Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Rekurze
BONUS

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Antonín Kučera, CSc.
E-mail: Antonin.Kucera@mff.cuni.cz

Anotace: Pokročilejší partie teorie rekurze. Aritmetická hierarchie tříd množin. Diagonálně nerekurzivní funkce. Aritmetický forcing. Konstrukce rekurzivně spočetných množin, prioritní metody. Algoritmická náhodnost. Kolmogorovská složitost.

Sylabus:

1. Rekurzivní stromy. Třídy nekonečných větví rekurzivních stromů.
2. Aritmetická hierarchie množin a tříd množin.
3. Věta o nízké bázi.
4. Aplikace věty o rekurzi. Selfreferenční principy a jejich aplikace.
5. Diagonálně nerekurzivní funkce, jejich základní vlastnosti a použití. Souvislost s matematickou logikou. Konstrukce rekurzivně spočetných množin, prioritní metody.
6. Základy aritmetického forcingu metodou konečných prodloužení.
7. 1-generické množiny a jejich základní vlastnosti.
8. Minimální stupně, forcing metodou perfektních rekurzivních stromů.
9. Algoritmická náhodnost.
10. Základní vlastnosti 1-náhodných množin, struktura jejich stupňů.
11. Kolmogorovská složitost. Martingaly.

Cíl předmětu: Naučit základy teorie rekurze.

Literatura:

1. Demuth O., Kryl R., Kučera A.: Teorie algoritmů I,II. SPN, 1984, 1989
2. Soare R.I.: Recursively enumerable sets and degrees. Springer-Verlag, 1987

3. Odifreddi P.: Classical recursion theory. North-Holland, 1989
4. Li M., Vitanyi P.: An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Springer-Verlag, 1997

This page is intentionally left blank.

13.08.2010 Fr
Peter Černo

Príprava na štátnice

Rekurzia

(?) Dôkaz Kleenovej vety o normálnej forme okľukou cez Turingove stroje

(?) Definície PRF, ORF, ČRF ...

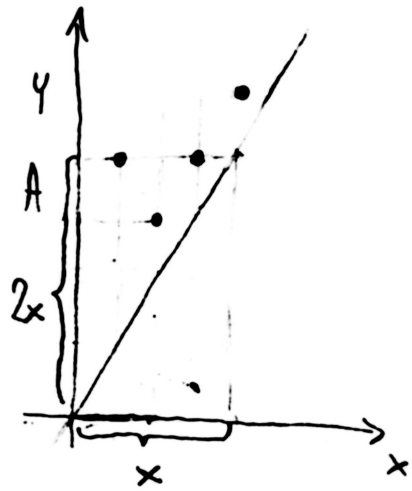
B *imunná* $\Leftrightarrow$ *nekonečná* & neobsahuje nekonečnú r.s. mn.
A je *simple* $\Leftrightarrow$ A je r.s. & $\bar{A}$ je imunná

Veta: Existuje A *simple*.

$$Q(x,y) \simeq y \in W_x \ \& \ y > 2x$$

Q je ČRP $\Rightarrow \exists$ selektor ČRF φ

$A := rng(\varphi)$



i) zrejme A je r.s. mn.

ii) $\bar{A}$ je nekonečná, pretože z mn. $\{0, \dots, 2x\}$ menej ako x prvkov patrí do A

iii) $\bar{A}$ je imunná ... zrejmé

W_x je nekonečná $\Rightarrow \exists^{\infty} y \in W_x, y > 2x$ ...
všetky padnú do A, t.j. $W_x \not\subseteq \bar{A}$. □

B JE HYPERIMÚNNA $\iff$ NEKONEČNÁ & NEEXISTUJE ORF f, KTORÁ MAJORIZUJE B

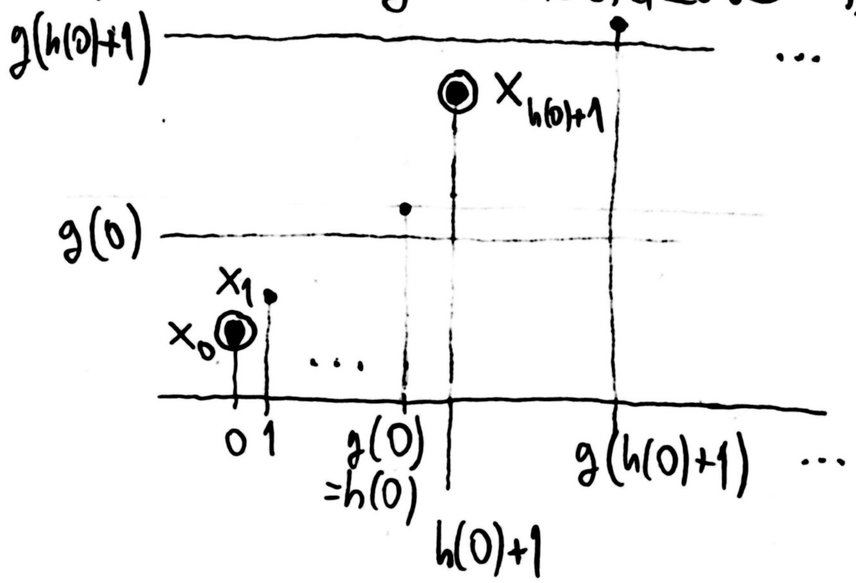
f MAJOR. $B=\{x_0<x_1<\dots\} \iff \forall n\ f(n) \geq x_n$

A JE HYPERSIMPLE $\iff$ A JE SIMPLE & $\bar{A}$ JE HYPERIMUNNÁ.

VETA: B JE HYPERIMÚNNA $\iff$ B JE NEKONEČNÁ A NEEXISTUJE ORF f TAKÁ, ŽE PROSTÝM SPÔSOBOM VYBERÁ KONEČNÉ PODMNOŽINY TAK, ŽE VŠETKY MAJÚ PRIENIK S B. ... $D_{f(n)}$

$\Rightarrow$) AK TAKÁ ORF f EXISTUJE, POTOM
$g(n) := \max\left(\bigcup_{i=0}^{n} D_{f(i)}\right)$ MAJORIZUJE B

$\Leftarrow$) NECH g MAJORIZUJE B ...



$$h(0) := g(0)$$
$$h(n+1) := g(h(n)+1)$$

PLATÍ:
$$h(n)+1 \leq x_{h(n)+1} \leq g(h(n)+1) = h(n+1)$$

PADNE DO $D_{f(n)}$

$$D_{f(0)} := \{0, \dots, g(0)\}$$

...

$$D_{f(n)} := \{h(n)+1, \dots, h(n+1)\} \quad \square$$

2/3

13.08.2010 Fr
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

VETA : HYPERIMÚNNA $\Rightarrow$ IMÚNNA.

NECH NEKONEČNÁ $W_z \subseteq$ HYPERIMÚNNA B

$D_{f(i)} :=$ i-TY BOD W_z ... SPOR ↯

(W_z VIEME GENEROVAŤ PROSTOU ORF)

VETA [DEKKER] : B R.S.MN., NEREKURZÍVNA

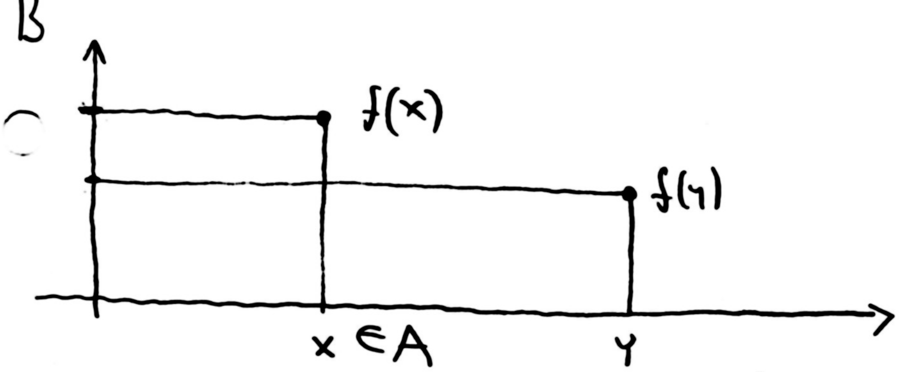
$\Rightarrow$ EXISTUJE A HYPERSIMPLE.

EXISTUJE PROSTÁ ORF f GENERUJÚCA B.

DEFINUJME

$$A := \{ x \mid \exists y > x : f(y) < f(x) \}$$

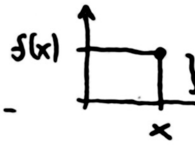
$$\bar{A} = \{ x \mid \forall y > x : f(y) > f(x) \}$$



iii) $A \equiv_T B$

TJ. A JE R.S.MN.

i) $\bar{A}$ JE NEKONEČNÁ ....



} NAJVIAC $f(x)-1$ EŠTE PADNE DO B ...

ii) NEEXISTUJE ORF g MAJORIZUJÚCA $\bar{A}$ ...

NECH $\bar{A} = \{x_0 < x_1 < \dots\}$ A $g(n) \geq x_n \ \forall n$

POTOM BY B BOLA REKURZÍVNA. ↯

$y \in B \Leftrightarrow y \in rng(f) \Leftrightarrow y \in \{f(0), \dots, f(g(y))\}$

$g(y) \geq x_y > x_{y-1} > \dots x_0$, $f(x_n) \geq n$.

VETY O REKURZII

> NECH f JE ČRF 1 PREMENNEJ. POTOM EXISTUJE TZV. <u>PEVNÝ BOD a</u> : $\varphi_{f(a)}(x) \simeq \varphi_a(x)$

DÔKAZ: $\varphi_{f(s_1(z,z))}(x) \simeq \psi_2(e,z,x) \simeq$

$\simeq \varphi_{s_1(e,z)}(x)$.

STAČÍ POLOŽIŤ $a := s_1(e,e)$.

$\varphi_a(x)$ ... PROGRAM a POČÍTA NASLEDOVNE:

NAJSKÔR SPUSTÍ PROGRAM e NA VSTUPE (e, x)

PROGRAM e NA VSTUPE (z,x) NAJSKÔR SPOČÍTA $s_1(z,z)$, TJ. PRE $z=e$ <u>SPOČÍTA $s_1(e,e)=a$</u>

NÁSLEDNE SPOČÍTA $f(s_1(z,z))$, TJ. $f(a)$

A AK $f(a)\downarrow$, SPUSTÍ PROGRAM $f(a)$ NA VSTUPE x.

$\Rightarrow$ <u>PROGRAM a NAJSKÔR SPOČÍTA SVOJ KÓD (INDEX) a</u>, NAŇ APLIKUJE f, A AK $f(a)\downarrow$, TAK SPUSTÍ $f(a)$ NA VSTUPE x.

VETA O GENEROVANÍ PEVNÝCH BODOV

> $\varphi_{f(s_2(z,z,j))}(x) \simeq \varphi_e(z,j,x) \simeq \varphi_{s_2(e,z,j)}(x)$

$g(j) := s_2(e,e,j)$

13.08.2010 OF
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

NECH h JE ČRF $n+1$ PREMENNÝCH.
POTOM $\exists\, a$ T.Ž.
$h(a, x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_a(x_1, \dots, x_n)$

(h "VIDÍ" SVOJ KÓD a)

$h(s_1(z,z), x_1, \dots, x_n) \simeq \varphi_e(z, x_1, \dots, x_n) \simeq$
$\simeq \varphi_{s_1(e,z)}(x_1, \dots, x_n)$.

$a := s_1(e,e)$

PROGRAM a NA VSTUPE $(x_1, \dots, x_n)$
SPUSTÍ PROGRAM e NA VSTUP $(e, x_1, \dots, x_n)$
TEN NAJSKÔR SPOČÍTA $s_1(e,e)$, TJ. a
A POTOM POČÍTA AKO h NA VSTUPE
$(a, x_1, \dots, x_n)$.

UVAŽUJME $h(z, x_1, \dots, x_n) \simeq z$
POTOM $\exists\, a$ T.Ž. $\varphi_a(x_1, \dots, x_n) \simeq a$
TJ. a VYPÍŠE SVOJ KÓD ...

