Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Pravděpodobnostní metody
BONUS

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc.
E-mail: Jaromir.Antoch@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~antoch/`

Anotace: Prohloubení poznatků z bakalářského kursu Pravděpodobnost a statistika a jejich rozšíření o základy dalších disciplín teorie pravděpodobnosti, zejména o teorii a využití Markovových řetězců, teorii front, teorii spolehlivosti a teorii informace.

Sylabus:

1. Spojité a diskrétní náhodné veličiny a jejich charakteristiky. Náhodné vektory a jejich charakteristiky.
2. Centrální limitní věta a její aplikace.
3. Markovovy řetězce, klasifikace stavů, pojem stacionárního rozdělení.
4. Poissonův proces a jeho aplikace.
5. Základy teorie front, modelování obslužných zařízení. Modely zrodu a zániku.
6. Exponenciální rozdělení a jeho využití v teorii spolehlivosti. Charakteristiky spolehlivosti, doba do poruchy, intenzita poruch, spolehlivost složitých systémů.
7. Pojem informace z pravděpodobnostního a statistického pohledu.

Cíl předmětu: Studenti se seznámí se základy teorie markovských řetězců, modely zrodu a zániku, modely hromadné obsluhy a náhodných procesů. Toto jim umožní pochopit stochastický přístup modelování reálných náhodných jevů v této oblasti.

Literatura:

1. Prášková Z. a P. Lachout, Základy náhodných procesů, Karolinum, Praha 1998.
2. Feller W., An introduction to probability theory and its applications, Wiley, New York 1970.

28.04.2009 TH
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

NÁHODNÝ PROCES ... RODINA $\{X_t, t\in T\}$ NA $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
AK $T=\mathbb{N}_0$ $(\mathbb{Z})$ ... PROC. S DISKR. ČASOM / ČASOVÝ RAD
AK $T=\langle a,b\rangle$ ... PROC. SO SPOJ. ČASOM

$(S, \mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ JE σ-ALGEBRA PODMNOŽIN S: ... STAVOVÝ PR. $\{X_t\}$
PROCES S DISKRÉTNYMI / SPOJITÝMI STAVMI

PRE $t\in T$ JE $X_t(\cdot)$ NÁH. VELIČINA NA Ω
AK $\omega\in\Omega$ JE $X_{(\cdot)}(\omega)$ TRAJEKTÓRIA PROCESU $\{X_t, t\in T\}$

PRE $\{t_1,\dots,t_n\}\subset T$: $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) := P(X_{t_1}\le x_1,\dots,X_{t_n}\le x_n)$

- a) MOŽNO PERMUTOVAŤ $\uparrow$
- b) $\lim_{x_{n+1}\to\infty} F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$

→ KONZISTENTNÝ SYSTÉM DISTR. FCIÍ. $\{F_{t_1,\dots,t_n}\}$

$\mu_t := EX_t$ ... STREDNÁ HODNOTA PROCESU $\{X_t\}$
AK $E|X_t|^2<\infty$ $\forall t\in T$, POTOM
$R(s,t) := E(X_s-\mu_s)(X_t-\mu_t)$ ... AUTOKOVARIANČNÁ FCIA. PROCESU $\{X_t\}$
$R(t,t)$ ... ROZPTYL V ČASE t

$\{X_t\}$ STRIKTNE STACIONÁRNY $\Leftrightarrow$
$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n)$
DISTR. FCIA. SA NEMENÍ PRI POSUNUTÍ V ČASE

SLABÁ STACIONARITA : STREDNÁ HODNOTA KONŠT. V ČASE
$R(s,t)$ ... FUNKCIA ROZDIELU $t-s$

$\{X_t\}, \{Y_t\}$ STOCHASTICKY EKVIVALENTNÉ $\Leftrightarrow$
$\forall t\in T$: $P(X_t=Y_t) = P(\omega: X_t(\omega)=Y_t(\omega)) = 1$.

$$P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n) = P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \dots, X_{t_n} = Y_{t_n}) = P(Y_{t_1} \le x_1, \dots, Y_{t_n} \le x_n)$$

STOCHASTICKÝ EKV. PROCESY NEMUSIA MAŤ ROVNAKÉ TRAJEKTÓRIE

$\{X_t\}$ <u>STOCHASTICKY SPOJITÝ</u> V BODE $t_0 \in T \Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to t_0} P(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon) = 0.$$

NEMUSÍ MAŤ SPOJITÉ TRAJEKTÓRIE

AK T NIE JE SPOČETNÁ, MNOŽINY

$$\{\omega : X_t(\omega) \in B, t \in T\} = \bigcap_{t \in T} \{\omega : X_t(\omega) \in B\}$$

NIE SÚ OBECNE V $\mathcal{A}$,

$\sup_{t \in T} X_t$, $\inf_{t \in T} X_t$ NEMUSIA BYŤ NÁH. VELIČINY

$\{X_t, t \in T\}$, ($T \subset \mathbb{R}$ JE INTERVAL) JE <u>SEPARABILNÝ</u> $\Leftrightarrow$

$\exists$ SPOČETNÁ HUSTÁ $D \subset T$ ... <u>SEPARANT PROCESU</u> $\{X_t\}$

$\exists$ <u>JAV</u> $\Lambda \subset \Omega$ S NULOVOU PRAVDEPODOBNOSŤOU:

$\forall$ UZAVRETÁ $C \subset \mathbb{R}$, $\forall$ OTVORENÝ INTERVAL $J \subset T$:

$$\{\omega : X_t(\omega) \in C, \forall t \in J \cap D\} - \{\omega : X_t(\omega) \in C, \forall t \in J \cap T\} \subset \Lambda$$

D. $\underbrace{\Lambda^c \cap \{\omega : X_t(\omega) \in C, \forall t \in J \cap D\}}_{\text{JAV z } \mathcal{A}} = \Lambda^c \cap \{\omega : X_t(\omega) \in C, t \in J \cap T\}$

POZN. SEPARABILITY PROCESU UMOŽŇUJE REDUKOVAŤ ŠTÚDIUM ISTEJ VLASTNOSTI V, KTORÁ SA VZŤAHUJE KU VŠETKÝM HODNOTÁM $t \in T$, NA ŠTÚDIUM TEJTO VLASTNOSTI IBA PRE SPOČETNE VEĽA HODNÔT t.

28.04.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

PRE KAŽDÉ $\omega \in \Omega^c$, $t \in T$ EXISTUJE $\{t_n\} \subset D$, $t_n \to t$ ▽
TAKÁ, ŽE $X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$. o

VETA: NECH $\{X_t\}$ JE REÁLNY STOCHASTICKÝ SPOJITÝ PROCES A $T \subset \mathbb{R}$ JE KOMPAKTNÝ INTERVAL. POTOM EXISTUJE STOCHASTICKY EKVIVALENTNÝ PROCES, KTORÝ JE SEPARABILNÝ A MERATEĽNÝ.

PRÍKLADY:

(1) BIELY ŠUM: PROCES $\{X_t\}$ NEKORELOVANÝCH NÁH. V. S NULOVOU STR. HODNOTOU A ROVNAKÝM KONEČNÝM ROZPTYLOM.

(2) NÁHODNÁ PRECHÁDZKA NA PRIAMKE

(3) GALTONOV-WATSONOV PROCES VETVENIA .. #JEDINCOV V GEN.

(4) POISSONOV PROCES ... VÝSKYT UDALOSTÍ V ČAS. INT. $\langle 0, t\rangle$
- V INTERVALE $(t, t+h\rangle$ NEZÁVISLE NA t DÔJDE K VÝSKYTU 1 UDALOSTI S PRAVD. $\lambda h + o(h)$, $\lambda > 0$
- VIAC NEŽ 1 UDALOSŤ S PRAVD. $o(h)$
- POČTY UDALOSTÍ V DISJ. ČAS. INTERV. SÚ NEZÁVISLÉ N.V.

N_t .. POČET UDALOSTÍ V $\langle 0,t\rangle$ ... $\{N_t, t \geq 0\}$ .. POIS S. PROC.

PLATÍ: $P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$ $k = 0, 1, \ldots$

λ ... INTENZITA POISSONOVHO PROCESU

(5) WIENEROV PROCES (BROWNOV POHYB) $\{W_t, t \geq 0\}$:
a) $W_0 = 0$. $\{W_t, t \geq 0\}$ MÁ SPOJITÉ TRAJEKTÓRIE
b) $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$: $W_{t_2 - t_1}, W_{t_3 - t_2}, \ldots, W_{t_n - t_{n-1}}$ NEZÁV. N.V.
c) $0 \leq t < s$ $W_{s-t} \sim N(0, \sigma^2(s-t))$.

MARKOVOVE REŤAZCE S DISKRÉTNYM ČASOM

$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavov S (búno $S = \{0,1,\dots,N\}$ alebo $S = \{0,1,\dots\}$)

$\forall i \in S \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; P(X_{n_0} = i) > 0$ → kvôli podm. pravd.

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \leftarrow \text{MARKOVOVSKÁ VLASTNOSŤ}$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$$

kde $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) > 0$

$$p_{ij}(n, n+1) := P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

≡ <u>PRAVDEPODOBNOSŤ PRECHODU</u> zo stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$. (prst. prechodu 1. rádu)

$$p_{ij}(n, n+m) := P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

≡ <u>PRAVDEPODOBNOSŤ PRECHODU</u> m-TÉHO RÁDU

KEĎ NEZÁVISÍ NA KONKRÉTNYCH ČAS. OKAMŽIKOCH, ALE IBA NA ROZDIELI m → <u>HOMOGÉNNY MARKOVOV REŤAZEC</u>

→ ZNAČÍME p_{ij} → $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$. $\forall i \; \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ $(*)$ $\quad p_{ij} \geq 0$

$(*)$ ≡ <u>STOCHASTICKÁ MATICA</u>, $\mathbb{P}$ ... <u>MATICA PRAVD. PRECHODU HOMOGÉNNEHO M.R.</u> spĺňa $(*)$

$p_i := P(X_0 = i)$ $i \in S$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i \in S} p_i = 1$

$\mathbb{p} = (p_i)$ .. <u>POČIATOČNÉ ROZDELENIE M.R.</u>

<u>VETA</u>:

$\{X_n\}$ je homogénny Markovov reťazec s poč. rozd. $\mathbb{p}$ a maticou pravdepodobností prechodu $\mathbb{P}$ $\Leftrightarrow$

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_k = i_k) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k}$$

o $\forall k \in \mathbb{N}_0 \; \forall i_0, \dots, i_k \in S$.

28.04.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

D: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ AK $P(B) > 0$

$\Rightarrow \boxed{P\left(\bigcap_{i=0}^{k} A_i\right)} = P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) \cdot P\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) =$

$= \ldots = \boxed{P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) \cdot P\left(A_{k-1} \middle| \bigcap_{i=0}^{k-2} A_i\right) \ldots P(A_1|A_0) \cdot P(A_0)}$ (*)

AK $\boxed{P\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) > 0}$.

$\Rightarrow$) NECH $\{X_n\}$ JE HOMOGÉNNY MARKOVOV REŤAZEC.

POLOŽME $A_j := [X_j = i_j]$.

a) $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}) = P\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} A_i\right) > 0$

POTOM TVRDENIE PLYNIE Z (*) A MARKOVOVSKEJ VLASTN.

b) POLOŽME $j^* := \min\{j \geq 0 : P(X_0 = i_0, \ldots, X_j = i_j) = 0\}$

AK $j^* = 0$, POTOM $P(X_0 = i_0) = p_{i_0} = 0$ A TVRDENIE PLATÍ.

AK $j^* > 0$, POTOM

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_{j^*-1} = i_{j^*-1}) = p_{i_0} \ldots p_{i_{j^*-2} i_{j^*-1}} > 0$$

A $P(X_0 = i_0, \ldots, X_{j^*} = i_{j^*}) = 0$.

$$\Rightarrow p_{i_{j^*-1} i_{j^*}} = \frac{P(X_{j^*} = i_{j^*}, \ldots, X_0 = i_0)}{P(X_{j^*-1} = i_{j^*-1}, \ldots, X_0 = i_0)} = 0$$

A OPÄŤ TVRDENIE PLATÍ. □

$\Leftarrow$) NECH JE DANÉ $\mathbb{P}$ A $\mathbb{P}$. UVAŽUJME PROCES $\{X_n\}$ S KONEČNOROZMERNÝMI ROZDELENIAMI DANÝMI VZŤAHOM:

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k) := p_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{k-1} i_k}.$$

(EXISTENCIA ZARUČENÁ KOLMOGOROVOU VETOU)

DOKÁŽTE, ŽE $\{X_n\}$ JE HOM. MAR. REŤ. S POČ. R. $\mathbb{P}$ A MAT. $\mathbb{P}$.

ZREJME $P(X_0 = i_0) = p_{i_0}$ $\forall i_0 \in S$ (PODĽA DEF. p_{i_0})

AK $P(X_n = i) > 0$, POTOM

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \frac{P(X_{n+1} = j,\ X_n = i)}{P(X_n = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0,\dots,i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1},\ X_n = i, X_{n+1} = j)}{\sum_{i_0,\dots,i_{n-1}} P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1},\ X_n = i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i_0,\dots,i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i} p_{ij}}{\sum_{i_0,\dots,i_{n-1}} p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i}} = p_{ij}$$

EŠTE MUSÍME UKÁZAŤ, ŽE $\{X_n\}$ MÁ MARKOVOVSKÚ VLASTN.

NECH $p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1}} p_{i_n} > 0$. POTOM

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \frac{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n j}}{p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}} = p_{i_n j}.$$

POLOŽME $p_{ij}^{(0)} := \delta_{ij}$, $p_{ij}^{(1)} := p_{ij}$

$p_{ij}^{(n+1)} := \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}$

DÁ SA UKÁZAŤ, ŽE $p_{ij}^{(n)}$ KONVERGUJE PRE KAŽDÉ n

A $\|P^{(n)}$ SÚ STOCHASTICKÉ MATICE.

