $z \in L(X)_Y \Leftrightarrow f(z) \in L(TAUT)_Y$.

Z (1) PLYNIE, ŽE $\exists$ POLYN. NTS M_2 ROZPOZNÁVAJÚCI $L(TAUT)_Y$. $M_1 \cdot M_2$ JE POL. NTS NA $L(X)_Y$. □

03. 12. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

3-SAT JE NP-ÚPLNÝ

ZREJME 3-SAT $\in$ NP

CHCEME DOKÁZAŤ SAT $\propto$ 3-SAT

$\mathcal{F} = \bigwedge_{i=1}^{\ell} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} a_{ij} \right)$ JE ZADANIE SAT-U

SKONŠTRUUJEME KUBICKÚ CNF $\mathcal{F}'$ TAKÚ, ŽE $\mathcal{F}'$ JE SPLNITEĽNÁ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ JE SPLNITEĽNÁ

PRE KAŽDÚ KLAUZULU $C_i = \bigvee_{j=1}^{k_i} a_{ij}$ Z $\mathcal{F}$ PRE KTORÚ $k_i > 3$ SKONŠTRUUJEME CNF TÝMTO SPÔSOBOM:

$$\mathcal{F}_i = (a_{i1} \vee a_{i2} \vee y_{i1}) \wedge (\neg y_{i1} \vee a_{i3} \vee y_{i2}) \wedge \dots$$
$$\dots \wedge (\neg y_{i,k_i-4} \vee a_{i,k_i-2} \vee y_{i,k_i-3}) \wedge$$
$$\wedge (\neg y_{i,k_i-3} \vee a_{i,k_i-1} \vee a_{i,k_i})$$

$\mathcal{F}'$ VZNIKNE Z $\mathcal{F}$ NAHRADENÍM KAŽDEJ C_i S $k_i > 3$ S PRÍSLUŠNOU PODFORMULOU.

(a) AK $\mathcal{F}$ JE SPLNITEĽNÁ $\Rightarrow$ V KAŽDEJ C_i EXISTUJE a_{ij}, KTORÉ JE SPLNENÉ

$\mathcal{F}_i$ SPLNÍME TÝMTO OHODNOTENÍM NOVÝCH PREMENNÝCH:

$y_{it} = 1$ PRE $1 \leq t \leq j-2$

$y_{it} = 0$ PRE $j-1 \leq t \leq k_i-3$

(b) NECH $\mathcal{F}'$ JE SPLNENÁ. TVRDÍM, ŽE REŠTRIKCIA PRÍSLUŠNÉHO SPLŇUJÚCEHO PRAVD. OHODNOTENIA NA „STARÉ PREMENNÉ" SPĹŇA $\mathcal{F}$.

ZREJME NEMÔŽE NASTAŤ $a_{ij} = \text{false}$ PRE $\forall j$.

POLYNOMIALITA PREVODU: VEĽKOSŤ $\mathcal{F}_i$ JE $3|C_i| - 6$.

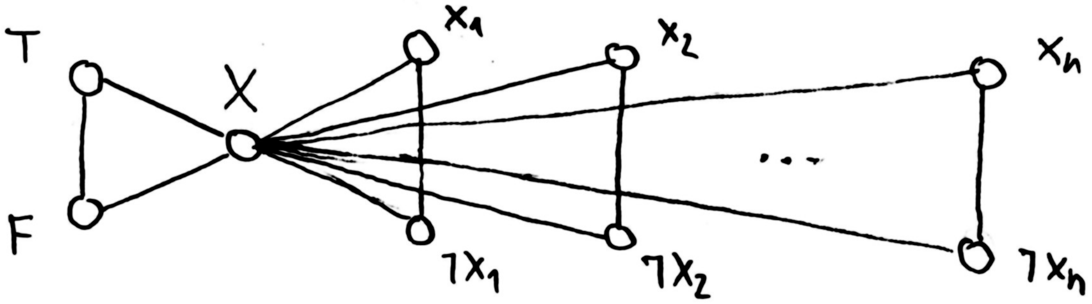
3 - GRAPH-COLOURING JE NP-ÚPLNÝ

$(x_1 \vee x_2) \to$
$(x_1 \vee x_2 \vee p) \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee \neg p)$
$(x_1) \to \ldots$

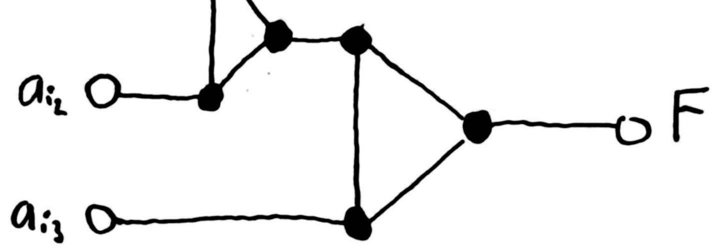
3-SAT $\propto$ 3-GRAPH COLOURING

MÁME $\mathcal{F} = \bigwedge_{i=1}^{l} (a_{i1} \vee a_{i2} \vee a_{i3})$

SKONŠTRUUJEME GRAF G $\hookrightarrow$ PREMENNÉ $x_1, \ldots, x_n$



KU KAŽDEJ $C_i = (a_{i1} \vee a_{i2} \vee a_{i3})$ PRIDÁM NASLEDUJÚCI PODGRAF



MOŽNO OFARBIŤ <u>VŽDY</u> S VÝNIMKOU: $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = F$

$|G| = 2n + 3 + 6l$, $|\mathcal{F}| = 3l$, $n \leq 3l \Rightarrow |G| \leq 12l + 3$

03.12.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

CLIQUE JE NP-ÚPLNÝ

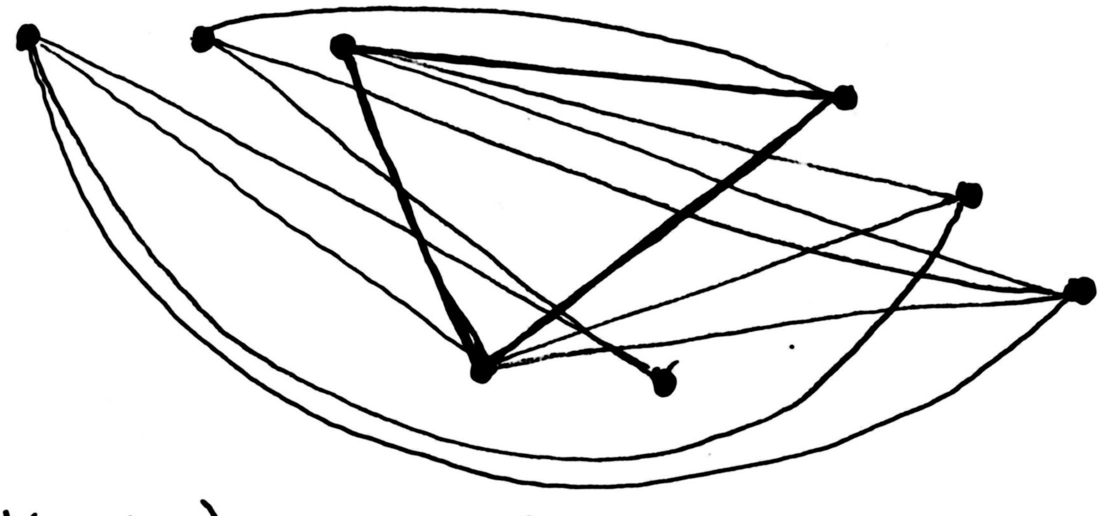
ZADANIE: NEORIENT. $G=(V,E)$, PRIR. ČÍSLO k
OTÁZKA: K_k JE PODGRAF G

SAT $\propto$ CLIQUE

NECH $\mathcal{F} = \bigwedge_{i=1}^{\ell} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} a_{ij} \right)$

PŘÍKLAD

$\mathcal{F} = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$



$G = (V_{\mathcal{F}}, E_{\mathcal{F}})$, $V_{\mathcal{F}} = \{ a_{ij} \mid 1 \le i \le \ell, 1 \le j \le k_i \}$

$a_{ij}\, a_{i'j'} \in E_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow i \neq i' \wedge a_{ij} \neq \neg a_{i'j'}$

$k := \ell$

$\mathcal{F}$ JE SPLNITEĽNÁ $\Leftrightarrow$ V G EXISTUJE KLIKA VEĽKOSTI ℓ.

