Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Rekurze II

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Antonín Kučera, CSc.
E-mail: Antonin.Kucera@mff.cuni.cz

Anotace: Pokračování přednášky Rekurze I. Další metody forcingu. Algoritmická náhodnost. Kolmogorovská složitost.

Sylabus:

1. Minimální stupně, forcing metodou perfektních rekurzivních stromů.
2. Algoritmická náhodnost.
3. Základní vlastnosti 1-náhodných množin, struktura jejich stupňů.
4. Kolmogorovská složitost. Martingaly.

Cíl předmětu: Naučit další části z teorie rekurze.

Literatura:

1. Demuth O., Kryl R., Kučera A.: Teorie algoritmů I,II. SPN, 1984, 1989
2. Soare R.I.: Recursively enumerable sets and degrees. Springer-Verlag, 1987
3. Odifreddi P.: Classical recursion theory. North-Holland, 1989
4. Li M., Vitanyi P.: An introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Springer-Verlag, 1997

10.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

1916 MISES ... BEZ TEÓRIE ALGORITMOV
POSTUPNOSŤ 0,1 NEKONEČNÁ BY MALA BYŤ
NÁHODNÁ ⇔ MÁ FREQUENCY STABILITY (STOCHASTICITY)

ZHRUBA ≡ ROVNAKO 0 A 1

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \{ m < n \mid A(m) = 1 \} \right| = 1/2$$

PROBLÉM: POSTUPNOSŤ 010101...
NÁPAD: FREQUENCY STABILITY NA KAŽDOM
Z NEJAKEJ MNOŽINY VÝBEROV
≡ PLACE SELECTION RULE
PRÍKLAD: PÁRNE MIESTA → SAMÉ 1 !

ABSOLÚTNA NÁHODNOSŤ NEEXISTUJE !
INTUITÍVNE

RELATÍVNA NÁHODNOSŤ (CHAOS) VOČI DANÝM
PROSTRIEDKOM.

NAPRÍKLAD: REKURZÍVNE PODPOSTUPNOSTI,
R.S. PODPOSTUPNOSTI
STRATÉGIE: VÝBER ĎALŠIEHO MIESTA ZÁVISÍ
NA TOM, ČO BOLO DOTERAZ
(ALGORITMICKÁ STRATÉGIA)
...
EXISTUJE VEĽMI VEĽA VARIANT
TZV. KOLMOGOROV - LOVELAND

ALGORITMICKÁ NÁHODNOSŤ SA SKÚMA RÔZNYMI PROSTRIEDKAMI PRE RÔZNE ÚČELY

PREKVAPIVO : MATEMATICKÁ ANALÝZA

PLATÍ HESLO : „ PEKNÉ FUNKCIE MAJÚ PEKNÉ VLASTNOSTI SKORO VŠADE = OKREM MNOŽINY MIERY 0."

3 HLAVNÉ PRÍSTUPY :

1) STOCHASTICNOSŤ (FREQUENCY STABILITY) - O TOM NEBUDEME HOVORIŤ, TECHNICKY KOMPLIKOVANÝ
2) CHAOTICNOSŤ, CHAOTICNESS - ZALOŽENÉ NA KOLMOGOROVSKEJ ZLOŽITOSTI
3) MEASURE THEORETIC APPROACH
   a) MIERA (LEBESGUE)
   b) MARTINGALE

KOLMOGOROVSKÁ ZLOŽITOSŤ - KÓDOVANIE, STLAČITEĽNOSŤ

PRIMÁRNE ... URČENÉ PRE KONEČNÉ REŤAZCE POMOCOU LIMITNÉHO PRECHODU → NEKON. REŤAZCE

NAPR. POSTUPNOSŤ : 0000 ... 0

VIEME POPÍSAŤ AKO : „ IBA 0 + DĹŽKA POST."

≡ SKRÁTENIE NA ÚROVNI LOGARITMOV

10.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

"NÁHODNÉ RETĚZCI" V ISTOM ZMYSLE NEMOŽNO POPÍSAŤ POMOCOU KRATŠEJ DĹŽKY

POLY, $\emptyset'$, $\emptyset''$ ...

ZÁKLADNÝ POPIS ... ČRF ψ

$C_\psi(y) = \min\{|x| : \psi(x) = y\}$

($C_\psi(y)$: y ↓ RETAZEC)

POZN.: STOTOŽNENIE REŤAZCI $2^{<\omega}$ S ω

◁ AK ψ JE UNIVERZÁLNY TS $\mathcal{U}$, TAK TÝM DOSTÁVAME ADITÍVNE OPTIMÁLNU DĹŽKU POPISU

PLATÍ: $C_\mathcal{U}(y) \leq C_\psi(y) + \text{const.}$

KDE const ≤ DĹŽKA PROGRAMU PRE ψ

IDEA (ALE NESPRÁVNA): MNOŽINA A JE NÁHODNÁ, KEĎ $C(A|_n) \geq n + O(1)$

VON LAMBALGEN ... NEEXISTUJE TAKÁ A !

LEPŠIA KOLMOGOROVSKÁ ZLOŽITOSŤ ... TZV. PREFIX-FREE (VŠ JE OK)

KDE JE PROBLÉM ?

MÁME x PREFIX y

KEĎ MÁME x, MÔŽEME NAJSKÔR PRECÍTAŤ DĹŽKU x A POTOM SAMOTNÉ x

$\Rightarrow$ VLASTNE MÁME $|x| + \log |x|$ BITOVÚ INFORMÁCIU

MODIFIKÁCIA : MUSÍME x ZOBRAŤ INFORMÁCIU O JEHO DĹŽKE $\Rightarrow$ PREFIX-FREE KOLM. COMPL.

IDEA : ŽIADEN KÓD NIE JE PREFIXOM INÉHO KÓDU !

$K_\psi(y) = \min \{ |x| : \psi(x) = y \}$,

KDE ψ JE ČRF S PREFIX-FREE DOMAIN

T.J. $\psi(x)\downarrow \;\&\; y < x \Rightarrow \psi(y)\uparrow$.

ĽAHKÉ ... EXISTUJE UNIVERZÁLNY TS PREFIX-FREE ψ_0 JE UNIV. PRE $\forall$ TS, KTORÉ SÚ PREFIX-FREE

K_{ψ_0} ... ADITÍVNE OPTIMÁLNA

PRE $\forall K_\psi$, ψ JE PREFIX-FREE ČRF

VÝHODNÁ VARIANTA - TZV. SELF-DELIMITING KÓDOVANIE

ČÍTANIE SLOVA .... HALT NA POSLEDNOM BITE, PRIČOM UŽ ĎALŠÍ BIT NEČÍTAME

... POUŽITIE T.ZV. END-MARKER

PREFIX-FREE KOLM. COMPL. BUDEME OZNAČOVAŤ K

10.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

DEF.: A JE 1-RANDOM, KEĎ
$K(A \upharpoonright n) \geq n + const.$ PRE $\forall n$

HISTORICKY PRVÝ, KTO O TOM PÍSAL BOL
SOLOMONOFF, POTOM KOLMOGOROV, CHAITIN

EXISTUJE CELÝ RAD VARIANT

TEÓRIA MIERY, MÁME POSTUPNOSŤ $A(0), A(1), \ldots$
AK POZNÁME 1 BIT, NAPR. $A(1) \Rightarrow$
AUTOMATICKY POZNÁME MNOŽINU MIERY 1/2,
KDE A LEŽÍ.
AK POZNÁME 2 BITY ... 1/4 ATĎ.
...
AK MÁME NEJAKÚ NEKONEČNÚ INFORMÁCIU ... MIERA 0

TÁ JE NEJAKO ZLOŽITÁ - NAPR.
REKURZÍVNA ...

IDEA: MÁME NEJAKÚ DOBRE DEFINOVANÚ
SPOČETNÚ KOLEKCIU MNOŽÍN MIERY 0
... TIE MINIEME VON
ZOSTANÚ NÁM: RANDOM SETS ..

σ-ADITIVITA → MINIEME CELKOVO MIERU 0,
ZOSTANE MIERA 1

AKO ZAVIESŤ MIERU ?

1) $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$, $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ INDUKUJE LEB. MIERU NA $\{0,1\}^\omega$

2) KLASICKÝ (SEDLÁCKY) SPÔSOB $\rightarrow$ CEZ DÍŽKU INTER.

TAKTO ZÍSKANÉ MARTIN-LÖF NÁHODNOSŤ

NÁHODNOSŤ MOŽNO ŠTUDOVAŤ AJ POMOCOU MARTINGALE : BETTING STRATEGY

(1$) → 0,3 $ UCHOVÁME
0,7 $ VSADÍME → VÝHRA 1,4 + 0,3 = 1,7 $
PREHRA 0,3 $
SPOLU 2$

MARTINGALE : $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{Q}^+$

MARTINGALE-PROPERTY : $d(x) = \frac{d(x0) + d(x1)}{2}$

d USPEJE NA A, KEĎ

$\limsup d(A\lceil n) = +\infty$ ... KAPITÁLOVÉ VÝHRY NIE SÚ ZHORA OHRANIČENÉ

DEF. : Δ ... TRIEDA MARTINGÁLOV (REKURZÍVNE, R.S., ...)

A JE Δ-RANDOM, KEĎ ŽIADEN Δ-MARTINGÁL NEUSPEJE NA A. (NEZBOHATNE)

10.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

d USPEJE NA TRIEDE $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ USPEJE NA KŠETKÝCH $A \in \mathcal{A}$.

VILE (39): $\mathcal{A}$ má LEB. MIERU 0 $\Leftrightarrow$ EXISTUJE MARTINGÁL d, KTORÝ USPEJE NA $\mathcal{A}$.

SUPERMARTINGALE: KEĎ JE TAM $\leq$

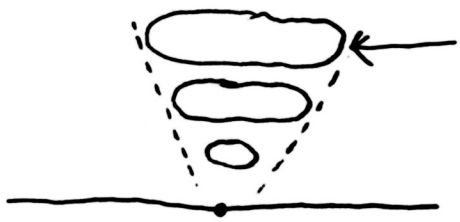
VETA: $\mathcal{A}$ má MIERU 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$
$\exists$ OTVORENÁ MN. B: $\mathcal{A} \subseteq B \;\&\; \mu(B) < \varepsilon$.

17.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

MARTIN-LÖF

MIERA: MNOŽINA A (MNOŽINY SÚVISIACE S REÁLNYMI ČÍSLAMI) MÁ MIERU $\emptyset \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ OTVORENÁ $M : A \subseteq M, \; \mu(M) < \varepsilon.$



DEF. (ML TEST) EFEKTÍVNA (TJ. REKURZÍVNA) POSTUPNOSŤ INDEXOV Σ^0_1 TRIED B_n T.Ž.
$B_n \supseteq B_{n+1}$, $\mu(B_n) < 2^{-n}$ $(\leq)$

POZNÁMKA: PODMIENKA $B_n \supseteq B_{n+1}$ TU NIE JE PODSTATNÁ!

($U_{j>n}$ ... GEOM. RAD, $\sum_{n+1}^{\infty} 2^{-j} \leq 2^{-n}$)

DEF. $A \subseteq 2^\omega$ MÁ Σ^0_1 MIERU $\emptyset$, KEĎ EXISTUJE ML TEST T.Ž. $A \subseteq \bigcap_n B_n$.

DEF. MNOŽINA $A \in 2^\omega$ JE 1-NÁHODNÁ (1-RANDOM, Σ^0_1-RANDOM, c.e.-RANDOM) AK $\{A\}$ NEMÁ Σ^0_1 MIERU $\emptyset$, TJ. NEEXISTUJE REK. POSTUPNOSŤ B_n ... TAKÁ, ŽE $A \in \bigcap_n B_n$

MUSÍME FIXOVAŤ NEJAKÚ NOTÁCIU

INDEX Σ^0_1 TRIEDY ... INDEX PRÍSLUŠNEJ R.S. MNOŽINY

EF. POSTUPNOSŤ INDEXOV $\equiv$

PROGRAM $(n) \to$ PROGRAM PRE n-TÚ HLADINU, KTORÝ GENERUJE $\mathcal{B}_n$

ODBOČKA : ZLOŽITOSŤ $\mathcal{M}(\mathcal{B}_n)$

$\mathcal{B}_n$ JE Σ^0_1 TRIEDA, TJ. ZADANÁ NEJAKOU R.S. MNOŽINOU W :

- PREFIX-FREE MNOŽINA RETAZKOV
- NEPREKRÝVAJÚCE SA RAC. INTERVALY

$\mathcal{M}(\mathcal{B}_n) < \sum_j 2^{-|\sigma_j|}$



POZOR. $\mathcal{M}(\mathcal{B}_n)$ JE URČITÉ R.S. REÁLNE ČÍSLO, NEMUSÍ BYŤ REKURZÍVNE

$b_n = \sum_{j=0}^{n} 2^{-|\sigma_j|}$

b_n RAST., REKURZÍVNE ≤ 1

$b = \lim b_n$

17.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

REÁLNE ČÍSLA MOŽNO ZAVIEST AKO:
- DEDEKINOVE REZY
- CAUCHYOVSKÉ POST. RAC. ČÍSEL

REK. REÁLNE ČÍSLO:
" - REKURZÍVNY D.-REZ "
- REK. POSTUPNOSŤ $\in \mathbb{Q}$, KTORÁ JE EFEKT. CAUCHYOVSKÁ, TJ.

$\exists (f, g)$ ... ORF: $f(n) = b_n$ ... POSTUPNOSŤ $\in \mathbb{Q}$

$g(n) = k_0$: $|b_{k_0} - b_{k_0+j}| \leq 2^{-n}$

g ... RÝCHLOSŤ KONVERGENCIE

VAROVANIE: ROZHODNÚŤ, ČI REK. R.Č. $= 0$ JE ALG. NEROZHODNUTEĽNÉ!