VETA O REKURZII V ZÁVISLOSTI NA PARAMETROCH

NECH h JE ČRF $n+1$ PREMENNÝCH.
POTOM $\exists$ PRF g n PREMENNÍCH T. Ž.

$$\varphi_h(g(y_1,\dots,y_n), y_1,\dots,y_n)(x) \simeq \varphi_{g(y_1,\dots,y_n)}(x)$$

$$\varphi_h(s_{n+1}(z,z,y_1,\dots,y_n), y_1,\dots,y_n)(x) \simeq$$
$$\simeq \varphi_{s_{n+1}(e,z,y_1,\dots,y_n)}(x)$$

$$g(y_1,\dots,y_n) := s_{n+1}(e,e,y_1,\dots,y_n)$$

RICE: $\mathcal{A}$ JE NETRIVIÁLNA TRIEDA ČRF
$\Rightarrow$ $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ NIE JE REKURZÍVNA.

PRE SPOR NECH A JE REKURZÍVNA.
NECH $a \in A$, $b \notin A$.
DEFINUJME f NASLEDOVNE:

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{AK } x \in A \\ a & \text{AK } x \notin A \end{cases}$$

VR: EXISTUJE PEVNÝ BOD u: $\varphi_{f(u)}(x) \simeq \varphi_u(x)$

$u \in A \Rightarrow f(u) = b \notin A$ ↯

$u \notin A \Rightarrow f(u) = a \in A$ ↯

16.08.2010 M₀
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

PRODUKTÍVNE A KREATÍVNE MNOŽINY

B **PRODUKTÍVNA** $\Leftrightarrow$ $\exists$ ČRF φ:
$W_x \subseteq B \Rightarrow \varphi(x)\downarrow \ \& \ \varphi(x) \in B \setminus W_x$

A **KREATÍVNA** $\Leftrightarrow$ R.S. & $\bar{A}$ JE PRODUKTÍVNA

VETA O PRODUKTÍVNEJ FUNKCII:
KAŽDÁ PRODUKTÍVNA MNOŽINA MÁ PR. FUNKCIU ORF

$$W_{g(y)} = \begin{cases} W_y & \text{AK } f(g(y))\downarrow \\ \emptyset & \text{AK } f(g(y))\uparrow \end{cases}$$

$f \circ g$ JE ORF PRODUKTÍVNA

KAŽDÁ PRODUKTÍVNA MN. OBSAHUJE NEKONEČNÚ R.S. MNOŽINU $\Rightarrow$ $\nexists$ IMUNNÁ MN.

KAŽDÁ PRODUKTÍVNA MN. MÁ PR. F. REKURZÍVNU PERM.

"NA": $\exists$ REKURZÍVNA M: $x \in M \Rightarrow W_x = \mathbb{N}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin M \\ j & x \in M \text{ JE } j\text{-TY PRVOK } M \end{cases}$$

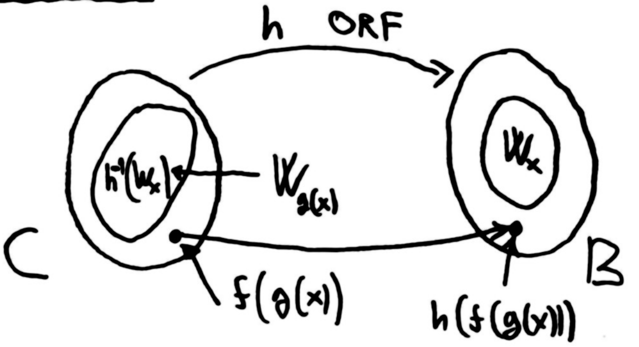
"PROSTÁ": $h(0) = g(0)$

$$h(n+1) = \begin{cases} g(n+1) & \text{AK } g(n+1) \notin \{h(0), \dots h(n)\} \\ \text{INAK} & \dots \text{ PRIDÁVANÍM PRVKOV DO } W_{n+1} \end{cases}$$

A JE KREATÍVNA $\Leftrightarrow$ A JE 1-ÚPLNÁ $\Leftrightarrow$ A JE m-ÚPLNÁ

B JE PRODUKTÍVNA $\Leftrightarrow$ $\bar{K} \leq_1 B \Leftrightarrow \bar{K} \leq_m B$

LEMMA : C PRODUKTÍVNA, $C \leq_m B \Rightarrow B$ PROD.



$\overline{K}$ JE PRODUKTÍVNA $(\varphi(x) = x)$

B PRODUKTÍVNA $\Rightarrow \overline{K} \leq_1 B$:

$$W_{g(x)} = \begin{cases} \{f(g(x))\} & x \in K \\ \emptyset & x \notin K \end{cases}$$

f JE PROD. FCIA. PRE B

$f \circ g$ DOKAZUJE $\overline{K} \leq_1 B$.

A <u>ÚPLNE PRODUKTÍVNA</u> $\iff \exists$ ORF f T.Ž.

$f(x) \in A \setminus W_x \vee f(x) \in W_x \setminus A$

PRODUKTIVITA $\equiv$ ÚPLNÁ PRODUKTIVITA

$Tot := \{x \mid W_x = \mathbb{N}\}$

$Inf := \{x \mid W_x$ NEKONEČNÁ$\}$

$Fin := \{x \mid W_x$ KONEČNÁ$\}$

$Tot \equiv Inf$

$\overline{K} \leq_m Tot \Rightarrow Tot$ JE PRODUKTÍVNA

17.08.2010 Tu
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

DVOJICE MNOŽÍN

A, B, $A \cap B = \emptyset$ REKURZÍVNE NEODDELITEĽNÉ $\Leftrightarrow$
NEEXISTUJE REKURZÍVNA MN. M :
$A \subseteq M$, $B \subseteq \overline{M}$

A, B, $A \cap B = \emptyset$ EFEKTÍVNE NEODDELITEĽNÉ $\Leftrightarrow$
EXISTUJE ČRF φ :
$A \subseteq W_x$, $B \subseteq W_y$, $W_x \cap W_y = \emptyset \Rightarrow \varphi(x,y)\downarrow \notin W_x \cup W_y$

EFEKTÍVNA NEODD. $\Rightarrow$ REKURZÍVNA NEODD.

VETA : $A := \{x \mid \varphi_x(x) \simeq 0\}$ $B := \{x \mid \varphi_x(x) \simeq 1\}$
SÚ R.S. EFEKTÍVNE NEODD. MNOŽINY ... PRF α :

$$\varphi_{\alpha(x,y)}(w) \simeq \begin{cases} 1 & w \text{ PADNE SKÔR DO } W_x \\ 0 & \text{—"— } W_y \\ \uparrow & w \notin W_x \cup W_y \end{cases}$$

A, B, $A \cap B = \emptyset$, A, B SÚ R.S. MN. ... (A,B)
DVOJICA (A,B) JE 1-ÚPLNÁ $\Leftrightarrow$
$\forall (C,D)$: $(C,D) \leq_1 (A,B)$.
TJ. $\exists$ PROSTÁ ORF f :
$x \in C \Leftrightarrow f(x) \in A$ $x \in D \Leftrightarrow f(x) \in B$
$x \notin C \cup D \Leftrightarrow f(x) \notin A \cup B$

DVOJNÁ FORMA VETY O REKURZII

NECH f, g SÚ ČRF $k+2$ PREM.

$\Rightarrow \exists$ PRF ω_1, ω_2 k PREM. T.Ž.

$$\varphi_{\omega_1}(y_1, \dots, y_k) \simeq \varphi_f(\omega_1(\dots), \omega_2(\dots), y_1, \dots, y_k)$$
$$\varphi_{\omega_2}(y_1, \dots, y_k) \simeq \varphi_g(\omega_1(\dots), \omega_2(\dots), y_1, \dots, y_k)$$

MÁME $f(z_1, z_2, y_1, \dots, y_k)$ ČRF $k+2$ PREM.

$\Rightarrow \exists$ PRF α $k+1$ PREM.:

$$\varphi_f(\alpha(z_2, y_1, \dots, y_k), z_2, y_1, \dots y_k) \simeq \varphi_\alpha(z_2, y_1, \dots, y_k)$$

K FCII. $g(\alpha(z_2, y_1, \dots, y_k), z_2, y_1, \dots, y_k)$ $\exists$ PRF β k PR.

$$\varphi_g(\alpha(\beta(\dots), y_1, \dots, y_k), \beta(\dots), y_1, \dots, y_k) \simeq \varphi_{\beta(y_1, \dots, y_k)}$$

$$\omega_1(y_1, \dots, y_k) := \alpha(\beta(y_1, \dots, y_k), y_1, \dots, y_k)$$
$$\omega_2(y_1, \dots, y_k) := \beta(y_1, \dots, y_k)$$

VETA: A, B R.S. MN., $A \cap B = \emptyset$

(A, B) 1-ÚPLNÁ $\Leftrightarrow$ (A, B) EF. NEODD.

$\Rightarrow$) NECH C, D SÚ R.S. EF. NEODD. $\Rightarrow (C, D) \leq_1 (A, B) \dots$

$\Leftarrow$) A, B R.S. MN, EF. NEODD. CEZ ČRF f.

$$W_{\omega_1(x)} = \begin{cases} A \cup \{f(\omega_1(x), \omega_2(x))\} & x \in D \\ A & x \notin D \end{cases}$$

$$W_{\omega_2(x)} = \begin{cases} B \cup \{f(\omega_1(x), \omega_2(x))\} & x \in C \\ B & x \notin C \end{cases}$$

$f(\omega_1(x), \omega_2(x))$ DOKAZUJE $(C, D) \leq_1 (A, B)$.

$\square$

17.08.2010 Tu
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

GÖDELOVE VETY

ZÁKLADNÁ ARITMETICKÁ SILA (ZAS)

JAZYK PRVÉHO RÁDU T. Ž.

$\overline{0}$ ... NUMERÁL PRE NULU

$\overline{1}$ ... NUMERÁL PRE JEDNIČKU

$+, \times$ ... FUNKČNÉ SYMBOLY

KONEČNE VEĽA AXIÓMOV

T JE **AXIOMATIZOVATEĽNÁ** $\iff$ MNOŽNA DOK. FORMULÍ V T JE R.S.

ČRF f JE **REPREZENTOVATEĽNÁ** V T ZAS:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq y \Rightarrow \vdash_T F(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, \overline{y})$$

$$\vdash_T F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1) \ \& \ \vdash_T F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_2) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$$

VETA (MATIJASEVIČ): PREDIKÁT P JE R.S. $\iff$ JE **DIOFANTICKÝ** T.J. $\exists$ POLYNÓMY p_1, p_2 S PRIR. KOEF. T. Ž.

$$P(y_1, \dots, y_n) \iff \exists \vec{x} \left(p_1(\vec{y}, \vec{x}) = p_2(\vec{y}, \vec{x}) \right)$$

DÔSLEDOK: KAŽDÁ ČRF JE REPREZENTOVATEĽNÁ V ĽUBOVOĽNEJ TEÓRII ZAS ... DOKONCA AKO Σ_1-FORMULA.

KEĎ A, B SÚ DISJUNKTNÉ R.S. MNOŽINY
$\Rightarrow \exists$ Σ_1-FORMULA G T.Ž.
$x \in A \Rightarrow \vdash_T G(\bar{x})$, $x \in B \Rightarrow \vdash_T \neg G(\bar{x})$.

GÖDELOVA VETA: NECH T JE TEÓRIA 1. RÁDU, ZAS, BEZSPORNÁ. POTOM:

(1) MNOŽINA FORMULÍ DOKÁZATEĽNÝCH V T NIE JE REKURZÍVNA

(2) AK JE NAVIAC T AXIOMATIZOVATEĽNÁ, POTOM:

a) MNOŽINA DOKÁZATEĽNÝCH A VYVRÁTITEĽNÝCH FORMULÍ JE EF. NEODD. DVOJICA

b) EXISTUJE UZAVRENÁ F: $T \nvdash F$, $T \nvdash \neg F$

c) V T NEMOŽNO DOKÁZAŤ VLASTNÚ BEZSPORNOSŤ (ZA NEPATRNE SILNEJŠÍCH PREDPOKLADOV).

DÔKAZ: VEZMIME A, B R.S., EF. NEODDEL. MN.
$A_1 := \{x \mid \vdash_T G(\bar{x})\}$, $B_1 := \{x \mid \vdash_T \neg G(\bar{x})\}$

BEZSPORNOSŤ $\Rightarrow A_1 \cap B_1 = \emptyset$
A_1, ANI B_1 NEMÔŽE BYŤ REKURZÍVNA $\left(\begin{array}{c} A \subseteq A_1 \\ B \subseteq B_1 \end{array}\right)$

AXIOMATIZOVATEĽNOSŤ $\Rightarrow A_1, B_1$ R.S.
$\Rightarrow$ EFEKTÍVNE NÁJDEME $x_0 \notin A_1 \cup B_1$
$T \nvdash G(\bar{x}_0)$, ANI $T \nvdash \neg G(\bar{x}_0)$.