DÔKAZ: ZREJMÝ

$|\mathcal{F}| = |V_{\mathcal{F}}|$

INDEPENDENT SET JE NP-ÚPLNÝ

$G=(V,E)$, PRIRODZENÉ ČÍSLO q

VERTEX-COVER JE NP-ÚPLNÝ

$G=(V,E)$, PRIRODZENÉ ČÍSLO r

OTÁZKA: EXISTUJE $V' \subseteq V$, $|V'|=r$,
KAŽDÁ HRANA MÁ ASPOŇ 1 VRCHOL VO V'.

IND.-SET $\propto$ VER.-COVER

MÁME $G=(V,E)$, q

STAČÍ VZIAŤ $G'=G$, $r=|V|-q$.

IDEA: DOPLNOK IND.-SET JE VER.-COVER A NAOPAK

HAMILTON-CYCLE JE NP-ÚPLNÝ

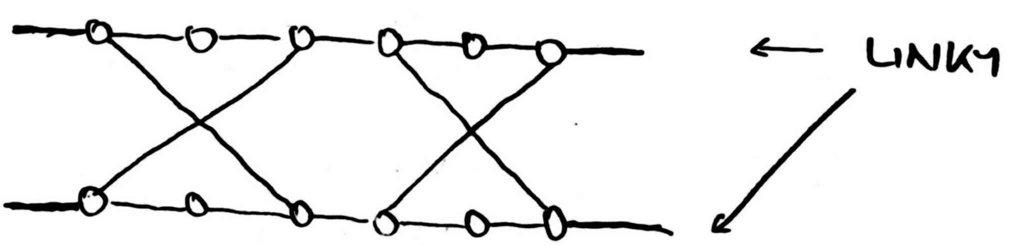
VERTEX-COVER $\propto$ HAMILTON-CYCLE

BÚNO G NEMÁ IZOLOV. VRCHOLY!

MÁME $G=(V,E)$, r ZADANIE V-C.

SKONŠTRUUJEME $G'=(V',E')$ ZADANIE HAM.-CYC.

GRAF „PLOT"

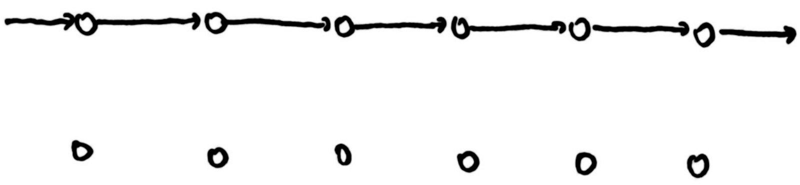


VETA: KEĎ DO PLOTU VLEZIE HAM. KRUŽNICA VĽAVO NAHORE, TAK VYLEZIE VPRAVO NAHORE A SÚ MOŽNÉ IBA 2 PRIECHODY:

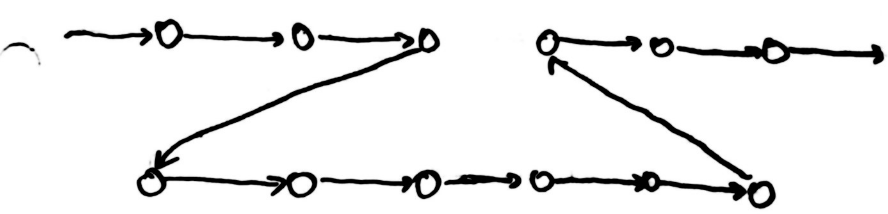
03.12.2008
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

(a) ČIASTOČNÝ:

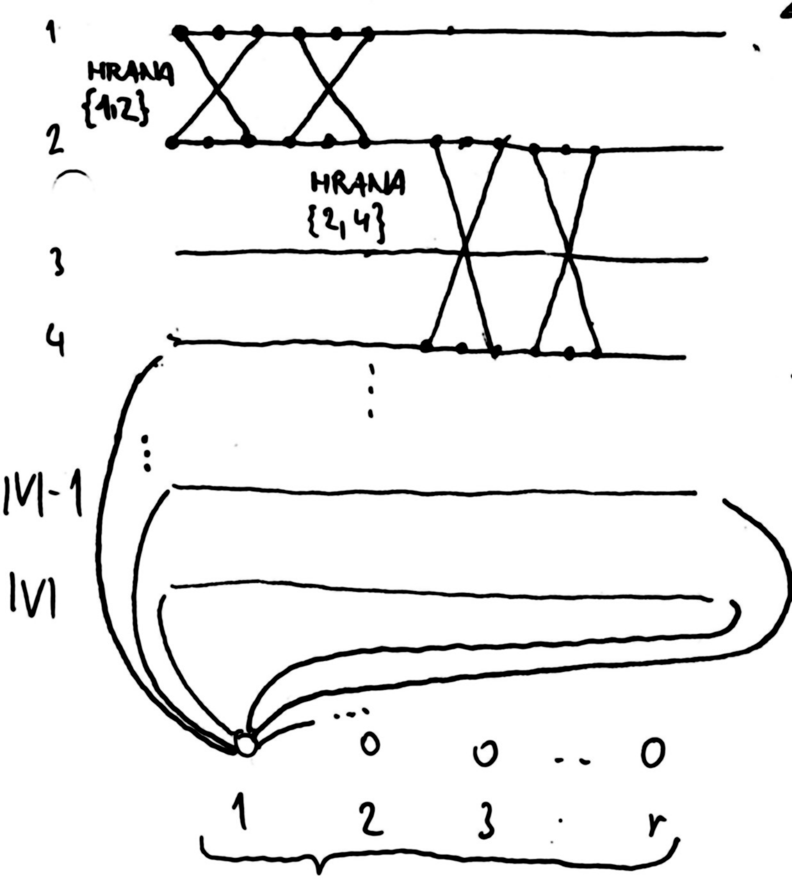


(b) ÚPLNÝ:



TREBA ROZOBRAŤ NIEKOĽKO PRÍPADOV.

AKO VYZERÁ G': |V| LINIEK



G' MÁ HAM.-CYC. $\iff$ G MÁ VER.-COV. r.

$\Leftarrow$) VER.-COVER NÁM VYBERIE r LINIEK

1 → LINKA 1 → 2 → LINKA 2 → ...

... r → LINKA r → 1

KEĎ PRECHÁDZAME PLOTOM,

- ČIAST. PR. - DRUHÝ VRCHOL JE VYBRANÝ
- ÚPLNÝ PR. - DRUHÝ VRCHOL NIE JE VYB.

$\Rightarrow$) POZREM NA VRCHOL 1 A POSTUPUJEM PODOBNE ...

$|G'| = P(|G|)$

KAŽDÝ VRCHOL SPOJENÝ SO ZAČIATKOM A KONCOM KAŽDEJ LINKY !!

10. 12. 2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

OBCHODNÝ CESTUJÚCI TSP JE NP-ÚPLNÝ.

DANÝ $G=(V,E)$, $w: E \to \mathbb{Z}_0^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$

OTÁZKA: EXISTUJE V G HAMILTONOVSKÁ KRUŽNICA S CELKOVOU VÁHOU NAJVIAC k?