IDEA DÔKAZU:

$$b_n^k = \begin{cases} 2^{-n} & k \notin K_n \\ 2^{-s_0} & k \in K, \end{cases}$$ KDE

s_0 JE NAJMENŠÍ POČET KROKOV T.Ž. $k \in K$

$\beta^k = 0 \iff k \notin K$.

REK. SPOČETNÉ REÁLNE ČÍSLO (C.e. - REAL N.)

" - RAST. POSTUPNOSŤ REK. RAC. ČÍSIEL $\leq$ KONŠT. "

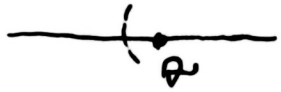
- LEPŠIE: IDEA = R.S. DEDEKINDOV REZ

$\Rightarrow$ α LEFT C.E. $\Leftrightarrow$ $\{q \mid q < \alpha\}$ JE R.S. $\Leftarrow$

SPECKER: ← TOTO JE UDIEŤ

$\Omega = \sum_{n \in K} 2^{-n}$ JE R.S., ALE NIE JE REK.

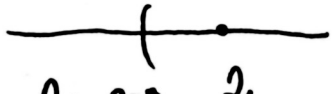
PREČO NIE JE REK.?



AK BY SOM VEDEL EF. APROXIMOVAŤ Ω,
VEDEL BY SOM ROZHODOVAŤ K

$b_n = \sum_{j \in K_n} 2^{-j}$. PRE DANÚ PRESNOSŤ 2^{-s}
VIEM EF. URČIŤ n_0:

$b_{n_0} \geq \Omega - 2^{-s}$



$i \leq s$ BUĎ $\in K_{n_0}$, ALEBO $i \notin K$

D. $i \in K \Leftrightarrow i \in K_{n_0}$ ↯ SPOR.

B_n ... Σ^0_1 TRIEDA, $\mathcal{U}(B_n)$ JE R.S. REAL (TRIV),
ALE NEMUSÍ BYŤ REK.

17.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

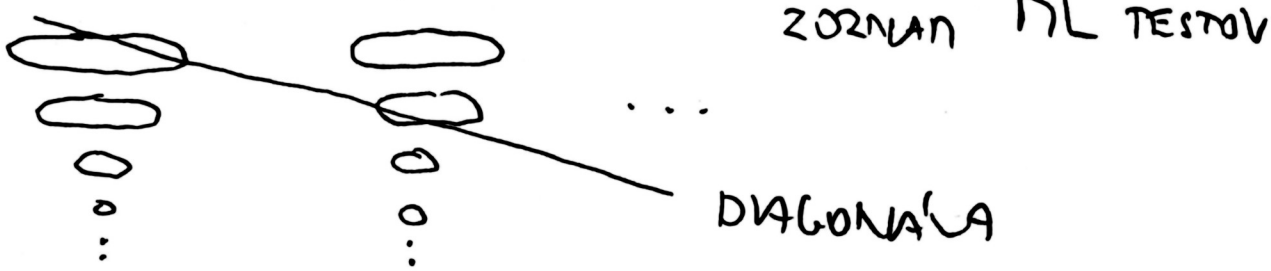
VETA (ML) : EXISTUJE UNIVERZÁLNÝ ML TEST ≡
≡ EXISTUJE MAXIMÁLNY ML NULL CLASS ≡
≡ EXISTUJE MAX. DN. Σ^0_1 MIERY NULA ≡
≡ EXISTUJE REK. POST. Σ^0_1 TRIED $\mathcal{U}_n$
$\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$, $\mu(\mathcal{U}_n) < 2^{-n}$
– ĽUBOVOĽNÁ $A \subseteq 2^\omega$ MÁ Σ^0_1 MIERU $\emptyset \Rightarrow$
$A \subseteq \bigcap_n \mathcal{U}_n$.

MNOŽINA MIERY $\emptyset$ ... NULL CLASS
(ODTIAĽ ML NULL CLASS)

DÔKAZ. VYUŽIVA EXISTENCIU UNIVERZÁLNEJ ČRF

ZJEDNODUŠENE:

– AK BY SME MALI :



Z n-TEJ n-TÚ ÚROVNE
SUMA ... $\leq 2^{-k+1}$ CEZ $n \geq k$

PROBLÉM : NEMÁME ZOZNAM ML TESTOV
ALE : MÁME ZOZNAM KANDIDÁTOV

KONŠTRUKCIA: k, ĽUBOVOĽNÉ $n > k$

$\{n\}(n) = \varphi_n(n)$ ... ČAKAJ ČI KONVERGUJE *

(TJ. JE DEFINOVANÁ n-TÁ HLADINA
n-TEHO POKUSU O ML-TEST)

AK KONVERGUJE, POTOM

$\varphi_n(n) = x$ ... TO JE INDEX R.Š. DNOŽINY
REŤAZCOV (INDEX Σ^0_1 TRIEDY)

POZOR! ZAČNI GENEROVAŤ W_x A DÁVAJ
DO U_k, POKIAĽ CELKOVÝ PRÍSPEVOK
V MIERE JE $< 2^{-n}$ (INAK STOP PRE n)

U_k JE ISTOTNE R.Š. (VIDIEŤ)
ZÁROVEŇ ZADÁVA $\mathcal{U}_k$

$$\mu(\mathcal{U}_k) \leq \sum_{j>k} 2^{-j} \leq 2^{-k} \quad (\text{V SKUTOČNOSTI} <)$$

JE TO ML-TEST!

PREČO JE UNIVERZÁLNY? AK MÁME NEJAKÚ $\{B_i\}_i$
TAK TÁ MÁ NEK. VEĽA INDEXOV.
A ZREJME $B_n \subseteq U_k$.

---

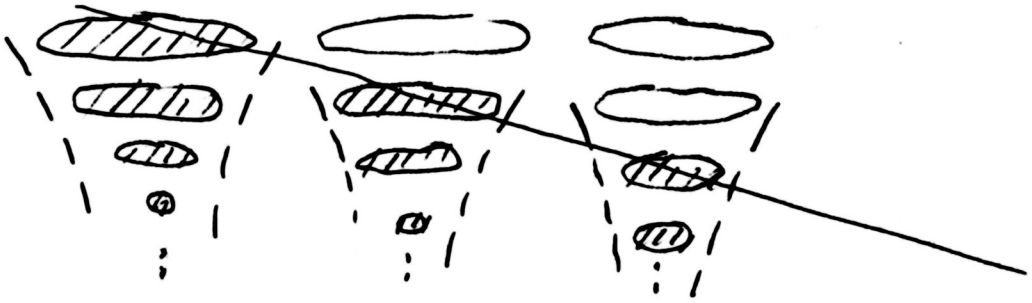
* V KROKU s: VŠETKÝ $n > k$, KT. KONV. DO s KROKOV
POTOM $\bigcup_s$

17.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

UŽITOČNÁ MODIFIKÁCIA:

HESLO: „VŠETKO POD DIAGONÁLOU."



VŠ. $n > k+1$

$\{n\}(j)$ PRE $j \geq n$

AK $\downarrow$ TJ. $\{n\}(j)\downarrow$ ... x_j

GENERUJ W_{x_j} DO U_k, POKIAĽ PRISPIEVA $< 2^{-j}$

$$\leq \sum_{n>k+1} \left(\sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j} \right) = \sum_{n=k+2}^{\infty} 2^{-n+1} = 2^{-k}$$

24.03.2010 Ke
PETER CERNO

NTINO74 REKURZE II

EF. POSTUPNOST Σ^0_1 TRIED $\{\mathcal{U}_k\}$

ZNAČENIE $\mathcal{U}_k = [U_k] = Ext[U_k]$ ...

KDE U_k ... R.S. MNOŽINA STRINGOV

$\mathcal{U}_k$ ... Σ^0_1 TRIEDA MNOŽÍN



WLOG (≡BÚNO) U_k ... PREFIX-FREE

$\mathcal{U}_k \supseteq \mathcal{U}_{k+1} \supseteq$ ... TO VIEME

TAKTIEŽ $\bigcap_k \mathcal{U}_k$ JE MAXIMÁLNA MNOŽINA.

Σ^0_1 MIERY $\emptyset$

$\bigcap_k \mathcal{U}_k$ ... PRÁVE VŠETKY non-1-random

$\Rightarrow \overline{\bigcap_k \mathcal{U}_k} = \bigcup_k \bar{\mathcal{U}}_k$ PRÁVE VŠETKY 1-random

ZREJME $\bar{\mathcal{U}}_0 \subseteq \bar{\mathcal{U}}_1 \subseteq$ ...

FAKT: 1-RANDOM JE Σ^0_2 TRIEDA

DÔKAZ: 1-RANDOM JE EFEKTÍVNE ZJEDNOTENIE $\bar{\mathcal{U}}_k$ (T. Π^0_1 TRIED)

O MOC LEPŠIE TO NEJDE (O TROCHU ÁNO)

PRESNEJŠIE: 1-RANDOM NIE SU Π^0_1 TRIEDOU.

INAK BY DOPLNOK BOL Σ^0_1 S MIEROU $\emptyset \Rightarrow = \emptyset$.

T-STUPNE 1-RANDOM SÚ T-STUPNE VHODNEJ Π^0_1 TRIEDY.

PRESNEJŠIE: VŠETKY $dg_T(\bar{U}_k)$ ROVNAKÉ A TEDA SÚ PRÁVE VŠ. T-STUPNE 1-RANDOM NNOŽN.

VETA (NORMÁLNY TVAR): 1-RANDOM =

$$\{\sigma \cdot A \mid \sigma \in 2^{<\omega} \ \& \ A \in \bar{U}_k\}$$

PRE ĽUBOVOĽNÉ FIXOVANÉ k.

(≡ FINITE SHIFT)

DÔKAZ. $\mathcal{U}_k = [U_k]$, FIXUJME k.

VIEME KONKATENÁCIU: $\sigma * \tau$

ĎALEJ $\mathcal{U}_k^{(2)} = [U_k^{(2)}] = [\{\sigma * \tau \mid \sigma, \tau \in U_k\}]$

... PODOBNE $\mathcal{U}_k^{(n)}$.

INTUÍCIA ... σ ZODPOVEDÁ NEJAKÉMU INTERVALU I, AVŠAK NAMIESTO I DÁME KÓPIU $\mathcal{U}_k$ V INTERVALE I ...

◁ AK BY $\mathcal{M}(A) < \frac{1}{2}$, POTOM $\mathcal{M}(A^{(2)}) < \frac{1}{4}$

$\mathcal{M}(A^{(2)}) = \sum 2^{-|\sigma|} \mathcal{M}(A)$.

PLATÍ: $\{\mathcal{U}_k^{(n)}\}_n$ JE ML-TEST.

KEĎ B JE 1-RANDOM $\Rightarrow B \notin \bigcap_n \mathcal{U}_k^{(n)}$

24.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

$\Rightarrow \exists n_0 : B \notin U_k^{(n_0)}, \; B \in U_k^{(n_0-1)}$ (AK $n_0 > 1$)

$\Rightarrow \exists \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n_0-1} \in U_k :$

$B = \sigma_1 * \sigma_2 * \ldots * \sigma_{n_0-1} * A$, KDE $A \notin U_k$

D. $A \in \overline{U}_k$.

DRUHÁ IMPLIKÁCIA: AK A JE 1-RANDOM

$\Rightarrow \sigma * A$ JE TAKTIEŽ 1-RANDOM (TO JE VIDIEŤ). □

DÔSLEDOK: ĽUBOVOĽNÁ Σ^0_1 TRIEDA $\mathcal{A}$ $(= [A])$

$\mathcal{M}(\mathcal{A}) < 1$. PODOM $\{\sigma * B : B \notin A\}$ NUTNE OBSAHUJE $\forall$ 1-RANDOM. ALE POZOR, MÔŽNO VIAC. (UŽ $\bar{A}$ MÔŽE OBSAHOVAŤ VIAC, SAMOZREJME $\overline{U}_k$ OBSAHUJE IBA 1-RANDOM).

MINULÝ SEMESTER: 0-1 DNR, ω-DNR

$\mathcal{M}$(HORNÝ KÚNUS GENEROVANÝ 0-1 DNR) = 0

D. $\mathcal{M}(\{B : B \geq_T f\}) = 0$

f ← 0-1 DNR

1-RANDOM VZNIKAJÚ ŠPECIÁLNOU DIAGONALIZÁCIOU VŠETKÝCH ML-TESTOV (STAČÍ UNIVERZÁLNY ML-TEST)

? VZŤAH 1-RANDOM K DNR-FUNKCIÁM

ÁNO, ALE NIE 0-1 DNR → TÝCH JE PRÍLIŠ MÁLO V MIERE.

VETA: PRE ĽUBOVOĽNÚ 1-RANDOM A EXISTUJE DNR f, $f \leq_T A$. (MOŽNO $f \leq$ EXP. RAND)

DÔKAZ. k ... $A \notin \mathcal{U}_k$, $A \in \overline{\mathcal{U}}_k$

(ZNALOSŤ k JE DÔLEŽITÁ)

MY POTREBUJEME TAKÚ f, $f(x) \neq \varphi_x(x)$

IDEA: $\varphi_x(x)$ ... KANDIDÁT NA (~~ŠPATNÝ~~)

KONEČNÝ ZAČIATOK ML-TESTU

PROGRAM e: ČAKÁ, ČI $\varphi_x(x)\downarrow$ (?)

KEĎ $\varphi_x(x)\downarrow$ = STRING σ, POTOM:

$\{e\}(j)\downarrow$ PRE $j < |\sigma|$

$\{e\}(j)$ = INDEX Σ^0_1 TRIEDY $\sigma(0)\ldots\sigma(j-1)$

DA $i_1, i_2, \ldots$, AŽ SKONČÍ!