17.08.2010 Tu
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

NUMERÁCIA

NECH $\mathcal{F}$ ... SPOČETNÁ TRIEDA FCIÍ.

NUMERÁCIA ... $\{\varphi_i\}_i$ ... INDEXÁCIA FCIÍ Z $\mathcal{F}$

- VYČÍSLITEĽNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ČRF α : $\alpha(i,x) \simeq \varphi_i(x)$
- PRÍPUSTNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ORF h : $\varphi_{h(i,j)} \simeq \varphi_i \circ \varphi_j$
- HLAVNÁ $\Leftrightarrow \forall$ NUM. $\varkappa_i$ $\exists$ PROSTÁ ORF g : $\varkappa_i = \varphi_{g(i)}$

VETA : AK $\{\varphi_i\}_i$ JE VYČÍSLITEĽNÁ, POTOM EKVIV.:

(1) JE PRÍPUSTNÁ
(2) JE HLAVNÁ
(3) PLATÍ S-M-N VETA
(4) $\equiv$ ŠTAND. NUMERÁCII

RELATÍVNA VYČÍSLITEĽNOSŤ

B-ČRF, B-ORF, B-REK. MN., B-R.S. MN., ...

FUNKCIONÁLNA VLASTNOSŤ

$\langle\sigma, x, y\rangle \in \Phi$ & $\langle\bar\sigma, x, \bar y\rangle \in \Phi$ & $\sigma \subseteq \bar\sigma \Rightarrow y = \bar y$

Č.R. FUNKCIONÁL Φ ... Č.R. MN. S FUNKC. VLASTNOSŤOU

$\Phi(\tau)(x) \simeq y \Leftrightarrow \exists \sigma \subseteq \tau : \langle\sigma, x, y\rangle \in \Phi$

REGULARIZAČNÁ LEMMA : $\exists$ PRF ρ :

$W_{\rho(z)}$ JE REG. AK W_z JE REG. $\Rightarrow W_z = W_{\rho(z)}$.

NUMERÁCIA : $\Phi_i = W_{\rho(i)}$

A JE B-REK. $(A \leq_T B) \Leftrightarrow c_A = \Phi_i(B)$

A JE B-R.S. $\Leftrightarrow A = dom(\Phi_i(B))$

$\Phi_{i,s}(\tau)(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists \sigma, y : \langle \sigma, x, y\rangle \in W_{g(i),s}, \quad \sigma \subseteq \tau\restriction_s$

$\Phi_{i,s}(\tau)(x) \simeq y \Leftrightarrow \exists \sigma : \quad -\text{||}-$

$W_i^B = dom(\Phi_i(B))$

$W_{i,s}^B = dom(\Phi_{i,s}(B))$

S-m-n VETA : $\Phi_{\bar{s}_m(z,\vec{x})}(B)(\vec{y}) \simeq \Phi_z(B)(\vec{x},\vec{y})$

$\alpha(z,\vec{x},w)\downarrow \Leftrightarrow w = \langle\sigma,\vec{y},t\rangle \;\&\; \langle\sigma,\langle\vec{x},\vec{y}\rangle,t\rangle \in W_{g(z)}$

$\alpha(z,\vec{x},w) \simeq \varphi_{s_{m+1}(a,z,\vec{x})}(w)$

ZREJME $W_{s_{m+1}(a,z,\vec{x})}$ JE REGULÁRNA ...

OPERÁCIA SKOKU

RELATIVIZOVANÝ HALTING PROBLEM

$A' = \{ x \mid \Phi_x(A)(x)\downarrow \}, \quad A^0 = A, \quad A^{n+1} = (A^n)'.$

A' JE A-R.S., NIE JE A-REK ATĎ.

A JE B-R.S. $\Leftrightarrow A \leq_1 B'$

A JE B-R.S & $B \leq_T C \Rightarrow$ A JE C-R.S.

$A \leq_T B \Leftrightarrow A' \leq_1 B'$

$A \equiv_T B \Leftrightarrow A' \equiv_1 B'$

ROVNOMERNOSŤ : $W_{z_0} := \{ \langle\sigma,x,y\rangle \mid \langle\sigma,x,y\rangle \in W_{g(x)} \}$

$\forall A : \quad A' = W_{z_0}^A$

18.08.2010 We
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

LIMITNÁ VYČÍSLITEĽNOSŤ

M LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ORF h:

$c_M(x) \simeq \lim_s h(x,s)$

f LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ $\Leftrightarrow \exists$ ORF h:

$f(x) \simeq \lim_s h(x,s)$

VETA: $M \leq_T \emptyset' \Leftrightarrow M$ LIMITNE VYČÍSLITEĽNÁ.

$\Rightarrow$) $M \leq_T \emptyset' \Rightarrow \exists z \; c_M = \Phi_z(\emptyset')$

$h(x,s) = \begin{cases} \Phi_{z,s}(\emptyset'_s)(x) & \text{AK} \downarrow \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$

$\Leftarrow$) NÁJDENIE MIN. s_0 : $\forall s \geq s_0 : h(x,s) = h(x,s_0)$
... Σ OTÁZKA REKURZÍVNA V $\emptyset'$. $\square$

VETA: (1) $h(x,s)$.. ORF $\Rightarrow \lim_s h(x,s)$.. $\emptyset'$-ČRF.
(2) $F \ldots \emptyset'$-ČRF $\Rightarrow \exists h(x,s) \ldots$ ORF: $F(x) = \lim_s h(x,s)$

PRESNEJŠIE: $\Phi_z(\emptyset')(x) \simeq \lim_s h(z,x,s)$, h.. ORF

(2) ... STABILIZÁCIA CELÉHO VÝPOČTU

$h_0(z,x,s) = \begin{cases} \langle \sigma, x, y \rangle & \Leftrightarrow \langle \sigma, x, y \rangle \in W_{f(z),s}, \; \sigma \leq \emptyset'_s \\ s+1 & \text{INAK} \end{cases}$

VETA: EXISTUJE ORF h:

$\Phi_z(\emptyset^{n+1})(x) \simeq \lim_{s_0} \ldots \lim_{s_n} h(z,x,s_0,\ldots,s_n)$

LIMITY $s_1,\ldots,s_n$ EXISTUJÚ, s_0 NEMUSÍ.

ARITMETICKÁ HIERARCHIA

Σ_n, Π_n PREFIX, PREDIKÁT

ARITMETICKÝ PREDIKÁT ... NAD REK. RELÁCIAMI

$\rightsquigarrow$ ÚPRAVOU DO PRENEXNÉHO TVARU ... Σ_n / Π_n PR.

VETA O UNIVERZÁLNOM PREDIKÁTE PRE

Σ_n (RESP. Π_n), $n \geq 1$, EXISTUJE UNIV.

Σ_n (RESP Π_n) PREDIKÁT.

DÔSLEDOK : $\Sigma_n \setminus \Pi_n \neq \emptyset$, $n \geq 1$

NECH $U(e,x) \in \Sigma_n$ JE UNIV. Σ_n-PREDIKÁT

AK $U(e,e) \in \Pi_n \Rightarrow \neg U(e,e) \in \Sigma_n \Rightarrow$

$\exists a\ U(a,e) \Leftrightarrow \neg U(e,e)$ ... PRE $e = a$ SPOR. ↯

VETA O HIERARCHII

(1) A JE $\emptyset^n$-R.S.NN. $\Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1}$

(2) $\emptyset^{n+1}$ JE Σ_{n+1} - ÚPLNÁ

(3) $B \leq_T \emptyset^n \Leftrightarrow B \in \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$

(1) PRE $n=0$ OK. $\Leftarrow$) $A \in \Sigma_{n+1}$ TJ. A JE $\exists(B)$, $B \in \Pi_n$

$\neg B \in \Sigma_n \Rightarrow$ JE $\emptyset^{n-1}$-R.S.NN. $\Rightarrow \leq_1 \emptyset^n \Rightarrow \leq_T \emptyset^n \Rightarrow B \leq_T \emptyset^n$

$\Rightarrow$) A JE $\emptyset^n$-R.S.NN. $\Rightarrow A = dom(g)$, g $\emptyset^n$-ČRF $\Rightarrow$

$g(x) \simeq \lim_s h(x,s)$ h... $\emptyset^{n-1}$-ORF $\quad \leq_T \emptyset^{n-1} \Rightarrow \in \Sigma_n \cap \Pi_n$

$x \in A \Leftrightarrow g(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists s_0\, \forall s \geq s_0\ (h(x,s) = h(x,s_0))$ ... Σ_{n+1} □

Tot JE Π_2 - ÚPLNÁ

Fin JE Σ_2 - ÚPLNÁ

18.08.2010 We
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

POŽIADAVKY Z REKURZIE :

ARITMETICKÁ HIERARCHIA TRIED MNOŽÍN
TRIEDY NEKONEČNÝCH VETIEV REK. STROMOV
VETA O NÍZKEJ BÁZE
DIAGONÁLNE NEREKURZÍVNE FCIE. (VÝZNAM, APLIK.)
ZÁKLADY ARITMETICKÉHO FORCINGU
1-GENERICKÉ MNOŽINY
MINIMÁLNE STUPNE
ALGORITMICKÁ NÁHODNOSŤ, 1-NÁH. MNOŽINY

CANTOR SPACE

$2^{\mathbb{N}}$ ... COMPACT SPACE .... KAŽDÉ POKRYTIE $2^{\mathbb{N}}$ OTVORENÝMI MNOŽINAMI OBSAHUJE KONEČNÉ PODPOKRYTIE

CYLINDER (BASIC OPEN CYLINDER)
$[y] = \{ Z \mid y \preceq Z \}$ ... BÁZA $2^{\mathbb{N}}$

$R \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE OPEN $\Leftrightarrow$ R JE ZJEDNOTENIE CYLINDROV OBSIAHNUTÝCH V R $\Leftrightarrow$
$\forall Z \in 2^{\mathbb{N}} : (Z \in R \Leftrightarrow \exists n \, [Z \restriction n] \subseteq R)$

$P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE CLOSED $\Leftrightarrow$ $2^{\mathbb{N}} \setminus P$ JE OPEN

UZAVRETÉ TRIEDY $P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ $\longleftrightarrow$ BIN. STROM $\subseteq \{0,1\}^*$ WITHOUT DEAD BRANCHES T_P

BINÁRNY STROM : $B \subseteq \{0,1\}^*$ UZAVRETÁ NA PREFIXY

$Z \in 2^{\mathbb{N}}$ JE CESTA $B \Leftrightarrow \forall n\ Z\restriction_n \in B$

$$\boxed{Paths(B) := \{ Z \in 2^{\mathbb{N}} \mid \forall n\ Z\restriction_n \in B \}}$$

KÖNIG LEMMA : B JE NEKONEČNÝ BIN. STROM $\Leftrightarrow Paths(B) \neq \emptyset$.

$x \in B$ JE DEAD BRANCH $\Leftrightarrow B \cap \{y \mid y \succeq x\}$ JE KONEČ.

Paths (B) JE CLOSED :

$Z \notin Paths(B) \Rightarrow \exists n\ Z\restriction_n \notin B \Rightarrow [Z\restriction_n] \cap Paths(B) = \emptyset$

STONE DUALITY FOR CLOSED SETS

(1) AK P JE CLOSED $\Rightarrow$

$$\boxed{T_P = \{ x \mid [x] \cap P \neq \emptyset \}}$$

JE BINÁRNY STROM BEZ DEAD BRANCHES

T. Z. $Paths(T_P) = P$.

(2) AK B JE BIN. STROM BEZ DEAD BRANCHES, POTOM $B = T_{Paths(B)}$.

---

(1) $2^{\mathbb{N}} - P$ OPEN : $Z \in P \Leftrightarrow \forall n\ [Z\restriction_n] \cap P \neq \emptyset \Leftrightarrow Z \in Paths(T_P)$

(2) $x \in B \Rightarrow \{ y \succeq x \mid y \in B \}$ JE NEK. $\underset{\text{KÖNIG}}{\Rightarrow} \exists Z \succeq x,\ Z \in Paths(B)$.