HAM-CYCLE $\propto$ TSP

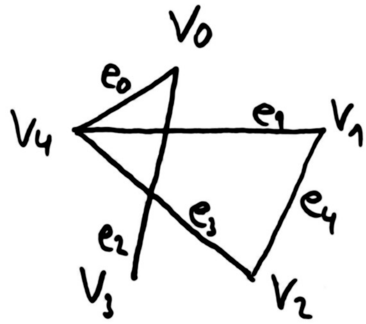
$$w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E \\ 2 & e \notin E \end{cases} \qquad k = |V|$$

SUBSET-SUM JE NP-ÚPLNÝ.

ZADANIE: $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}^+$

OTÁZKA: EXISTUJE $S \subseteq \{1, \dots, n\}$: $\sum_{i \in S} a_i = b$?

VERTEX-COVER $\propto$ SUBSET-SUM



$G=(V,E)$, k

$n=|V|$, $m=|E|$

INCIDENČNÁ MATICA:

$$\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 & e_0 & \\
\hline
v_0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x_0 \\
v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\
v_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & x_{n-1} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{m-1} \\
\hline
 & k & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & b
\end{array}$$

MÁME 4-KOVÚ SÚSTAVU!!

MÁME INCIDENČNÚ MATICU D_G

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{KED } v_i \in e_j \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

$x_i = 4^m + \sum_{j=0}^{m-1} d_{ij} \cdot 4^j$ PRE $i = 0, \dots, n-1$

$y_j = 4^j$ PRE $j = 0, \dots, m-1$

$b = k \cdot 4^m + \sum_{j=0}^{m-1} 2 \cdot 4^j$

POLYNOMIALITA: MÁM GRAF S n VRCHOLMI A m HRANAMI

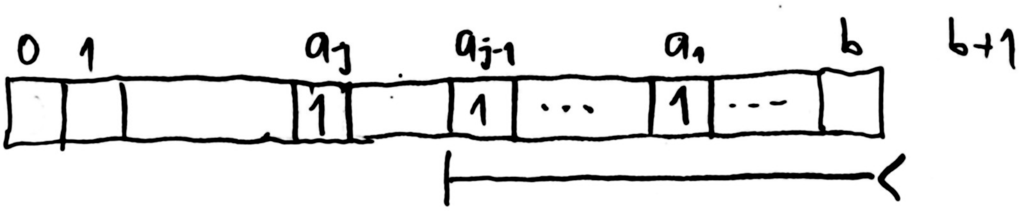
SKONŠTRUUJEM ČÍSLA OBSAHUJÚCE CELKOM $(n+m+1)(m+1)$ CIFIER

k JE SÚČASŤOU ZADANIA VERTEX-COVERU

ALGORITMUS PRE SUBSET-SUM

NECH $a_1 \geq \dots \geq a_n$, A JE POLE DĹŽKY b

```
for j ← 1 to b do  A[j] ← 0 ,  a0 ← b+1
for i ← 1 to n do
    A[ai] ← 1
    for j ← b downto a(i-1) do
        if (A[j] = 1  &  j + ai ≤ b) then
            A[j + ai] ← 1
```



10.12.2008 we
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

VETA: PO i-TOM PRIECHODE HLAVNÝM CYKLOM OBSAHUJE POLE A JEDNIČKY PRÁVE U TÝCH INDEXOV, KT. ZODPOVEDAJÚ SÚČTOM ∀ PODMNOŽÍN $\neq \emptyset$ MNOŽINY $\{a_1, \dots, a_i\}$, KT. SÚ $\leq b$

(a) $i = 1$ ✓

(b) VEZMIME ĽUBOVOĽNÚ NEPRÁZDNU PODMNOŽINU X MNOŽINY $\{1, \dots, i\}$, $\sum_{j \in X} a_j \leq b$.

(1) $i \notin X$, POTOM TVRDENIE PLATÍ PODĽA IND. PREDP.

(2) $i \in X$, PODĽA IND. PREDPOKLADU AK $X \setminus \{i\} \neq \emptyset$, POTOM BUDE VO VNORENOM for-CYKLE SPRACOVANÉ $A[r]$, KDE $r = \sum_{j \in X \setminus \{i\}} a_j$ A BUDE K NEMU PRIPOČÍTANÉ a_i TJ. $A[r + a_i] \leftarrow 1$

AK $X = \{i\}$, POTOM $A[a_i] \leftarrow 1$ JE NASTAVENÉ ZVLÁŠŤ.

ŠPECIÁLNE SI TREBA VŠIMNÚŤ, ŽE V PODMIENKE $A[j] = 1$ BOLO $A[j]$ NASTAVENÉ V PREDCHÁDZAJÚCEJ ITERÁCII, TJ. V POLI A SA NEMÔŽU OBJAVIŤ FALOŠNÉ JEDNOTKY.

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ: $O(nb)$

EXPONENCIÁLNA ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ VZHĽADOM K BINÁRNE KÓDOVANÉMU VSTUPU.

PSEUDOPOLYNOMIÁLNE ALGORITMY

ROZHODOVACÍ PROBLÉM Q A JEHO ZADANIE X

KÓD(X) = DĹŽKA ZÁPISU INŠTANCIE X V BIN. KÓDOVANÍ

MAX(X) = NAJVÄČŠIE ČÍSLO V X (VEĽKOSŤ ČÍSLA, NIE ZÁPISU)

DEFINÍCIA: ALGORITMUS RIEŠIACI Q SA NAZÝVA PSEUDOPOLYNOMIÁLNY $\Leftrightarrow$ JEHO ZLOŽITOSŤ JE

$$O\left(p\left(\text{kód}(x), \max(X)\right)\right)$$

POZNÁMKA: KAŽDÝ POLYN. ALG. JE TAKTIEŽ PSEUDOPOL.

AK PRE KAŽDÚ INŠTANCIU X: $\max(X) \leq p(\text{kód}(x))$

$\Rightarrow$ POTOM POJMY POL. A PSEUDOPOL. SPLÝVAJÚ

(NAPR. VERTEX-COVER - JEDINÉ ČÍSLA SÚ LABELY $1, \dots, n$

PROBLÉMY, KDE TO NENASTÁVA $\rightarrow$ <u>ČÍSELNÉ PROBLÉMY</u>

VETA: NECH Q JE NP-ÚPLNÝ PROBLÉM, KTORÝ NIE JE ČÍSELNÝ. AK $P \neq NP$, POTOM Q NEMÔŽE BYŤ PSEUDOPOLYNOMIÁLNY.

TRIVIÁLNE

JE KAŽDÝ ČÍSELNÝ PROBLÉM RIEŠ. PSEUDOPOL. ALG.?

NIE $\rightarrow$ SILNO NP-ÚPLNÉ PROBLÉMY

10.12.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

Q_p OZNAČUJE MNOŽINU INŠTANCIÍ PROB. Q PRE KTORÉ $\max(X) \leq p(\text{kód}(X))$

ROZHODOVACÍ PROB. Q SA NAZÝVA SILNO NP-ÚPLNÝ, AK $Q \in NP$ A EXISTUJE POL. p TAKÝ, ŽE PODPROBLÉM Q_p JE NP-ÚPLNÝ.

KEĎ A JE PSEUDOPOL. ALGORITMUS RIEŠACI Q, POTOM PRE KAŽDÝ POL. p JE A POLYN. ALG. RIEŠACI Q_p.

NECH Q JE SILNE NP-ÚPLNÝ PROBLÉM. KEĎ $P \neq NP$, POTOM Q NEMÔŽE BYŤ RIEŠENÝ PSEUDOPOL. ALGORITMOM.

MNOŽINA $\forall$ ZADANÍ TSP JE ČÍSELNÝ PROBLÉM ALE STAČÍ VEĽKOSŤ w OHRANIČIŤ ZHORA 2 A MÁME NP-ÚPLNÝ PROBLÉM.