BÚNO $e > k$.

$\{e\}(e)$ ... POKIAĽ JE DEFINOVANÉ, PODĽA KONŠTRUKCIE UNIV. ML-TESTU, PRÍSPEVOK $\{e\}(e) \ldots \subseteq \mathcal{U}_k$

24.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

ALE $A \notin U_k$. 2 MOŽNOSTI:

a) $\{e\}(e)\uparrow$ ... σ JE KRÁTKÉ

b) $\{e\}(e)\downarrow$ .... ALE IDE INAK NEŽ A

$\Rightarrow \sigma \not\leq A$

KONŠTRUKCIA:

$k \longmapsto e \longrightarrow$ STAČÍ VZIAŤ DOSŤ DLHÝ KUS A

BUĎ $A\restriction(e+1)$, ALEBO $\underbrace{A\restriction(j_0), \text{ KDE } j_0 > e \ \ldots}_{\text{PRI „DIVNOM" KÓDOVANÍ}}$

$\rightarrow f(x) \approx A\restriction(e+1)$

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $A\restriction(e+1) \neq \varphi_x(x)$.

ALE POZOR. T-STUPNE 1-RANDOM SÚ ŠPEC. PODTRIEDOU T-STUPŇOV DNR FUNKCIÍ.

0-1 DNR $\approx$ K.R. DA (SELF-REF.)

31.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

0-1 DNR FUNKCIE,
$\mathcal{A}$ Π^0_1 TRIEDA, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subseteq$ 0-1 DNR $\Rightarrow$

1) x_0 ... $\mathcal{A} \cap \{f : f(x_0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}\} \neq \emptyset$ (OBA PRÍPADY)

x_0 HRÁ ROLU NEROZHODNUTEĽNOSTI (GÖDEL)

$\varphi_{x_0}(x_0) =$ ČAKÁ, ak $\begin{cases} = 0 & \cap \mathcal{A} = \emptyset \quad \Sigma^0_1 \\ = 1 & \cap \mathcal{A} = \emptyset \quad \Sigma^0_1 \end{cases}$

$\varphi_{x_0}(x_0)\downarrow$ SPÔSOBÍ $\cap \mathcal{A} = \emptyset$

VIĎ MINULÝ SEMESTER & EF. NEODDELITEĽNÉ DVOJICE

LEMA: $\emptyset \neq \mathcal{A}$ Π^0_1 TRIEDA, $\mathcal{A} \subseteq$ 0-1 DNR
$\Rightarrow \exists x_0$ T.Z. $\{f : f(x_0) = i\} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ PRE $i = 0, 1$

D. $\exists f_0, f_1 \in \mathcal{A} : f_i(x_0) = i$

(V BODE x_0 MÔŽEM KÓDOVAŤ JAK 0, TAK 1
DO PRVKOV $\mathcal{A}$)

DÔKAZ: $\varphi_{x_0}(x_0)$ ... $\begin{cases} \text{PROGRAM HĽADÁ PRE } i=0 \text{ ALEBO } 1 \\ \mathcal{A} \cap \{f : f(x_0) = i\} = \emptyset \end{cases}$
↑ NÁJDEM PODĽA VETY O REKURZII (VR)

AK NÁJDE PRVÉ TAKÉ i ... POLOŽÍ $\varphi_{x_0}(x_0) := 1 \dot{-} i$.

DÔLEŽITÉ: KAŽDÁ 0-1 DNR g : $g(x_0) \neq \varphi_{x_0}(x_0)$
AK BY $\mathcal{A} \cap \{f : f(x_0) = i\} = \emptyset$
$\Rightarrow g(x_0) \neq \varphi_{x_0}(x_0) = 1 - i \Rightarrow g(x_0) = i \Rightarrow \mathcal{A} = \emptyset$.

" SPÔSOB DIAGONALIZÁCIE NEJAKÝCH Σ^0_1 OBJEKTOV URČUJE SPÔSOB SELF-REFERENCIE. "

VETA: $\mathcal{A}$ JE Π^0_1 TRIEDA, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ A $\mathcal{A}$ OBSAHUJE ASPOŇ JEDNU 1-RANDOM MNOŽINU T.J. $\mathcal{A} \cap \overline{U}_n \neq \emptyset$.

(ZNALOSŤ n JE DÔLEŽITÁ)

$\Rightarrow$ EFEKTÍVNE Z INDEXU $\mathcal{A}$ A n MOŽNO NÁJSŤ $\varepsilon > 0$ T.Z. $\mu(\mathcal{A}) > \varepsilon$.

SELF-REFERENČNÝ PRVOK: " KEBY SOM MALA MALÚ MIERU, TAK SOM PRÁZDNA. "

DÔKAZ. BÚNO $\mathcal{A} \cap \overline{U}_0 \neq \emptyset$, $A \subseteq \overline{U}_0$ (INAK VEZMI DOPLNIEK)

e ... PROGRAM

$U_0 = [U_0]$ JE Σ^0_1-TRIEDA, U_0 JE R.S MN. REŤAZCOV

$\{e\}(j)$ ČAKÁ, ČI $\mu([U_{0,s}]) > 2^{-j}$

T.J. V KROKU s UŽ VYGENEROVAL TOHO VEĽA



$\equiv [U_{0,s}]$

RACIONÁLNE INTERVALY DO KROKU s

AK ÁNO ... $\{e\}(j)\downarrow$ A VTEDY Σ^0_1 INDEX DOPLNKU TRIEDY $[U_{0,s}]$, T.J. INDEX $\overline{[U_{0,s}]}$

31.03.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

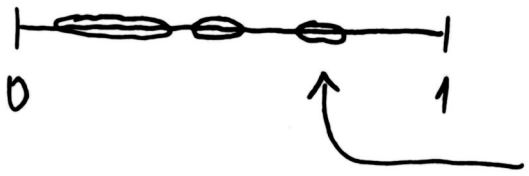
... ZREJME ~~$\mu([U_{0,s}]) < 2^{-j}$~~ (TJ. JE TOHO MÁLO)

DÔKAZ. BÚNO $A \cap \bar{U}_0 \neq \emptyset$, $A \subseteq \bar{U}_0$ (INAK VEZMI PRIENIK)

A JE $\Pi^0_1 \Rightarrow \bar{A}$ JE Σ^0_1, T. $\bar{A} = [W_a]$

VEZMEME e PROGRAM — R.S. MNOŽ. STRINGOV

$\{e\}(j)\downarrow \Leftrightarrow \mu([W_{a,s}]) > 1 - 2^{-j}$



VYGENERUJEM VEĽA (V MIERE) RAC. INTERVALOV

(NA A ZOSTÁVA MÁLO ... A JE V DIERACH MEDZI INT.)

$\{e\}(j)\downarrow = \Sigma^0_1$ INDEX $\overline{[W_{a,s}]}$

$\mu(\overline{[W_{a,s}]}) < 2^{-j}$ T. V MIERE MÁLO

$\overline{[W_{a,s}]}$ ... KONEČNE VEĽA RAC. INTERVALOV (DIER)

U_0 ... AK BY $\{e\}(e)\downarrow$

$\Rightarrow \overline{[W_{a,s}]} \subseteq U_0$

↳ OBSAHUJE A $\Rightarrow A \subseteq U_0$

A TEDA $A = \emptyset$.

SPOR ↯

$\Rightarrow \{e\}(e)\uparrow \Rightarrow \mu(A) \geq 2^{-e}$. ■

ĽAHKÉ POZOROVANIE:

$\mu(A) > 2^{-e}$, L ... NAJĽAVEJŠÍ PRVOK A

R ... NAJPRAVEJŠÍ PRVOK A

$L\Gamma_e \neq R\Gamma_e$.

KEĎ $L\Gamma_e = R\Gamma_e \Rightarrow \mu(A) < 2^{-e}$.

(NIE EFEKTÍVNE, PRETOŽE NEJDE EF. NÁJSŤ $L\Gamma_e$, $R\Gamma_e$) MOŽNO POUŽIŤ $L\Gamma_e$ AKO KÓD 0 A $R\Gamma_e$ AKO KÓD 1.

(NA ROZDIEL OD 0-1 DNR, KDE SME MALI KÓDOVACIE MIESTO) TERAZ BUDEME MAŤ KÓDOVACÍ INTERVAL



VETA: $\{\underset{\sim}{a} \mid \underset{\sim}{a}$ OBSAHUJE 1-RANDOM$\} \supseteq$

$\supseteq \{\underset{\sim}{a} \mid \underset{\sim}{a} \geq \emptyset'\}$.

TJ. $A \geq_T \emptyset' \Rightarrow \exists B : B \equiv_T A$ & B 1-RANDOM

07.04.2010 Mg
PETER ČERNO

NTINOZH REKURZE II

VETA: $\emptyset \neq A$ Π^0_1 TRIEDA, KT. OBSAHUJE ASPOŇ JEDNU 1-RANDOM $\Rightarrow$ JE MOŽNÉ EFEKTÍVNE (Z NIEČOHO?) DOSTAŤ $\varepsilon > 0$ T.Ž. $\mu(A) > \varepsilon$.

$\exists n_0 : A \cap \overline{U}_{n_0} \neq \emptyset$

↑ UNIVERZÁLNY ML TEST

1. K EFEKTIVITE POTREBUJEME POZNAŤ n_0

2. MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE $A \subseteq \overline{U}_{n_0}$ (INAK VEZMI $A \cap \overline{U}_{n_0}$)

Z INDEXU A A Z n_0 $\xrightarrow{\text{EFEKTÍVNE}}$ $\varepsilon > 0$

IF "MÁ MALÚ MIERU" THEN SOM $= \emptyset$

$\Rightarrow$ SPOR $\lightning$ $\Rightarrow$ NEMÁ MALÚ MIERU

$\{e\}(j)$ ... ∁ DOPLNOK A V KROKU s MÁ VEĽKÚ MIERU $(> 1 - 2^{-j})$

↑ PROGRAM PRE ML TEST

A JE Π^0_1 TRIEDA $\Rightarrow$ $\overline{A}$ JE Σ^0_1 TRIEDA

INDEX Σ^0_1 DIER ... MÁLO ... $< 2^{-j}$

BÚNO $n_0 = 0$

AK $\{e\}(e)\downarrow$, POTOM Z KONŠTRUKCIE ML TESTU (UNIV.) $\subseteq U_0$. IF $\downarrow$ ... SPOR. $\Rightarrow$ $\{e\}(e)\uparrow$

DÔSLEDOK: L, R – NAJĽAVEJŠÍ, NAJPRAVEJŠÍ PRVOK Δ

POTOM $L\Gamma_e \neq R\Gamma_e$

IDEA: $L\Gamma_e$ ... KÓD 0, $R\Gamma_e$ ... KÓD 1

ĽAHKO NAHLIADNÚŤ: NIE JE MOŽNÉ NA EFEKTÍVNE NÁJDUTEĽNÝCH MIESTACH KÓDOVAŤ NEKONEČNÚ INFORMÁCIU DO 1-RANDOM

AVŠAK JE MOŽNÉ NEEFEKTÍVNE (EFEKTÍVNE Z $\emptyset'$) NÁJSŤ KÓDOVACIE INTERVALY

OTÁZKA: AKO JE MOŽNÉ KÓDOVAŤ DO „CHAOSU"?
ODPOVEĎ: TAK ZLOŽITO, AKO JE ZLOŽITÝ TEN CHAOS

1-RANDOMNESS ... Σ^0_1-RANDOMNESS ..., STAČÍ $\emptyset'$

VETA: $\forall B \geq_T \emptyset' \; \exists A$ 1-RANDOM : $A \equiv_T B$,
TO ZNAMENÁ, ŽE

$$\{\underbrace{\underset{\sim}{a} \mid \underset{\sim}{a} \geq \underset{\sim}{\emptyset'}}\} \subseteq \underbrace{1\text{-RANDOM } T\text{-DEGREES}}$$

TOTO MÁ MIERU $\emptyset$ TOTO MÁ MIERU 1

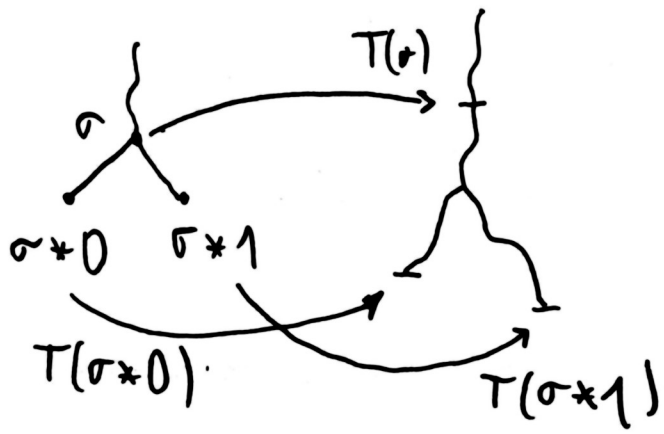
DÔKAZ. UROBÍME OBECNEJŠIU KÓDOVACIU METÓDU BÚNO ZAČNEME S $\overline{U}_0$ (OBSAHUJE IBA 1-RANDOM)
CIEĽ: $\emptyset'$-REK. „STROM" T

T: ZOBRAZENIE Z $2^{<\omega}$ DO $2^{<\omega}$

$T(\sigma * 0), T(\sigma * 1)$ PREDĹŽUJÚ $T(\sigma)$ A SÚ NEKOMPATIBILNÉ

07.04.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II



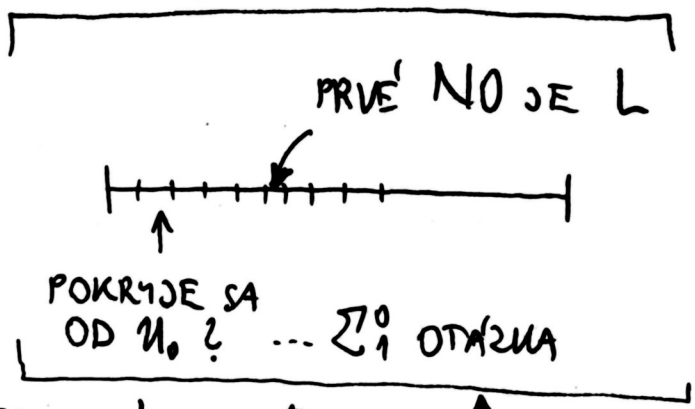
$\bar{U}_0$ ... EFEKTÍVNE NÁJDEŠ n TAKÉ, ŽE

$L\restriction n \neq R\restriction n$

L A R SA VZŤAHUJÚ K $\bar{U}_0$

$T(\emptyset) := \emptyset$

$T(0) := L$, $T(1) := R$



KDE POUŽIJEŠ $\emptyset'$ PRE NÁJDENIE L A R.