TAKTIEŽ $\|P^{(n)} = \|P^{(n-1)} \cdot \|P = \|P \cdot \|P^{(n-1)} = \|P^n$.

VETA: $\{X_n\}$ HOMOGÉNNY M.R.

$$P(X_{m+n} = j \mid X_m = i) = p_{ij}^{(n)} \quad i,j \in S, \quad P(X_m = i) > 0.$$

D: $P(X_{n+m+1} = j \mid X_m = i) =$

$= \sum_{k \in S} P(X_{m+n+1} = j,\ X_{m+n} = k \mid X_m = i) =$

$= \sum_{k \in S} \underbrace{P(X_{m+n} = k \mid X_m = i)}_{p_{ik}^{(n)}} \underbrace{P(X_{m+n+1} = j \mid X_{m+n} = k,\ X_m = i)}_{p_{kj}}$

28.04.2009 ŠTu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

MOŽNO ZOVŠEOBECNIŤ NA: $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$.
TJ. $\mathbb{P}^{(m+n)} = \mathbb{P}^{(m)} \mathbb{P}^{(n)}$ CHAPMAN-KOLMOGOROVA ROVNOSŤ

NEPODMIENENÉ PRAVDEPODOBNOSTI $p_j(n) = P(X_n = j)$
≡ ABSOLÚTNE PRAVDEPODOBNOSTI V ČASE n

$$P(X_n = j) = \sum_{k \in S} P(X_0 = k, X_n = j) =$$
$$\sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \sum_{k \in S} p_k \cdot p_{kj}^{(n)}.$$

$\mathbb{P}^T(n) = \mathbb{P}^T \mathbb{P}^n$ ... ROZDELENIE M.R. V ČASE n.

PRÍKLAD: Y_k KEĎ JE POSTUPNOSŤ NEZÁVISLÝCH CELOČÍSELNÝCH NÁM. VELIČÍN. POLOŽME

$$X_0 := 0, \quad X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad n \geq 1$$

$\{X_n\}$ MÁ MARKOVOVSKÚ VLASTNOSŤ:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = 0) = \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i_n, \dots, X_0 = 0)}{P(X_n = i_n, \dots, X_0 = 0)}$$

$$[X_{n+1} = j, X_n = i_n, \dots, X_0 = 0] =$$
$$[Y_{n+1} = j - i_n, Y_n = i_n - i_{n-1}, \dots, Y_1 = i_1]$$
$$[X_n = i_n, \dots, X_0 = 0] = [Y_n = i_n - i_{n-1}, \dots, Y_1 = i_1]$$

$$\Rightarrow P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = 0) = P(Y_{n+1} = j - i_n)$$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = \frac{P(Y_{n+1} = j - i_n, X_n = i_n)}{P(X_n = i_n)} = P(Y_{n+1} = j - i_n)$$

TJ. $p_{ij}(n, n+1) = P(Y_{n+1} = j - i)$

PRÍKLAD: **ÚLOHA O RUINOVANÍ HRÁČA**, POHYB PO PRIAMKE

$S = \{0, 1, \dots, a\}$, $\pi = (0, \dots, \underset{z}{1}, \dots, 0)^T$ (0 … a)

$p_{00} = 1$, $p_{aa} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PRÍKLAD: **GALTONOV-WATSONOV PROCES**

POČET JEDINCOV V NULTEJ GEN... $X_0 = 1$

POČET JEDINCOV PRVEJ GEN. JE NÁH. VEL. X_1 S ROZDELENÍM $P(X_1 = j) = a_j$, $j = 0, 1, \dots$

POČET JEDINCOV n-TEJ GEN.:

$$\boxed{X_n = U_{n1} + \dots + U_{nX_{n-1}}}$$

KDE U_{ni} SÚ NÁH. V. S ROVNAKÝM ROZDELENÍM AKO X_1, NEZÁVISLÉ MEDZI SEBOU A AJ NA $X_{n-1}, \dots, X_0$.

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1) =$$

$$= P\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} U_{nk} = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1\right) =$$

$$= P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1\right) =$$

$$= P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) = \frac{P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) P(X_{n-1} = i)}{P(X_{n-1} = i)} =$$

$$= \frac{P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j,\ X_{n-1} = i\right)}{P(X_{n-1} = i)} = \frac{P(X_n = j,\ X_{n-1} = i)}{P(X_{n-1} = i)} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$$

28.04.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

POČÁTEČNÉ ROZDELENIE: $\mathbb{P} = (0,1, 0, \dots, 0)^T$

PRAVD. PRECHODU $\boxed{P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) =}$

$P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) = \boxed{q_j^{*i}}$, KDE

$\{q_j\}^{*i}$ JE i-TA KONVOLUČNÁ MOCNINA $\{q_j\}$.

PRÍKLAD: GENEROVANIE MARKOVOVHO RETAZCA

NECH S, $\mathbb{P} = (p_i)_{i \in S}$, $\Pi = (p_{ij})_{i,j \in S}$

NECH $\{U_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ JE POSTUPNOSŤ NEZÁVISLÝCH ROVNAKO ROZDELENÝCH N.V. S ROVN. ROZD. NA $\langle 0,1 \rangle$.

1. DEFINUJME $X_0 = k \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} p_i < U_0 \leq \sum_{i=0}^{k} p_i$ $\left(\sum_{i=0}^{-1} p_i := 0\right)$
2. DEFINUJME $f: S \times \langle 0,1 \rangle$, $f(i,u) = k \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k-1} p_{ij} < u \leq \sum_{j=0}^{k} p_{ij}$
3. DEFINUJME $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, ZREJME X_n, U_{n+1} SÚ NEZÁV.

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(f(X_n, U_{n+1}) = j \mid X_n = i) =$

$= P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij}$

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, \dots, X_0 = i_0) = P(f(i, U_{n+1}) = j \mid \dots) =$

$= P(f(i, U_{n+1}) = j) = p_{ij}$ □

KLASIFIKÁCIA STAVOV MARKOVOVHO REŤAZCA

KONVENCIA: $P(.. | X_0 = j) = P_j(..)$, IBA HOMOGÉNNE MARKOV. REŤAZCE!

$\tau_j(0) = 0$

$\tau_j(1) = \inf \{ n > 0 : X_n = j \}$ ... NÁHODNÁ VELIČINA,

KTORÁ NADOBÚDA HODNÔT $1, 2, \ldots, \infty$ A OZNAČUJE OKAMIH, V KTOROM MARKOVOV REŤAZEC PO TOM, ČO OPUSTIL POČIATOČNÝ STAV, PRVÝKRÁT VSTÚPI DO STAVU j.

≡ ČAS PRVÉHO NÁVRATU / VSTUPU DO STAVU j. PODOBNE:

$$\tau_j(k+1) = \inf \{ n > \tau_j(k) : X_n = j \}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

MARKOVOVSKÝ ČAS ... $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

JE NÁH. VELIČINA TAKÁ, ŽE JAV $[\tau = n]$ (RESP. $[\tau \leq n]$) PATRIA DO σ-ALGEBRY $\mathcal{F}_n = \sigma \{ X_0, \ldots, X_n \}$ GEN. N.V. $X_0, \ldots, X_n$

ČAS PRVÉHO NÁVRATU JE MARKOVOVSKÝ ČAS, PRETOŽE

$$[\tau_j(1) = n] = [X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j] \in \mathcal{F}_n$$

DEFINÍCIA: STAV j MARKOVOVHO REŤAZCA JE TRVALÝ, KEĎ REŤAZEC, KTORÝ VYCHÁDZA Z j, SA DO j VRÁTI S PRAVDEPODOBNOSŤOU 1 PO KONEČNE VEĽA KROKOCH, TJ.

$$P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1$$

PRECHODNÝ, KEĎ REŤAZEC, KTORÝ VYCHÁDZA Z j, SA S KLADNOU PRAVDEPODOBNOSŤOU DO j NIKDY NEVRÁTI

$$P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0.$$

28.04.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

DEFINÍCIA: TRVALÝ STAV j SA NAZÝVA:

NENULOVÝ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mu_j := E_j \tau_j(1)} < \infty$

NULOVÝ $\Leftrightarrow$ $\mu_j = +\infty$.

$$f_{ij}^{(0)} := 0, \quad f_{ij}^{(n)} := P_i(\tau_j(1) = n) \quad n \geq 1$$

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P_i(\tau_j(1) < \infty)$$

STAV j:

- $f_{jj} = 1 \Rightarrow$ TRVALÝ
  - $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ KONV. $\Rightarrow$ TRVALÝ NULOVÝ
  - $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ DIV. $\Rightarrow$ TRVALÝ NENULOVÝ
- $f_{jj} < 1 \Rightarrow$ PRECHODNÝ

VETA: $p_{ij}^{(n)}$ .. PRAVD. PRECHODU n-TÉHO RÁDU.

(1) $p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \quad n \geq 1$

(2) $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}, \quad n \geq 0, \quad i \neq j$

PRE VYTVÁRAJÚCE FCIE. POSTUPNOSTÍ $\{p_{ij}^{(n)}\}, \{f_{ij}^{(n)}\}$ PLATÍ:

(A) $P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)}, \quad 0 \leq s < 1$

(B) $P_{ij}(s) = F_{ij}(s) \cdot P_{jj}(s), \quad 0 \leq s < 1, \quad i \neq j.$

$\underline{D}$: (1): $p_{jj}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = j) =$ $\quad [X_n = j] \subseteq [\tau_j(1) \leq n]$

$P_j(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P_j(X_n = j \mid \tau_j(1) = k) \underbrace{P_j(\tau_j(1) = k)}_{f_{jj}^{(k)}}$

$P_j(X_n = j \mid \tau_j(1) = k) = P(X_n = j \mid X_0 = j, X_1 \neq j, \dots, X_{k-1} \neq j, X_k = j) =$

$\underbrace{= P(X_n = j \mid X_k = j)}_{\text{MARKOV. VL.}} = p_{jj}^{(n-k)}$.

S MUŽEM $f_{jj}^{(0)} = 0$ DOSTÁVÁME (1). PODOBNĚ (2).

(A): $P_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n$, $F_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} s^n$

$P_{jj}(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \left(\sum_{k=0}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \right) =$

$= 1 + F_{jj}(s) \cdot P_{jj}(s)$. PODOBNĚ (B).

VĚTA: STAV j JE TRVALÝ $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$.

$\underline{D}$: j JE TRVALÝ $\Leftrightarrow \lim_{s \to 1-} F_{jj}(s) = f_{jj} = 1 \Leftrightarrow$

$\lim_{s \to 1-} \frac{1}{1 - F_{jj}(s)} = \lim_{s \to 1-} P_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty$. $\square$

29.04.2009 We
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

UVAŽUJME ČASY NÁVRATOV $\tau_j(k)$ A NÁHODNÉ VELIČINY $T_1 = \tau_j(1)$, $T_2 = \tau_j(2) - \tau_j(1)$, ... SÚ DOBY MEDZI NÁVRATMI DO STAVU j.

VETA: ZA PODMIENKY $\tau_j(1) < \infty, \dots, \tau_j(k) < \infty$ SÚ DOBY $T_1, \dots, T_k$ NEZÁVISLÉ N.V. KEĎ MICHÁDZA RETAZEC ZO STAVU j, MAJÚ $T_1, \dots, T_k$ ROZDELENIE $\{f_{jj}^{(n)}\}$. KEĎ MICHÁDZA RETAZEC ZO STAVU $i \neq j$, MAJÚ $T_2, \dots, T_k$ ROZDELENIE $\{f_{jj}^{(n)}\}$ A T_1 R. $\{f_{ij}^{(n)}\}$.

D: DOKÁŽEME IBA PRE N.V. T_1, T_2.

$$[T_1 = m,\ T_2 = n] = [\tau_j(1) = m,\ \tau_j(2) = m+n] =$$
$$= [X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = j, X_{m+1} \neq j, \dots, X_{m+n-1} \neq j, X_{m+n} = j]$$

$$\boxed{P_j(T_1 = m, T_2 = n)} = P(T_1 = m, T_2 = n \mid X_0 = j) =$$
$$= P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j \mid X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_0 = j) \cdot$$
$$\cdot P_j(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j) \rightsquigarrow P_j(\tau_j(1) = m)$$

MUSÍME ZOVŠEOBECNIŤ MARKOVOVSKÚ VLASTNOSŤ A HOMOGENITU:

$$P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j \mid X_m = j, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = j) =$$
$$= P(X_{m+n} = j, X_{m+n-1} \neq j, \dots, X_{m+1} \neq j \mid X_m = j) =$$
$$= P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = j) = P_j(\tau_j(1) = n)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_j(T_1 = m, T_2 = n) = P_j(\tau_j(1) = m)\, P_j(\tau_j(1) = n)}$$

TJ. $P_j(T_1=m, T_2=n) = P_j(T_1=m) \cdot P_j(T_1=n)$

$P_j(T_2=n) = \sum_{m=1}^{\infty} P_j(T_1=m, T_2=n) = P_j(T_1=n)$

T_1, T_2 MAJÚ ROVNAKÉ ROZD. $P_j(T_1=k) = f_{jj}^{(k)}$
A NAVIAC SÚ NEZÁVISLÉ.

PRE $i \neq j$ JE

$P_i(T_1=m, T_2=n) = P_i(\tau_j(1)=m) \cdot P_j(\tau_j(1)=n) =$

$= P_i(T_1=m) \cdot P_j(T_1=n)$

$P_i(T_2=n) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(T_1=m, T_2=n) = P_j(T_1=n)$.