$\Rightarrow$ NIE JE NÁDEJ NA PSEUDOPOL. ALGORITMUS NA RIEŠENIE TSP.

1/1

11.12.2008 Th
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOSŤ I

SUBSET-SUM

ZADANIE: $a_1, \dots, a_n, b$
OTÁZKA: $\exists S \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in S} a_i = b$

LOUP (PROBLÉM 2 LÚPEŽNÍKOV)

ZADANIE: $p_1, \dots, p_\ell$
OTÁZKA: $\exists S \subseteq \{1, \dots, \ell\} : \sum_{i \in S} p_i = \sum_{i \notin S} p_i$

JE TO ŠPECIÁLNY PRÍPAD SUBSET-SUM, KDE $b = \frac{1}{2} \sum p_i$

DOKÁŽME, ŽE LOUP JE NP-ÚPLNÝ.

SUBSET-SUM $\propto$ LOUP

(a) $A = \sum a_i$, PRIDÁME $a_{n+1} = 2b - A$
(b) AK $2b - A < 0$, POTOM POLOŽME $b' = A - b$
A PRIDÁME PRVOK $2b' - A = A - 2b > 0$

VYBERIEME KôPKU, KT. NEOBSAHUJE a_{n+1}
(a) MÁ SÚČET b
(b) MÁ SÚČET $A - b$ $\Rightarrow$ DOPLNOK MÁ SÚČET b

PRÍKLAD: NEORIENT. GRAF $G = (V, E)$, $x, y \in V$
$w: E \to \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$

OTÁZKA: $\exists$ <u>CESTA</u> $x \rightsquigarrow y$ VÁHY $\leq k$

PROBLÉM JE EKVIVALENTNÝ S ... $\geq k$

MOŽNO NAŇ REDUKOVAŤ HAM-CYCLE
$w = 1$, PRE KAŽDÚ $e = \{x, y\}$?$\exists$ CESTA $x \rightsquigarrow y$, $k = |V| - 1$

LEPŠIE RIEŠENIE: VEZMEM ĽUBOVOĽNÝ VRCHOL

0-1 INTEGER PROGRAMMING

ZADANIE: $\mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{Z}^{m}$

OTÁZKA: $\exists\, x \in \{0,1\}^n : \mathbb{A}x \underset{=}{\leq} \mathbb{b}$

SUBSET-SUM $\propto$ 0-1 IP NP-ÚPLNOSŤ

$$\begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_n \\ -a_1, & \dots, & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

SILNÁ NP-ÚPLNOSŤ

$x \vee y \vee z$ $\qquad$ $\neg x \vee y \vee z$

$x + y + z \geq 1$ $\qquad$ $(1-x) + y + z \geq 1$

$\neg x \vee y \vee \neg z$

$(1-x) + y + (1-z) \geq 1$

$$\boxed{\text{NAMIESTO } \mathbb{Z} \text{ SA STAČÍ OBMEDZIŤ NA } \{-2,-1,0,1,2\}}$$

SAT JE SILNO NP-ÚPLNÝ.

PRÍKLAD: IZOMORFIZMUS PODGRAFOV JE NP-ÚPLNÝ

ZADANIE: G_1, G_2, OTÁZKA: $G_1 \simeq G_2[A]$ / $G_1 \subseteq G_2$

17.12.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

ZÁPOČTOVÁ PÍSOMKA : POSLEDNÁ STREDA 15:40 S3 !

3-PARTITION (ČISTO ČÍSELNÝ PROBLÉM)

$a_1, \dots, a_{3m}, b \in \mathbb{N}$

$\forall j \; \frac{1}{4} b < a_j < \frac{1}{2} b, \quad \sum_{j=1}^{3m} a_j = mb$

OTÁZKA: EXISTUJE DISJUNKTNÉ ROZDELENIE $S_1, \dots, S_m$ MN. $\{1, \dots, 3m\}$ TAKÉ, ŽE $\forall i : \sum_{j \in S_i} a_j = b$.

S_i MAJÚ PRÁVE 3 PRVKY

3-PARTITION JE SILNO NP-ÚPLNÝ
REDUKUJE SA Z 3-DIMENZIONÁLNEHO PÁROVANIA

POČETNÉ ÚLOHY

ROZHODOVACIE PROBLÉMY → ÁNO/NIE
POČETNÉ PROBLÉMY → POČET RIEŠENÍ

Σ (ABECEDA NA KÓDOVANIE PROBLÉMU),
Γ (ABECEDA NA KÓDOVANIE CERTIFIKÁTU)

DEF.: $w : \Sigma^* \to \mathcal{P}(\Gamma^*)$ SA NAZÝVA <u>CERTIFIKAČNÁ FUNKCIA</u>
$w(x)$ JE <u>CERTIFIKÁT</u> PRE INŠTANCIU x

PRÍKLAD: <u>SAT</u> | <u>KLIKA</u>

SAT	KLIKA
Σ ABECEDA NA KÓDOVANIE CNF	KÓDUJE GRAF A ČÍSLO $\in \mathbb{N}$
Γ ABECEDA NA PRAV. OHODN.	KÓDUJE MNOŽINU VRCHOLOV
$w(x) = \{ y \mid y \text{ SPĹŇA } x \}$	$w(x) = \{ y \mid y \text{ JE ÚPLNÝ PODGRAF} \}$ ...

ROZHODOVACÍ PROBLÉM A_w JE DEF. AKO

$$A_w = \{ x \in \Sigma^* \mid w(x) \neq \emptyset \}$$

DEF. <u>TRIEDA #P</u> JE MN. CERTIFIKAČNÝCH FUNKCIÍ w TAKÝCH, ŽE:

(i) $\exists$ POL. ALGORITMUS (V $|x|$ A $|y|$), KTORÝ PRE $\forall x \in \Sigma^*, y \in \Gamma^*$ OVERÍ, ČI $y \in w(x)$

(ii) $\exists$ POL. p TAKÝ, ŽE $\forall y \in w(x)$: $|y| \leq p(|x|)$.
(P MÔŽE ZÁVISIEŤ OD w)

VETA (VZŤAH #P A NP)

(i) $w \in \#P \Rightarrow A_w \in NP$

(ii) $A \in NP \Rightarrow \exists w \in \#P : A = A_w$.

DÔKAZ (i) CHCEME NÁJSŤ NTS M ROZPOZNÁVAJÚCI JAZYK A_w V POL. ČASE.

NEDETERMINISTICKÁ ČASŤ M JE UHÁDNUTIE y

DETERMINISTICKÁ ČASŤ M JE OVERENIE $y \in w(x)$

(ii) NECH M JE NTS PRIJÍMAJÚCI A V POLYNOMIÁLNOM ČASE: $\forall x \in A$:

M PRIJME x V ČASE NAJVIAC $p(|x|)$

$w(x) = \{ y \in \Gamma^* \mid M$ PRIJME x PO PRIJÍMAJÚCEJ CESTE S KÓDOM y DĹŽKY NAJVIAC $p(|x|) \}$

CHCEME UKÁZAŤ, ŽE $w \in \#P$

VLASTNOSŤ (ii) PLYNIE Z DEFINÍCIE

VLASTNOSŤ (i): (1) NAJSKÔR ZISTÍME, ČI $|y| \leq p(|x|)$

(2) SIMULUJEME M, POUŽÍVAME y AKO KÓD CESTY

17.12.2008 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

VETA: AK $w \in \#P$ A PRE $\forall x \in \Sigma^*$ MOŽNO V POL. ČASE SPOČÍTAŤ $|w(x)|$, POTOM MOŽNO PRE $\forall x \in \Sigma^*$ V POL. ČASE ROZHODNÚŤ, ČI $x \in A_w$, A TIEŽ ČI $x \in \overline{A_w}$ (T.J. VYRIEŠIŤ PRÍSLUŠNÝ PROBLÉM Z NP, RESP. CO-NP)

POČETNÉ PROBLÉMY #SAT, #CLIQUE, ... SÚ ASPOŇ TAK ŤAŽKÉ, AKO SAT, CLIQUE, ...