ZÁPIS $x \in T_P$ JE EKVIV. $[x] \cap P \neq \emptyset$

18.08.2010 We
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

R OPEN $\Rightarrow P = 2^{\mathbb{N}} - R$ CLOSED

$$\boxed{A_R := \{0,1\}^* - T_P = \{ x \mid [x] \subseteq R \}}$$

A_R ... <u>IDEÁL</u> : ($\equiv$ DOPLNOK BIN STR. WITHOUT D. B.)

$x \in A_R \quad y \succ x \Rightarrow y \in A_R$

$x0, x1 \in A_R \Rightarrow x \in A_R$

PRE $S \subseteq \{0,1\}^*$: $[S]^{\prec} = \{ X \in 2^{\mathbb{N}} \mid \exists y \in S : y \preceq X \}$

STONE DUALITY FOR OPEN SETS

(1) AK R JE <u>OPEN</u> $\Rightarrow$

$A_R = \{ x \mid [x] \subseteq R \}$ JE IDEÁL

T. Z. $R = [A_R]^{\prec}$.

(2) AK C JE IDEÁL $\Rightarrow C = A_{[C]^{\prec}}$.

MINIMÁLNE REŤAZCE V A_R VZHĽADOM K $\preceq$.

... <u>ANTICHAIN</u>.

OTVORENÉ TRIEDY $R \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ $\longleftrightarrow$	IDEÁLY $\subseteq \{0,1\}^*$ A_R

<u>VETA</u> : AK $\{P^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ JE POSTUPNOSŤ UZAVRETÝCH TRIED $P^0 \supseteq P^1 \supseteq P^2 \ldots \neq \emptyset$ POTOM $\bigcap_i P^i \neq \emptyset$.

!!

NECH V_n JE NAJĽAVEJŠÍ REŤAZEC DLHÝ n V P^n

PRE KAŽDÉ e EXISTUJE $z_e = \lim_{n \geq e} (V_n \restriction e)$

$Z := \bigcup_e z_e$. PRE PEVNÉ n :: $[z_e] \cap P^n \neq \emptyset \; \forall e$

$\Rightarrow Z \in P^n$.

$\mathcal{C} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE <u>CLOPEN</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ JE OPEN & CLOSED

<u>VETA</u> : $\mathcal{C} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE CLOPEN $\Leftrightarrow \mathcal{C} = [F]^{<}$, F KONEČNÁ.

$\mathcal{C} = [D]^{<}$, $2^{\mathbb{N}} - \mathcal{C} = [E]^{<}$. $[D]^{<} \cup [E]^{<} = 2^{\mathbb{N}} \stackrel{\text{KOMPAKTNOSŤ}}{\Rightarrow}$

$\exists F \subseteq D, G \subseteq E$ KONEČNÉ : $[F]^{<} \cup [G]^{<} = 2^{\mathbb{N}}$.

<u>KOREŠPONDENCIA $2^{\mathbb{N}} \leftrightarrow [0;1)$</u>

$F : \{ Z \in 2^{\mathbb{N}} \mid Z \text{ JE CO-INF.} \} \to [0;1)$

$F(Z) = 0.Z$

<u>DYADIC RATIONALS</u> : $\mathbb{Q}_2 = \{ z 2^{-n} \mid z, n \in \mathbb{N} \}$

ZAFIXUJME NEJAKÉ KÓDOVANIE $\mathbb{Q}_2$ PRIR. ČÍSLAMI

PRE REÁLNE ČÍSLO r :

(1) r JE <u>COMPUTABLE</u> $\Leftrightarrow \{ q \in \mathbb{Q}_2 \mid q < r \}$ JE <u>COMPUTABLE</u> $\Leftrightarrow r = \lim_n q_n$ PRE COMPUTABLE SEQUENCE $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $|r - q_n| \leq 2^{-n}$

(2) r JE $\Delta^0_2 \Leftrightarrow \{ \dots \}$ JE $\Delta^0_2 \Leftrightarrow r = \lim_n q_n$ PRE COMPUTABLE SEQUENCE $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

18.08.2010 We
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

(3) r JE left-c.e. $\iff$ $\{q \in \mathbb{Q}_2 \mid q < r\}$ C.E.
$\iff$ $r = \lim_n q_n$ PRE NON-DESC. COMP. SEQ. $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

PODOBNE r right-c.e.

KEĎ A JE R.S. MN., POTOM $0.A$ JE left-c.e.
ALE NIE NAOPAK ... VIĎ Ω CHAITIN'S NUMBER.

Π^0_1 TRIEDY, Σ^0_1 TRIEDY

CLOSED P JE CO-C.E. $\iff$ $T_P \in \Pi^0_1$
P NAZÝVAME TIEŽ Π^0_1 TRIEDA (CLASS)
OPEN R JE C.E. $\iff$ $A_R \in \Sigma^0_1$
R NAZÝVAME TIEŽ Σ^0_1 TRIEDA (CLASS)

VETA: AK $B \subseteq \{0,1\}^*$ JE Π^0_1 BIN. STROM
$\Rightarrow$ $P = \mathrm{Paths}(B)$ JE Π^0_1 TRIEDA.

$B^* := \{\sigma \mid \forall n \geq |\sigma| \ \exists \rho \in B : (|\rho| = n \ \&\ \rho \succeq \sigma)\}$
JE Π^0_1 STROM ($\exists \rho$ JE BOUNDED)
B^* NEMÁ DEAD BRANCHES & $P = \mathrm{Paths}(B^*)$
$\Rightarrow$ $B^* = T_P$ $\Rightarrow$ P JE Π^0_1 TRIEDA.

VETA : KAŽDÁ Π_1^0 TRIEDA JE TVARU $Paths(B)$, KDE B JE COMPUTABLE BIN. STROM.

$\Rightarrow$) T_P JE Π_1^0 BIN. STROM $\Rightarrow$ $A = \{0,1\}^* - T_P$ JE C.E.
$\Rightarrow$ EXISTUJE COMPUTABLE ENUMERATION $(A_s)_{s \in \mathbb{N}}$
$B = \{\sigma \mid \forall \rho \preceq \sigma : \rho \notin A_{|\sigma|}\}$ JE COMPUTABLE
ZREJME $T_P \subseteq B$, T.J. $P \subseteq Paths(B)$.
$Z \notin P \Rightarrow \exists n\ [Z \upharpoonright n] \cap P = \emptyset \Rightarrow Z \upharpoonright n \notin T_P$
$\Rightarrow Z \upharpoonright n \in A \Rightarrow \exists s\ Z \upharpoonright n \in A_s \Rightarrow Z \notin Paths(B)$.

VETA : $R \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE C.E. OPEN $\Leftrightarrow$ $R = [W_e]^{\prec}$.
$\Leftarrow$) POLOŽME $\widehat{W}_e = \{\sigma \mid \exists \rho \in W_e, \rho \preceq \sigma\}$
POTOM $R = [\widehat{W}_e]^{\prec}$. $B = \{0,1\}^* - \widehat{W}_e$ JE Π_1^0 BIN. STROM.
$\Rightarrow$ $P = Paths(B)$ JE Π_1^0 TRIEDA A $R = 2^{\mathbb{N}} - P$.
$\Rightarrow$ $A_R = \{0,1\}^* - T_P$ JE C.E. $\Rightarrow$ R JE C.E. OPEN.

NUMERÁCIA Π_1^0 TRIED

NECH e JE INDEX PRE C.E. OPEN $R = [\widehat{W}_e]^{\prec}$.
$P := 2^{\mathbb{N}} - R$, POTOM $B_e = \{0,1\}^* - \widehat{W}_e$ JE Π_1^0 BIN. STROM T.Ž. $Paths(B_e) = P$.

APROXIMÁCIA :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{W}_{e,s} &= \{x \mid |x| \leq s \ \&\ \exists y \in W_{e,s} : y \preceq x\} \\ B_{e,s} &= \{\sigma \mid |\sigma| = s \ \&\ \sigma \notin \widehat{W}_{e,s}\}. \end{aligned}}$$

19.08.2010 Th
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

PRÍKLADY Π_1^0 TRIED

$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ... 0-1 D.N.C. (DIAGONALLY NONCOMPUTABLE) ... $\forall e \; \varphi_e(e)\downarrow \Rightarrow \neq f(e)$

VETA: 0-1 D.N.C. FUNKCIE TVORIA NEPRÁZDNU Π_1^0 TRIEDU P BEZ COMPUTABLE ČLENOV.

$B = \{\sigma \mid \forall s \; \forall e < |\sigma| : \neg \; \sigma(e) = \varphi_{e,s}(e)\}$
JE Π_1^0 STROM $\Rightarrow$ $P = Paths(B)$ JE Π_1^0 TRIEDA.
AK $f = \varphi_e$ JE 0-1 ORF $\Rightarrow$ $f(e) = \varphi_e(e)$ $\Rightarrow$ $f \notin P$.

VETA: (1) NECH Φ JE C.E.. POTOM $\forall n$:
$\{Z \mid \Phi^Z(n)\uparrow\}$ JE Π_1^0 TRIEDA.

(2) Ψ JE C.E. POTOM 0-1 ORF ROZŠIRUJÚCE Ψ TVORIA Π_1^0 TRIEDU.

(3) T BEZSPORNÁ, AXIOMATIZOVATEĽNÁ TEÓRIA. POTOM ZÚPLNENIA T TVORIA Π_1^0 TRIEDU.

CESTA $Z \in P$ JE IZOLOVANÁ $\iff$ $\exists n_0$ T.Ž. Z JE JEDINÁ CESTA ROZŠIRUJÚCA $Z \upharpoonright n_0$.

$P \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ CLOSED, $\neq \emptyset$ JE PERFECT $\iff$ NEOBSAHUJE IZOLOVANÉ CESTY.
ZREJME MOHUTNOSŤ P JE $2^{\aleph_0}$.

VETA: $B \subseteq \{0,1\}^*$ JE Π^0_1 STROM. POTOM KAŽDÁ IZOLOVANÁ CESTA Z V B JE COMPUTABLE.

TJ. KAŽDÁ NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA BEZ COMPUTABLE ČLENOV JE PERFECT.

LOW BASIS THEOREM

BASIS THEOREM PRE Π^0_1 TRIEDY HOVORÍ, ŽE KAŽDÁ NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA MÁ ČLENA S URČITOU VLASTNOSŤOU.

KREISEL BASIS THEOREM: KAŽDÁ NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA P MÁ left-c.e. ČLENA ... KONKRÉTNE NAJĽAVEJŠIU CESTU Y.

$\tau < Y \Leftrightarrow \forall \sigma \leq \tau \; (|\sigma| = |\tau| \Rightarrow \sigma \notin P)$ ... Σ^0_1 □

LOW BASIS THEOREM (JOCKUSH, SOARE)

KAŽDÁ NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA MÁ LOW ČLENA.

NECH P JE NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA. DEFINUJME NERASTÚCU POSTUPNOSŤ Π^0_1 TRIED $(P^e)_{e \in \mathbb{N}}$, KDE $P^0 = P$. POTOM $\exists Y \in \bigcap_e P^e$. (Z KOMPAKTN.)

KONŠTRUKCIA POMOCOU $\emptyset'$:

KROK e+1: PREDP., ŽE P^e JE DEFINOVANÉ.

AK $P^e \cap \{Z : \varphi^Z_e(e)\uparrow\} \neq \emptyset$, (POMOCOU $\emptyset'$), POTOM

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

P^{e+1} JE ROVNÁ TEJTO TRIEDE.
INAK $P^{e+1} = P^{e}$.

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE:
$e \notin Y' \Leftrightarrow$ NASTALA 1. MOŽNOSŤ V KROKU $e+1$.
$\Rightarrow Y' \leq_T \emptyset'$. $\square$

BASIS THEOREM FOR COMPUTABLY DOMINATED MEMBER Y (MARTIN, MILLER)

KAŽDÁ NEPRÁZDNA Π^0_1 TRIEDA MÁ COMPUTABLY DOMINATED ČLENA Y.

... P^{e+1} BUĎ UKÁŽE, ŽE Φ_e^Y JE ČIASTOČNÁ, ALEBO EXISTUJE ORF f DOMINUJÚCA Φ_e^Y.