TJ. T_1, T_2 SÚ NEZÁVISLÉ,

$P_i(T_1=k) = P_i(\tau_j(1)=k) = f_{ij}^{(k)} \quad k \geq 1$

$P_i(T_2=k) = P_j(T_1=k) = f_{jj}^{(k)}, \quad k \geq 1$. ■

UVAŽUJME N_j N.V., KTORÁ UDÁVA, KOĽKOKRÁT REŤAZEC PO OPUSTENÍ POČ. STAVU PREJDE STAVOM j, TJ.

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} I(X_n = j)$$

VETA: PLATÍ

$$P_i(N_j = k) = \begin{cases} 1 - f_{ij} & k = 0 \\ f_{ij} f_{jj}^{k-1} (1 - f_{jj}) & k > 0 \end{cases}$$

29.04.2009 We
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

D: PRE $k=0$:

$$P_i(N_j=0) = 1 - P_i(N_j \geq 1) = 1 - P_i(\tau_j(1) < \infty) = \underline{1 - f_{ij}}$$

PRE $k > 0$:

$$\boxed{P_i(N_j \geq k) = P_i(\tau_j(k) < \infty) = P_i(T_1 + \ldots + T_k < \infty)}$$

$T_1, \ldots, T_k$ SÚ NEZ., T_1 MÁ ROZD. $\{f_{ij}^{(n)}\}$,
$T_2, \ldots, T_k$ MAJÚ ROZD. $\{f_{jj}^{(n)}\}$

$\Rightarrow$ VYTVÁRAJÚCA FCIA. N.V. $\tau_j(k) = T_1 + \ldots + T_k$ JE:

$$\underline{F_{ij}(s) \cdot [F_{jj}(s)]^{k-1}}$$

D. $F_{\tau_j(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(\tau_j(k)=n) \cdot s^n = F_{ij}(s)\,[F_{jj}(s)]^{k-1}$

$$\Rightarrow P_i(N_j \geq k) = P_i(\tau_j(k) < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(\tau_j(k)=n) =$$
$$= F_{ij}(1-) \cdot [F_{jj}(1-)]^{k-1} = \underline{f_{ij} \cdot f_{jj}^{k-1}}$$

TAKŽE $P_i(N_j = k) = P_i(N_j \geq k) - P_i(N_j \geq k+1) =$

$$= \underline{f_{ij}\, f_{jj}^{k-1}\,(1 - f_{jj})}$$

■

VETA: KEĎ JE j TRVALÝ STAV H.M.R., POTOM

$$P_j(N_j = \infty) = 1$$

KEĎ JE j PRECHODNÝ STAV, POTOM

$$P_i(N_j = \infty) = 0, \quad i \in S$$

$$P_j(N_j = k) = (1 - f_{jj}) f_{jj}^k \quad k \geq 0 \equiv \text{GEOM. ROZDELENIE}$$

D: VZHĽADOM K MONOTÓNNOSTI $[N_j \geq k] \supseteq [N_j \geq k+1]$?

MÁME $P_i(N_j = \infty) = \lim_{k \to \infty} P_i(N_j \geq k) = \lim_{k \to \infty} f_{ij} f_{jj}^{k-1}$

$\Rightarrow$ AK j JE TRVALÝ, POTOM $f_{jj} = 1$, TJ. $P_j(N_j = \infty) = 1$

AK j JE PRECHODNÝ, POTOM $f_{jj} < 1$, TJ. $P_i(N_j = \infty) = 0$ ■

VIDÍME, ŽE KEĎ JE STAV TRVALÝ, VSTÚPI DO NEHO REŤAZEC S PRST. 1 NEKONEČNE VEĽA KRÁT.
KEĎ JE PRECHODNÝ, JE POČET VSTUPOV DO NEHO S PRST. 1 KONEČNÝ.

NECH d_j JE NAJVÄČŠÍ SPOLOČNÝ DELITEĽ ČÍSIEL $n \geq 1$, PRE KTORÉ $p_{jj}^{(n)} > 0$.

KEĎ $d_j > 1 \Rightarrow$ STAV j JE PERIODICKÝ S PER. d_j

KEĎ $d_j = 1 \Rightarrow$ STAV j JE NEPERIODICKÝ

$p_{jj} > 0 \Rightarrow$ STAV j JE NEPERIODICKÝ

29.04.2009 We
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

LEMMA: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_0 = 0$, $f_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1$

$\gcd\{n \mid f_n > 0\} = 1$

$u_0 := 0$

$u_n := \sum_{k=0}^{n} f_k u_{n-k} \quad n \geq 1$

$\mu := \sum_{k=0}^{\infty} k f_k$

POTOM PRI $n \to \infty$ PLATÍ:

$u_n \to 1/\mu$, $\mu < \infty$

$u_n \to 0$, $\mu = \infty$.

VETA: OZNAČME $\mu_j := \sum_{n=0}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ STREDNÚ DOBU PRVÉHO NÁVRATU DO STAVU j.

(1) j PRECHODNÝ STAV. POTOM PRE $n \to \infty$

$p_{ij}^{(n)} \to 0$, $i \in S$

(2) j TRVALÝ, NENULOVÝ, NEPERIODICKÝ. POTOM

$p_{jj}^{(n)} \to 1/\mu_j$

$p_{ij}^{(n)} \to f_{ij}/\mu_j \quad i \neq j$

(3) j TRVALÝ, NENULOVÝ, S PERIODOU d_j:

$p_j^{(nd_j)} \to d_j/\mu_j$; $\overline{p}_{ij}^{(n)} := \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} p_{ij}^{(v)} \to \frac{f_{ij}}{\mu_j}$, $i \neq j$

...

(4) j TRVALÝ, NULOVÝ:

$p_{ij}^{(n)} \to 0$, $i \in S$.

VETA: TRVALÝ STAV JE NULOVÝ $\Leftrightarrow p_{jj}^{(n)} \to 0$.

D: NECH j JE TRVALÝ STAV, PRE KTORÝ $p_{jj}^{(n)} \to 0$.

POTOM $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)} \to 0$ A PODĽA

TAUBEROVEJ VETY

[NECH RAD $A(s)$ KONVERGUJE V POLOMERE $R=1$.
NECH $a_n \geq 0$ $\forall n$. POTOM
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a < \infty \Leftrightarrow \lim_{s\to 1-} (1-s)A(s) = a$.]

$\lim_{s\to 1-} (1-s)\, P_{jj}(s) = 0$,

ČO IMPLIKUJE (KEĎŽE $P_{jj}(s) = \frac{1}{1-F_{jj}(s)}$ $0 \leq s < 1$)

$\lim_{s\to 1-} \frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} = \frac{1}{F'_{jj}(1-)} = \frac{1}{\mu_j} = 0$.

$\Rightarrow$ j JE NULOVÝ. □

ROZKLAD MNOŽINY STAVOV

DEFINÍCIA: j JE DOSIAHNUTEĽNÝ z i
$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : p_{ij}^{(n_0)} > 0$. INAK JE j NEDOS. z i.

NEPRÁZDNA MNOŽINA C SA NAZÝVA UZAVRETÁ
$\Leftrightarrow$ ŽIADNÝ STAV MIMO C NIE JE DOSIAHNUTEĽNÝ ZO ŽIADNEHO STAVU VO VNÚTRI C.

UZÁVER C $\equiv$ NAJMENŠIA UZAVRETÁ MNOŽINA OBSAHUJÚCA C

NEROZLOŽITEĽNÁ - NEOBSAHUJE VLASTNÚ UZAV. PODMN.

29.04.2009 We
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

VETA: MNOŽINA STAVOV C JE UZAVRETÁ $\Leftrightarrow$
$p_{ij} = 0$ PRE $\forall i \in C, j \notin C$.

$\Leftarrow$) INDUKCIA PODĽA n, ŽE $p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall i \in C, j \notin C$.
PRE $n = 0, 1$ PLATÍ PODĽA PREDPOKLADOV.
CHAPMAN-KOLMOGOROVA ROVNOSŤ:
$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$
AK $k \in C \Rightarrow p_{kj} = 0$ (PODĽA PREDPOKLADU)
AK $k \notin C \Rightarrow p_{ik}^{(n)} = 0$ (INDUKČNÝ PREDPOKLAD)
$\Rightarrow$) ŠPECIÁLNY PRÍPAD PRE $n = 1$. ■

DEFINÍCIA: AK $\{j\}$ JE UZAVRETÁ, T.J. $p_{jj} = 1$
$\Rightarrow$ j SA NAZÝVA ABSORPČNÝ.

KEĎ VYNECHÁME V MATICI P RIADKY A STĹPCE STAVOV MIMO C, DOSTANEME OPÄŤ STOCHASTICKÚ MATICU.
PODRETAZEC PÔVODNÉHO M.R.

DEFINÍCIA: M.R. SA NAZÝVA NEROZLOŽITEĽNÝ $\Leftrightarrow$
KAŽDÝ STAV JE DOSIAHNUTEĽNÝ Z KAŽDÉHO INÉHO ST.
V OPAČNOM PRÍPADE $\rightarrow$ ROZLOŽITEĽNÝ

VETA: RETAZEC S KONEČNE VEĽA STAVMI JE ROZLOŽ.
$\Leftrightarrow$ MATICA PRAVD. PRECHODU (PO PRÍP. PERMUTÁCII RIADKOV/STĹPCOV)
TVARU $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$
P_1, B SÚ ŠTVORCOVÉ. D: ZREJMÝ ■

DEFINÍCIA: DVA STAVY M.R. SÚ **ROVNAKÉHO TYPU** $\Leftrightarrow$ SÚ OBA SÚČASNE BUĎ PRECHODNÉ, ALEBO NEPRECHODNÉ (TRVALÉ=) NULOVÉ/NENULOVÉ PERIODICKÉ S ROVNAKOU PER. / NEPERIODICKÉ.

VETA: KEĎ JE j DOSIAHNUTEĽNÝ Z i A NAOPAK, POTOM SÚ OBA STAVY ROVNAKÉHO TYPU.

D: EXISTUJÚ $N, M \in \mathbb{N}_0$ TAKÉ, ŽE:

$p_{ij}^{(N)} = \alpha > 0, \quad p_{ji}^{(M)} = \beta > 0.$

CHAPMAN-KOLMOGOROVA ROVNOSŤ PRE ĽUBOVOĽNÉ $n \geq 0$:

$$p_{ii}^{(N+M+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(N)} p_{ki}^{(M+n)} \geq p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(M+n)}$$

$$p_{ji}^{(M+n)} = \sum_{k \in S} p_{jk}^{(n)} p_{ki}^{(M)} \geq p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(M)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{ii}^{(N+M+n)} \geq \alpha\beta\, p_{jj}^{(n)} \qquad (*)$$

PODOBNE: $p_{jj}^{(N+M+n)} \geq \alpha\beta\, p_{ii}^{(n)}$. $\qquad (**)$

(1) i JE PRECHODNÝ

$(*)$ + VETA(a)[j JE TRVALÝ $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$]

$\Rightarrow$ j JE PRECHODNÝ.

(2) i JE TRVALÝ $\Rightarrow$ $(**)$ + TÁ ISTÁ VETA(a) $\Rightarrow$ j JE TRVALÝ

i JE TRVALÝ NULOVÝ $\Rightarrow$ $(*)$ +

VETA (b) [TRVALÝ STAV j JE NULOVÝ $\Leftrightarrow p_{jj}^{(n)} \to 0$]

$\Rightarrow$ j JE TRVALÝ NULOVÝ

i JE TRVALÝ NENULOVÝ $\Rightarrow$ $(**)$ + VETA (b) $\Rightarrow$ j JE TRVALÝ NENULOVÝ

PRE PERIODICITU STAČÍ POUŽIŤ $(*)$. ∎

30.05.2009 Th
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

VETA: V NEROZLOŽITELNOM RETAZCI SÚ VŠETKY STAVY ROVNAKÉHO TYPU. □

VETA: NECH j JE TRVALÝ, k JE DOSIAHNUTEĽNÝ Z j, POTOM:

(i) k JE TRVALÝ

(ii) j JE DOSIAHNUTEĽNÝ Z k

(iii) $f_{jk} = P_j(\tau(1) < \infty) = P_k(\tau_j(1) < \infty) = f_{kj} = 1$.

D: DOKÁŽEME (ii): ((i) PLYNIE Z (ii))

NECH $\boxed{m}$ JE NAJMENŠIE PRIR. ČÍSLO T.Ž.: $p_{jk}^{(m)} > 0$.

PRE SPOR NECH j NIE JE DOSIAH. Z k, TJ.

$$\boxed{P_k(X_n \neq j \ \ \forall n \geq 1) = P_k(\tau_j(1) = \infty) = 1.}$$

j JE TRVALÝ $\Rightarrow P_j(N_j = \infty) = 1$

$\Rightarrow P_j(X_m \neq j, X_{m+1} \neq j, \dots) = 0$ PRE $m \in \mathbb{N}_0$.

$$0 = P_j(X_m \neq j, X_{m+1} \neq j, \dots) \geq P_j(X_m = k, X_{m+1} \neq j, \dots) =$$
$$= P(X_m = k, X_{m+1} \neq j, \dots \mid X_0 = j) =$$
$$= P(X_{m+1} \neq j, \dots \mid X_m = k, X_0 = j)\, P(X_m = k \mid X_0 = j) =$$
$$= P(X_{m+1} \neq j, \dots \mid X_m = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = j) =$$
$$= P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots \mid X_0 = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = j) =$$
$$= P_k(X_n \neq j \ \ \forall n \geq 1) \cdot p_{jk}^{(m)} > 0. \quad \lightning \text{ SPOR} \quad \square$$

(iii):

$$1 - f_{jj} = P_j(\tau_j(1) = \infty) \geq P_j(\tau_j(1) = \infty, X_m = k) =$$

$$= P_j(X_1 \neq j, \dots, X_{m-1} \neq j, X_m = k, X_{m+1} \neq j, \dots) =$$

$$= P_j(X_{m+1} \neq j, \dots \mid X_m = k, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = j) \cdot$$

$$\cdot P(X_m = k, X_{m-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = j) =$$

$$= P_k(X_{m+1} \neq j, \dots) \cdot P_j(X_m = k) = \quad \text{(Z VÝBERU } m\text{)}$$

~~$= P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots X_{m-1} \neq j, X_{m+1} \neq j, \dots \mid X_m = k, X_0 \neq j) \cdot P(X_m = k \mid X_0 \neq j) =$~~

~~$= P(X_{m+1} \neq j, X_{m+2} \neq j, \dots, X_{2m-1} \neq j, X_{2m+1} \neq j, \dots \mid X_m = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = j) =$~~

$$= P_k(\tau_j(1) = \infty) \cdot p_{jk}^{(m)} = p_{jk}^{(m)}(1 - f_{kj})$$

j JE TRVALÝ $\Rightarrow f_{jj} = 1 \Rightarrow f_{kj} = 1$ (PRETOŽE $p_{jk}^{(m)} > 0$).