POLYNOMIÁLNA TRANSF., ÚPLNOSŤ ÚLOH

NECH $w: \Sigma^* \to \mathcal{P}(\Gamma^*)$, $v \in \Pi^* \to \mathcal{P}(\Delta^*)$ SÚ Z #P

POL. REDUKCIA Z w NA v JE DVOJICA FCIÍ VYČÍSLITEĽNÝCH V POL. ČASE:

$\sigma: \Sigma^* \to \Pi^*$, $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

TAKÝCH, ŽE $\forall x \in \Sigma^*: |w(x)| = \tau(|v(\sigma(x))|)$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^* \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "w"] & \Pi^* \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{P}(\Gamma^*) & \mathcal{P}(\Delta^*) \arrow[l, dashed, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

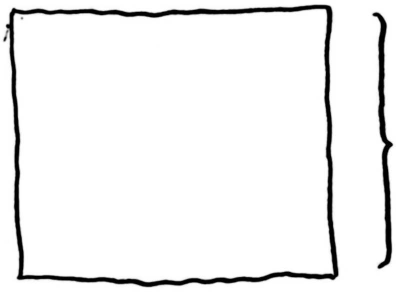
PRE $\tau = id_{\mathbb{N}}$ NAZÝVAME REDUKCIU ŠETRNÚ.

DEF. CERT. FCIA. v JE #P-ÚPLNÁ AK
(i) $v \in \#P$
(ii) $\forall w \in \#P$ EXISTUJE POL. REDUKCIA Z w NA v.

VETA: #KACHL JE #P-ÚPLNÁ ÚLOHA

NTS M, POLYNÓM p, VSTUP x

<u>COOK-LEVIN</u>



$p(|x|)$

MÁME BIJEKCIU:

PRIJÍMAJÚCE VÝPOČTY DĹŽKY NAJVIAC $p(|x|) \xleftrightarrow{1-1}$
LEGÁLNE VYKACHLÍKOVANIE SIETE

ZREJME $\#KACHL \in \#P$

NECH $w \in \#P$ JE ĽUBOVOĽNÁ. DOKÁŽME, ŽE
EXISTUJE POLYNOMIÁLNA RED. Z w NA $\#KACHL$.

DÔKAZ: $w \in \#P \Rightarrow \exists$ DTS M, KTORÝ V POL. $(|y| \leq p(|x|))$
ČASE PRE KAŽDÉ $x \in \Sigma^*$, $y \in \Gamma^*$ OVERÍ, ČI $y \in w(x)$.
$\Rightarrow \exists$ NTS M' PRIJÍMAJÚCI $x \in \Sigma^* \Leftrightarrow w(x) \neq \emptyset$
(M' ROZPOZNÁVA A_w)
A TAKÝ, ŽE $y \in w(x) \xleftrightarrow{1-1}$ PRIJÍMAJÚCE VÝPOČTY M' <u>DĹŽKY $\leq p(|x|)$</u>.

Z DÔKAZU COOK-LEVINOVEJ VETY VIEME, ŽE
PRE KAŽDÝ NTS M' $\exists$ INŠTANCIA t
PROBLÉMU KACHL TAKÁ, ŽE M' PRIJÍMA x
$\Leftrightarrow$ t JE LEGÁLNE VYKACHLÍČKOVATEĽNÁ.
A NAVIAC PRIJÍMAJÚCE VÝPOČTY DĹŽKY $\leq p(|x|) \xleftrightarrow{1-1}$
LEGÁLNE VYKACHLÍČKOVANIE INŠTANCIE t.
PRÍSLUŠNÁ FCIA $\sigma: A_w \to KACHL$ DEFINUJE
ŠETRNÚ REDUKCIU w NA $\#KACHL$.

07.01.2009 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

VETA: #SAT JE #P-ÚPLNÁ ÚLOHA.

DÔKAZ: PRÍSLUŠNÁ TRANSFORMÁCIA KACHL → SAT DEFINUJE ŠETRNÚ REDUKCIU.

VETA: #3-SAT, #CLIQUE, #SP SÚ #P-ÚPLNÉ.

DÔKAZ: MIERNYMI ÚPRAVAMI TRANSFORMÁCII POUŽITÝCH K DÔKAZOM NP-ÚPLNOSTI MOŽNO ZÍSKAŤ ŠETRNÉ REDUKCIE.

VIEME, ŽE: PRE $w \in \#P$ SPOČÍTAŤ $|w(x)|$ JE ASPOŇ TAK ŤAŽKÉ AKO ROZHODNÚŤ, ČI $x \in A_w$.

OTÁZKA: EXISTUJE $w \in \#P$, KDE ROZHODNÚŤ $x \in A_w$ JE ĽAHKÉ, ALE SPOČÍTAŤ $|w(x)|$ JE ŤAŽKÉ?

NECH $G=(U \cup V, E)$ JE BIPARTITNÝ GRAF KÓDOVANÝ REŤAZCOM x A NECH $y \in w(x) \Leftrightarrow y$ KÓDUJE PERFEKTNÉ PÁROVANIE V G. POTOM

$$A_w = \{ x \mid V\ x \text{ EXISTUJE PERF. PÁR.} \}$$

A PLATÍ:

(i) ROZHODNÚŤ $x \in A_w$ MOŽNO V POL. ČASE

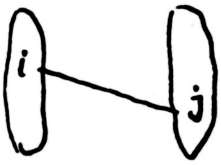
(ii) SPOČÍTAŤ $|w(x)|$ JE #P-ÚPLNÁ ÚLOHA

DEF. <u>PERMANENT</u> MATICE $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE $\mathrm{Perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

ÚLOHA SPOČÍTAŤ PERMANENT MATICE S PRVKAMI 0 A 1 JE #P-ÚPLNÁ.

DEFINUJME BIPART. GRAF G, KDE: $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \iff (i,j) \in E \\ 0 \iff (i,j) \notin E \end{cases}$$



2n VRCHOLOV

ZREJME $\mathrm{Perm}(A)$ JE POČET PERF. PÁROVANÍ G.

APROXIMAČNÉ ALGORITMY

NA RIEŠENIE "VEĽKÝCH" INŠTANCIÍ NP-ŤAŽKÝCH ÚL. (OPTIM. PROBLÉMOV)

(1) VRACIA (VÄČŠINOU) SUBOPTIMÁLNE RIEŠENIE
(2) DÁVA ODHAD KVALITY VRÁTENÉHO RIEŠENIA
(3) BEŽÍ V POLYNOMIÁLNOM ČASE

ODHAD KVALITY

OPT = OPTIMÁLNE RIEŠENIE
APR = RIEŠENIE APR. ALGORITMU
$f(Z)$ = HODNOTA RIEŠENIA Z (≥ 0)