KONŠTRUKCIA POMOCOU $\emptyset''$:

KROK $e+1$:

$Q_x = P^e \cap \{Z \mid \Phi_e^Z(x)\uparrow\}$ JE Π^0_1 TRIEDA. $(\forall x)$

(a) AK EXISTUJE x T.Ž. $Q_x \neq \emptyset$, NECH x JE NAJMENŠIE TAKÉ, A NECH $P^{e+1} = Q_x$.
VĎAKA TOMU JE Φ_e^Z ČIASTOČNÁ PRE $\forall Z \in P^{e+1}$

(b) V OPAČNOM PRÍPADE $P^{e+1} = P^e$.
UKÁŽEME, ŽE EXISTUJE ORF f DOMINUJÚCA Φ_e^Z PRE KAŽDÉ $Z \in P^{e+1}$.

POZNÁMKA: A JE <u>COMPUTABLY DOMINATED</u> $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ $g \leq_T A$ JE DOMINATED NEJAKOU ORF f.

NECH $Y \in \bigcap_e P^e$. AK $g = \Phi_e^Y$ JE TOTÁLNA (TJ. $g \leq_T Y$), POTOM V KROKU $e+1$ NASTAL PRÍPAD (b). POUŽIJEME APROXIMÁCIU $(P_s^e)_{s \in \mathbb{N}}$ <u>NA VSTUP x</u> SPOČÍTAJ $s(x) = s$ T.Ž.

$$\forall \sigma \in P_s^e \left(|\sigma| = s \Rightarrow \Phi_{e,s}^\sigma(x)\downarrow \right).$$

TAKÉ s EXISTUJE, INAK BY Q_x V KROKU $e+1$ BOLO NEPRÁZDNE.

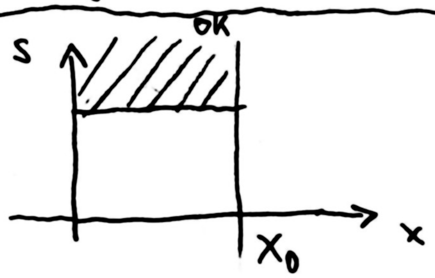
POLOŽME $f(x) := \max\limits_{\sigma \in P_s^e,\, |\sigma| = s} \Phi_e^\sigma(x)$

TAKÁ f DOMINUJE Φ_e^Z $\forall Z \in P^e$. $\square$

VETA: AK A JE Δ_2^0 (TJ. $A \leq_T \emptyset'$) NEREKURZÍVNA, POTOM A NIE JE COMP. DOMINATED.

$A \leq_T \emptyset' \Leftrightarrow \exists$ ORF f : $A(x) = \lim_s f(x,s)$

$$\boxed{\mathrm{mod}_f(x_0) = \mu s_0 \left[f(x,s) = A(x) \quad \forall s \geq s_0 \ \forall 0 \leq x \leq x_0 \right]}$$



(MODULUS)

PLATÍ:

$A \leq_T \mathrm{mod}_f \leq_T \emptyset'$

VO VŠEOBECNOSTI MÔŽE BYŤ

$A <_T \mathrm{mod}_f \equiv_T \emptyset'$

19.08.2010 Th
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

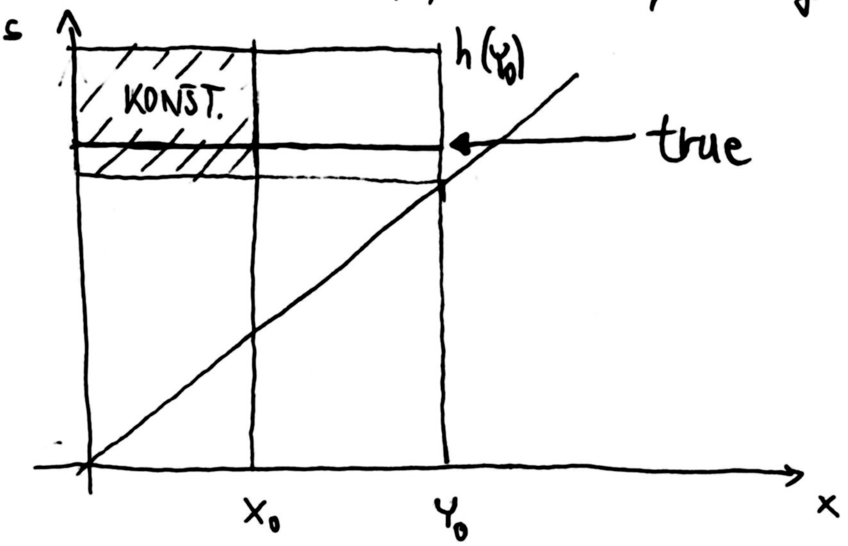
WEAK MODULUS (FIRST TRUE)

$$\boxed{wm_f(x_0) = \mu_{s_0 \geq x_0}\left[f(x, s_0) = A(x) \quad \forall\, 0 \leq x \leq x_0 \right]}$$

Z TECH. DÔVODOV

PLATÍ: $A \equiv_T wm_f$.

VETA: AK A JE Δ_2^0 (TJ. $A \leq_T \emptyset'$) NEREKURZÍVNA, POTOM wm_f NEMÁ ORF MAJORANTU.



PRE SPOR NECH h JE ORF MAJORANTA wm_f.

PRE DANÉ x_0 HĽADAJ $y_0 \geq x_0$:

$$f(x, y) = f(x, y_0) \quad \forall\, 0 \leq x \leq x_0 \quad \forall\, y_0 \leq y \leq h(y_0)$$

POTOM $A(x) = f(x, y_0) \quad \forall\, 0 \leq x \leq x_0$.

$\Rightarrow$ A JE REKURZÍVNA $\lightning$. $\square$

<u>VETA</u>: PRE STUPEŇ $\underset{\sim}{a}$ SÚ NASL. EKVIVALENTNÉ:

(1) EXISTUJE 0-1 DNC $f \equiv_T \underset{\sim}{a}$.

(2) $\underset{\sim}{a}$ JE STUPEŇ KOMPLETNÉHO ROZŠÍRENIA BEZSPORNEJ, AXIOMATIZOVATEĽNEJ, ZAS TEÓRIE PRVÉHO RÁDU.

(3) PRE ĽUBOVOĽNÚ Π^0_1 TRIEDU $P \neq \emptyset$ EXISTUJE $Z \in P$: $Z \leq_T \underset{\sim}{a}$.

($\underset{\sim}{a}$ JE GUIDE ... VIE NÁJSŤ CESTU Z)

(4) AK (A, B) EF. NEODDELITEĽNÁ DVOJICA R.S. MN. $\Rightarrow \exists M \leq_T \underset{\sim}{a}$, KT. SEPARUJE A, B.

(5) AK ψ JE ČRF $\Rightarrow \exists$ TOTÁLNE ROZŠÍRENIE ψ STUPŇA $\leq_T \underset{\sim}{a}$.

20.08.2010 Fr
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

ARSLANOV – KRITÉRIUM KOMPLETNOSTI

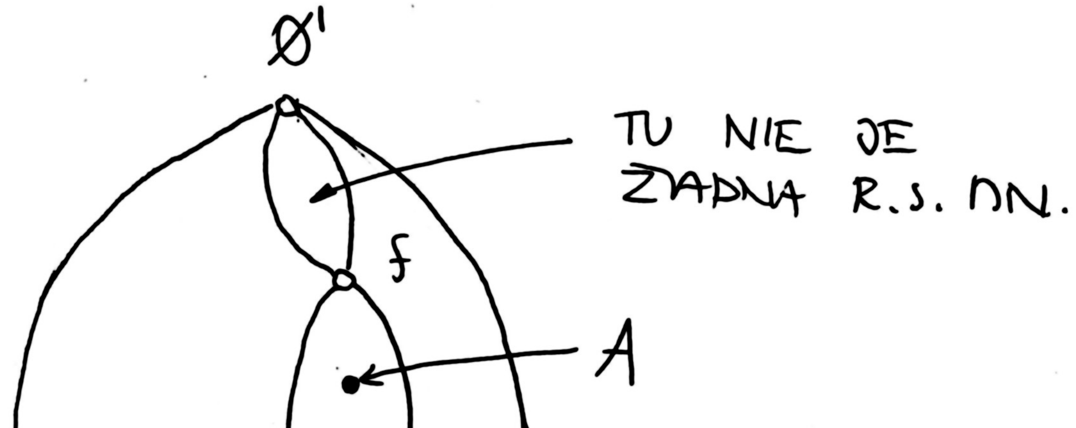
VETA: $\underset{\sim}{\emptyset}'$ JE JEDINÝ R.S. STUPEŇ $\underset{\sim}{a}$ T. Ž. $\exists$ 0-1 D.N.C. f : $f \leq_T \underset{\sim}{a}$.
TJ. A R.S., 0-1 D.N.C. $f \leq_T A \Rightarrow A \in \underset{\sim}{\emptyset}'$.

PLATÍ: A R.S., $f \leq_T A \Rightarrow \exists$ ORF g : $f = \lim_s g$
A $mod_g \leq_T A$. (INŠPEKCIA VETY O LIM. VIČ.)
POMOCOU VR ZOSTROJÍME ORF h:

$$\varphi_{h(x)}(h(x)) = \begin{cases} g(h(x), m(x)) & x \in K \text{ ZA } m(x) \text{ KROKOV} \\ \uparrow & x \notin K \end{cases}$$

POTOM $x \in K \Leftrightarrow x \in K_s$ ZA $s \leq mod_g(h(x))$ KROKOV.
$\Rightarrow K \leq_T mod_g \leq_T A \Rightarrow K \leq_T A$. $\square$

VETA: 0-1 D.N.C. $f \leq_T \emptyset' \Rightarrow$
$\exists$ NEREKURZÍVNA R.S. $A \leq_T f$.



PRE COMPUTABLE ENUMERATION $(B_s)_{s\in\mathbb{N}}$
DEFINUJME $B_{at\,s} = B_s - B_{s-1}$ PRE $s > 0$.

A JE <u>PROMPTLY SIMPLE</u> KEĎ A JE CO-INFINITE A PRE NEJAKÚ COMP. ENUM. $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ PLATÍ: AK W_e JE NEKONEČNÁ $\Rightarrow$
$\exists s > 0\ \exists x\ (x \in W_{e,\,at\,s} \cap A_s)$.

<u>PLATÍ</u>: PRE KAŽDÚ 0-1 D.N.C. $f \leq_T \emptyset'$ (T.J. Δ^0_2) EXISTUJE NEREKURZÍVNA R.S. $A \leq_T f$, KTORÁ JE NAVIAC <u>PROMPTLY SIMPLE</u>.

FUNKCIA g JE <u>FIXED POINT FREE</u> $\Leftrightarrow$
$\forall x\ W_{g(x)} \neq W_x$.

<u>VETA</u>: NECH $D \subseteq \mathbb{N}$. POTOM
$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ D.N.C, $f \leq_T D$ $\Leftrightarrow$
$\exists g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ FIXED POINT FREE, $g \leq_T D$.

$\Leftarrow$) NECH β JE ORF T.Ž. $W_{\beta(x)} = W_{\varphi_x(x)}$
$W_{\varphi_x(x)} = \{ y \mid \exists s, z : (z = \varphi_{x,s}(x)\ \&\ y \in W_{z,s}) \}$
KEĎ g JE F.P.F, POTOM $g(\beta(x)) \neq \varphi_x(x)$

$\Rightarrow$) POMOCOU FIKTÍVNEJ PREM. NECH ϑ JE ORF T.Ž.
$\varphi_{\vartheta(x)}(\vartheta(x))$ = 1. PRVOK KT. NÁJDEM V W_x.
f JE D.N.C., STAČÍ POLOŽIŤ $W_{g(x)} = \{ f(\vartheta(x)) \} \neq W_x$.

20.08.2010 Fr
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

ARITMETICKÝ FORCING

MNOŽINA JE <u>HUSTÁ</u> $\Leftrightarrow$ S KAŽDOU NEPRÁZDNOU OTVORENOU MNOŽINOU MÁ PRIENIK $\neq \emptyset$.

MNOŽINA JE <u>RIEDKA</u> $\Leftrightarrow$ DOPLNOK UZÁVERU JE HUSTÝ

UZAVRETÁ MN. JE RIEDKA $\Leftrightarrow$ DOPLNOK JE HUSTÝ.

M JE <u>1. KATEGÓRIE</u> (<u>MEAGER</u>) $\Leftrightarrow$ $\exists (A_n)_{n=1}^{\infty}$ $M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n SÚ UZAVRETÉ RIEDKE MN.