POPOBNE DOKÁŽEME $f_{jk} = 1$. ■

MNOŽINA STAVOV DOSIAHNUTEĽNÝCH Z NEJAKÉHO TRVALÉHO STAVU JE UZAVRETÁ A JE TO MNOŽINA STAVOV NEROZLOŽITEĽNÉHO PODREŤAZCA PÔVODNÉHO REŤAZCA.

NECH j_1 JE TRVALÝ STAV S NAJNIŽŠÍM INDEXOM, C_1 JE MNOŽINA STAVOV DOSIAHN. Z j_1

...

T MNOŽINA PRECHODNÝCH STAVOV. POTOM

$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$ $C_i \equiv$ DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ NEROZL. MNOŽINY TRVALÝCH STAVOV.

30.05.2009 Th
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

KEĎ S JE KONEČNÁ, MOŽNO MATICU PRAVD. PRECHODOV PÍSAŤ V TVARE

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{P}_r & 0 \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_r & Q_{r+1} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}_i$ ŠTVORCOVÉ MATICE PRAV. PRECH. MEDZI TRV. STAVMI V PODRETAZCOCH $C_1, \dots, C_r$.
ANALOGICKÝ ROZKLAD PRE NEKONEČNE VEĽA STAVOV

VETA: V REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI NEMÔŽU BYŤ VŠETKY STAVY PRECHODNÉ.

D: SPOROM: $\forall$ STAV PRECHODNÉ $\Rightarrow$
$\forall i,j \in S: p_{ij}^{(n)} \to 0$.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)}}_{=1} = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall i \in S$ ↯ ■
(VLASTNOSŤ STOCHASTICKEJ MATICE)

PODOBNE:

VETA: V REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI NEEXISTUJÚ NULOVÉ STAVY.

D: SPOROM: NECH i JE TRVALÝ NULOVÝ STAV, C MNOŽINA STAVOV DOSIAHNI. Z i. C DEFINUJE PODREŤAZEC SO STOCHASTICKOU MAT. PRAVD. PR. $\mathbb{P}_C = (\tilde{p}_{ij})$
PLATÍ $p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad \forall i,j \in C$ ($\forall$ STAV Z C SÚ NULOVÉ)
$\Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in C} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C} \lim_{n\to\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = 0, \; i \in C$ ↯ ■

VETA: V NEROZLOŽITEĽNOM REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ A NENULOVÉ.



0

PRAVDEPODOBNOSTNÁ ABSORPCIA

ABSORPČNÝ REŤAZEC - VŠETKY TRVALÉ STAVY SÚ ABSORPČNÉ, (TJ. $p_{jj}=1$)

DEFINUJME $\boxed{\tau := \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}}$.. ČAS VÝSTUPU

T.. MNOŽINA PRECH. STAVOV

VETA: V REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI JE $P_i(\tau = +\infty) = 0, \quad i \in T$..

D: $P_i(\tau=\infty) = P_i\left(\bigcup_{j\in T}[N_j=\infty]\right) \leq \sum_{j\in T} P_i(N_j=\infty) = 0.$ ■

BUDEME PREDPOKLADAŤ: $P_i(\tau < \infty)$ $\forall i \in S$

NECH X_τ JE TEN STAV, DO KT. REŤAZEC VSTÚPI, AKONÁHLE OPUSTÍ T. DEFINUJME

$$\boxed{\begin{aligned} u_{ij} &:= P_i(X_\tau = j) \quad i\in T,\ j\in T^c. \\ u_i(C_k) &= P_i(X_\tau \in C_k) = \sum_{j\in C_k} u_{ij} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\textbf{VETA: } u_{ij} = p_{ij} + \sum_{v\in T} p_{iv}u_{vj} \quad i\in T,\ j\in T^c.}$$

D: OZNAČME $u_{ij}^{(n)} := P_i(X_\tau = j, \tau = n) \quad i\in T,\ j\in T^c$

ZREJME $u_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ij}^{(n)}$.

30.05.2009 Th
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

PLATÍ: $u_{ij}^{(0)} = 0$, $u_{ij}^{(1)} = p_{ij}$,

$u_{ij}^{(n)} = \sum_{v \in T} p_{iv} u_{vj}^{(n-1)}$, $n \geq 2$

$$\Rightarrow u_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{ij}^{(n)} = p_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{v \in T} p_{iv} u_{vj}^{(n-1)} =$$

$$= p_{ij} + \sum_{v \in T} p_{iv} \sum_{n=2}^{\infty} u_{vj}^{(n-1)} = p_{ij} + \sum_{v \in T} p_{iv} u_{vj}, \quad \blacksquare$$

MATICOVÝ ZÁPIS

$$\mathbb{P} = \begin{matrix} \\ T \\ T^c \end{matrix} \begin{pmatrix} \overset{T}{\mathbb{P}^*} & \overset{T^c}{\mathbb{O}} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}^* = (p_{ij})_{i,j \in T^c}$ $\quad \mathbb{R} = (r_{ij})_{i,j \in T}$

$\mathbb{Q} = (p_{ij})_{i \in T, j \in T^c}$ $\quad \mathbb{U} = (u_{ij})_{i \in T, j \in T^c}$

$\mathbb{U} = \mathbb{Q} + \mathbb{R}\mathbb{U}$

VETA: $I - \mathbb{R}$ JE REGULÁRNA A $(I-\mathbb{R})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{R}^k$.

D: PLATÍ: $\mathbb{R}^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in T}$. NAVIAC $p_{ij}^{(n)} \to 0$. $\blacksquare$

$[\, I - A^n = (I-A)(I + A + \ldots + A^{n-1}) \,]$

$\mathbb{F} = (I-\mathbb{R})^{-1}$ .. FUNDAMENTÁLNA MATICA M.R.

PRÍKLAD: PRAVDEPODOBNOSŤ RUINOVANIA HRÁČA:

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

STAVY 0, a SÚ ABSORPČNÉ

HĽADÁME PRAVD. ABSORPCIE Z PRECHODNÉHO STAVU $1 \leq i \leq a-1$ DO STAVU 0.

PLATÍ $u_{i0} = p_{i0} + \sum_{v=1}^{a-1} p_{iv} u_{v0}$ $\quad i = 1, \dots, a-1$

TJ. $u_1 = q + p u_2$ (ZNAČÍME $u_i = u_{i0}$)

$u_i = q u_{i-1} + p u_{i+1}$ $\quad i = 2, \dots, a-2$

$u_{a-1} = q u_{a-2}$

DODEFINUJME $u_0 := 1$, $u_a := 0$ A DOSTÁVAME

$-p u_{i+1} + u_i - q u_{i-1} = 0$ PRE $i = 1, \dots, a-1$

CHARAKTERISTICKÝ POLYNÓM JE $-p\lambda^2 + \lambda - q$

S KOREŇMI 1 A q/p.

OBECNÉ RIEŠENIE:

(1) $p \neq q$: $u_i = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^i$

(2) $p = q$: $u_i = c_1 + i c_2$. $\square$

W_j .. N.V., KTORÁ OZNAČUJE CELKOVÝ POČET ČAS. OKAMŽIKOV, KT. REŤAZEC STRÁVI V PRECH. STAVE j.

$$W_j = \begin{cases} N_j & X_0 = i \neq j \\ N_j + 1 & X_0 = j \end{cases}$$

PLATÍ $E_i W_j = E_i N_j = E_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} I(X_n = j) \right) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ $\quad i, j \in T$ $i \neq j$

PODOBNE $E_j W_j = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ $\quad j \in T$

A KEĎŽE $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, DOSTÁVAME

$$E_i W_j = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \qquad i, j \in T$$

30.05.2009 Th
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

$E_i W_j = \varphi_{ij}$, KDE $(\varphi_{ij})_{i,j \in T} = \Phi = (I - R)^{-1}$.

$W = \sum_{j \in T} W_j \equiv$ CELKOVÝ POČET ČASOVÝCH OKAMŽIKOV STRÁVENÝCH V MNOŽINE T

$E_i W = \sum_{j \in T} E_i W_j = F_{i,\cdot} \cdot \vec{1}$.

V PRÍPADE, ŽE S NIE JE KONEČNÁ, MÔŽE BYŤ $i(\tau = \infty) > 0$.

VETA: SÚSTAVA $u_{ij} = p_{ij} + \sum_{v \in T} p_{iv} \cdot u_{vj}$ $i \in T$, $j \in T^c$ MÁ JEDINÉ RIEŠENIE $0 \le u_{ij} \le 1 \Leftrightarrow$ SÚSTAVA $x_i = \sum_{j \in T} p_{ij} x_j$ NEMÁ INÉ RIEŠENIE $0 \le x_i \le 1$, NEŽ TRIVIÁLNE $x_i = 0$ $\forall i \in T$.

TÁTO PODMIENKA JE EKVIVALENTNÁ S $P_i(\tau = \infty) = 0$ $i \in T$

VETA: V NEROZLOŽITEĽNOM RETAZCI S MNOŽINOU STAVOV $S = \{0, 1, \dots\}$ SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ $\Leftrightarrow$ JEDINÉ RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

V INTERVALE $\langle 0; 1 \rangle$ JE TRIVIÁLNE RIEŠ. $x_i = 0$.

VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ $\Leftrightarrow$ EXISTUJE NETRIVIÁLNE RIEŠENIE.

STACIONÁRNE ROZDELENIE

π $(\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1)$ ... STACIONÁRNE ROZDELENIE

$\Leftrightarrow$ $\underline{\pi^T = \pi^T P}$, t.j. $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}$, $j \in S$.

PRE KAŽDÉ $n \geq 1$: $\pi^T = \pi^T P^n$

$\pi^T P^{n+1} = \pi^T P^n P = \pi^T P = \pi^T$. □

KEĎ π JE POČIATOČNÉ ROZDELENIE, POTOM

$P(n)^T = \pi^T P^n = \pi^T$,

$P(X_k = i_0, \dots, X_{k+n} = i_n) = \sum_{j \in S} P(X_0 = j, X_k = i_0, \dots, X_{k+n} = i_n) =$

$= \sum_{j \in S} \pi_j p^{(k)}_{j i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} =$

$= P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$.

VETA: PRE NEROZLOŽITEĽNÝ MARKOVOV REŤAZEC PLATÍ:

(i) AK SÚ VŠETKY JEHO STAVY PRECHODNÉ ALEBO SÚ VŠETKY TRVALE NULOVÉ, STAC. ROZD. NEEXISTUJE.

(ii) AK SÚ VŠETKY JEHO STAVY TRVALÉ NENULOVÉ, STAC. ROZD. EXISTUJE A JE JEDINÉ.

AK SÚ NEPERIODICKÉ STAVY:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p^{(n)}_{ij} > 0, \; i,j \in S; \qquad \pi_j = \lim_{n \to \infty} p_j(n) > 0, \; j \in S.$$

AK SÚ PERIODICKÉ STAVY:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p^{(k)}_{ij} > 0, \; i,j \in S; \qquad \pi_j = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_j(k) > 0, \; j \in S.$$

02.05.2009 Sa
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

D: (i) PLATÍ $p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad \forall i,j \in S$.

PRE SPOR NECH $\exists \pi \Rightarrow \pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}$

$\Rightarrow \pi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} \pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall j \in S.$ ↯

(ii) VŠETKY STAVY TRVALÉ NENULOVÉ $\Rightarrow f_{ij} = 1 \ \forall i,j \in S$

KEĎ SÚ VŠETKY STAVY NEPERIODICKÉ, POTOM

$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} \ (= f_{ij}) \quad \forall i,j \in S$, KDE $\mu_j > 0$, $j \in S$.

KEĎ SÚ VŠETKY STAVY PERIODICKÉ S ROVN. PER., POTOM

$\bar{p}_{ij}^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \to \frac{1}{\mu_j}$ $i \neq j$, TO ISTÉ PLATÍ AJ PRE $\bar{p}_{jj}^{(n)}$

TAKTIEŽ SA DÁ UKÁZAŤ, ŽE PLATÍ: $\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k \bar{p}_{kj}^{(n)} \quad \forall j \in S.$

$\Rightarrow$ DÔKAZ STAČÍ SPRAVIŤ PRE STAVY NEPERIODICKÉ:

UKÁŽTE, ŽE EXISTUJE STACIONÁRNE ROZDELENIE:

PLATÍ $p_{kj}^{(n+1)} = \sum_{i \in S} p_{ki}^{(n)} \cdot p_{ij}$, $k,j \in S$.