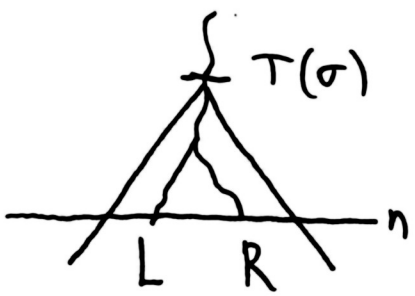
BUDEŠ POKRAČOVAŤ INDUKTÍVNE, A V KAŽDOM KROKU UROBÍŠ DVE VECI

INDUKTÍVNY POSTUP: MÁŠ PRE σ ... $T(\sigma)$

VIEŠ, ŽE $\bar{U}_0 \cap [T(\sigma)] \neq \emptyset$

REŤAZEC $T(\sigma) \cap \bar{U}_0$ ... JE Π^0_1 TRIEDA

1. EFEKTÍVNE NÁJDEŠ n (NOVÚ HĹBKU)



n NIE SPOČÍTAŠ EFEKTÍVNE, STAČÍ NÁM IBA REŤAZOK $T(\sigma)$!!!

2. POLOŽÍŠ $T(\sigma*0) := L\restriction n$, $T(\sigma*1) := R\restriction n$ ... POUŽIJEŠ $\emptyset'$

1 KROK:

1) EFEKTÍVNE SPOČÍTAME NOVÚ HĹBKU (n)
... PREDSTAVUJE DĹŽKU KÓDOVACIEHO INTERVALU
2) POMOCOU $\emptyset'$ ... $L\upharpoonright_n$, $R\upharpoonright_n$

$\Rightarrow$ T JE $\emptyset'$-REK. STROM (MÁME)

$B \geq_T \emptyset'$ $\quad A = T(B) = \bigcup_{\sigma < B} T(\sigma)$

A JE OBRAZOM B SKRZ STROM T

ZOSTÁVA: 1) A JE 1-RANDOM

TO JE VIDIEŤ: $A \in \mathcal{U}_0$

2) $A \equiv_T B$.

a) $B \geq_T \emptyset' \ldots \Rightarrow$ B DOKÁŽE SKONŠTRUOVAŤ T

$\Rightarrow$ B DOKÁŽE NÁJSŤ $T(B) = A \Rightarrow A \leq_T B$.

(VSIMNIME SI, ŽE VŽDY PLATÍ $T(B) \leq_T B \oplus \emptyset'$)

KÓDOVANIE = ŠIFRA ... ZLOŽITOSŤ $\emptyset'$

B DOKÁŽE ZAŠIFROVAŤ ... DO CHAOSU ... T. DO A

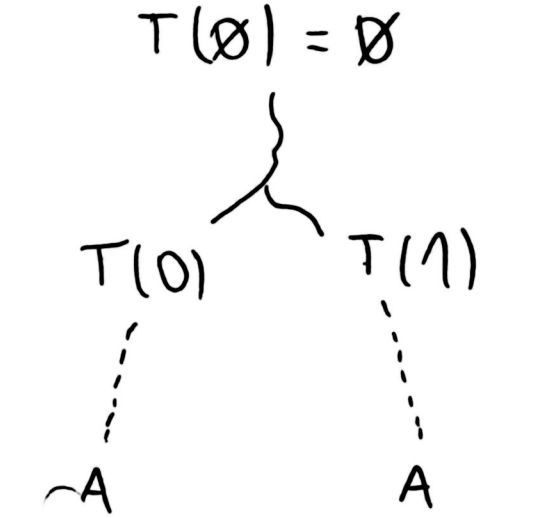
b) ZOSTÁVA DEKÓDOVANIE T. Z A NÁJSŤ B

DÔKAZ INDUKCIOU (JE TO TROCHU POMALČIE)

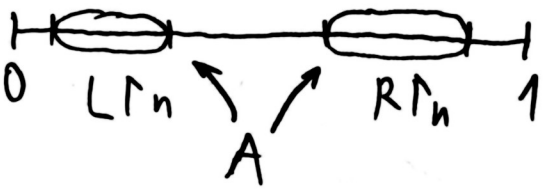
MÁME $A = T(B)$.

07.04.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II



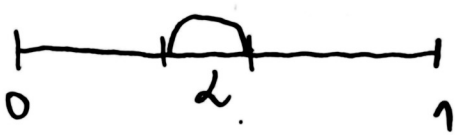
VIEME, ŽE BUĎ
$A > T(0)$,
ALEBO $A > T(1)$



EFEKTÍVNE NÁJDEME n, TEDA POLOHOU A MÁME $A \restriction n = \alpha$.
VIEME, ŽE BUĎ $\alpha = T(0) = L \restriction n$,
ALEBO $\alpha = T(1) = R \restriction n$.

PROGRAM ... ZĽAVA OD 0 $\langle 0,1 \rangle$
ZPRAVA OD 1 $\langle 0,1 \rangle$

VŠETKY VĽAVO OD α SA POKRYJÚ
VŠETKY VPRAVO OD α SA POKRYJÚ



α ... INTERVAL ... BUĎ NAJĽAVEJŠÍ NEPOKRYTÝ OD U_0, ALEBO NAJPRAVEJŠÍ NEPOKRYTÝ OD U_0

INTERVALY DĹŽKY 2^{-n}



MUSÍM SA DOČKAŤ, ĎALEJ NEMÔŽEM NÁJSŤ A TO IBA A PRÁVE JEDNU Z MOŽNOSTÍ (KEBY SA OBE STRANY POKRYLI, TO BY SA L A R V HĹBKE n NELÍŠILI).

ĎALEJ POKRAČUJEME INDUKCIOU

$\sigma < B$, NÁJDEME $T(\sigma)$ -
EFEKTÍVNE n, A V NOVEJ HĹBKE

DETAIL: $B \leq_T T(B)$

DOKONCA $B \leq_{wtt} T(B)$

BEZ DÔKAZU: NIE JE TO MOŽNÉ SPRAVIŤ LEPŠIE

07.04.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

FAKT: A 1-RANDOM $\Rightarrow$ $(A)_i$ 1 RANDOM

$(A)_i$ ... i-TÝ REZ $= \{ x \mid \langle x,i \rangle \in A \}$

DÔKAZ. TRIVIÁLNY.

ROZTIAHNI Z i-TEHO REZU NA CELÚ MNOŽINU.

PODOBNE AK Π NEKONEČNÁ REKURZÍVNA

$M = \{ m_0, m_1, \dots \}$

POVEM $\{A[m_i]\}$ JE 1-RANDOM ...

FAKT: A 1-RANDOM $\Rightarrow$ $(A)_0, (A)_1,$

POPR. $(A)_i, (A)_j$ PRE $i \neq j$ SÚ T NEPOROVNATEĽNÉ.

HESLO: „PÁRNA ČASŤ NEVIE NIČ O NEPÁRNEJ"

BUDÚCA PREDNÁŠKA → ĎALEKO OBECNEJŠIE TVRDENIE

T-POROVNATEĽNOSŤ → DÁVA Σ^0_1 APROXIMÁCIU V MIERE (Σ^0_1 MIERY 0)

Φ ČRF, $\mu^{\uparrow \Sigma^0_1}\left(\{ B : (B)_0 = \Phi((B)_1) \} \right) = 0$

D. PRAVDEPODOBNOSŤ TOHO, ŽE Z JEDNEJ ČASTI POČÍTAČ DRUHÚ, JE ROVNÁ 0.

IDEA: σ, τ $\quad \Phi(\tau) \geq \sigma$ $\quad \sigma \{ \quad \} \tau$

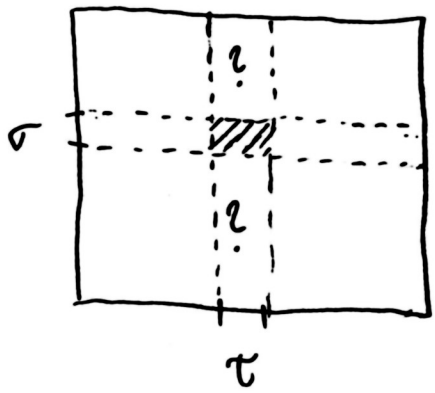
$|\sigma| = n$

z τ NESPOČÍTAM $2^n - 1$ RETAZKOV DĹŽKY $n \neq \sigma$

KOĽKO JE TAKÝCH $\sigma \oplus \tau$ .... $\Phi(\tau) \geq \sigma$?

VEĽMI MÁLO ... $\leq (2^n - 1)$ TÝCH OSTATNÝCH

$\oplus$



DEF. A JE B-1-RANDOM (1-RANDOM RELATIVE TO B)

RELATIVIZÁCIA ... B-ML TEST ...

EFEKTÍVNA POSTUPNOSŤ $\Sigma^{0,B}_1$ TRIED

B HRÁ ÚLOHU PREMENNEJ (NEKONEČNÝ VSTUP)

14.04.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

$\Sigma_1^{0,B}$ - TRIEDY

$f(n)$ ... PROGRAM PRE A_n ... $\Sigma_1^{0,B}$

PROGRAM, KTORÝ S POMOCOU B, GENERUJE A_n

VETA: VAN LAMBALGEN

(1) $X \oplus Y$ 1-RANDOM $\Rightarrow$

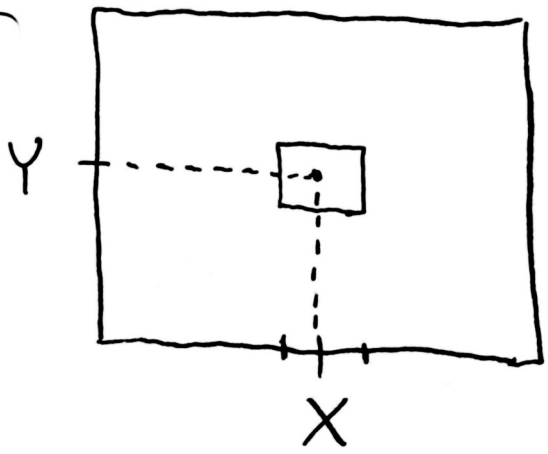
X JE Y-1-RANDOM & NAOPAK

(1-RANDOM RELATIVE TO Y)

(2) X 1-RANDOM
Y X-1-RANDOM
$\Rightarrow X \oplus Y$ 1-RANDOM

(A TEDA PODĽA (1) X JE Y-1-RANDOM)

DÔKAZ. (1)



IDEA: SPOROM

MALÉ OKOLIE X A NAD TÝMTO OKOLÍM ... MALÉ OKOLIE Z OSI PRE Y

→ MALÝ OBDĹŽNIČEK ... $X \oplus Y$

DOKAZUJEME, ŽE Y JE X-1-RANDOM

PREDPOKLADÁME, ŽE Y NIE JE X-1-RANDOM.

DOKÁŽEME, ŽE $X \oplus Y$ NIE JE 1-RANDOM → SPOR.

MÁME REKURZÍVNU POSTUPNOSŤ $\sum^{0,X}_1$ TRIED $\mathcal{A}_n$

$\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$, $\sigma^\mu(\mathcal{A}_n) < 2^{-n}$, $Y \in \bigcap \mathcal{A}_n$

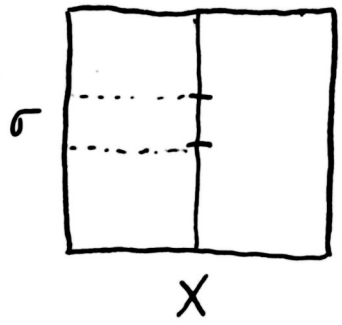
POZOR. MY MÁME REK. POSTUPNOSŤ INDEXOV

a_n ... $\sum^{0,X}_1$ - INDEX

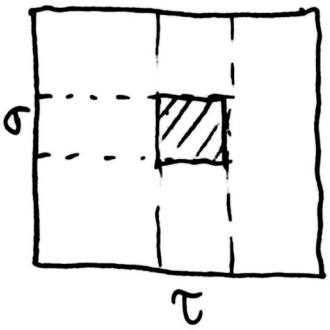
$\{a_n\}^X$ ... GENERUJE $\mathcal{A}_n$ ... $\sum^{0,X}_1$ TRIEDA

AK $\{a_n\}^X$ VYGENERUJE σ, TAK JE TO KVÔLI NEJAKÉMU KONEČNÉMU ZAČIATKU $\tau \leq X$

T.J.



JE V SKUTOČNOSTI



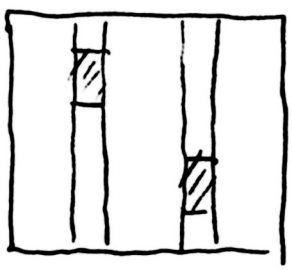
MÁM $\tau \oplus \sigma$

$\{\tau \oplus \sigma \mid$ KDE $\{a_n\}^\tau$ VYGENERUJE $\sigma\}$

X NEMÁME !