M JE <u>2. KATEGÓRIE</u> (<u>CO-MEAGER</u>) $\Leftrightarrow$ $M \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, $\forall (B_n)_{n=1}^{\infty}$ OTVORENÉ HUSTÉ.

BAIROVA VETA O KATEGÓRIACH

- ÚPLNÝ METRICKÝ PRIESTOR JE 2. KATEGÓRIE.

DÔKAZ V PRIESTORE 2^{ω} ... <u>COHENOV FORCING</u>

NECH B_n SÚ OTVORENÉ HUSTÉ

CHCEME ZOSTROJIŤ BOD $B \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

INDUKCIOU BUDEME KONŠTRUOVAŤ $\sigma_n \in 2^{<\omega}$,

$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$.

<u>KROK $n+1$</u>: $B_n \cap [\sigma_n] \neq \emptyset$ JE OTVORENÁ

$\Rightarrow \exists \tau : [\tau] \subseteq B_n \cap [\sigma_n]$

$\sigma_{n+1} := \tau$.

$$\boxed{A \text{ JE } \underline{\text{1-GENERICKÁ}} \iff \forall e\, \exists \sigma_e \preccurlyeq A : \left(\Phi_e(\sigma_e)(e)\downarrow \ \vee \ \forall B \succcurlyeq \sigma_e\ \Phi_e(B)(e)\uparrow \right)}$$

S JE <u>HUSTÁ POZDĹŽ A</u> $\iff$ S KAŽDOU OTV. MNOŽINOU OBSAHUJÚCOU A MÁ PRIENIK $\neq \emptyset$.

TJ. $\sigma \prec A \Rightarrow \exists \rho : \sigma \preccurlyeq \rho : [\rho] \subseteq S$.

<u>NIES</u>: A JE 1-GENERICKÁ $\iff$ A $\in$ DO KAŽDEJ R.S. OTVORENEJ S HUSTEJ POZDĹŽ A.

$\Rightarrow$) NECH S JE R.S. OTVORENÁ, TJ. $\exists e$:

$$\boxed{S = \{ Z \mid \Phi_e(Z)(e)\downarrow \}}$$

A JE 1-GENERICKÁ $\Rightarrow \exists \sigma_e \preccurlyeq A : (\dots)$

AK S JE HUSTÁ POZDĹŽ A, POTOM

$\exists \rho : \sigma_e \preccurlyeq \rho : [\rho] \subseteq S$, TJ. $\Phi_e(\rho)(e)\downarrow$

POTOM ALE NUTNE TIEŽ $\Phi_e(\sigma_e)(e)\downarrow$ (A JE 1-G.)

$\Rightarrow$ $\cancel{\sigma_e \in S}$ $[\sigma_e] \subseteq S \Rightarrow A \in S$.

$\Leftarrow$) NECH e JE ĽUBOVOĽNÉ,

$S_e = \{ Z \mid \Phi_e(Z)(e)\downarrow \}$ JE R.S. OTVORENÁ.

a) S_e JE HUSTÁ POZDĹŽ A $\Rightarrow A \in S_e \longrightarrow \sigma_e$.

b) S_e NIE JE HUSTÁ POZDĹŽ A $\Rightarrow$

NÁJDEME ρ: $S_e \cap [\rho] = \emptyset$ SILNÁ DIVERGENCIA. $\square$

20.08.2010 Fr

PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

VETA: ŽIADNA REKURZÍVNA MNOŽINA NIE JE 1-GENERICKÁ.

NECH B JE REKURZÍVNA. DEFINUJME e_0:

$\Phi_{e_0}(X)(e_0)\downarrow \iff X \neq B$ T.J. $\exists y\ X(y) \neq B(y)$

ZREJME PRE $\forall \sigma < B$: $\Phi_{e_0}(\sigma)(e_0)\uparrow$,

A PRE $\forall \sigma < B\ \exists C > \sigma$: $\Phi_{e_0}(C)(e_0)\downarrow$. $\square$

KOĽKO JE 1-GENERICKÝCH MNOŽÍN?

$\equiv$ 2. KATEGÓRIE $\equiv$ TOPOLOGICKY VEĽA.

STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE TO, ČO MNE ODÍM = MÁLO

$S_e = \{ Z \mid \Phi_e(Z)(e)\downarrow \}$

$\underbrace{\bar{S}_e - \mathrm{Int}(\bar{S}_e)}$ ... UZAVRETÁ RIEDKA MN.

Φ_e DIVERGUJE, ALE NIE SILNO!!

$\bigcup_e (\bar{S}_e - \mathrm{Int}(\bar{S}_e))$ ... 1. KATEGÓRIA

$\Rightarrow$ ZOSTÁVA NÁM 2. KATEGÓRIA, T.J. VEĽA.

VETA: EXISTUJE 1-GENERICKÁ $A \leq_T \emptyset'$.

POMOCOU $\emptyset'$ ... POSTUPNOSŤ $\sigma_n \lneq \sigma_{n+1}$

$A = \bigcup_n \sigma_n$.

KROK $e+1$: $\exists \tau > \sigma_e : \Phi_e(\tau)(e)\downarrow$? $\emptyset'$-Q.

YES: $\sigma_{e+1} := \tau$ NO: $\sigma_{e+1} := \sigma_e$.

VETA: A JE 1-GENERICKÁ $\Rightarrow$ A JE GL_1,

TJ. $A' \equiv_T A \oplus \emptyset'$.

(IBA ŠPEC. PRÍPAD $A \leq_T \emptyset'$).

CHCEME ROZHODNÚŤ, Č $\Phi_e(A)(e)\downarrow$.

POMOCOU $\emptyset'$ HĽADAJ $\sigma < A$ T. Ž.

BUĎ $\Phi_e(\sigma)(e)\downarrow$, ALEBO $\forall \tau \geq \sigma$ (...)

VETA: A JE 1-GENERICKÁ $\Rightarrow$ A JE IMÚNNA.

NECH W JE NEKONEČNÁ R.S. $\subseteq A$.

UVAŽUJME e_0 T. Ž.

$\Phi_{e_0}(X)(e_0)\downarrow \iff X \not\supseteq W$.

ZREJME $\Phi_{e_0}(A)(e_0)\uparrow$, PRETOŽE $A \supseteq W$.

$\Rightarrow \exists \sigma < A : \forall B \geq \sigma \; \Phi_{e_0}(B)(e_0)\uparrow$.

TJ. $\forall B \geq \sigma : B \supseteq W$

STAČÍ ZVOLIŤ B KONEČNÚ A DOSTANEME SPOR. ↯ □

VETA: (1) A JE 1-GEN. $\iff \bar{A}$ JE 1-GEN.

(2) A JE 1-GEN. $\Rightarrow$

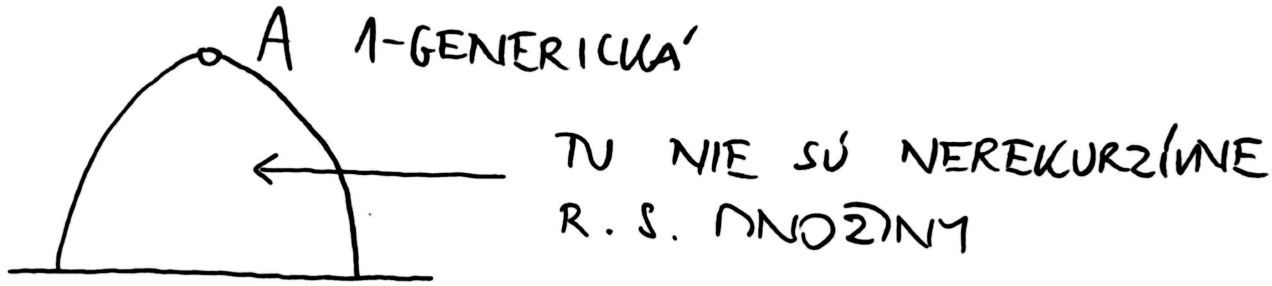
$(A)_i = \{x \mid \langle x,i \rangle \in A\}$ JE 1-GEN.

↑ i-TY REZ ...

20.08.2010 Fr
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

VETA : A JE 1-GENERICKÁ A B R.S. T.Ž. $B \leq_T A$, POTOM B JE REKURZÍVNA.



$\exists a : \Phi_a(A) = B$. DOKÁŽME, ŽE $\overline{B}$ JE R.S.

UVAŽUJME PROGRAM e_0:

$$\Phi_{e_0}(X)(\ldots)\downarrow \iff \exists y\, \exists \sigma \leq X : (\Phi_a(\sigma)(y) = 0 \;\&\; y \in B)$$

ZREJME $\Phi_{e_0}(A)(e_0)\uparrow \Rightarrow \exists \sigma_{e_0} \leq A :$
$\forall X \geq \sigma_{e_0} : \Phi_{e_0}(X)(e_0)\uparrow$.

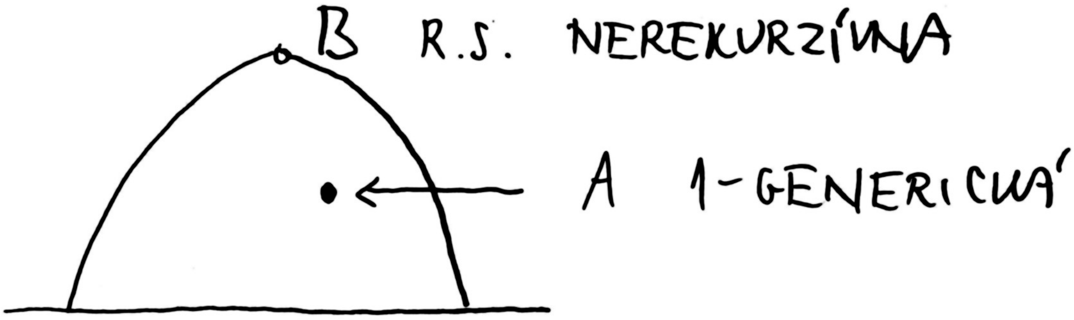
TO ZNAMENÁ, ŽE KEĎ $X \geq \sigma_e$ A $\Phi_a(X)(y)\downarrow = 0 \Rightarrow y \notin B$.

$$\Rightarrow \overline{B} = \{ y \mid \exists \tau \geq \sigma_e : \Phi_a(\tau)(y)\downarrow = 0 \}. \;\square$$

AK $y \notin B \Rightarrow \Phi_a(A)(y) = 0 \Rightarrow \exists \sigma \leq A : \Phi_a(\sigma)(y) = 0$
$\Rightarrow \exists \tau \geq \sigma_e : \tau \geq \sigma \ldots \Phi_a(\tau)(y) = 0$. $\square$

VETA : KEĎ A JE 1-GENERICKÁ, POTOM $(A)_i \mid_T (A)_j$ PRE $i \neq j$.

VETA: B R.S. NEREKURZÍVNA $\Rightarrow$ EXISTUJE 1-GENERICKÁ $A \leq_T B$.



VETA: A JE 1-GENERICKÁ $\Leftrightarrow$
$\forall\, \Sigma_1^0$ MNOŽINU STRINGOV S
$\exists\, \sigma_S \preceq A : (\sigma_S \in S \vee \forall \tau \succeq \sigma_S : \tau \notin S)$

FINITE INJURY PRIORITY METHOD

POSTOV PROBLÉM: EXISTUJE NEREKURZÍVNY R.S. STUPEŇ $\underset{\sim}{a}$: $\underset{\sim}{\emptyset} < \underset{\sim}{a} < \underset{\sim}{\emptyset}'$?

VETA: EXISTUJE LOW SIMPLE MN. A.

STAČÍ ZOSTROJIŤ CO-INFINITE R.S. MN. A
KTORÁ PRE $\forall e$ SPĹŇA POŽIADAVKY:
(SIMPLICITY) P_e : W_e INFINITE $\Rightarrow W_e \cap A \neq \emptyset$
(LOWNESS) N_e : $(\exists^\infty s)[\Phi_{e,s}(A_s)(e)\downarrow] \Rightarrow \Phi_e(A)(e)\downarrow$
PRIORITY RANKING: $N_0, P_0, N_1, P_1, \ldots$

FRIEDBERG-MUCHNIK: $\exists$ R.S. A, B : $A \mid_T B$.