(a) AK JE S KONEČNÁ, POTOM LIMITNÝ PRECHODOM:

$$\frac{1}{\mu_j} = \sum_{i \in S} \frac{1}{\mu_i} p_{ij} \qquad (*)$$

(b) AK JE S NEKONEČNÁ SPOČETNÁ, POTOM

$$p_{kj}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ki}^{(n)} p_{ij} \geq \sum_{i=0}^{N} p_{ki}^{(n)} p_{ij}, \quad N > 0$$

$\Rightarrow$ PRE PEVNÉ N: $\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}$.

$\Rightarrow$ LIMITNÝM PRECHODOM PRE N: $\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} p_{ij}$.

AK BY POSLEDNÁ NER. PLATILA S OSTRÝM ZNAM., POTOM

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} > \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} p_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \quad \lightning$$

VIDÍME, ŽE (*) PLATÍ AJ TERAZ.

$\sum_{j=0}^{N} p_{kj}^{(n)} \le \sum_{j \in S} p_{kj}^{(n)} = 1$ A KEĎŽE $p_{kj}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j}$, NUTNE

$\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{\mu_j} \le 1$ PRE $\forall N \Rightarrow \sum_{j \in S} \frac{1}{\mu_j} \le 1$.

VEKTOR $\pi_j := \frac{1}{\mu_j} \left(\sum_{j \in S} \frac{1}{\mu_j} \right)^{-1}$ JE VEKTOR ROZDELENIA,

KTORÝ SPĹŇA (*), TJ.

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} \qquad j \in S$$

$\Rightarrow$ JE TO STACIONÁRNE ROZDELENIE.

PRE STACIONÁRNE ROZDELENIE PLATÍ

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in S$$

$\Rightarrow$ LIMITNÝM PRECHODOM DOSTÁVAME:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} \pi_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}.$$

$\Rightarrow$ NUTNE MUSÍ PLATIŤ $\sum_{j \in S} \frac{1}{\mu_j} = 1$.

NECH $\{v_j, j \in S\}$ JE INÉ STAC. ROZDELENIE. POTOM

$$v_j = \sum_{i \in S} v_i p_{ij} = \sum_{i \in S} v_i p_{ij}^{(n)} \quad \Rightarrow \text{LIM. PRECHODOM:}$$

$$v_j = \sum_{i \in S} v_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}.$$

EXISTUJE TEDA JEDINÉ STAC. ROZDELENIE $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0$.

$$\lim_{n \to \infty} P_j(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in S} P_i(0) \cdot p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} P_i(0) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \quad \forall j \in S.$$

$\equiv$ ■

02.05.2007 Sq
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

VETA: V NEROZLOŽITEĽNOM REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI EXISTUJE STACIONÁRNE ROZDELENIE.

LIMITNÉ VETY PRE POČETNOSTI NÁVRATOV

UVAŽUJME NEROZLOŽITEĽNÝ REŤAZEC, V KTOROM SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ NENULOVÉ

→ EXISTUJE STACIONÁRNE ROZD. $\{\pi_j, j \in S\}$ (JEDINÉ)

PLATÍ: $\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0, \quad j \in S$

KDE $\mu_j = E_j \tau_j(1) = E_j T_1$ ... STREDNÁ DOBA 1. NÁVRATU DO j

$N_j(n)$:= KOĽKOKRÁT V PRVÝCH n KROKOCH REŤAZEC PREJDE STAVOM j

$$N_j(n) = \sum_{v=1}^{n} I(X_v = j)$$

PLATÍ: $$[N_j(n) < k] \Leftrightarrow [\tau_j(k) > n]$$

VZHĽADOM K TOMU, ŽE REŤAZEC JE NEROZLOŽITEĽNÝ A VŠETKY STAVY SÚ TRVALÉ, PLATÍ $P_i(\tau_j(k) < \infty) = 1$

VETA: V NEROZLOŽITEĽNOM REŤAZCI S TRVALÝMI NENULOVÝMI STAVMI PLATÍ:

$$\frac{N_j(n)}{n} \to \pi_j \quad \text{PRI } n \to \infty \text{ S PRAVD. 1} \quad \forall j \in S.$$

$\underline{D}$: $\left[\frac{N_j(n)}{n} - \pi_j < \varepsilon\right] = [N_j(n) < n(\pi_j+\varepsilon)] \supseteq$

$\supseteq [N_j(n) < Z]$, KDE $Z := \lfloor n(\pi_j+\varepsilon)\rfloor$

$[N_j(n) < Z] = [\tau_j(Z) > n] = \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} > \frac{n}{Z}\right] \supseteq$

$\supseteq \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} > \frac{n}{n(\pi_j+\frac{\varepsilon}{2})}\right] = \left[\frac{\tau_j(Z)}{Z} - \frac{1}{\pi_j} > -\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\pi_j(\pi_j+\frac{\varepsilon}{2})}\right]$.

VIEME, ŽE $\tau_j(Z) = \sum_{k=1}^{Z} T_k$, $T_1, \dots, T_Z$ SÚ NEZ. N.V.

KEĎ VYCHÁDZA RETAZEC ZO STAVU j, MAJÚ VŠETKY T_k ROVNAKÉ ROZDELENIE S KONEČNOU STR. HODN. $\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$

$\Rightarrow$ PLATÍ PRE NE SILNÝ ZÁKON VEĽKÝCH ČÍSIEL:

$\frac{\tau_j(Z)}{Z} \to \frac{1}{\pi_j}$ PRE $Z \to \infty$ S PRAVD. 1.

KEĎ VYCHÁDZA RETAZEC Z INÉHO STAVU, DOSTANEME TO ISTÉ...

PLATÍ TEDA: $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists Z_0$:

$P\left(\frac{\tau_j(Z)}{Z} - \frac{1}{\pi_j} > -\varepsilon \quad \forall Z > Z_0\right) > 1-\delta$

PRETOŽE $Z \to \infty \Leftrightarrow n \to \infty$, PLATÍ $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists n_0$:

$P\left(\frac{N_j(n)}{n} - \pi_j < \varepsilon \quad \forall n > n_0\right) > 1-\delta$

PODOBNE ..... $> -\varepsilon$. ■

$\underline{\text{VETA}}$: AK NAVYAC ROZPTYLY $\sigma_j^2 = \mathrm{var}_j(\tau_j(1)) < \infty$,

POTOM: $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_j(n) - n/\mu_j}{\sqrt{n\sigma_j^2/\mu_j^3}} \le x\right) = \Phi(x)$.

Φ ... DISTRIBUČNÁ FCIA. NORMOVANÉHO NORMÁLNEHO ROZD.

02.05.2009 Sa
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

D: NECH RETAZEC VYCHÁDZA ZO STAVU j.

$$P\left(\frac{N_j(n) - \frac{n}{\mu_j}}{\sqrt{n\sigma^2/\mu_j^3}} \leq x\right) = P(N_j(n) < r)$$

KDE $r = \left\lceil \frac{n}{\mu_j} + x\,\sigma_j \sqrt{n/\mu_j^3} \right\rceil =$

$$= \frac{n}{\mu_j} + x\,\sigma_j \sqrt{n/\mu_j^3} + \Theta \qquad 0 < \Theta \leq 1.$$

ĎALEJ $P(N_j(n) < r) = P(\tau_j(r) > n) =$

$$= P\left(\frac{\tau_j(r) - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} > \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}}\right)$$

A ĽAHKO UKÁŽEME, ŽE $\lim_{n\to\infty} \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} = -x$.

PRETOŽE $\tau_j(r)$ JE SÚČET r NEZÁVISLÝCH ROVNAKO ROZDELENÝCH N. V. A $n \to \infty \Leftrightarrow r \to \infty$ PLYNIE Z CENTRÁLNEJ LIMITNEJ VETY, ŽE:

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{\tau_j(r) - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}} > \frac{n - r\mu_j}{\sigma_j\sqrt{r}}\right) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

■

MARKOVOVE REŤAZCE S OCENENÍM PRECHODOV

UVAŽUJME NEROZLOŽITEĽNÝ MARKOVOV REŤAZEC S KONEČNOU MNOŽINOU STAVOV, V KTORÝCH SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ, NENULOVÉ A NEPERIODICKÉ.

$Z = (z_{ij})_{i,j \in S}$ ... MATICA OCENENIA PRECHODOV

OČAKÁVANÝ VÝNOS SPOJENÝ S REALIZÁCIOU 1 PRECHODU ZO STAVU i JE $q_i = \sum_{j \in S} z_{ij} p_{ij}$.

$V_i(n)$ ... OČAKÁVANÝ VÝNOS ZA n OBDOBÍ, KEĎ NA ZAČIATKU BOL REŤAZEC V STAVE i.

POLOŽÍME $V(0) := 0$ A OZNAČÍME $q = (q_i)_{i \in S}$

VETA: $V(n) = q + P V(n-1)$, $n \geq 1$, KDE $q = V(1)$.

REALIZÁCIA $(X_0 = i, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$ DÁVA VÝNOS $z_{i i_1} + \dots + z_{i_{n-1} i_n}$, PRAVDEP. $p_i p_{i i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$.

$$V_i(n) = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} (z_{i i_1} + \dots + z_{i_{n-1} i_n}) p_{i i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} =$$

$$= \sum_{i_1} p_{i i_1} \Big[z_{i i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} +$$

$$+ \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} (z_{i_1 i_2} + \dots + z_{i_{n-1} i_n}) p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \Big] =$$

$$= \sum_{i_1} p_{i i_1} z_{i i_1} + \sum_{i_1} p_{i i_1} V_{i_1}(n-1) = q_i + \sum_{i_1} p_{i i_1} V_{i_1}(n-1) . \blacksquare$$

02.05.2009 Sa
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENIA

2.1. $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ HOMOGÉNNY MARKOVOV REŤAZEC

MÁME DOKÁZAŤ, ŽE $\forall m, N \in \mathbb{N}$, $i, k_1, \dots, k_N \in S$:

$$P(X_{m+N} = k_N, \dots, X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) =$$
$$= P(X_N = k_N, \dots, X_1 = k_1 \mid X_0 = i).$$

PRE $N=1$: $P(X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) = p_{i k_1}(m, m+1) =$
$= p_{i k_1} = P(X_1 = k_1 \mid X_0 = i)$. $\forall m$

PRE $N > 1$:

ZA PREDPOKLADU, ŽE $P(X_{m+1} = k_1, X_m = i) > 0$

$$P(X_{m+N} = k_N, \dots, X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) =$$
$$= P(X_{m+N} = k_N, \dots, X_{m+2} = k_2 \mid X_{m+1} = k_1, X_m = i) \cdot$$
$$\cdot P(X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) =$$

↓ MARKOVOVSKÁ VLASTNOSŤ

$$= P(X_{m+N} = k_N, \dots, X_{m+2} = k_2 \mid X_{m+1} = k_1) \cdot$$
$$\cdot P(X_{m+1} = k_1 \mid X_m = i) =$$

↓ INDUKČNÝ PREDPOKLAD

$$= P(X_N = k_N, \dots, X_2 = k_2 \mid X_1 = k_1) \cdot$$
$$P(X_1 = k_1 \mid X_0 = i) =$$

← HOMOGENITA

$$= P(X_N = k_N, \dots, X_2 = k_2 \mid X_1 = k_1, X_0 = i) \cdot$$

← MARKOVOV. VLASTNOSŤ

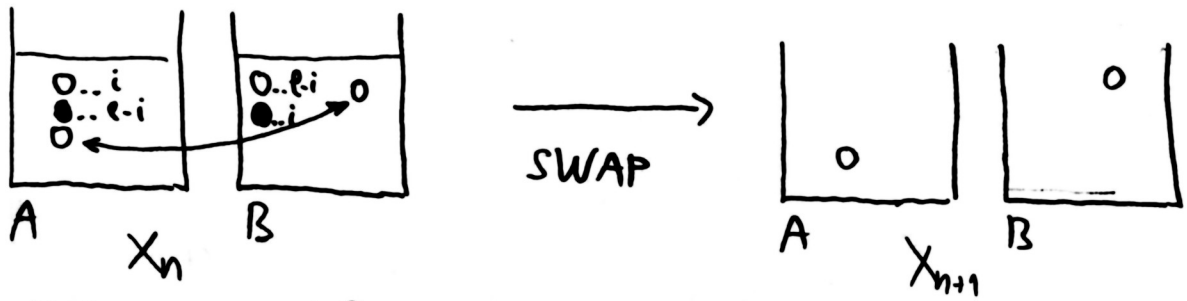
$$\cdot P(X_1 = k_1 \mid X_0 = i) =$$
$$= P(X_N = k_N, \dots, X_1 = k_1 \mid X_0 = i).$$

AK $P(X_{m+1} = k_1, X_m = i) = 0$, POTOM TAKTIEŽ
$P(X_1 = k_1, X_0 = i) = 0$,

A OBE STRANY DOK. ROVNOSTI $= 0$. ■

2.2. MODEL RIEŠENIA DVOCH NESTLAČITEĽNÝCH KVAPALÍN

DVE URNY A, B, 2ℓ GULÍ, ℓ BIELYCH, ℓ ČIERNYCH



VYBERIEM V KAŽDEJ URNE NÁHODNE 1 GUĽU

$X_n = i \Leftrightarrow$ V ČASE n JE V URNE A PRÁVE i BIELYCH GULÍ

$1 \le i \le \ell - 1$

$$\Rightarrow X_{n+1} = \begin{cases} i-1 & \frac{i}{\ell} \cdot \frac{i}{\ell} \\ i & \frac{i}{\ell} \cdot \frac{\ell-i}{\ell} + \frac{\ell-i}{\ell} \cdot \frac{i}{\ell} \\ i+1 & \frac{\ell-i}{\ell} \cdot \frac{\ell-i}{\ell} \end{cases}$$