VEZMIME TEDA

$M = \{\tau \oplus \sigma,$ ĽUBOVOĽNÉ $\tau, \sigma \mid \{a_n\}^\tau$ VYGEN. $\sigma\}$



PROBLÉM: NIEKDE SA MÔŽE VYGENEROVAŤ VEĽA

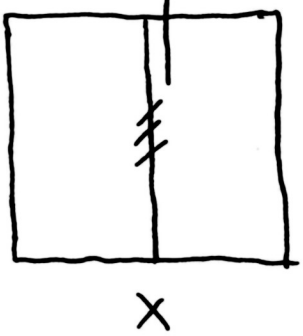
ALE NAD X, T.J. $\tau \leq X$ ... MÁLO

$(\mu(\mathcal{A}_n) < 2^{-n})$

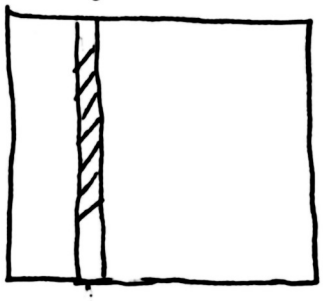
14.04.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

TAKŽE: → ISTE MÁLO!

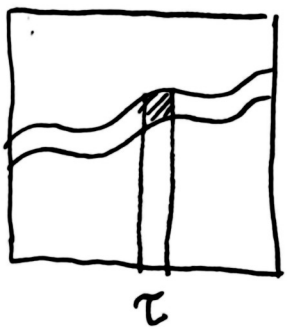


INDE MÔŽE BYŤ VEĽA



$\Rightarrow M_n^* = \{\tau \oplus \sigma \mid \tau$ ANI $\forall$ KOMPATIBILNÉ S τ !!! NEPRISPEJE VIAC NEŽ 2^{-n}... MIERA σ. ELSE STOP! PRE τ, TAKTIEŽ STOP PRE $\forall \lambda : \tau \trianglelefteq \lambda \}$

M_n^* ... RUKÁV, KTORÝ JE STÍHLY:



FUBINI: $\mu(M_n^*) < 2^{-n}$

A TAKTIEŽ $Y \in M_n^*$,

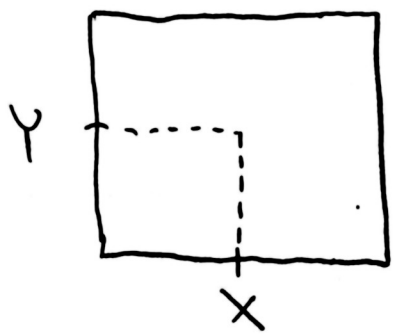
PRETOŽE NAD X JE TO O.K.

$(\mu(A_n) < 2^{-n})$

$\Rightarrow X \oplus Y \in$ RUKÁV, ČO JE SPOR ↯ □

$(X \oplus Y$ NIE JE 1-RANDOM$)$

(2)



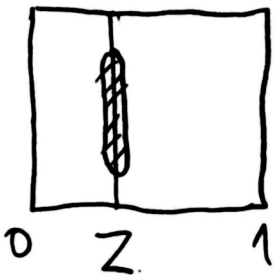
SPOROM: AK $X \oplus Y$ NIE JE 1-RANDOM, TAK EX. POST. Σ_1^0 TRIED A_n:

$A_{n+1} \subseteq A_n$, $\mu(A_n) < 2^{-n}$, $X \oplus Y \in \bigcap_n A_n$

FIX n

ZAUJÍMAJÚ NÁS : ČI Z ... Z-OVÝ REZ V A_n JE VEĽKÝ RELATÍVNE K VEĽKOSTI A_n ($< 2^{-n}$)

VEĽKÝ $\equiv 2^{-n+\frac{n}{2}} = 2^{-n/2}$



TAKÝCH Z MUSÍ BYŤ MÁLO RELATÍVNE K VEĽKOSTI A_n

TZN. $\mu(\dots) < 2^{-n/2}$

FINTA DÔKAZU

PROBLÉM: NEMÁM ŽIADNE MNOŽINY → MUSÍM ÍSŤ NA RETAZKY

$B_n = \{ Z \mid$ REZ V A_n NAD Z, TJ. Z-OVÝ REZ V A_n MÁ MIERU $> 2^{-n/2} \}$

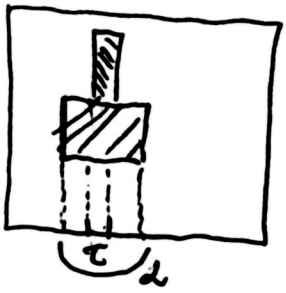
NAHLIADNIME, ŽE B_n JE Σ^0_1, PRETOŽE A_n JE Σ^0_1.

V A_n ... PRVKY $\tau \oplus \sigma$

B_n ... R.S. ČN. STRINGOV τ ...

$\tau \oplus \sigma$ ... A_n & ... MIERA

$\{ \tau \mid$ EXISTUJE σ : $\tau \oplus \sigma \in A_n$ & τ A RETAZKY λ : $\lambda \leq \tau$ DOMROBIA MI GENERUJÚ V A_n $> 2^{-n/2}$



MÁM B_n ... Σ^0_1 ... $\mu(B_n) < 2^{-n/2}$

$B_n^* := \bigcup_{j>n} B_n$ ... KONVERG. RAD

14.04.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

AK BY BOLO $\mathcal{M}(B_n^*) < 2^{-n}$ ... OK

AVŠAK OBECNE ... VYBRANÁ PODPOSTUPNOSŤ ...

X 1-RANDOM

EXISTUJE n_0 ... $X \notin B_{n_0}^* \Rightarrow X \notin B_j \quad j > n_0$

TZN. X-OVÉ REZY V A_n NIE SÚ VEĽKÉ

$\mathcal{M}$ (X-ový REZ V A_n) $\leq 2^{-n/2}$

$\Rightarrow$ Y NIE JE X-1-RANDOM, čO JE SPOR. $\lightning$ □

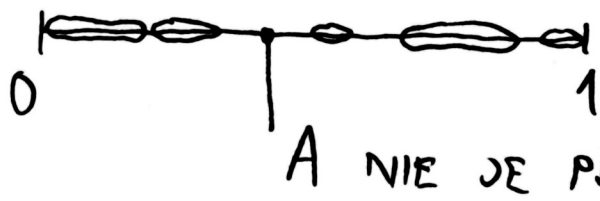
PLATÍ: UNIVERZÁLNY ML-TEST ($U_{n+1} \subseteq U_n$ ...)

$\mathcal{M}(U_n)$ JE 1-RANDOM.

ĽAHŠIA VERZIA: Σ_1^0 TRIEDA A, $\mathcal{M}(A) < 1$

$\mathcal{M}(A)$ JE REKURZÍVNE REÁLNE ČÍSLO

$\Rightarrow$ EXISTUJE REKURZÍVNA TN. A : $A \notin A$



DÔKAZ. $\varepsilon < 1$: $\mathcal{M}(A) < \varepsilon$, ε RACIONÁLNE



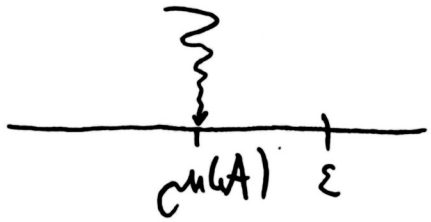
PRAVDEPODOBNOSŤ $\in A \quad < \varepsilon$

TO MUSÍ PLATIŤ BUĎ PRE ĽAVÚ, ALEBO PRAVÚ POLOVICU, TJ.

$\mu(A \cap \langle 0; \frac{1}{2} \rangle) < \frac{\varepsilon}{2}$, ALEBO

$\mu(A \cap \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\mu(A)$ JE REKURZÍVNA $\Rightarrow$ MOŽNO EFEKTÍVNE ROZHODNÚŤ



TOTO MOŽNO INDUKTÍVNE OPAKOVAŤ ... REKURZÍVNA A:

$\sigma \lesssim A \ldots \mu(A \cap [\sigma]) < \varepsilon \cdot 2^{-|\sigma|}$

$\Rightarrow A \notin A$.

VETA: A JE Σ^0_1, $\mu(A) < 1$, $\mu(A)$ NIE JE 1-RANDOM ($\in \Sigma^0_1$ MIERY 0)

$\Rightarrow$ NEPOKRÝVA VŠETKY NON-1-RANDOM

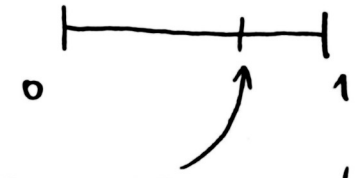
TJ. EXISTUJE $A \ldots$ NON-1-RANDOM & $A \in A$

DÔSLEDOK: $\mu(U_n)$ JE 1-RANDOM.

(VIĎ BUDÚCA PREDNÁŠKA)

21.04.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II



Σ^0_1 $\mu(A) < 1$ REK.

$\Rightarrow \exists$ REK. R, KTORÉ NIE JE POKRYTÉ $\mathcal{A}$

FAKT: UNIVERZÁLNY ML TEST, $\mu(\mathcal{U}_n) < 2^{-n}$
$\frown$ $\mathcal{U}_n$ ... $\mu(\mathcal{U}_n) < 1$, ALE $\forall$ REK. $R \in \mathcal{U}_n$
PRETOŽE R REK. $\Rightarrow$ R NIE JE 1-RANDOM

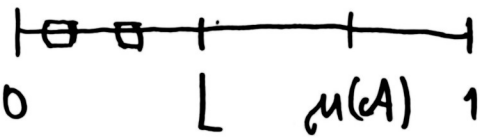
VETA: $\mathcal{A}$ Σ^0_1-TRIEDA, $\mu(\mathcal{A}) < 1$,
$\mu(\mathcal{A})$ NIE JE 1-RANDOM (JE NON-1-RANDOM)
$\Rightarrow \exists$ MNOŽINA A T. Ž. A NIE JE 1-RANDOM,
A ZÁROVEŇ $A \notin \mathcal{A}$. TJ. $\mathcal{A}$ NEPOKRÝVA
VŠETKY NON-1-RANDOM.

DÔSLEDOK: UNIV. ML TEST, $\mathcal{U}_{n+1} \subseteq \mathcal{U}_n$, $\mu(\mathcal{U}_n) < 2^{-n}$
DÔKAZ. $\mathcal{U}_n$ POKRÝVA $\forall$ NON-1-RANDOM
$\cap$ $\mathcal{U}_n$ JE NON-1-RANDOM.

DÔKAZ VETY. L (LEFTMOST) ... NECH $L \notin \mathcal{A}$



L ... NAJĽAVEJŠIA NEPOKRYTÁ
CESTA V $\overline{A}$.
$\mu(A)$ NIE JE 1-RANDOM $\Rightarrow$
L NIE JE 1-RANDOM.



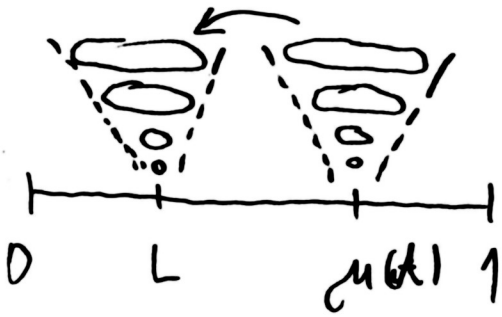
IDEA : APROXIMOVAŤ V MIERE $\mu(A)$

JE NAJMENEJ TAK ZLOŽITÉ, AKO APROXIMOVAŤ V MIERE L.

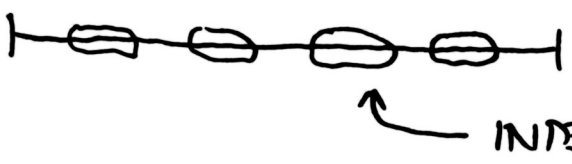
NÁJSŤ ML-TEST PRE L JE $\leq$
NÁJSŤ ML-TEST PRE $\mu(A)$.

PODĽA PREDPOKLADU ... $\mu(A)$ NIE JE 1-RANDOM
MÁME ML-TEST $\{B_n\}$ ... $\mu(A) \in \bigcap B_n$
(MÔŽEME POUŽIŤ AJ UNIV. ML-TEST)

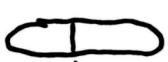
POSUNOM DOĽAVA (POTRHANE, BUDÚ TAM MEDZERY)
JE MOŽNÉ UROBIŤ ML-TEST ℓ_n ... $L \in \bigcap \ell_n$.