21.08.2010 Sa
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

MARTIN-LÖF NÁHODNOSŤ

EFEKTÍVNA (UNIFORMNÁ) POSTUPNOSŤ R.S. OTVORENÝCH MNOŽÍN $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ JE DEF. POMOCOU ORF f AKO

$$G_m = [W_{f(m)}]^<$$

PLATÍ: $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE NULL $\iff$ $\exists$ POSTUPNOSŤ $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ OTVORENÝCH MNOŽÍN T.Ž. $\lim_m \mu(G_m) = 0$, $A \subseteq \bigcap_m G_m$.

MARTIN-LÖF TEST (ML-TEST) JE EFEKTÍVNA POSTUPNOSŤ $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ R.S. OTVORENÝCH MNOŽÍN T.Ž. $\forall m \in \mathbb{N}\ \mu(G_m) \leq 2^{-m}$.

$Z \in 2^{\mathbb{N}}$ NEPREJDE ML-TESTOM (FAIL) $\iff$ $Z \in \bigcap_m G_m$

V OPAČNOM PRÍPADE Z PREJDE ML-TESTOM (PASS)

$Z \in 2^{\mathbb{N}}$ JE ML-RANDOM $\iff$ Z PREJDE KAŽDÝM ML-TESTOM. MLR = TRIEDA ML-RANDOM MN.

$Z \in \bigcap_m G_m \iff \forall m \exists k, s : [Z \upharpoonright_k] \subseteq G_{m,s} \ldots$

$\Rightarrow \bigcap_m G_m$ JE Π^0_2 NULL TRIEDA.

VETA: COMPUTABLE Z NIE JE ML-RANDOM.

STAČÍ POLOŽIŤ $G_m := [Z \upharpoonright_m]$.

<u>VETA</u>: AK P JE NULL Π_1^0 TRIEDA POTOM P NIE JE ML RANDOM.

NECH $(P_s)_{s \in \mathbb{N}}$ JE EFEKTÍVNA APROXIMÁCIA P POMOCOU CLOPEN TRIED. PLATÍ: $P \in \bigcap_s P_s$.
$(P = \mathrm{Paths}(B_e) \Rightarrow P_s = [B_{e,s}]^{\prec})$
NECH f JE RASTÚCA COMPUTABLE T.Ž. $\mu(P_{f(m)}) \leq 2^{-m}$.
POTOM STAČÍ POLOŽIŤ $G_m := P_{f(m)}$.

PODMIENKU $G_m \supseteq G_{m+1}$ MOŽNOSPLNIŤ TÝM, ŽE NAHRADÍME G_m TRIEDOU $\bigcap_{i \leq m} G_i$.

<u>POZNÁMKA</u>: ŽIADEN ML-TEST NEPOPISUJE VLASTNOSŤ "BYŤ C.E (POPR. COMPUTABLE)" ... TRIEDA C.E. (COMPUTABLE) MN. JE Σ_3^0.

NECH G_n JE R.S. OTVORENÁ TRIEDA, TJ. $G_n = [\widehat{W_e}]^{\prec}$ PRE NEJAKÉ e.

POTOM $\mu(G_n)$ JE left-C.E. REAL.

$b_s := \sum_{\sigma \in \widehat{W}_{e,s}} 2^{-|\sigma|}$ ... EFEKTÍVNA NEKLES. POST.
$\lim_s b_s = \mu(G_n)$.

21.06.2010 So
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

VAROVANIE: ROZHODNÚŤ, Č DANÉ REKURZÍVNE R.Č. JE $=0$ JE ALG. NEROZHODNUTEĽNÉ.

IDEA: ZOSTROJÍME POST. REK. ČÍSIEL $\beta^{(k)}$

$\beta^{(k)} = \lim b_n^{(k)}$, KDE $b_n^{(k)} = \begin{cases} 2^{-n} & k \notin K_n \\ 2^{-s_0} & n \geq s_0,\ k \in K_{s_0},\ s_0 \text{ MIN.} \end{cases}$

PLATÍ: $\beta^{(k)} = 0 \Leftrightarrow k \notin K$.

SPECKER: $\alpha = \sum_{n \in K} 2^{-n}$ JE left-C.E., NIE JE REK.

UNIVERZÁLNY MARTIN-LÖF TEST

NECH G_e^k SÚ $\forall$ ML-TESTY (UNIFORMNÉ PRE e, k)

NAPR. $G_e^k = [\hat{W}_e^k]^<$, KDE $\hat{W}_e^k$ VZNIKNE ENUMERÁCIOU STRINGOV Z $\hat{W}_e$ TAK, ABY PLATILO $\mu([\hat{W}_e^k]) \leq 2^{-k}$.

POLOŽME $\boxed{\mathcal{U}_b := \bigcup_{e \in \mathbb{N}} G_e^{e+b+1}}$. $\mathcal{U}_b$ JE R.S. OTV. TRIEDA,

$\mu(\mathcal{U}_b) \leq \sum_e 2^{-(e+b+1)} = 2^{-b}$.

AK $Z \in \bigcap_k G_e^k$, POTOM ZREJME $Z \in \mathcal{U}_b$ PRE $\forall b$. $\blacksquare$

DÔSLEDOK: non-MLR $= \bigcap_b \mathcal{U}_b$ JE Π_2^0 $\Rightarrow$ MLR $= \bigcup_b \overline{\mathcal{U}_b}$ JE Σ_2^0.

NECH $\mathcal{U}_b = [U_b]^<$, KDE U_b JE R.S. MN. (UNIF. PRE b)

BÚNO U_b JE PREFIX-FREE A $\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$ $\forall n$.

VETA : $MLR = \{\sigma \cdot A \mid \sigma \in 2^{<\omega}, A \in \overline{\mathcal{U}_k}\}$
PRE ĽUBOVOĽNÉ FIXOVANÉ k. (≡ FINITE SHIFT)

$\mathcal{U}_k^{(n)} = [\{\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_n \mid \sigma_i \in U_k\}]^{\prec}$ ... R.S. OTVORENÁ.
$\mu(\mathcal{U}_k^{(n)}) = \sum_{\sigma_1 \in U_k} 2^{-|\sigma_1|} \cdot \mu(\mathcal{U}_k^{(n-1)}) = \ldots = \mu(\mathcal{U}_k)^n$.
$(\mathcal{U}_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ JE ML-TEST.
$B \in MLR \Rightarrow B \notin \bigcap_n \mathcal{U}_k^{(n)} \Rightarrow \exists n_0$:
$B \notin \mathcal{U}_k^{(n_0)}$, $B \in \mathcal{U}_k^{(n_0-1)}$ (AK $n_0 > 1$)
$\Rightarrow B = \sigma_1 \ldots \sigma_{n_0-1} A$, KDE $A \notin \mathcal{U}_k \Rightarrow A \in \overline{\mathcal{U}_k}$.

DÔSLEDOK : AK $\mathcal{A}$ JE R.S. TRIEDA, $\mathcal{A} = [A]^{\prec}$ (KDE A JE R.S. MN., PREFIX-FREE) A $\mu(\mathcal{A}) < 1$, POTOM $MLR \subseteq \{\sigma \cdot X \mid \sigma \in 2^{<\omega}, X \in \overline{\mathcal{A}}\}$.

PRE 0-1 D.N.C. f PLATÍ : (0-1 D.N.C. JE MALO V MIERE)
$$\mu(\{B \mid B \geq_T f\}) = 0$$

VETA : PRE ĽUBOVOĽNÚ 1-RANDOM A EXISTUJE D.N.C. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $f \leq_T A$.

VETA : AK P JE NEPRÁZDNA Π_1^0 TRIEDA A P OBSAHUJE ASPOŇ JEDNU ML-RANDOM MN., T.J. $P \cap \overline{\mathcal{U}_n} \neq \emptyset \Rightarrow$ Z INDEXU P A n MOŽNO NÁJSŤ $\varepsilon > 0$: $\mu(P) > \varepsilon$.

21.08.2010 So
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

POZOROVANIE: AK $\mu(\mathcal{A}) > 2^{-e}$, L NAJĽAVEJŠÍ PRVOK $\mathcal{A}$, R NAJPRAVEJŠÍ PRVOK $\mathcal{A}$, POTOM $L\upharpoonright_e \neq R\upharpoonright_e$.

VETA: $\forall B \geq_T \emptyset' \; \exists A$ ML-RANDOM : $A \equiv_T B$.

VETA: A ML-RANDOM $\Rightarrow (A)_i$ ML-RANDOM $\forall i$.
$(A)_i \mid_T (A)_j \quad \forall i \neq j$.

VAN LAMBELGEN:

$X \oplus Y$ ML-RANDOM $\Rightarrow \begin{cases} X \ldots Y\text{-ML-RANDOM} \; \& \\ Y \ldots X\text{-ML-RANDOM}. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} X \text{ ML-RANDOM} \\ Y \; X\text{-ML-RANDOM} \end{array}\right\} \Rightarrow X \oplus Y$ ML-RANDOM

VETA: $\mu(\mathcal{U}_n)$ JE ML-RANDOM.

ĽAHŠIA VERZIA: $\mathcal{A}$ R.S. OTVORENÁ, $\mu(\mathcal{A}) < 1$
$\mu(\mathcal{A})$ JE REKURZÍVNE R.Č.
$\Rightarrow \exists$ REKURZÍVNA $A \notin \mathcal{A}$.

MARTINGALES

MARTINGALE JE FUNKCIA $B: \{0,1\}^* \to \mathbb{R}_0^+$ T.Ž.

$\forall x \in \{0,1\}^*: \quad B(x0) + B(x1) = 2B(x)$

PRE $Z \in 2^{\mathbb{N}}$ OZNAČME: $B(Z) = \sup_n (Z \upharpoonright_n)$.

MARTINGALE B USPEJE NA $Z \iff B(Z) = +\infty$.

OZNAČME $Succ(B) := \{Z \mid B$ USPEJE NA $Z\}$.

ELEMENTÁRNY MARTINGALE E_σ:

$$E_\sigma(\tau) = \begin{cases} 2^{|\tau|} & \tau \preceq \sigma \\ 2^{|\sigma|} & \tau \succ \sigma \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

SUPERMARTINGALE $S: \{0,1\}^* \to \mathbb{R}_0^+$ T.Ž.

$\forall x \in \{0,1\}^*: \quad S(x0) + S(x1) \leq 2S(x)$

POKIAĽ JE TÁTO NEROVNOSŤ OSTRÁ, TJ.

$$d(x) = S(x) - \tfrac{1}{2}\big(S(x0) + S(x1)\big) > 0$$

HRÁČ NAJSKÔR DARUJE $d(x)$ CHARITE,

A POTOM STÁVKUJE SO ZMENŠENÝM KAPITÁLOM $S(x) - d(x)$.

PLATÍ: PRE KAŽDÝ SUPERMARTINGALE S

EXISTUJE MARTINGALE B T.Ž. $B(\lambda) = S(\lambda)$

A $B(\sigma) \geq S(\sigma) \quad \forall \sigma \in \{0,1\}^*$.

22.08.2010 Su
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

VETA: (1) AK $\alpha \in \mathbb{R}^+$ A B, C SÚ (SUPER) MARTINGALE, POTOM AJ $\alpha \cdot B$, $B+C$ SÚ (SUPER) MART.

(2) AK N_i JE (SUPER) MARTINGALE PRE KAŽDÉ $i \in \mathbb{N}$, $\sum_i N_i(\lambda) < \infty$, POTOM $N = \sum_i N_i$ JE (SUPER) MART.

(3) AK B JE (SUPER) MARTINGALE A $v \in \{0,1\}^*$, POTOM $\lambda x . B(vx)$ JE (SUPER) MARTINGALE.

(4) AK S JE SUPERMARTINGALE A $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ JE KONEČNÝ ALEBO NEKONEČNÝ ANTIRETAZEC, POTOM $\sum_i 2^{-|x_i|} S(x_i) \leq S(\lambda)$.
AK S JE MARTINGALE A $\bigcup_i [x_i] = 2^{\mathbb{N}}$, POTOM PLATÍ ROVNOSŤ.

(5) AK S JE SUPERMARTINGALE, $b \in \mathbb{R}^+$, $S(\lambda) < b$, POTOM: $\boxed{\mu(\{Z \mid \exists n : S(Z \upharpoonright n) \geq b\}) \leq S(\lambda)/b}$.

PLATÍ: $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ JE NULL $\Leftrightarrow$ $\exists$ POSTUPNOSŤ OTVORENÝCH MNOŽÍN $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$: $\mu(G_i) \leq 2^{-i}$ A $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_i G_i$.