$= 1$

ZÁVISÍ IBA NA PREDCH. STAVE + NEZÁVISÍ NA ČASE

$i = 0$

$\Rightarrow X_{n+1} = i+1$

$i = \ell$

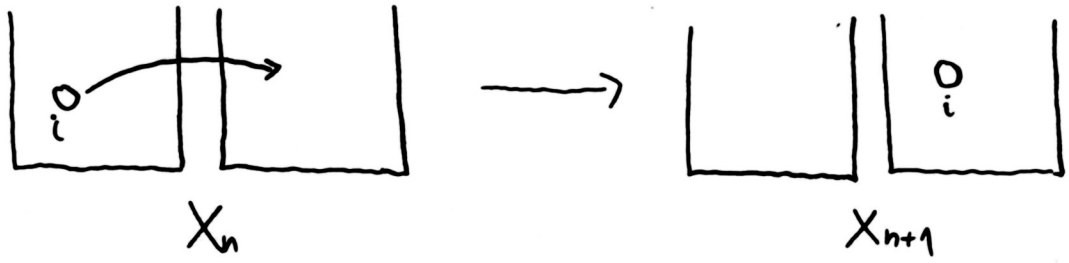
$\Rightarrow X_{n+1} = \ell - 1$

02.05.2009 Sa
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENÍ

2.3. MODEL VÝMĚNY TEPLA

DVE URNY A, B, 2ℓ GULÍ OČÍSLOVANÉ $1, \dots, 2\ell$



- NÁHODNE ZVOLÍME GULU i A PRESUNIEME DO DRUHEJ URNY

$X_n = i \Leftrightarrow$ V ČASE n JE V URNE A PRÁVE i GULÍ $0 \le i \le 2\ell$.

$$1 \le i \le 2\ell - 1 \Rightarrow X_{n+1} = \begin{cases} i-1 & \frac{i}{2\ell} \\ i & 0 \\ i+1 & \frac{2\ell - i}{2\ell} \end{cases}$$

$i = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 1$

$i = 2\ell \Rightarrow X_{n+1} = 2\ell - 1$

2.4 GALTONOV–WATSONOV PROCES VETVENIA

X_1 .. POČET JEDINCOV PRVEJ GENERÁCIE S ROZDELENÍM $\{p_j, j \ge 0\}$, MTV. FCIOU. P_{11} $EX_1 = \mu_1$, $\operatorname{var} X_1 = \sigma_1^2$.

MÁME DOKÁZAŤ:

$$EX_n = \mu_n = \mu_1^n, \quad \operatorname{var} X_n = \sigma_n^2 = \begin{cases} n\sigma_1^2 & \mu_1 = 1 \\ \sigma_1^2 \mu_1^{n-1} \frac{\mu_1^n - 1}{\mu_1 - 1} & \mu_1 \neq 1 \end{cases}$$

$X_0 = 1$, $P(X_1 = j) = p_j$

$X_n = U_{n1} + \dots + U_{nX_{n-1}}$, U_{ni} SÚ N.V. S ROVNAKÝM ROZDELENÍM AKO X_1, NEZÁVISLÉ MEDZI SEBOU I NA $X_{n-1}, \dots, X_0$.

MÁME NEZÁV. N.V. $X_0, \dots$ ROVNAKO ROZD. S MTVÁR. FCIOU. A_X

Y NEZÁV. N.V. S MTV. FCIOU. A_Y

$$X_0 + \dots + X_Y = \begin{cases} \underbrace{X_0 + \dots + X_k}_{(A_X)^k} & P(Y=k) \end{cases}$$

$$P(X_0 + \dots + X_Y = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_0 + \dots + X_Y = i,\ Y=k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_0 + \dots + X_k = i \mid Y=k) \cdot P(Y=k).$$

$$A_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k)\, s^k$$

$$A_Y(A_X(t)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) \cdot [A_X(t)]^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) \cdot A_{X_1 + \dots + X_k}(t) = \quad \underbrace{\text{"} \mid Y=k \text{"}}_{\dots \text{VĎAKA NEZÁVISLOSTI}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_k = i)\, t^i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_k = i \mid Y=k) \cdot P(Y=k) \right) t^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_Y = i)\, t^i = \underline{\underline{A_{X_1 + \dots + X_Y}(t)}}$$

NECH P_1 JE MTV. FCIA. X_1, $P_1(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$

POTOM $P_1(P_1(s)) = A_{U_{21} + \dots + U_{2X_1}}(s) = A_{X_2}(s) =: P_2(s)$

$\dots$ $P_n(s) = P_1(P_{n-1}(s)) = P_{n-1}(P_1(s)) = \underline{\underline{A_{X_n}(s)}}$.

DOKÁŽTE INDUKCIOU, ŽE

$$EX_n = \mu_n = \mu_1^n$$

$$\operatorname{var} X_n = \sigma_n^2 = \begin{cases} n\sigma_1^2 & \mu_1 = 1 \\ \sigma_1^2 \mu_1^{n-1} \dfrac{\mu_1^n - 1}{\mu_1 - 1} & \mu_1 \neq 1 \end{cases}$$

02.05.2009 Sa
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENIA

$$A_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, s^k$$

$$\frac{d}{ds} A_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k)\, s^{k-1}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} A_X(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, P(X=k)\, s^{k-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} A_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k) \Rightarrow \underline{EX = A'_X(1)}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} A_X(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) - \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k)$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = \underline{A''_X(1) + A'_X(1) - (A'_X(1))^2}$$

PRE $n=1$ JE $EX_1 = \mu_1^1$

$$\operatorname{var} X_1 = \begin{cases} 1 \cdot \sigma_1^2 & \text{PRE } \mu_1 = 1 \\ \sigma_1^2 \cdot \mu_1^0 \cdot \dfrac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - 1} & \text{PRE } \mu_1 \neq 1 \end{cases} \quad \checkmark$$

PRE $n>1$ JE $A_{X_n}(s) = P_1(P_{n-1}(s)) = P_{n-1}(P_1(s)) = P_n(s)$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} P_n(s) = P_1'(P_{n-1}(s)) \cdot P'_{n-1}(s)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} P_n(s) = P_1''(P_{n-1}(s)) [P'_{n-1}(s)]^2 + P_1'(P_{n-1}(s)) \cdot P''_{n-1}(s)$$

$$EX_n = P_n'(1) = P_1'(P_{n-1}(1)) \cdot P'_{n-1}(1) = P_1'(1) \cdot P'_{n-1}(1) =$$

$$= \mu_1 \cdot \mu_1^{n-1} = \mu_1^n \qquad \text{(IND. PREDP.)}$$

$$\operatorname{var} X_n = P_n''(1) + P_n'(1) - (P_n'(1))^2 =$$

$$= P_1''(P_{n-1}(1)) \cdot [P'_{n-1}(1)]^2 + P_1'(P_{n-1}(1)) \cdot P''_{n-1}(1) + \mu_1^n - (\mu_1^n)^2 =$$

$$= P_1''(1) \cdot (\mu_1^{n-1})^2 + \mu_1 \cdot P_{n-1}''(1) + \sigma_1^n - (\mu_1^n)^2 =$$

$$= \left[\boxed{P_1''(1) + P_1'(1) - (P_1'(1))^2} - P_1'(1) + (P_1'(1))^2 \right] \cdot (\mu_1^{n-1})^2 +$$

$$+ \left[\boxed{P_{n-1}''(1) + P_{n-1}'(1) - (P_{n-1}'(1))^2} - P_{n-1}'(1) + (P_{n-1}'(1))^2 \right] \cdot \mu_1 +$$

$$+ \sigma_1^n - (\mu_1^n)^2 =$$

$$=$$

a) $\left[\sigma_1^2 - 1 + 1^2 \right] \cdot (1^{n-1})^2 +$ $\underline{\mu_1 = 1}$

$$+ \left[(n-1)\sigma_1^2 - 1 + 1^2 \right] \cdot 1 + 1^n - (1^n)^2 =$$

$$= \underline{\underline{n \sigma_1^2}}$$

b) $\underline{\mu_1 \neq 1}$

$$\left[\sigma_1^2 - \mu_1 + \mu_1^2 \right] \cdot (\mu_1^{n-1})^2 +$$

$$+ \left[\sigma_1^2 \cdot \mu_1^{n-2} \cdot \frac{\mu_1^{n-1} - 1}{\mu_1 - 1} - \mu_1^{n-1} + (\mu_1^{n-1})^2 \right] \cdot \mu_1 +$$

$$+ \mu_1^n - (\mu_1^n)^2 =$$

$$= \left[(\mu_1^{n-1})^2 + \mu_1^{n-1} \cdot \frac{\mu_1^{n-1} - 1}{\mu_1 - 1} \right] \sigma_1^2 -$$

$$- \mu_1^{2n-1} + \mu_1^{2n} - \mu_1^n + \mu_1^{2n-1} + \mu_1^n - \mu_1^{2n}$$

$$= (\mu_1^{n-1}) \left[\mu_1^{n-1} + \mu_1^{n-2} + \ldots + 1 \right] \sigma_1^2 = \underline{\underline{\mu_1^{n-1} \frac{\mu_1^n - 1}{\mu_1 - 1} \sigma_1^2}}$$

■

03.05.2009 Su
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENÍ

2.5. $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ POČET JEDINCŮ V GALTONOVO-WATSONOVOM PROCESE VETVENÍ,

$P(X_0 = 1) = 1$, X_1 MÁ ROZDELENIE:

$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$, $P(X_1 = j) = 0 \quad j \geq 3$.

MÁME SPOČÍTAŤ PRAVDEPODOBNOSTI PRECHODU p_{ij} RET. $\{X_n\}$.

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1) =$$
$$= P\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} U_{nk} = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1\right) =$$
$$= P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j \mid X_{n-1} = i, \dots, X_1 = i_1, X_0 = 1\right) =$$
$$= P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}.$$

POČIATOČNÉ ROZDELENIE $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ JE $\mathbb{P} = (0, 1, 0, \dots)^T$

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P\left(\sum_{k=1}^{i} U_{nk} = j\right) = a_j^{*i}$$

$\{a_j\}^{*i}$ JE i-TA KONVOLUČNÁ MOCNINA $\{a_j\}$

KDE $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{1}{3}$, $a_j = 0 \quad j \geq 3$

VYTVOR. FCIA. $A(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2$

$$\Rightarrow [A(s)]^i = \frac{1}{3^i}\left(1 + s + s^2\right)^i = \frac{1}{3^i}\left(\frac{s^3 - 1}{s - 1}\right)^i$$

$$A(s) = A(0) + \frac{A'(0)}{1!} + \frac{A''(0)}{2!} + \dots \qquad \frac{2s^2 - s - 1}{s - 1} = 2s + 1$$

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{3^i}\left(\frac{s^3 - 1}{s - 1}\right)^i = \frac{i}{3^i}\left(\frac{s^3 - 1}{s - 1}\right)^{i-1} \frac{3s^2(s-1) - (s^3 - 1)}{(s-1)^2}$$

$$\frac{d}{ds}\ \frac{i}{3^i}\left(\frac{s^3-1}{s-1}\right)^{i-1}(2s+1) =$$

$$= \frac{i}{3^i}(2s+1)\left[(i-1)\left(\frac{s^3-1}{s-1}\right)^{i-2}(2s+1)\right] +$$

$$+\ 2\frac{i}{3^i}\left(\frac{s^3-1}{s-1}\right)^{i-1} =$$

$$= \frac{i}{3^i}\left(\frac{s^3-1}{s-1}\right)^{i-2}\left[(2s+1)^2(i-1) + 2(s^2+s+1)\right]$$

... ??? ...

ÚLOHA: SPOČÍTAŤ j-TÝ KOEFICIENT PRI $(1+s+s^2)^i$

OZNAČME AKO $c_j^{(i)}$

PLATÍ $c_0^{(1)} = c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 1$, $c_j^{(1)} = 0$ $j \geq 3$

$$(1+s+s^2)^i = (1+s+s^2)\left(c_0^{(i-1)} + c_1^{(i-1)}s + c_2^{(i-1)}s^2 + \dots\right) =$$

$$= c_0^{(i-1)} + c_1^{(i-1)}s + c_2^{(i-1)}s^2 + \dots$$
$$+ c_0^{(i-1)}s + c_1^{(i-1)}s^2 + \dots$$
$$+ c_0^{(i-1)}s^2 + c_1^{(i-1)}s^3 + \dots$$

$$c_0^{(i)} = c_0^{(i-1)}$$
$$c_1^{(i)} = c_0^{(i-1)} + c_1^{(i-1)}$$
$$c_2^{(i)} = c_0^{(i-1)} + c_1^{(i-1)} + c_2^{(i-1)}$$
$$\dots$$
$$c_{j+3}^{(i)} = c_{j+1}^{(i-1)} + c_{j+2}^{(i-1)} + c_{j+3}^{(i-1)}$$
$$\dots$$

??? ...

$$c_j^{(i)} = \sum_{\substack{(a,b,c)\geq 0 \\ a+b+c=i \\ 0a+1b+2c=j}} \binom{i}{a,b,c}$$

??? ...