MAJME PEVNÉ n. B_n ... R.S.MN. $<$ RAC. INTERV. REŤAZKOV



V KROKU s SA MÔŽE STAŤ:

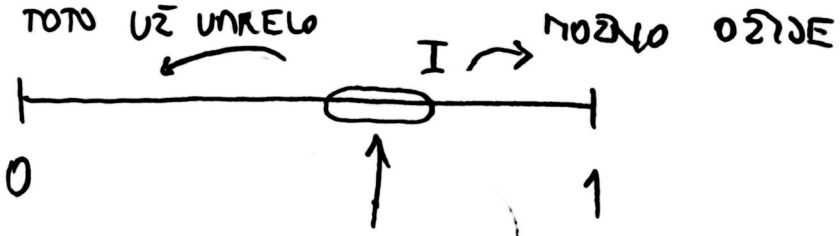


$\mu(B_{n,s}) \in I$

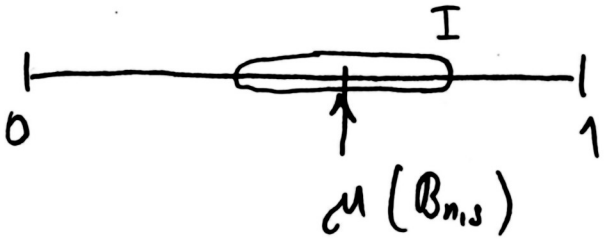
(I UŽ MÁME V KROKU s)

21.04.2010 We
PETER ČERNO

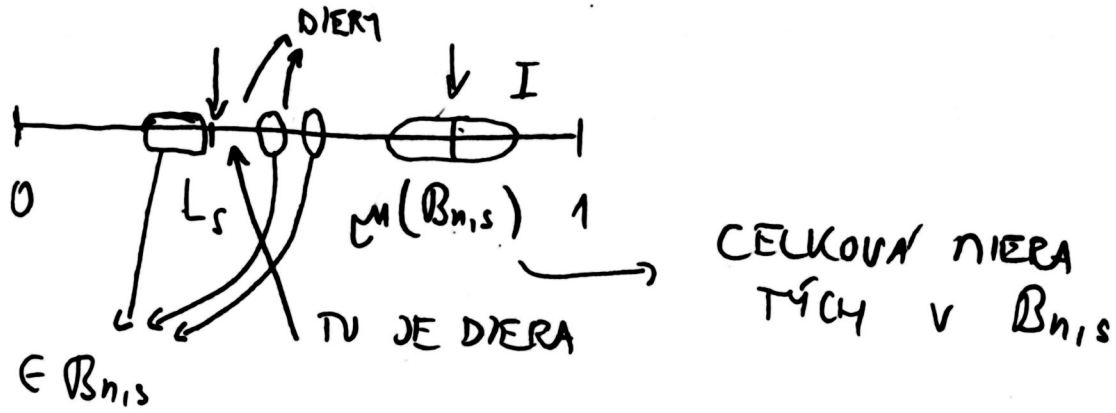
NTIN074 REKURZE II

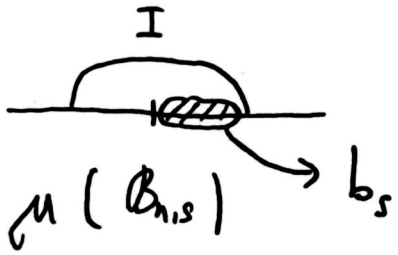


· V KROKU s MÁME APROXIMÁCIU



TOMU ZODPOVEDÁ L_s APROXIMÁCIA L V KROKU s:





VEZMI b_s = PRAVÝ KONIEC I

$b_s - \mu(B_{n,s})$ ... 

↑ TOLKO MÁM K DISPOZÍCII

ZAPLŇ OD L_s DO PRAVA MOMENTÁLNE MEDZERY V TEJTO VEĽKOSTI $b_s - \mu(B_{n,s})$

AK I JE FINÁL ... $L \in V$ TOMTO ZAPLNENÍ

(KONEČNE VEĽA INTERVALOV ... PRE MEDZERY)

J = MEDZERY OD L_s DO PRAVA V MIERE $b_s - \mu(B_{n,s})$

TERAZ TO MUSÍME UROBIŤ DYNAMICKY:

PRE KAŽDÉ MOMENTÁLNE ŽIVÉ ... SPRAVÍME TO ISTÉ

RAZ BUDE FINÁL ... $B_n \to C_n$ O.K.

ISTOTNÉ: $\mu(B_n) < 2^{-n} \Rightarrow \mu(C_n) < 2^{-n}$

IBA $I \in B_n$

$\{C_n\}$ JE ML-TEST. ... O.K. □

21.04.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

DEF. F JE MARTINGALE, $F: 2^{<\omega} \to \mathbb{Q}_+$

T.Z. $F(\sigma) = \frac{F(\sigma 0) + F(\sigma 1)}{2}$.

1 Kč → VSADÍM 0,5 Kč, REZERVA 0,5 Kč
PREHRA → 0,5
VÝHRA → 1,5
$\frac{0,5+1,5}{2} = 1$

BETTING STRATEGIES

DEF. F USPEJE NA A, AK $\limsup_{n\to\infty} F(A\restriction n) = +\infty$

NEUSPEJE, AK $\limsup_{n\to\infty} (A\restriction n) < \infty$.

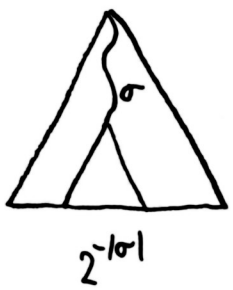
F USPEJE NA $\mathcal{A}$ ... AK USPEJE NA $\forall A \in \mathcal{A}$.

VETA (VILLE, 1939): ℓ MA' LEBESGUE MEASURE $0 \Leftrightarrow \exists$ MARTINGÁL F, KT. USPEJE NA ℓ

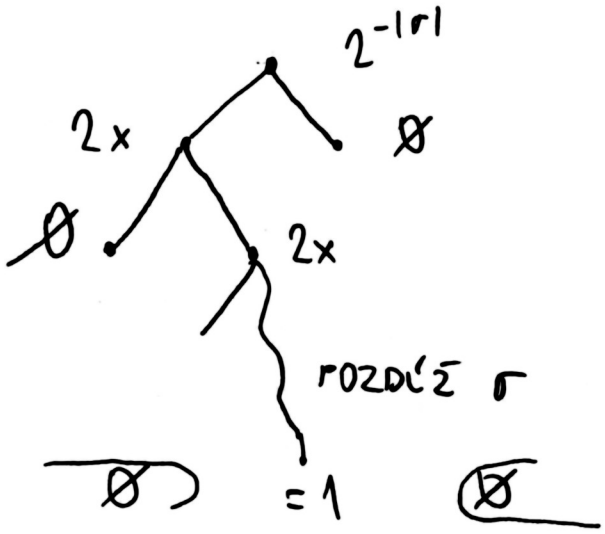
(LEB. MEASURE ... MOŽNO DEF. POMOCOU MARTINGÁLOV)

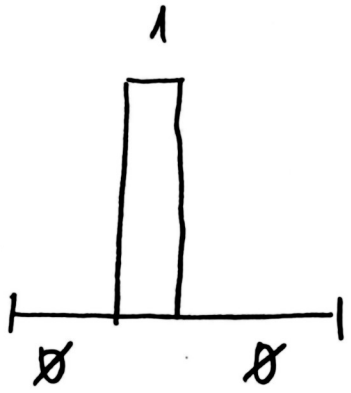
DÔKAZ. (STRUČNÁ IDEA)

$\Rightarrow$) ZÁKLAD: RETŤAZEC σ ... INTERVAL $2^{-|\sigma|}$



$F_\sigma(\tau) = \begin{cases} 2^{|\tau|-|\sigma|} & \tau \leq \sigma \\ 1 & \tau \geq \sigma \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$





$\mathcal{B}$ OPEN ... $\mu(\mathcal{B}) < 2^{-n}$

SPOČETNE VEĽA RAC. INIT. (RETIAZKOV σ)

KU KAŽDÉMU ... F_σ

$$F := \sum_{\sigma \in \mathcal{B}} F_\sigma$$

SÚČET MARTINGÁLOV JE MARTINGÁL (AK $\downarrow$)

$$F(\emptyset) = \mu(\mathcal{B}) < 2^{-n}$$

$\liminf F(A) = 1$ PRE $A \in \mathcal{B}$

NA $\mathcal{B}$ ... JE $= 1$.

$\mathcal{C}$ MÁ MIERU $\emptyset$ ... $\forall n \; \exists$ OPEN $\mathcal{B}_n$

$\mu(\mathcal{B}_n) < 2^{-n}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_n$

$F = \sum F_n$, $F(\emptyset) \leq \sum F_n(\emptyset) \leq \sum 2^{-n} \leq 2$

$\limsup F(A \restriction n) = +\infty$ PRE $A \in \mathcal{C}$.

21.04.2010 MC
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

$\Leftarrow$) F MARTINGALE, $F(\emptyset) \leq 1$

$\mu(A : F(A\restriction_n) \geq 2^n) \leq 2^{-n}$ Z DEF. MARTING.

$\mu(\{A : \limsup F(A\restriction_n) = \infty\}) = \emptyset$. □

DEF.: Δ = TRIEDA MARTINGÁLOV

(PR. POLY-TIME, COMPUTABLE = RECURSIVE, C.E., $\emptyset'$-REK.)

A JE Δ-NÁHODNÁ $\Leftrightarrow$ ŽIADEN MARTINGALE $\in \Delta$ NEUSPEJE NA A (A STRATÉGIA NEVEDIE K BOHATSTVU NA A).

SUPER-MARTINGALE $F(\sigma) \leq \frac{F(\sigma 0) + F(\sigma 1)}{2}$

VETA: 1-RANDOMNESS = ML-RANDOMNESS = = C.E. RANDOMNESS (Δ = C.E. MARTINGALE)

INŠPEKCIA EFEKTÍVNOSTI DÔKAZU VETY VILLE

B_n ... GENERUJÚCE R.S. MN. σ

$F_n(\emptyset) = \mu(B_n)$ ... LEFT-C.E. REAL



RAST. POSTUPNOSŤ RAC. ČÍSIEL ↗

$\mu(B_n)$ < NEMUSÍ BYŤ $\in \underline{0}$
IBA LEFT. C.E. REAL

TO ISTÉ PRE $\forall \tau$ ... $F(\tau)$

1-RANDOM

⇓

COMP.-RANDOM (Δ = REK. MARTINGAŁY)

⇓

SCHNORR-RAND (NAWIĄC ... NIE LEN $\limsup = +\infty$
ALE DOKONCA EFEKTYWNE)

28.04.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

KOLMOGOROVSKÁ ZLOŽITOST

KOLMOGOROV - CHAITIN - SOLOMONOFF

ZNAČENIE V MINULOSTI: $C, K, I, H, \ldots$

DNES: C ... PLAIN ORIGINAL
K ... PREFIX-FREE

MYŠLIENKA: $\underbrace{0 \ldots 0}_{n}$ VIEME SKRÁTIŤ LOGARITMICKY

CHAOS - NEPOPÍŠEŠ KRATŠIE (PROSTRIEDKAMI)

POLY-TIME, EFEKTÍVNE, $\emptyset'$-REK., ...

MY BUDEME NA ÚROVNI ČRF.

ČRF ψ ... $C_\psi(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \min\{|y| : \psi(y) = x\}$

STOTOŽNENIE $2^{<\omega} \leftrightarrow \omega$

T.J. $C_\psi(\sigma) = \min\{|\tau| : \psi(\tau) = \sigma\}$

y KÓDUJE $(\psi)\ x$ ...

KEĎ SI ZVOLÍME ψ_0 UNIVERZÁLNU ČRF,
POTOM C_{ψ_0} JE ADITÍVNE OPTIMÁLNA

$\psi_0(\text{kód}(\psi), y) \simeq \psi(y) \simeq x$

$C_{\psi_0} \leq C_\psi + \text{konšt.}$ PÍŠEME $C_{\psi_0} \equiv C_U \equiv C$.

K. ZLOŽITOSŤ MOHÁDZA OD ZLOŽITOSTI
FINITE STRINGS !! → OBTIAŽ INFINITE

NÁPAD : A JE NÁHODNÁ, KEĎ

$C(A\restriction_n) \geq n$ - KONŠT. (NESTLAČITEĽNOSŤ)

MARTIN LÖF DOKÁZAL, ŽE TAKÁ A NEEXISTUJE
→ DROBNÁ ÚPRAVA

VETA (ML) : NEEXISTUJE A T.Ž. $C(A\restriction_n) \geq n$ - KONŠT.

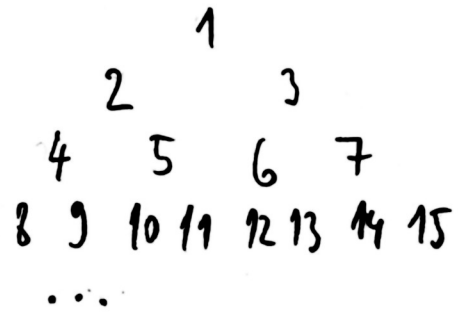
DÔKAZ. NECH A JE ĽUBOVOĽNÁ MNOŽINA

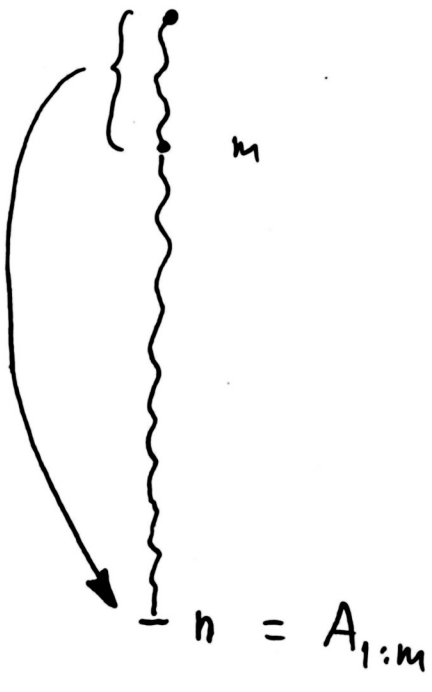
ZNAČENIE OD LI VITANYI ...

VEZMITE SI $A_{1:m}$ ... PRVÝCH m BITOV (DĹŽKA m)

$A_{1:m}$ JE BINÁRNY KÓD ČÍSLA n.

(m MÁ ÚROVEŇ $\log_2 n$).





TVRDÍME, ŽE

$C(A_{1:n}) \leq C(A_{m+1:n}) +$ KONŠT.

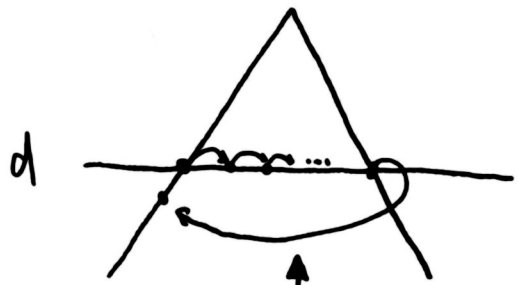
A TEDA $\leq n - m +$ KONŠT.