DEF. APR. ALG. RIEŠI ÚLOHU X S <u>POMEROVOU CHYBOU</u> $r(n)$, KEĎ:

$$\max \{ f(APR)/f(OPT),\ f(OPT)/f(APR) \} \leq r(n)$$

S <u>RELATÍVNOU CHYBOU</u> $e(n)$, KEĎ:

$$|f(APR) - f(OPT)| / f(OPT) \leq e(n).$$

07.01.2009 We
PETER ČERNÝ

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

$$\boxed{e(n) \rightsquigarrow 1 - \frac{1}{r(n)}}$$

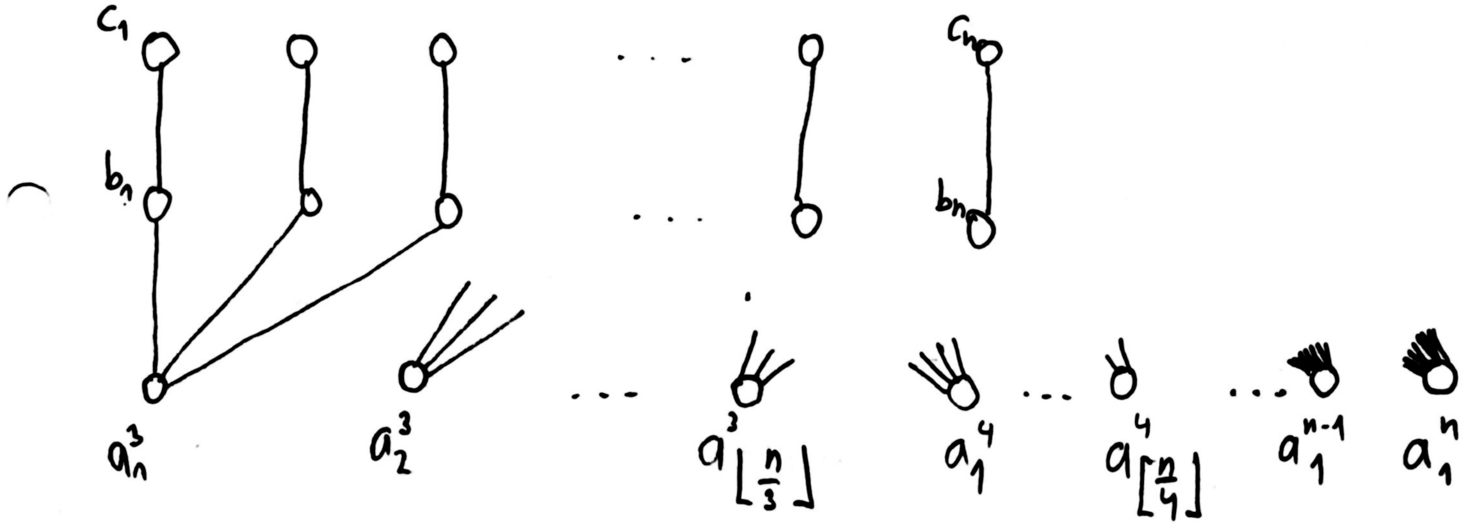
PRÍKLADY APROXIMAČNÝCH ALGORITMOV

VRCHOLOVÉ POKRYTIE

VSTUP: NEORIENT. GRAF $G=(V,E)$
ÚLOHA: NÁJSŤ POKRYTIE MINIMÁLNEJ VEĽKOSTI

ALGORITMUS A: OPAKOVANE VYBERAJ VRCHOL S NAJVYŠŠÍM STUPŇOM

TENTO ALG. NEMÁ KONŠTANTNÚ POMEROVÚ CHYBU



$\deg(c_i) = 1, \quad \deg(b_i) \leq n-2$

ALGORITMUS ZO ZAČIATKU VYBERIE VŠETKY a-ČKA

$f(APR) = \left(\sum_{i=3}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \right) + n \quad , \quad f(OPT) = n$

$f(APR) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}\right) - \frac{n}{1} - \frac{n}{2} - n + 2 + n \geq c \cdot n \log n$

ALGORITMUS B : VYBER HRANU (u,v),
DAJ u AJ v DO VRCH. POKRYTIA,
ODSTRÁŇ VRCHOLY u,v Z GRAFU.

PLATÍ : MNOŽINA VYBRANÝCH HRÁN E'
JE MNOŽINA PO DVOCH DISJUNKTNÁ

$$\left.\begin{array}{l} f(APR) = 2|E'| \\ f(OPT) \geq |E'| \end{array}\right\} \quad \frac{f(APR)}{f(OPT)} \leq 2$$

OBCHODNÝ CESTUJÚCI S Δ-NEROVNOSŤOU

VSTUP : $G=(V,E)$, $c: E \to \mathbb{N}_0$

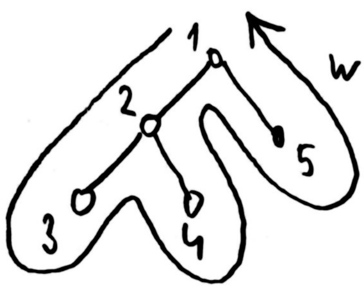
$\forall u,v,w \in V: c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w)$.

EŠTE STÁLE MÁME NP-ŤAŽKÝ PROBLÉM
(STAČÍ VZIAŤ VÁHY 1 A 2 ...)

ALGORITMUS :
(1) NÁJDEM MINIMÁLNU KOSTRU T GRAFU G
(2) VYBERIEME $v \in V_G$ A SPUSTÍME Z NEHO DFS
$\to$ OČÍSLUJEME V PREORDER
(3) VÝSLEDNÁ KRUŽNICA JE DEF. TÝMTO OČÍSLOVANÍM

ZREJME $f(T) \leq f(OPT)$
VEZMIME ÚPLNÚ PRECHÁDZKU W PO KOSTRE T.
ZREJME $f(W) = 2f(T)$
A $f(APR) \leq f(W)$

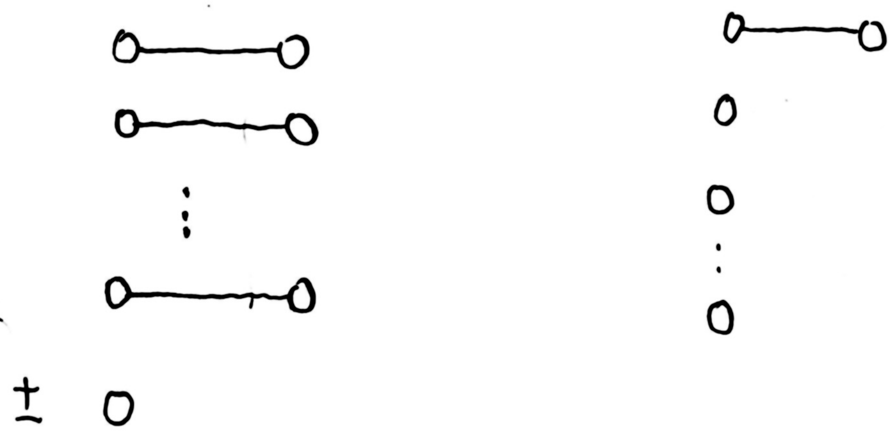
$$\Rightarrow \frac{f(APR)}{f(OPT)} \leq 2.$$



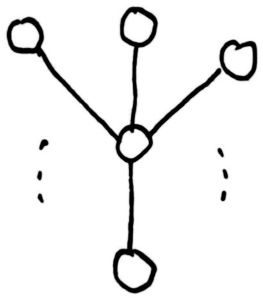
08.01.2009Th
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOST I

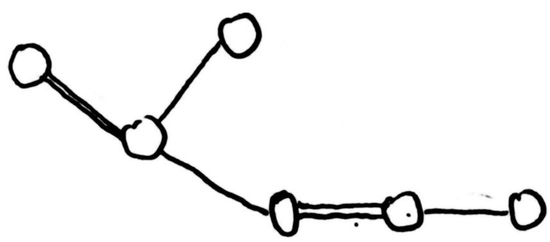
PRÍKLAD: APR. ALG. PRE VRCHOLOVÉ POKRYTIE MÁ POMEROVÚ CHYBU 2. JE TO PRESNE 2?