VETA (VILLE): NECH $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. POTOM:

$\mathcal{A}$ JE NULL $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \subseteq Succ(B)$, B MARTINGALE
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \subseteq Succ(S)$, S SUPERMARTINGALE.

DOKONCA PLATÍ:

(1) AK $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_i G_i$, KDE $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ JE POUT. OTVORENÝCH MN. T. Ž. $\mu(G_i) \leq 2^{-i}$, POTOM $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Succ}(B)$ PRE $B = \sum_i B_{G_i}$.

(2) AK S JE SUPERMARTINGALE, $S(\lambda) \leq 1$, A $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Succ}(S)$, POTOM $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_i G_i$, KDE $G_i = \{ Z \mid \exists x < Z : S(x) > 2^i \}$. NAVIAC G_i JE OTVORENÁ A $\mu(G_i) \leq 2^{-i}$.

SUPERMARTINGALE L JE C.E., KEĎ $L(\sigma)$ JE left-C.E. REAL UNIFORMNE PRE σ. TJ. $U = \{ \langle x, q \rangle \mid q \in \mathbb{Q}_2 \ \&\ q < L(x) \}$ JE C.E.

<u>PLATÍ</u>: NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIV.:

(1) Z JE ML-RANDOM.
(2) ŽIADEN C.E. MARTINGALE NEUSPEJE NA Z
(3) —||— C.E. SUPERMART. —||—

2/2

22.08.2010 Su
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

KOLMOGOROVSKÁ ZLOŽITOSŤ

VOLÍME UNIV. ČRF

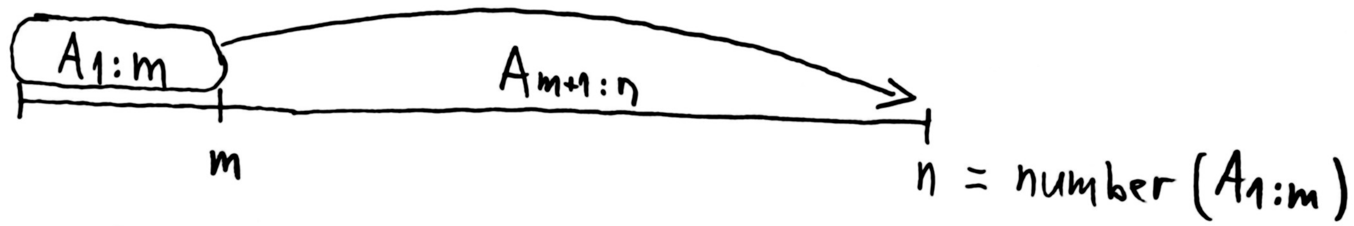
C ... PLAIN KOL. ZL. ... $C_\psi(\sigma) = \min\{|\tau| \mid \psi(\tau) = \sigma\}$

K ... PREFIX-FREE KOL. ZL.

IDEA: A JE NÁHODNÁ $\Leftrightarrow$ $C(A\restriction n) \geq n - O(1)$

MARTIN-LÖF: TAKÁ A NEEXISTUJE!

NECH A JE ĽUBOVOĽNÁ. ZVOLÍME m



PLATÍ: $C(A_{1:n}) \leq C(A_{m+1:n}) + O(1)$

Z $A_{m+1:n}$ ZISTÍM DĹŽKU $n-m$

NECH $\sigma :=$ string$(n-m)$

TAKMER VŽDY JE $|\sigma| = m$.

TOTIŽ $A_{1:m} =$ string(n)

$\Rightarrow$ σ JE OD $A_{1:m}$ MENŠIE O m,

TJ. number(σ) = number$(A_{1:m}) - m$

$\Rightarrow$ $|A_{1:m}| \geq |\sigma| \geq |A_{1:m}| - 1$ ... KONŠT. INFORMÁCIA!

KEĎ POZNÁME m, POTOM $n = (n-m)+m$

$\Rightarrow$ $A_{1:m} =$ string(n).

$\Rightarrow$ $C(A_{1:n}) \leq C(A_{m+1:n}) + O(1)$ ∞-VEĽA KRÁT. $\square$

SELF-DELIMITING KÓDOVANIE

$\bar{x}$ ... $1^{|x|} 0 x$ ... PREFIX-FREE KÓD x

BINÁRNE PREFIX-FREE KÓDOVANIE:

$1^{\lceil \log_2 |x| \rceil} 0 \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{BIN. KÓD DĹŽKY } |x|} x$ SPOLU $2\lceil \log_2 |x| \rceil + 1 + |x|$ BITOV

$K_\psi(\sigma) = \min \{ |\tau| \mid \psi(\tau) = \sigma \}$

KDE ψ JE PREFIX-FREE.

<u>VETA</u>: EXISTUJE UNIV. ČRF PREFIX-FREE.

<u>VETA</u>: (1) $\forall c \, \exists \sigma : K(\sigma) \geq |\sigma| + \log(|\sigma|) + c$,

(2) $K(\sigma) \leq |\sigma| + 2\log(|\sigma|) + O(1)$,

(3) $K(\sigma) \leq |\sigma| + K(|\sigma|) + O(1)$

...

<u>PLATÍ</u>: A JE ML-RANDOM $\Leftrightarrow K(A \upharpoonright n) \geq n - O(1)$.

<u>REQUEST</u> JE PÁR $\langle r, x \rangle \in \mathbb{N} \times \{0,1\}^*$

... CHCEME POPIS z SLOVA x T. Ž. $|z| = r$.

<u>KRAFT-CHAITIN</u>: NECH $(\langle r_i, x_i \rangle)_i$ JE REK. POSTUPNOSŤ POŽIADAVKOV T. Ž. $\sum_i 2^{-r_i} \leq 1$. POTOM $\exists$ PREFIX-FREE M A REK. POST. $(z_i)_i$: $M(z_i) = x_i$, $|z_i| = r_i$. $\Rightarrow K(x_i) \leq K_M(x_i) + O(1) \leq \underline{\underline{r_i + O(1)}}$

23.08.2010 Mo
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

ML-RANDOMNESS MOŽNO CHARAKTERIZOVAŤ AJ POMOCOU PLAIN KOLMOG. ZLOŽITOSTI C:

MILLER & YU : A JE ML-RANDOM $\Leftrightarrow$
$\forall g$ COMPUTABLE T.Ž. $\sum_n 2^{-g(n)} < \infty$ PLATÍ
$C(A\restriction n) \geq n - g(n) - O(1)$.

CHARAKTERIZÁCIA POMOCOU PREFIX-FREE KOL. ZL. K:

SCHNORR : $A \in 2^{\mathbb{N}}$ JE ML-RANDOM $\Leftrightarrow$
A JE LEVIN-CHAITIN RANDOM, TJ. $K(A\restriction n) \geq n - O(1)$.

$\Rightarrow$) NECH U JE UNIVERZÁLNY PREFIX-FREE TS T.Ž.
K JE DEF. AKO $K(\sigma) = \min\{|\tau| \mid U(\tau) = \sigma\}$.
NECH $\boxed{R_k = \bigcup\{[\sigma] \mid K(\sigma) \leq |\sigma| - k\}}$.
ZREJME $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ JE UNIFORMNÁ REK. POSTUPNOSŤ Σ^0_1-TRIED. DOKÁŽEME, ŽE JE TO ML-TEST.
NECH P_k JE MNOŽINA σ T.Ž. $K(\sigma) \leq |\sigma| - k$,
AVŠAK $K(\tau) > |\tau| - k$ PRE VŠETKY $\tau < \sigma$.
POTOM P_k JE PREFIX-FREE A $R_k = \bigcup_{\sigma\in P_k}[\sigma]$.
PRE KAŽDÉ $\sigma \in P_k$ $\exists \sigma^*$: $U(\sigma^*) = \sigma$, $|\sigma^*| \leq |\sigma| - k$.
KEĎŽE U JE PREFIX-FREE: $\sum_{\sigma\in P_k} 2^{-|\sigma^*|} \leq \sum_{U(\tau)\downarrow} 2^{-|\tau|} \leq 1$.
$\Rightarrow \mu(R_k) = \sum_{\sigma\in P_k} 2^{-|\sigma|} \leq \sum_{\sigma\in P_k} 2^{-(|\sigma^*|+k)} \leq 2^{-k}$.
$\Rightarrow (R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ JE ML-TEST.

AK A JE ML-RANDOM, POTOM $A \notin \bigcap_k R_k$
$\Rightarrow \exists k : K(A \upharpoonright n) > n-k$ PRE $\forall n$.

$\Leftarrow$) NECH $(\mathcal{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ JE UNIVERZÁLNY ML-TEST.
NECH $\mathcal{U}_k = [U_k]^{<}$, KDE U_k JE R.S. MN. (UNIF. PRE k),
A NAVIAC U_k JE PREFIX-FREE.

NECH $\boxed{L = \{\langle |\sigma|-k, \sigma\rangle \mid \exists k \geq 1 : \sigma \in U_{2k}\}}$

POTOM L JE KRAFT-CHAITIN MN., PRETOŽE JE R.S.
A $\sum_{k\geq 1} \sum_{\sigma\in U_{2k}} 2^{-|\sigma|+k} = \sum_{k\geq 1} 2^k \mu(\mathcal{U}_{2k}) \leq$
$\leq \sum_{k\geq 1} 2^k 2^{-2k} = 1$.

PODĽA KRAFT-CHAITIN VETY $\exists c : \forall k \geq 1$:
$\sigma \in U_{2k} \Rightarrow K(\sigma) \leq |\sigma| - k + c$

AK A JE LEVIN-CHAITIN RANDOM $\Rightarrow$
$\exists k : K(A\upharpoonright n) > n - k + c \quad \forall n$.

POTOM ALE $A \notin \mathcal{U}_{2k} \Rightarrow A$ JE ML-RANDOM. $\square$

ZOVŠEOBECNENIE (MILLER & YU):

NECH A JE ML-RANDOM. POTOM:

(1) $\sum_n 2^{n-K(A\upharpoonright n)} < \infty$ ... $\equiv$ AMPLE EXCESS THEOREM

(2) PRE KAŽDÚ f T.Ž. $\sum_n 2^{-f(n)} = \infty$ PLATÍ:
$\exists^\infty n : K(A\upharpoonright n) > n + f(n)$.

23.08.2010 Po
PETER ČERNO

PRÍPRAVA NA ŠTÁTNICE

DÔKAZ (2) PODĽA NIESA: NECH

$$\boxed{d(\sigma) = \sum_{\tau \preceq \sigma} 2^{|\tau| - K(\tau)} + \sum_{\tau \succ \sigma} 2^{|\sigma| - K(\tau)}}$$

ZREJME d JE C.E. MARTINGALE A
$\sum_n 2^{n - K(A\restriction n)} \leq \limsup_n d(A \restriction n)$.
KEĎŽE A JE ML-RANDOM, $\limsup_n d(A\restriction n) < \infty$.

SOLOVAY REDUCIBILITA

JEDEN Z DÔSLEDKOV KRAFT-CHAITIN VETY JE, ŽE:
REÁLNE ČÍSLO JE left-C.E. $\iff$ JE TO MIERA DOMÉNY NEJAKEJ PREFIX-FREE CRF.

PRE KAŽDÉ k JE $R_k = \{A \mid \forall n : K(A\restriction n) \geq n-k\}$
Π^0_1-TRIEDA OBSAHUJÚCA IBA ML-RANDOM MN.
$\Rightarrow$ PODĽA LOW BASIS THEOREM EXISTUJÚ ML-RANDOM MN. LOW TURINGOVHO STUPŇA,
A TAKTIEŽ ML-RANDOM left-C.E. REALS
(NAJĽAVEJŠIA CESTA Π^0_1 TRIEDY JE left-C.E. REAL)
NA DRUHEJ STRANE:

<u>VETA (KUČERA)</u>: AK ML-RANDOM A JE R.S.,
POTOM $A \equiv_T \emptyset'$.

NAJZNÁMEJŠIE ML-RANDOM REAL JE

<u>CHAITIN'S</u> $\Omega = \sum_{U(\sigma)\downarrow} 2^{-|\sigma|} = \mu(\mathrm{dom}(U))$

$\equiv$ HALTING PROBABILITY OF U

ZREJME Ω JE left-c.e. REAL. NAVIAC $\Omega \equiv_T \emptyset'$.