28.04.2010 we
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

Z POPISU (TJ. KÓDU) $A_{m+1:n}$ ZISTÍM, ČO JE n, A TEDA $A_{1:n}$.

PRESNEJŠIE: Z $A_{m+1:n}$ ZISTÍM DĹŽKU, TJ. $n-m$, A ODTIAĽ ZISTÍM n, ČO JE $A_{1:m}$.



NA TEJTO HLADINE d
0 1 DOPRAVA ...
KÓDOVANÉ ČÍSLO + 1

PROBLÉM: VRASTIE HĺBKA, TJ. KEĎ Z HLADINY d SKÁČEM NA HLADINU $d+1$

$\Rightarrow$ $n-m$ TAKTIEŽ JEDNOZNAČNE KÓDUJE m, A TEDA TAKTIEŽ n (AŽ NA TROUBLE)

$n-m$ AŽ NA KONŠTANTU KÓDUJE n AJ m.

$\Rightarrow$ $C(A_{m+1:n}) \leq C(A_{1:n}) + \text{KONŠT.}$

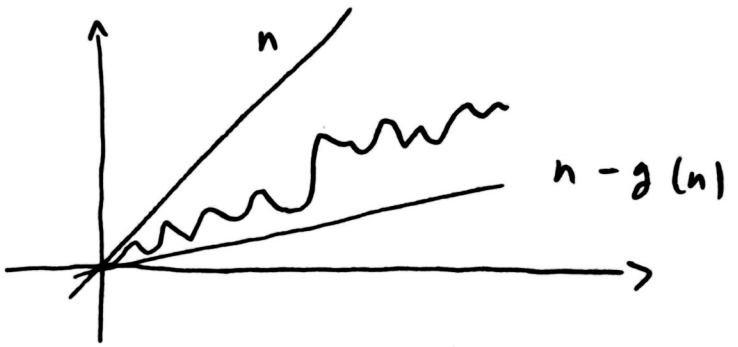
$C(A_{1:n}) \leq n-m + \text{KONŠT.}$

∞-KRÁT PRE ĽUBOVOĽNÉ m.

NAPRIEK TOMU C JE VEĽMI DÔLEŽITÉ

VIĎ STR. 9 DHNS.

$C(A\Gamma_n) \geq n - g(n) - O(1)$ $\forall$ g COMP. $\sum_n 2^{-g(n)} < \infty$ $\Big\}$ $\Leftrightarrow$ A JE 1-RANDOM



V ČOM JE PROBLÉM ?

α POPISUJE B ... MIERNE PODVÁDZANIE :

KEĎ MÁME α, POTOM MÔŽME

1) NAJSKÔR PRECÍTAŤ JEHO DĹŽKU
2) POTOM OBSAH

TJ. α KÓDUJE INFORMÁCIU O DĹŽKE $|\alpha| + \log_2 |\alpha|$ BITOV.

$\Rightarrow$ PREFIX-FREE KÓDOVANIE

PREFIX-FREE K-ZLOŽITOSŤ ... $K(x)$

ČRF ψ ... PREFIX-FREE DOMAIN

$\psi(\alpha)\downarrow \Rightarrow \psi(\alpha)\uparrow \quad \forall \alpha \succ \alpha$

ŽIADEN KÓD NIE JE ZAČIATOK INÉHO.

28.04.2010 Ut
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

SELF-DELIMITING KÓDOVANIE - ČÍTANIE KÓD, KONČÍME BEZ TOHO, ABY SME ČÍTALI POSL. BIT (IMPLICITNÝ END MARKER)

$\hat{x}$, NIEKEDY $\bar{x}$ ... $1^{|x|}0x$

TZV. PREFIX-FREE KÓD x.

... VEĽMI PLÝTVÁME! $|\hat{x}| = 2|x| + 1$.

⇝ BIN. BEZPREFIXOVÉ KÓDOVANIE:

→ DĹŽKA $|x| + 2\log|x| + \text{KONŠT.}$

$1^{|x|}$ ... BIN. KÓD JE DLHÝ $\log|x|$

↓ PREFIX-FREE

$2\log|x| + 1$

FAKT: ∞-KRÁT $> |x| + \log|x|$

$K_\psi(\sigma) = \min\{|\tau| : \psi(\tau) = \sigma\}$,

KDE ψ JE PREFIX-FREE.

FAKT: EXISTUJE UNIV. ČRF PREFIX-FREE

D. UNIV. PRE $\forall$ PREFIX-FREE ČRF.

DÔKAZ. ... T_n ... n-TÝ PREFIX-FREE TS (ČRF)

D. MÁME EF. KÓDOVANIE:

$TS_n \longrightarrow T_n$ ... NEZMENÍ TS_n AK JE OK. INAK OREŽE

POSTUPNE EF. GENERUJ DOMAIN TS_n, KONTROLUJ, ČI JE PREFIX-FREE.

$$U(1^m 0\, \sigma) = T_m(\sigma)$$

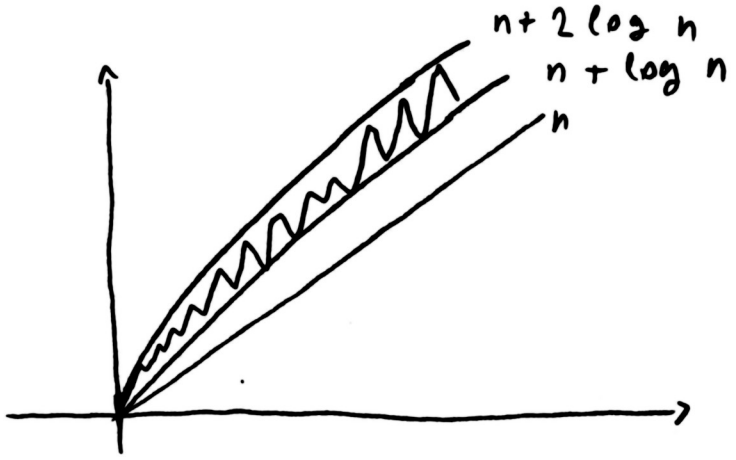
$\Rightarrow K_U \leq K_\psi +$ KONŠT. PRE ĽUBOVOĽNÚ PREFIX-FREE ψ.

FAKT: MOŽNO DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall c\ \exists \sigma$:

$$K(\sigma) \geq |\sigma| + \log|\sigma| + c.$$

FAKT: (VIEME) $K(\sigma) \leq |\sigma| + 2\log|\sigma| + O(1)$.

PRE NAJZLOŽITEJŠIE REŤAZKY:



$C(x|y)$ kód s pomocou y
$K(x|y)$

FAKT: $K(\sigma) \leq |\sigma| + K(|\sigma|) +$ KONŠT.

... EXISTUJE SPÚSTA ĎALŠÍCH ODHADOV

28.04.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

CIEĽ: A 1-RANDOM $\Leftrightarrow$ $K(A\restriction_n) \geq n +$ KONŠT.

HLAVNÝ POMOCNÍK: KRAFT-CHAITIN THEOREM

REK. POSTUPNOSŤ $\langle m_k, Y_k \rangle$ — m_k: DĹŽKY, Y_k: REŤAZCI

T.Z. $\sum_k 2^{-m_k} \leq 1$

$\Rightarrow \exists$ PREFIX-FREE M A REK. POST. z_k T.Z.
$M(z_k) = Y_k$ & $|z_k| = m_k$.

INÉ ZNAČENIE: $\langle d_i, \tau_i \rangle$, $\sigma_i \ldots |\sigma_i| = d_i$, $M(\sigma_i) = \tau_i$

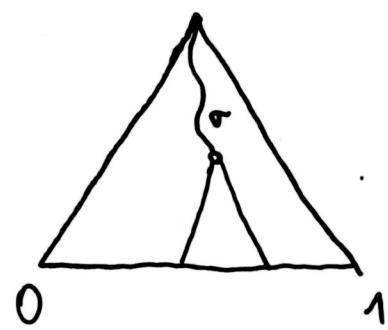
DÔSLEDOK:

$$K(Y_k) \leq K_M(\ldots) \leq m_k + \text{KONŠT.}$$

VTIP: POŽIADAVKY ... STRING Y_k, ZLOŽITOSŤ $\approx m_k$
VETA HOVORÍ, ŽE TO IDE, POKIAĽ $\sum_k 2^{-m_k} \leq 1$.

TRIVIALITA: M PREFIX-FREE $\Rightarrow$

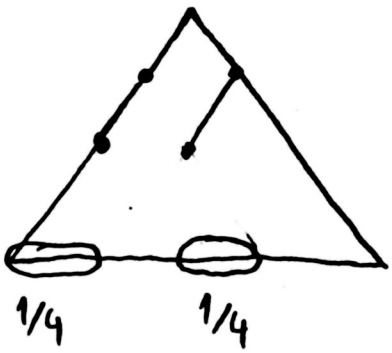
$$\sum_{M(\sigma)\downarrow} 2^{-|\sigma|} \leq 1.$$



$\Rightarrow$ DOSTÁVAME SYSTÉM NEPREKRÝVAJÚCICH SA INTERVALOV.

$\Rightarrow \sum 2^{-m_k} \leq 1$ — OE PODM. NUTNÁ !!

PRÍKLAD: $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$



NEVIEM KAM DAŤ $\frac{1}{2}$

PEKNÝ DÔKAZ JE NA STR. 11 DHNS.

05.05.2010 We
PETER ČERNO

NTINO74 REKURZE II

VETA (SCHNORR): A 1-RANDOM $\Leftrightarrow$

$K(A\restriction n) \geq n - c$

DÔKAZ. VIĎ CALIBRATING RANDOMNESS

1) POUŽITÍM KRAFT - CHAITIN

$\bigcap U_n$ ... UNIV. ML-TEST VEZMIME U_{2k} (PREFIX FREE FORMA)

BUDEM GENEROVAŤ R.S. MN. POŽIADAVKOV $\langle |\sigma| - k, \sigma \rangle$

... CHCEME POPIS $\sigma \in U_{2k}$ DĹŽKY $|\sigma| - k$.

$$\sum_k \sum_{\sigma \in U_{2k}} 2^{-|\sigma|+k} = \sum_k 2^k \sum_{\sigma \in U_{2k}} 2^{-|\sigma|} \leq$$

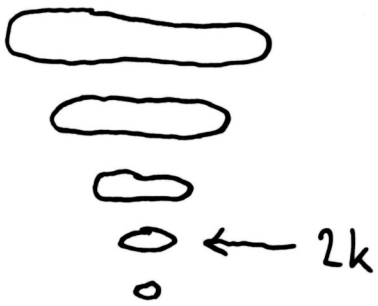
$$\leq \sum 2^k \cdot 2^{-2k} \leq 1.$$

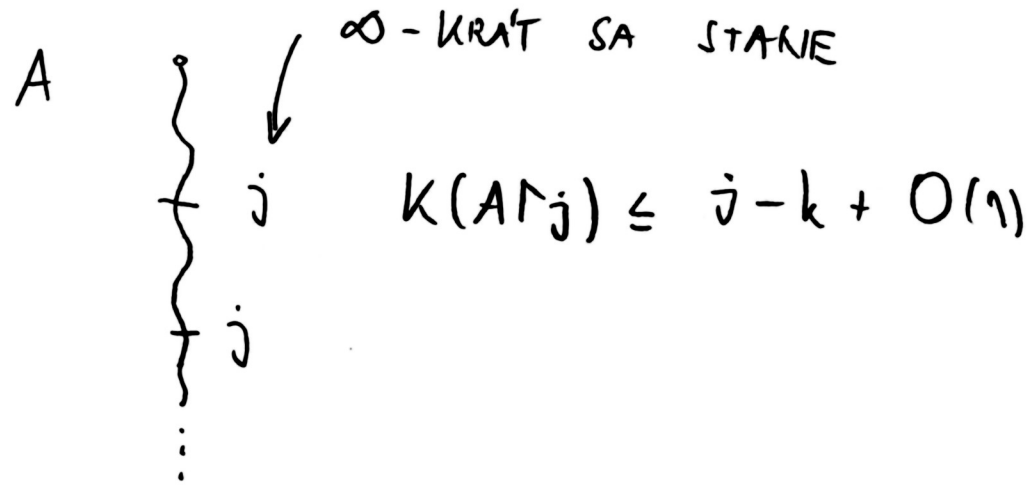
$\Rightarrow \exists$ PREFIX-FREE M ... $K_U \leq K_M + O(1)$

$A \in \bigcap_n U_n \Rightarrow$ PRE KAŽDÉ k ... $A \in U_{2k}$,

T.J. PRE NEJAKÉ j : $A\restriction j \in U_{2k}$

$K(A\restriction j) \leq j - k + O(1)$





2) CALIBRATING RANDOMNESS - ELEGANTNÝ DÔKAZ

$R_k = \bigcup \{ [\sigma] : K(\sigma) \leq |\sigma| - k \}$

TIE σ ... $K(\sigma) \leq |\sigma| - k$

OBJAVÍ SA POPIS σ DĹŽKY $|\sigma| - k$

... R.S. VLASTNOSŤ

$\exists \tau$, KROK s (V KROKU s $U(\tau) = \sigma$, $|\tau| \leq |\sigma| - k$)

$\{R_k\}$ ... REK. POSTUPNOSŤ Σ^0_1 TRIED

R_k JE Σ^0_1 TRIEDA

NIE JE TO ML - TEST ?

ONO SA UKÁŽE, ŽE JE !

ZREJME $R_{k+1} \subseteq R_k$.