SÚVISLÝ GRAF:



PRÍKLAD: VRCHOLOVÉ POKRYTIE PRE STROMY



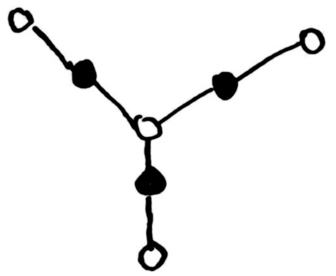
ALGORITMUS: DOKEDY V G EXISTUJE HRANA:

(1) NÁJDI LIST u A JEHO SUSEDA v

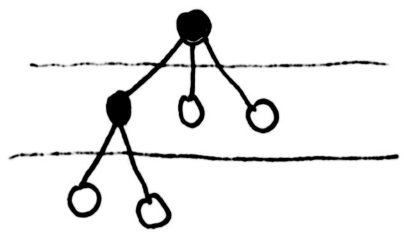
(2) PRIDAJ v DO VRCH. POKRYTIA A ODSTRÁŇ $\forall$ HRANY INCIDENTNÉ S v

DÔKAZ: STAČÍ NÁJSŤ DISJUNKTNÚ MNOŽINU HRÁN ROVNAKEJ VEĽKOSTI ...

NESTAČÍ VYBERAŤ VRCHOL S NAJVYŠŠÍM STUPŇOM



NESTAČÍ BFS, (ROZSEKANIE NA VRSTVY) !

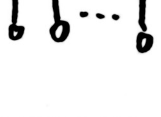


PRÍKLAD:

$V' \subseteq V$ JE VRCHOLOVÉ POKRYTIE
$\Leftrightarrow$ $V \setminus V'$ JE NEZÁVISLÁ MNOŽINA

$\Rightarrow$ OPTIMALIZAČNÝ ALGORITMUS PRE VRCH. POKRYTIE DÁVA OPT. ALG. PRE NEZÁVISLÚ MN.

PLATÍ TO AJ PRE APROX. ALGORITMUS ?



08.01.2009TH
PETER ČERNO

EX: NTIN062 SLOŽITOSŤ I

AK $P \neq NP \Rightarrow$ NEEXISTUJE APROXIMAČNÝ ALGORITMUS PRE CLIQUE, INDEP. SET S KONŠT. POMEROVOU CHYBOU

BOTTLENECK TSP s Δ-NEROVNOSŤOU

ZADANIE: VSTUP ÚPLNÝ VÁŽENÝ NEOR. GRAF $G=(V,E)$, $d: E \to \mathbb{N}_0$

ÚLOHA: NÁJSŤ NAJKRATŠIU HAM. KRUŽNICU V max MIERE.

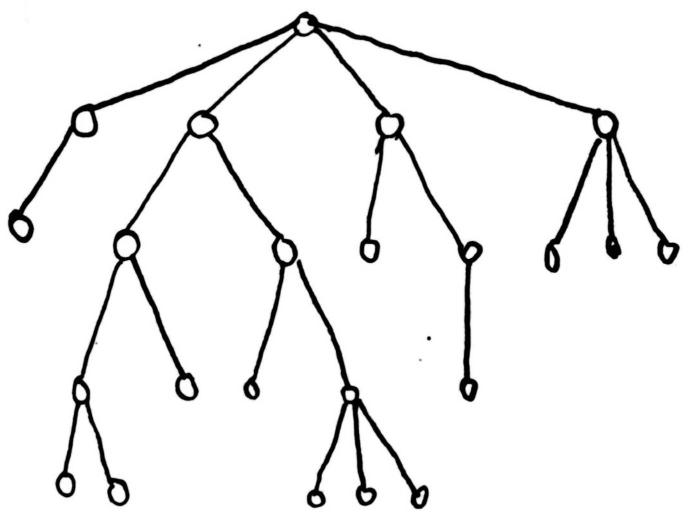
$$d(HK) = \max_{e \in HK} d(e).$$

PROBLÉM JE ZREJME NP-ŤAŽKÝ (HRANY OHODNOTÍM 1, 2)

APROXIMAČNÝ ALGORITMUS

(1) NÁJDEME MIN. KOSTRU T (TÁ ISTÁ V Σ AJ max METRIKE)

ZREJME $d(OPT) \geq d(T)$



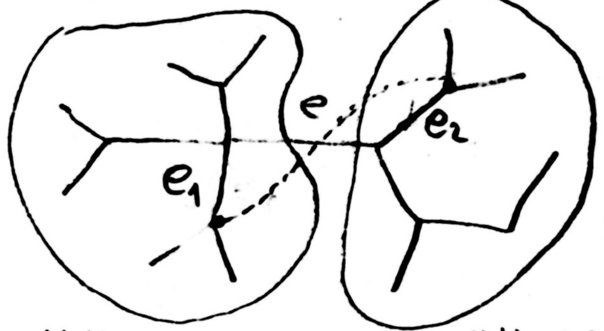
NIECH T JE SÚVISLÝ GRAF, POTOM T^3 OBSAHUJE HK.

NECH T JE SÚVISLÝ A e JE HRANA.
POTOM T^3 OBSAHUJE HK OBSAHUJÚCU e.

DÔKAZ. INDUKCIA.

$n = 3$ PLATÍ

$n > 3$:



IND. PREDP. IND. PREDP.

□

(2) V T^3 SKONŠTRUUJEM HK

$d(APR) \leq 3d(T) (= 3d(W)$, KDE W JE ÚPLNÁ PRECHÁDZKA PO T)

ZREJME $\frac{d(APR)}{d(OPT)} \leq 3$.

14.01.2009 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOST I

VETA: NECH $R \geq 1$ JE KONŠTANTA. AK $P \neq NP$, POTOM NEEXISTUJE POLYNOMIÁLNY APROXIMAČNÝ ALG. S POMEROVOU CHYBOU NAJVIAC R. RIEŠIACI TSP.

NECH A JE ALGORITMUS S POMEROVOU CHYBOU R RIEŠIACI OBECNÝ PRÍPAD TSP.
UKÁŽEME, ŽE A MOŽNO POUŽIŤ K VYRIEŠENIU HK.
NECH $G=(V,E)$ JE ZADANIE HK.
DEFINUJME ÚPLNÝ GRAF $K_n = (V, \binom{V}{2})$ A VÁHY
$w: \binom{V}{2} \to \mathbb{N}$ ... ZADANIE TSP.

$$w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E \\ nR & e \notin E \end{cases}$$

JE VIDIEŤ, ŽE MÔŽU NASTAŤ 2 PRÍPADY:

(1) G OBSAHUJE HK $\Rightarrow$ OPTIMÁLNA HODNOTA PRE TSP JE n
$\Rightarrow$ A MUSÍ VRÁTIŤ HK S CELKOVOU VÁHOU $\leq R.n$
$\Rightarrow$ A MUSÍ VRÁTIŤ HK S CELKOVOU VÁHOU $= n$.

(2) G NEOBSAHUJE HK $\Rightarrow$ OPTIMÁLNA HODNOTA PRE TSP JE $> R.n$
$\Rightarrow$ A VRÁTI HODNOTU $> R.n$ ■

APROXIMAČNÁ SCHÉMA

AS PRE OPTIMAL. ÚLOHU X JE ALGORITMUS, KT. VSTUPOM JE ZADANIE Y ÚLOHY X A $\varepsilon > 0$
→ PRACUJE AKO APROX. ALGORITMUS PRE ÚLOHU X S RELATÍVNOU CHYBOU ε

POLYNOMIÁLNE APR. SCHÉMA : ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ JE POLYNOMIÁLNA VZHĽADOM K ZADANIU Y

ÚPLNE POLYNOM. APR. SCHÉMA : .. $p(n, 1/\varepsilon)$

ÚLOHA SÚČTU PODMNOŽÍN

VSTUP: $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, $t \in \mathbb{N}$

ÚLOHA: NÁJSŤ $S \subseteq \{1, \dots, n\}$:
$sum = \sum_{i \in S} x_i$ JE ČO NAJVÄČŠIE
PRI PODMIENKE $sum \leq t$.