ZOSTÁVA UKÁZAŤ, ŽE $\mu(R_k) \leq 2^{-k}$

P_k ... TIE σ, $K(\sigma) \leq |\sigma| - k$

ŽIADNE $\tau < \sigma$ TO NESPĹŇA

D. $K(\tau)$ PRE $\tau < \sigma$ JE $> |\tau| - k$.

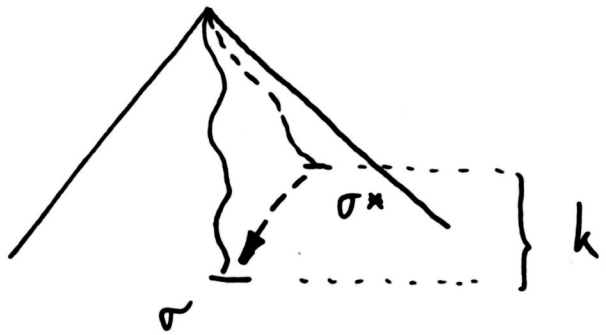
05.05.2010 MC
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

P_k JE PREFIX-FREE (TRIVIÁLNE)

$\sigma \in P_k$ ... EXISTUJE σ^* T.Ž. $U(\sigma^*) = \sigma$

$|\sigma^*| \leq |\sigma| - k$



KOĽKO JE σ^* ? ... $\mu(\ldots) \leq 1$

PRETOŽE $\sum_{\sigma \in dom(U)} 2^{-|\sigma|} \leq 1$

..... VÁHA $\forall$ KÓDOV

$\Rightarrow$ VÁHA KÓDOV TYPU σ^* ... $\leq$

$\Rightarrow \mu(R_k) \leq 2^{-k}$.

... TZV. EXPANZIA O 2^k.

$$\mu(R_k) = \sum_{\sigma \in P_k} 2^{-|\sigma|} \leq \sum 2^{-|\sigma^*|-k} =$$

$$= 2^{-k} \sum 2^{-|\sigma^*|} \leq 2^{-k}.$$

□

KEĎ JE A 1-RANDOM, TAK NIELENŽE $K(A\restriction n) \geq n - \text{const.}$, DOKONCA

$$\lim_{n\to\infty} \left(K(A\restriction n) - n \right) = +\infty$$



TO JE ROZDIEL OPROTI PLAIN: $C(\sigma) \leq |\sigma| + \text{const.}$

PRE ∞-VEĽA σ ... $K(\sigma) \geq |\sigma| + \log|\sigma|$.

<u>AMPLE EXCESS THEOREM</u>: KEĎ JE A 1-RANDOM $\Rightarrow$

1) $\sum 2^{n - K(A\restriction n)} < \infty$

2) f ... $\sum 2^{-f(n)} = +\infty \Rightarrow \exists^\infty n \left(K(A\restriction n) \geq n + f(n) \right)$

PRÍKLAD: $f(n) = \log n \Rightarrow \sum 2^{-f(n)} \sim \sum \frac{1}{n} = \infty$

<u>DÔKAZ</u>. 1) $\Rightarrow$ 2) (TO JE VIDIEŤ)

MARTINGALE ... $d(\sigma) = \dfrac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$

AK A JE 1-RANDOM $\Rightarrow \limsup_n d(A\restriction n) < \infty$

TO JE CHARAKTERIZÁCIA 1-RANDOM POMOCOU R.S. MARTINGÁLOV ..., d ... R.S. MARTINGALE

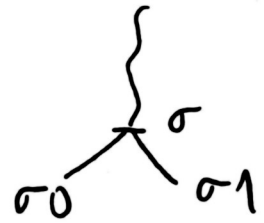
$$d(\sigma) = \underbrace{\sum_{\tau \preceq \sigma} 2^{|\tau| - K(\tau)}}_{} + \underbrace{\sum_{\sigma \prec \tau} 2^{|\sigma| - K(\tau)}}_{}$$

<u>IDEA</u>: ZAČIATOK SUMY $\sum 2^{n - K(A\restriction n)}$ $\quad 2^{|\sigma|} \cdot \sum_{\sigma \prec \tau} 2^{-K(\tau)}$

05.05.2010 We
PETER ČERNO

NTINOTY REKURZE II

CHCEM DOKÁZAT, ŽE $d(\sigma) = \dfrac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$



$$2^{|\sigma|} \sum_{\sigma \prec \tau} 2^{-k(\tau)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{|\sigma|+1} \sum_{\sigma 0 \prec \tau} 2^{-k(\tau)} + 2^{|\sigma|+1} \sum_{\sigma 1 \prec \tau} 2^{-k(\tau)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2^{|\sigma|+1} \cdot 2^{-k(\sigma 0)} + 2^{|\sigma|+1} \cdot 2^{-k(\sigma 1)}\right)$$

PRIHODÍME SEM

$$\sum_{\tau \preceq \sigma} 2^{|\tau| - k(\tau)} = \frac{1}{2}(\ldots)$$

$k(\sigma)$ ... MOŽNO APROXIMOVAŤ NERASTÚCOU POST.

$2^{-k(\sigma)}$ ... EF. (R.S.) NEKLESAJÚCA POST. RAC. ČÍSIEL

$\Rightarrow$ d JE R.S. MARTINGALE.

A 1-RANDOM $\Rightarrow$ $\limsup_n d(A\Gamma_n) < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum 2^{n - K(A\Gamma_n)} < +\infty$. □

NA BUDÚCE:

CHAITIN NUMBER $\Omega = \sum_{U(\sigma)\downarrow} 2^{-|\sigma|}$

... PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE $U(\sigma)\downarrow$.

19.05.2010 VK
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

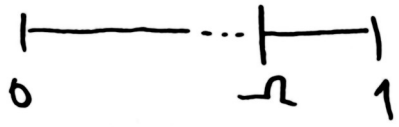
U ... UNIV. PREFIX-FREE

$$\mu(\mathrm{dom}(U)) = \sum_{U(\sigma)\downarrow} 2^{-|\sigma|} < 1$$

HALTING PROBABILITY ... CHAITIN Ω

KROKY ... Ω_s ZA s - KROKOV

- Ω_s NEKLESAJÚCA, TJ. $\Omega_s \nearrow \Omega$



Ω JE LEFT C.E. REAL

UKÁŽEME, ŽE Ω JE 1-RANDOM

$K = \{x \mid \varphi_x(x)\downarrow\}$ ... ZÁVISÍ NA NUMERÁCII ČRF

MYHILL ... ĽUBOVOĽNÉ DVE VARIANTY K SÚ REKURZÍVNE IZOMORFNÉ ...

- SOLOVAY : $\leq \mathrm{dom}$ ALEBO $\leq_s$

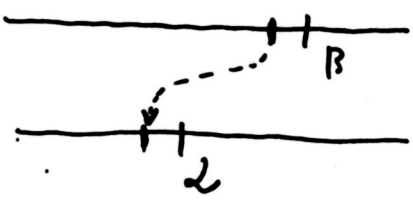
... MÁ VEĽKÝ VÝZNAM PRE LEFT C.E. REAL. ČÍSLA

DEF.: $\alpha \leq_s \beta$, KEĎ

Z DOSTATOČNE PRESNEJ APROXIMÁCIE β

$\rightarrow$ TAK ISTO DOBRÚ APROXIMÁCIU α

FORMÁLNE :



EXISTUJE KONŠT. c A ČRF f T. Ž.

$q < \beta$, q JE RAC. ČÍSLO

$\Rightarrow f(q)\downarrow$ A $f(q) < \alpha$,

$\alpha - f(q) < c \cdot (\beta - q)$

DEF. β JE SOLOVAY COMPLETE, KEĎ

β JE LEFT. C.E.

A ĽUBOVOĽNÉ LEFT C.E. $\alpha \leq_s \beta$.

.... β JE Ω-LIKE.

β ... Ω-NUMBER (PRE NEJAKÝ PREFIX FREE U

... $\beta = \Omega_U = \mu(\mathrm{dom}(U))$).

$\Downarrow$ $\Uparrow$

β JE Ω-LIKE.

$\Downarrow$ $\Uparrow$

LEFT C.E. & 1-RANDOM

(Σ:) EKVIVALENTNE!

DOKÁŽEME IBA: Ω-NUMBER $\Rightarrow$ LEFT C.E. & 1-RANDOM

IDEA: POMOCOU VR ... "HALT.-PROB. JE NEREK."

NECH φ_{z_0} ... ORF, ROZHODUJE HP

$\varphi_h(x)$ ... PODĽA VR x_0 ... $\varphi_{x_0} = \varphi_h(x_0)$

$\varphi_{x_0}(w)$ .... $\varphi_{z_0}(x_0)$ ... ROZHODNI OPAČNE!

↑ DOSAĎ x_0

19.05.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

FAKT Ω-NUMBER JE LEFT C.E. (TRIVIÁLNE) A 1-RANDOM:

DÔKAZ. (SCHNORR) $K(\Omega \restriction n) \geq n - \text{KONŠT.}$

TRIK: POMOCOU SELF-REFERENCIE (VR) c

KEDYKOĽVEK $K_s(\Omega \restriction n) < n - c$

$\longrightarrow$ ZVÄČŠENIE ↗

(V KROKU s)

POMOCOU VR ... PREFIX-FREE TS (ČRF) M

POZNÁME KÓDOVACIU KONŠTANTU v U

U POPISUJE NAJHORŠIE O DĹŽKU c NEŽ M.

V KROKU s:

$\Omega_s \restriction n$ ... $K(\cdot) < n - c$

τ ... $U_s(\tau) = \Omega_s \restriction n$, $|\tau| < n - c$



ZVOLÍME $\mathcal{M}$ ĽUBOVOĽNE, ABY $\notin \text{rng } U$

$M(\tau) = \mathcal{M}$

... TO SA PREJAVÍ PRÍRASTKOM DEF. OBORU U

$\Rightarrow \Omega_s$ POPORASTIE

M KÓDOVANÉ V $\mathcal{U}$

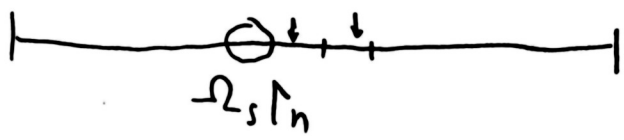
EXISTUJE ν : $U(\nu) = \mathcal{M}$, PRIČOM

$|\nu| \leq |\tau| + c$

D. $U(\nu) = M(\tau) = \mathcal{M}$

$\Omega - \Omega_s \geq 2^{-|\nu|} \geq 2^{-n}$

V HĹBKE n ... $\Omega_s \restriction n$ NIE JE KOREKTNÝ ZAČIATOK Ω



2^{-n}

NAJMENEJ O JEDEN DIELIK POSUNUL DO PRAVA □

BEZ DÔKAZU : A REK. ... $C(A \restriction n) \leq C(n) + KONST.$

$C(n)$ ... ZLOŽITOSŤ n-TÉHO REŤAZCA } VIDIEŤ TO ROVNAKO
ZLOŽITOSŤ 0^n

KOMBINATORICKÝ ZLOŽITEJŠÍ FAKT ;

$C(A \restriction n) \leq C(n) + KONST. \Rightarrow$ A REK.

IDEA. STROM REK. → KONEČNE VEĽA VETIEV

NEKONEČNÝCH VETIEV ... $O(2^{konst.})$

KONŠTRUKCIA TOHO STROMU ... ŤAŽKÁ

TZV. C - TRIVIAL SETS

19.05.2010 We
PETER ČERNO

NTIN074 REKURZE II

K ... PREFIX-FREE

DEF. A ... K-TRIVIAL

$K(A\restriction n) \leq K(n) + \text{KONST.}$

.. $K(0^n)$ ..

FAKT: A REK. $\Rightarrow$ K-TRIVIAL

$K(A\restriction n) \leq K(n) + \text{KONST.}$

ZREJME: $n \to$ PROGRAM PRE $A \to A\restriction n$

CHAITIN: A K-TRIVIAL $\Rightarrow$ $A \leq_T \emptyset'$, $A \in \Delta^0_2$.

IDEA: $\emptyset'$-REK. STROM ... KONEČNE VEĽA VETIEV

IZOLOVANÉ VETVY V $\emptyset'$-REK. STROME ... $\emptyset'$-REK.

OPÄŤ PLATÍ ODHAD $O(2^{\text{KONST.}})$

VETA: EXISTUJÚ NEREKURZÍVNE MNOŽINY, KT. SÚ K-TRIVIAL.

... DOKONCA R.S.!

TENTO POJEM MÁ ĎALŠIE EKVIV. VYJADRENIE (ROBUSTNOSŤ!)

DEF. LOW FOR K ... A

$K(\sigma) \leq K^A(\sigma) + \text{KONST}$ $\forall \sigma$

(A NEPOMÔŽE NÁJSŤ KRATŠÍ POPIS, KÓD ...)

DEF. A LOW FOR ML-RANDOMNESS

$1\text{-RANDOM} = 1\text{-RANDOM}^A$

UNIV. $\{U_n\}$ $\qquad \bigcap U_n = \bigcap U_n^A$

UNIV. A-TEST $\{U_n^A\}$

A NEODHALÍ ŽIADNU NOVÚ ZÁKONITOSŤ
... NEMENÍ TRIEDU 1-RANDOM

DEF. BAJE FOR ML-RANDOMNESS

EXISTUJE Y : 1) $A \leq_T Y$

2) Y JE A-1-RANDOM



ČASŤ EXTRÉMNE ŤAŽKÁ:

EKVIVALENTNÉ POJMY:

LOW FOR K ($\Leftrightarrow$) LOW FOR ML-RAND. ($\Leftrightarrow$)

K-TRIVIAL ($\Leftrightarrow$) BAJE FOR ML-RAND

(AKSAK NIE EFEKTÍVNE KONST. $\mapsto$ KONST.)

NAJNÁ $3 \mapsto 1$