PSEUDOPOL. ALGORITMUS PRE SP

ZNAČENIE: AK $L = (a_1, \dots, a_n)$, POTOM
$L + x = (a_1 + x, \dots, a_n + x)$.

```
SÚČET (A, t)
  L0 := (0);
  for i := 1 to n do
      Li := MERGE(Li-1, Li-1 + x)
      (ČÍSLA > t ZAHOĎ)
  return max Ln.
```

14.01.2009
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

VETA: ZOZNAM L_i PRE $1 \leq i \leq n$ JE USPOR. ZOZNAM OBSAHUJÚCI SÚČTY VŠETKÝCH PODMNOŽÍN $A = \{x_1, \ldots, x_i\}$, KTORÉ SÚ $\leq t$.

DÔKAZ: INDUKCIA PODĽA i.

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ:

$O(|L_1| + \ldots + |L_n|)$

AK SÚ V ZOZNAMOCH DRŽANÉ DUPLICITNÉ HODNOTY, TAK (V NAJHORŠOM PRÍPADE) $\Omega(2^n)$

AK SÚ DUPLICITY V MERGE VYHODENÉ, POTOM $O(n \cdot t)$
(ŽIADEN ZOZNAM NEMÁ VIAC AKO t PRVKOV)

ALGORITMUS JE POLYNOMIÁLNY AK $t \leq p(n)$
ALEBO $x_i \leq p(n)$ $\forall i$ $\rightsquigarrow$ DĹŽKA ZOZNAMU $\leq \sum x_i$

PREREZÁVANIE ZOZNAMOV

NECH JE DANÉ $0 < d < 1$. PREREZAŤ ZOZNAM L PARAMETROM d ZNAMENÁ ODOBRAŤ Z L ČO NAJVIAC PRVKOV TAK, ŽE PRE KAŽDÝ ODSTRÁNENÝ y EXISTUJE V NOVOM L' z TAKÉ, ŽE $(1-d)y \leq z \leq y$.

PRÍKLAD:

$L = (10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 29)$, $d = 0{,}1$

$\Rightarrow L' = (10, 12, 15, 20, 23, 29)$.

```
PREREŽ (L, d)
  L' := (y_1);   POSLEDNÝ := y_1 ;
  for i := 2 to |L| do
    if POSLEDNÝ < (1-d) y then
      L' := L' ∪ {y_i}
      POSLEDNÝ := y_i ;
  return L'
```

ÚPAS PRE SP

```
APPROX-SP (A, t, e)
  L0 := (0);
  for i := 1 to n do
    Li := MERGE (Li-1, Li-1 + x);
    Li := PREREŽ (Li , e/n);
  return max Ln
```

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ: $\Theta(|L_1| + \dots + |L_n|)$.

VETA: ALGORITMUS APPROX-SP JE ÚPAS PRE OPTIM. ÚLOHU SP.

ZNAČENIE: y^* = OPTIMÁLNA HODNOTA

z = HODNOTA VRÁTENÁ ALG. APPROX-SP

CIEĽ 1: CHCEME UKÁZAŤ $(1-e)\,y^* \leq z \leq y^*$

$\dfrac{y^* - z}{y^*} \leq e \equiv$

ZREJMÉ (y^* JE OPT.)

14.01.2009 We
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

LEMMA: NECH $y \leq t$ JE SÚČET NEJAKEJ PODMNOŽINY $\{x_1, \dots, x_i\}$. POTOM NA KONCI i-TEJ ITERÁCIE ALG. APPROX-SP EXISTUJE $w \in L_i$: $(1-\frac{e}{n})^i y \leq w \leq y$

DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA i)

PRE $i=1$ ZREJME PLATÍ.

NECH TVRDENIE PLATÍ PRE $i-1$.

A NECH $y \leq t$ JE SÚČET NEJAKEJ PODMNOŽINY ČÍSEL $\{x_1, \dots, x_i\}$.

(α) x_i NIE JE VO VYBRANEJ MNOŽINE.

$\Rightarrow$ Z IND. PREDP. $\exists w \in L_{i-1} : (1-\frac{e}{n})^{i-1} y \leq w \leq y$

(1) w PREŽIJE PREREZÁVANIE L_i.

POTOM $(1-\frac{e}{n})^i y \leq (1-\frac{e}{n})^{i-1} y \leq w \leq y$.

(2) w NEPREŽIJE PREREZÁVANIE $\Rightarrow$ EXISTUJE $w' \in L_i$: $(1-\frac{e}{n}) w \leq w' \leq w$. POTOM

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^i y \leq \left(1-\frac{e}{n}\right) w \leq w' \leq w \leq y.$$

(β) x_i JE VO VYBRANEJ MNOŽINE.

Z IP EXISTUJE $w \in L_{i-1}$:

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i-1} (y - x_i) \leq w \leq y - x_i$$

PO MERGOVANÍ L_{i-1} A $L_{i-1} + x_i$ JE V L_i PRVOK $w + x_i$.

(1) $w + x_i$ PREJDE PREREZÁVANIE L_i. POTOM

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i-1}(y - x_i) + x_i \le w + x_i \le y$$

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i-1} y + \underbrace{\left(1-\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i-1}\right)}_{\ge 0} x_i \le w + x_i \le y$$

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i} y \le \left(1-\frac{e}{n}\right)^{i-1} y \le w + x_i \le y.$$

$\Rightarrow$ $w + x_i$ JE DOBRÝ ZÁSTUPCA.

(2) $w + x_i$ NEPREJDE PREREZÁVANIE L_i.
POTOM EXISTUJE w' V L_i PO PREREZANÍ TAKÝ, ŽE

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)(w + x_i) \le w' \le w + x_i$$

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)^{i} y \le \left(1-\frac{e}{n}\right)(w + x_i) \le w' \le w + x_i \le y.$$

$\Rightarrow$ w' JE DOBRÝ ZÁSTUPCA. $\blacksquare$

PRE $i = n$ V L_n (PO PREREZANÍ) EXISTUJE w
$(1 - e/n)^n y^* \le w \le y^*$ A ČÍSLO z VRÁTENÉ
ALGORITMOM APPROX-SP JE NAJVÄČŠIE TAKÉ w.

LEMMA: $\forall n > 1 : (1 - e) < \left(1 - \frac{e}{n}\right)^n$

$\boxed{f(x) = (1-e/x)^x \text{ JE RASTÚCA NA } \langle 1; +\infty)}$

$\Rightarrow$ $(1 - e) y^* \le z \le y^*$ (CIEĽ 1 SPLNENÝ)

CIEĽ 2: ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ $O(p(n, \log t, 1/e))$

LEMMA: $\forall i : |L_i| \le n \cdot \ln t / e$

14.01.2009
PETER ČERNO

NTIN062 SLOŽITOSŤ I

DÔKAZ: V L_i PO PREREZANÍ PLATÍ, ŽE AK V A W SÚ PO SEBE IDÚCE PRVKY, POTOM MUSÍ PLATIŤ

$$\left(1-\frac{e}{n}\right)w > v,$$ INAK BY

V NEPREŽIL. $\Rightarrow$ MUSÍ PLATIŤ:

$$\frac{w}{v} > \frac{1}{1-\frac{e}{n}}$$

"NAJHUSTEJŠIE MOŽNÉ L_i" JE GEOM. POSTUPNOSŤ S KVOCIENTOM $q = 1/\left(1-\frac{e}{n}\right)$.

VEĽKOSŤ L_i JE OHRANIČENÁ $\log_q t$.

STAČÍ UKÁZAŤ $\log_q t = \frac{\ln t}{\ln q} \le \frac{n \ln t}{e}$

STAČÍ UKÁZAŤ $\frac{1}{\ln q} \le \frac{n}{e}$

$$\frac{e}{n} \le -\ln\left(1-\frac{e}{n}\right)$$

VYPLÝVA Z TOHO, ŽE PRE $x > -1$ PLATÍ $x \ge \ln(1+x)$