03. 05. 2009 Su
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÍCH PROCESŮ: CVIČENÍ

$$(1+s(s+1))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [s(s+1)]^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} s^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j} s^{i+j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^{k} \binom{n}{i}\binom{i}{k-i} \right) s^k$$

$$\Rightarrow a_j^{*i} = \frac{1}{j^i} \sum_{k=\lceil \frac{j}{2} \rceil}^{j} \binom{i}{k}\binom{k}{j-k} = P_{ij}$$

2.6 $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ HOM. MARK. REŤAZEC, $S = \{0, 1, \dots\}$
MATICA PRAVD. PRECHODU $\mathcal{P} = \{P_{ij}, i,j \in S\}$

MÁTE DOKÁZAŤ, ŽE: $f_{ij}^{(n)} = \begin{cases} P_{ij} & n = 1 \\ \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)} & n > 1 \end{cases}$

$\tau_j(1) = \inf \{n > 0 : X_n = j\}$

$[\tau_j(1) = n] = P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j]$

$f_{ij}^{(0)} := 0$

$f_{ij}^{(n)} := P_i(\tau_j(1) = n), \quad n \geq 1$

$n > 1$

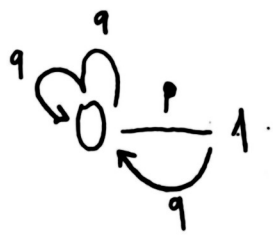
$$f_{ij}^{(n)} = P_i(X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) =$$

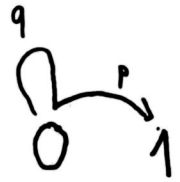
$$= \sum_{k \neq j} P_i(X_1 = k, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) =$$

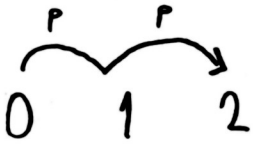
$$= \sum_{k \neq j} P(X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i, X_1 = k) \cdot$$
$$\cdot P(X_1 = k \mid X_0 = i) =$$
$$= \sum_{k \neq j} P(X_1 \neq j, \dots, X_{n-2} \neq j, X_{n-1} = j \mid X_0 = k) \cdot P_i(X_1 = k) =$$
$$= \sum_{k \neq j} f_{kj}^{(n-1)} \cdot p_{ik} \quad . \blacksquare$$

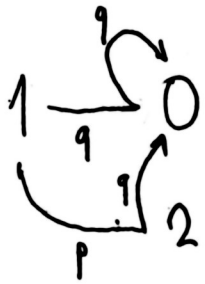
2.7.

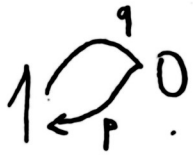
$$P^2 = \begin{vmatrix} q^2 + pq & qp & p^2 & 0 & 0 & \vdots \\ q^2 + pq & qp & 0 & p^2 & 0 & \\ q^2 + pq & qp & 0 & 0 & p^2 & \\ \dots & & & & & \end{vmatrix}$$

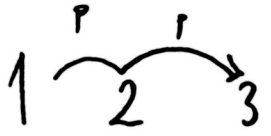


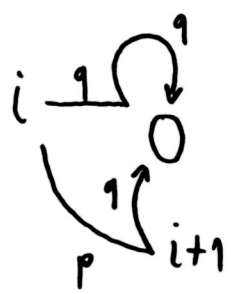


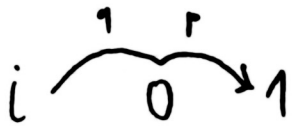




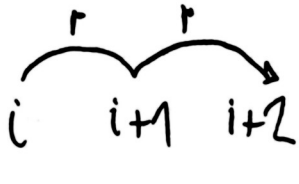








...



04.05.2009 Mo
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ : CVIČENÍ

2.8. /

2.9. /

2.10. $\{Y_n, n \geq 1\}$ NEZÁV. N.V. S ALT. ROZDELENÍM

$$X_n = \begin{cases} 1 & Y_n = 1,\ Y_{n+1} = 1 \\ 2 & Y_n = 1,\ Y_{n+1} = 0 \\ 3 & Y_n = 0,\ Y_{n+1} = 1 \\ 4 & Y_n = 0,\ Y_{n+1} = 0 \end{cases} \qquad n \geq 1$$

(1) POKÁŽTE MARKOVOVSKÚ VLASTNOSŤ

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) =$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid Y_n = a_i, Y_{n+1} = b_i, Y_{n-1} = a_{i_{n-1}}, Y_n = b_{i_{n-1}}, \dots$$
$$\dots Y_1 = a_{i_1}, Y_2 = b_{i_1})$$

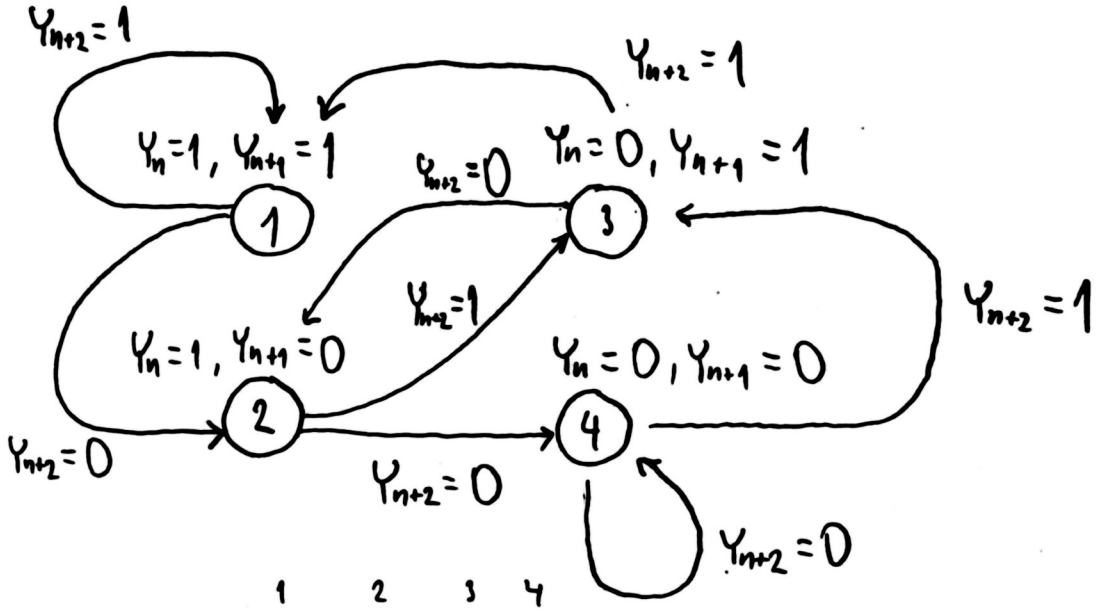
PREDPOKLADÁME, ŽE : $a_i = b_{i_{n-1}}, a_{i_{n-1}} = b_{i_{n-2}}, \dots a_{i_2} = b_{i_1}$

$$\text{P.} = P(X_{n+1} = j \mid Y_{n+1} = b_i, Y_n = a_i, Y_{n-1} = a_{i_{n-1}}, \dots, Y_1 = a_1) =$$

= KEĎŽE X_{n+1} ZÁVISÍ IBA NA Y_{n+1}, Y_{n+2}

$$= P(X_{n+1} = j \mid Y_{n+1} = b_i, Y_n = a_i) =$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

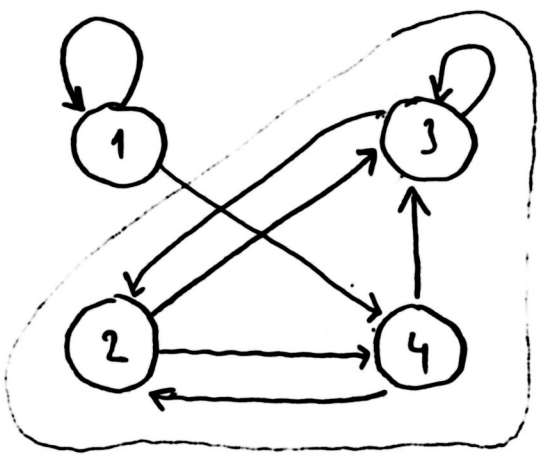


$$\Pi P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Pi P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \ldots = \underline{\Pi P^n} \quad \forall n \geq 2$$

2.11.

$$\Pi P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\rightsquigarrow \Pi P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

04.05.2009 Po
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ : CVIČENIA

MNOŽINA STAVOV $C_1 = \{2,3,4\}$ JE UZAVRETÁ A NEROZLOŽITEĽNÁ

$\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ ROVNAKÉHO TYPU

V NEROZLOŽITEĽNOM REŤAZCI S KONEČNE VEĽA STAVMI SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ A NENULOVÉ.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^n = \begin{pmatrix} P_1^n & 0 \\ ? & Q_2^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

STAV j JE TRVALÝ $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

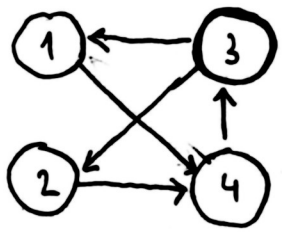
A KEĎŽE $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 < \infty$, NUTNE

STAV 1 NIE JE TRVALÝ. $\Rightarrow$ JE PRECHODNÝ,

T.J. $P(\tau_1(1) = \infty) > 0$

2.12.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

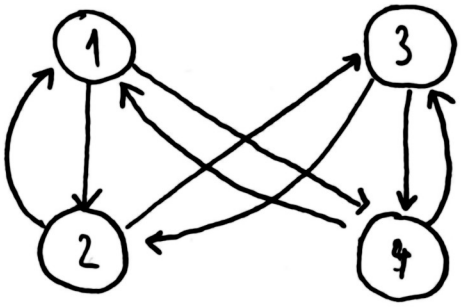


UZAVRETÝ NEROZLOŽITEĽNÝ REŤAZEC S KONEČNE VEĽA STAVMI

$\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ TRVALÉ A NENULOVÉ.

2.13.

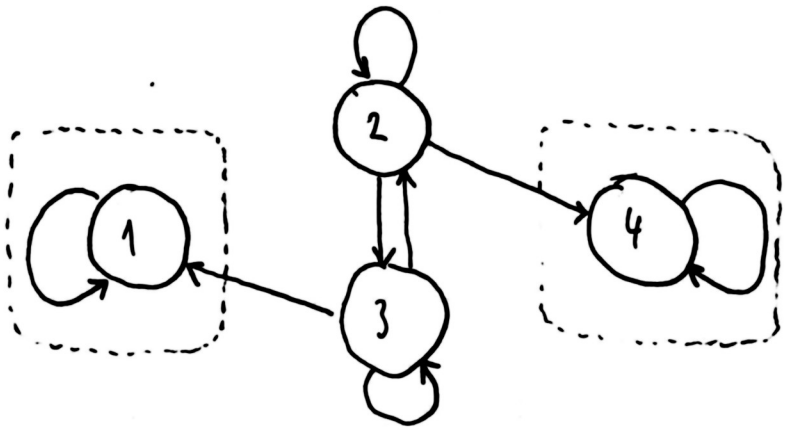
$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 5/6 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



UZAVRETÝ NEROZLOŽITEĽNÝ RETAZEC S KONEČNE VEĽA STAVMI $\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ TRVALÉ A NENULOVÉ

2.14.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$S = \{1,2,3,4\}$

$T = \{2,3\}$

$C_1 = \{1\}, \; C_2 = \{4\}$

1, 4 SÚ ABSORPČNÉ STAVY

PRE $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}$ ... ČAS VÝSTUPU

PLATÍ $P_i(\tau = +\infty) = 0 \quad \forall i \in T$

DEFINUJME $u_{ij} = P_i(X_\tau = j) \quad i \in T, \; j \in T^c$

04.05.2009 Mo
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENIA

MÁME $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}^* & \mathbb{O} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ $\mathbb{P}^* = (p_{ij})_{i,j \in T^c}$ $\mathbb{R} = (p_{ij})_{i,j \in T}$

$\mathbb{Q} = (p_{ij})_{i \in T, j \in T^c}$ $\mathbb{U} = (u_{ij})_{i \in T, j \in T^c}$

V NAŠOM PRÍPADE $\mathbb{R} = \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix}$

$\mathbb{F} = (I - \mathbb{R})^{-1}$ ... FUNDAMENTÁLNA MATICA M.R.

$$\sim \left(\begin{array}{cc:cc} 2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:cc} 2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PLATÍ $\mathbb{U} = \mathbb{Q} + \mathbb{R}\mathbb{U}$, TJ. $\mathbb{U} = \mathbb{F}\mathbb{Q}$

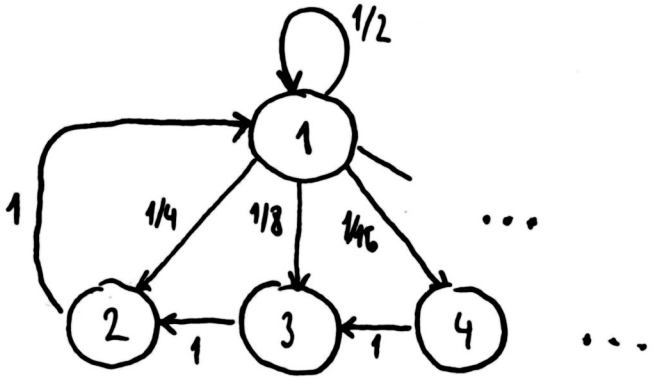
KDE V NAŠOM PRÍPADE:

$$\mathbb{Q} = \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \mathbb{U} = \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

HĽADANÁ PRAVDEPODOBNOSŤ $u_{24} = P_2(X_\tau = 4) = 2/3$.

2.15.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \end{array}$$



$S = \{1, 2, \dots\}$ NEROZLOŽITEĆNÝ M.R.

$\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ ROVNAKÉHO TYPU

V NEROZLOŽITEĆNOM RETAZCI S MNOŽINOU STAVOV $S = \{1, 2, \dots\}$ SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ $\Leftrightarrow$ JEDINÉ RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

$$x_i = \sum_{j=2}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 2, 3, \dots$$

V INTERVALE $\langle 0, 1 \rangle$ JE TRIVIÁLNE RIEŠ. $x_i = 0$.

VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ $\Leftrightarrow$ EXISTUJE NETRIVIÁLNE RIEŠENIE.

$$x_2 = p_{22} x_2 + p_{23} x_3 + \dots = 0$$
$$x_3 = p_{32} x_2 + p_{33} x_3 + \dots = x_2 = 0$$
$$x_4 = p_{42} x_2 + p_{43} x_3 + \dots = x_3 = 0$$
$$\dots$$

$\Rightarrow$ JEDINÉ RIEŠENIE JE $(x_2, x_3, \dots) = (0, 0, \dots)$

$\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ TRVALÉ.

$p_{11} = 1/2 > 0 \Rightarrow \forall$ STAVY SÚ NEPERIODICKÉ.

04.05.2009 Mo
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ: CVIČENÍ

SKÚSME NÁJSŤ STACIONÁRNE ROZDELENIE π

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} \quad \forall j \in S$$

$$\pi_1 = \pi_1 \cdot p_{11} + \pi_2 \cdot p_{21} + \pi_3 \cdot p_{31} + \dots$$
$$\pi_2 = \pi_1 \cdot p_{12} + \pi_2 \cdot p_{22} + \pi_3 \cdot p_{32} + \dots$$
$$\dots$$

$$\pi_1 = \pi_1 \cdot \tfrac{1}{2} + \pi_2 \cdot 1 \Rightarrow \pi_2 = \tfrac{1}{2}\pi_1$$
$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \tfrac{1}{4} + \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \tfrac{1}{4}\pi_1$$
$$\pi_3 = \pi_1 \cdot \tfrac{1}{8} + \pi_4 \Rightarrow \pi_4 = \tfrac{1}{8}\pi_1$$
$$\dots$$
$$\pi_k = \pi_1 \cdot \frac{1}{2^k} + \pi_{k+1}$$
$$\dots$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \pi_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots\right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \dots\right)^T$$

KEĎŽE STACIONÁRNE ROZDELENIE EXISTUJE, NEMÔŽU BYŤ STAVY PRECHODNÉ ANI TRVALÉ NULOVÉ.

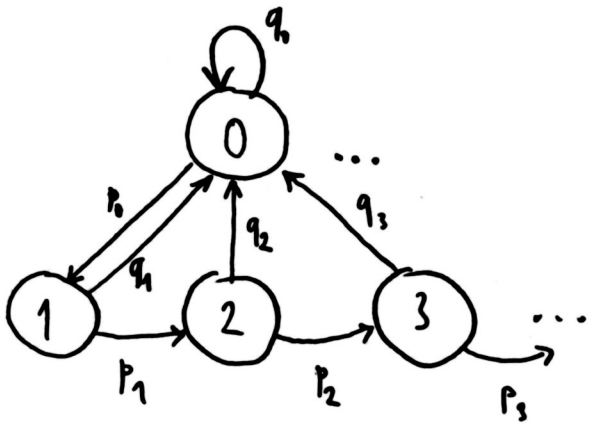
$\Rightarrow$ NUTNE SÚ <u>TRVALÉ NENULOVÉ</u>

NAVIAC $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall i,j \in S$,

$m_j = E_j \tau_j(1) = 1/\pi_j$, $\frac{N_j(n)}{n} \to \pi_j$ S PRAVD. 1.

2.16.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} q_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & r_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \dots \\ \dots & & & & \end{array}\right] \end{array}$$



NEROZLOŽITEĽNÝ MARKOVOV REŤAZEC
S MNOŽINOU STAVOV $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

NA KLASIFIKÁCIU STAVOV SKÚSIME NÁJSŤ
STACIONÁRNE ROZDELENIE:

$$\pi_0 = \pi_0 \cdot q_0 + \pi_1 \cdot q_1 + \pi_2 \cdot q_2 + \dots \qquad p_i = 1 - q_i$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot p_0$$

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot p_1 = \pi_0 \cdot p_0 p_1$$

$$\pi_3 = \pi_2 \cdot p_2 = \pi_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\pi_0 = \pi_0 \left[q_0 + p_0 \cdot q_1 + p_0 \cdot p_1 \cdot q_2 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + \dots \right]$$

$$1 - p_0 + p_0 (1 - p_1) + p_0 p_1 (1 - p_2) + p_0 p_1 p_2 (1 - p_3) + \dots$$

$$= 1 - p_0 + p_0 - p_0 p_1 + p_0 p_1 - p_0 p_1 p_2 + p_0 p_1 p_2 - p_0 p_1 p_2 p_3 \dots$$

$$= \underline{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \left(1 + p_0 + p_0 p_1 + p_0 p_1 p_2 + \dots \right) = 1$$

VIDÍME, ŽE STAC. ROZD. EXISTUJE $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} p_j$ KONV.

04.05.2009 M.
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV : CVIČENIA

AK $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} p_j$ KONVERGUJE $\Rightarrow$
STAC. ROZD. EXISTUJE A $\forall$ STAVY SÚ TRVALÉ NENULOVÉ.
AK DIVERGUJE $\Rightarrow$ $\forall$ STAVY SÚ BUĎ
TRVALÉ NULOVÉ, ALEBO PRECHODNÉ.

V NEROZLOŽITEĽNOM RETAZCI S MNOŽINOU STAVOV
$S = \{0, 1, 2, \dots\}$ SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ $\Leftrightarrow$
JEDINÉ RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots$$

V INTERVALE $\langle 0, 1 \rangle$ JE TRIVIÁLNE RIEŠENIE $x_i = 0$.
VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ $\Leftrightarrow$ SÚSTAVA MÁ
V INT. $\langle 0, 1 \rangle$ NETRIVIÁLNE RIEŠENIE.

$$x_1 = p_{11} \cdot x_1 + p_{12} \cdot x_2 + \dots$$
$$x_2 = p_{21} \cdot x_1 + p_{22} \cdot x_2 + \dots$$
$$\dots$$

$$x_1 = p_1 \cdot x_2$$
$$x_2 = p_2 \cdot x_3$$
$$\dots$$
$$x_i = p_i \cdot x_{i+1}$$
$$\dots$$

VZHĽADOM K TOMU, ŽE
$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i} p_j$ DIVERGUJE,
NUTNE $p_j > 0 \quad \forall j \in S$

TJ. $$x_{i+1} = \frac{1}{p_i} x_i = \frac{1}{p_1 \cdots p_i} x_1$$

KEĎŽE $0 < p_i \leq 1$ JE $\left\{ \frac{1}{p_1 \cdots p_i} \right\}_{i=1}^{\infty}$ NEKLESAJÚCA.

AK TÁTO POSTUPNOSŤ NIE JE ZHORA OHRANIČENÁ,
TJ. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_1 \cdots p_n} = +\infty$,

POTOM MÁ SÚSTAVA V INTERVALE $\langle 0,1\rangle$
IBA TRIVIÁLNE RIEŠENIE $\Rightarrow$
VŠETKY STAVY SÚ TRVALÉ NULOVÉ.

V OPAČNOM PRÍPADE, AK $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_1 \cdots p_n} = C < \infty$

STAČÍ POLOŽIŤ $x_1 := \frac{1}{C}$

A PRE $\forall i \geq 1 \quad x_i = \frac{1}{p_1 \cdots p_i} x_1 \leq C \cdot \frac{1}{C} = 1$

TJ. MÁME NETRIVIÁLNE RIEŠENIE SÚSTAVY V INT. $\langle 0;1\rangle$
$\Rightarrow$ VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ.

05.05.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

MARKOVOVE REŤAZCE SO SPOJITÝM ČASOM

$\{X_t, t \geq 0\}$ ... MARKOVOV REŤAZEC SO SPOJITÝM ČASOM A SPOČETNOU MNOŽINOU STAVOV $\Leftrightarrow$

$$P(X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_t = j \mid X_s = i)$$

PRE $\forall i, j, i_1, \dots, i_n \in S$ A $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t$,
PRE KTORÉ $P(X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) > 0$.

OZNAČENIE: $P(X_t = j \mid X_s = i) =: p_{ij}(s,t)$ ... PR. PRECHODU

$P(X_t = j) := p_j(t)$ ... ABSOLÚTNE PR.

$p_j(0)$ ... POČIATOČNÉ PR.

HOMOGÉNNY REŤAZEC: $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t)$, $s \geq 0, t > 0$.

$\Rightarrow$ SYSTÉM MATÍC PR. PRECHODU $\{\mathbb{P}(t), t \geq 0\}$, $\mathbb{P}(0) = I$.

VŠETKY KONEČNOROZMERNÉ ROZDELENIA HOM. M. R. $\{X_t, t \geq 0\}$ SÚ URČENÉ:

(i) VEKTOROM POČIAT. PR. $\mathbb{p}(0) = \{p_i(0), i \in S\}$

(ii) SYSTÉMOM MATÍC PR. PRECHODU $\{\mathbb{P}(t), t \geq 0\}$

$\forall 0 < t_1 < \dots < t_n \ \forall i_0, \dots, i_n \in S$:

$$P(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) = p_{i_0}(0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_1) \cdot p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

$\Rightarrow$ $p_j(t) = P(X_t = j) = \sum_{i \in S} p_i(0) \cdot p_{ij}(t)$, t.j. $\mathbb{p}(t)^T = \mathbb{p}(0)^T \mathbb{P}(t)$.

CHAPMANOVA - KOLMOGOROVA ROVNOSŤ:

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s) \cdot \mathbb{P}(t)$$

PREDPOKLADÁME: $\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in S$ ▽ 0

PLATÍ: $p_{ij}(t)$ SÚ ROVNOMERNE SPOJITÉ PRE $t \geq 0$.

$\{X_t, t \geq 0\}$ JE STOCHASTICKY SPOJITÝ PROCES

$\Rightarrow$ EXISTUJE JEHO VERZIA, KT. JE SEPARABILNÁ A NEREATECNÁ

PREDPOKLADÁME: $\{X_t, t \geq 0\}$ JE SEPARABILNÝ A NER. PROCES

PREDPOKLADÁME: TRAJEKTÓRIE SÚ SPOJITÉ ZPRAVA

VETA: $\forall i \in S$ EXISTUJE LIMITA $\boxed{\lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = q_i \leq \infty}$.

$\forall i,j \in S$, $i \neq j$ EXISTUJÚ LIMITY $\boxed{\lim_{h \to 0+} p_{ij}(h)/h = q_{ij} < \infty}$.

PRE KAŽDÉ $i \in S$: $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$.

PREDPOKLADÁME: $\boxed{q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}}$ $\forall i \in S$.

(TENTO VZŤAH PLATÍ IMPLIC., KEĎ JE S KONEČNÁ)

DEFINÍCIA: q_{ij} ... INTENZITA PRECHODU z i DO j

q_i ... CELKOVÁ INTENZITA

$Q = (q_{ij})_{i,j \in S}$ KDE $q_{ii} = -q_i$ ... MATICA INTENZÍT PRECHODU

$$p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h)$$
$$p_{ij}(h) = q_{ij} h + o(h) \qquad i \neq j$$

! ○

05.05.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

PRÍKLAD: POISSONOV PROCES

UVAŽUJME UDALOSTI ROVNAKÉHO TYPU, KTORÉ NASTÁVAJÚ NÁHODNE V ČASE

(i) POČTY UDALOSTÍ V DISJ. ČAS. INT. SÚ NEZÁVISLÉ N.V. A ZÁVISIA IBA NA DĹŽKE TÝCHTO INTERVALOV

(ii) PRAVD., ŽE UDALOSŤ NASTANE V INTERVALE $(t, t+h\rangle$ JE $\lambda h + o(h)$, KDE $\lambda > 0$.

(iii) VIAC NEŽ JEDNA UDALOSŤ ... $o(h)$

$\frac{o(h)}{h} \to 0$ PRI $h \to 0+$

NECH $X_0 := 0$ A PRE $t > 0$ JE X_t POČET UDALOSTÍ, KT. NASTANÚ V INT. $(0; t\rangle$.

$\Rightarrow \{X_t; t \geq 0\}$ ... POISSONOV PROCES S INTENZITOU λ

PRE ĽUBOVOĽNÉ $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ SÚ POČTY UDALOSTÍ $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_4} - X_{t_3}$ V INT. $(t_1; t_2\rangle$, $(t_3; t_4\rangle$ NEZÁVISLÉ N. V.

$\Rightarrow \{X_t; t \geq 0\}$ JE PROCES S NEZÁVISLÝMI PRÍRASTKAMI

PRE $\forall t \geq 0$ PLATÍ:

$$P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & j = i+1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & j = i \\ o(h) & j > i+1 \\ 0 & j < i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ HOMOGÉNNY REŤAZEC SO SPOJITÝM ČASOM

$q_{i,i+1} = \lambda$, $q_i = -q_{ii} = \lambda$, INAK $q_{ij} = 0$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}.$$

PRÍKLAD: LINEÁRNY PROCES NÁRASTU A ZÁNIKU

UVAŽUJME POPULÁCIU, KT. JEDINCI SA MÔŽU NÁSOBIŤ A ZANIKAŤ

PR., ŽE Z JEDINCA VZNIKNE NOVÝ V INT. $(t; t+h)$ JE $\lambda h + o(h)$

VIAC JEDINCOV ... $o(h)$

JEDINEC ZANIKNE V INT. $(t; t+h\rangle$ S PR. $\mu h + o(h)$

KEĎ JE X_t VEĽKOSŤ POPULÁCIE V ČASE $t \geq 0$, POTOM

$\{X_t; t \geq 0\}$ JE HOM. MARK. REŤ. SO SPOČ. MN. STAVOV, SPOJ. ČASOM

$$P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(h) = \begin{cases} i\lambda h + o(h) & j = i+1 \\ i\mu h + o(h) & j = i-1 \\ 1 - i\lambda h - i\mu h + o(h) & j = i \\ o(h) & \text{INAK} \end{cases} \qquad i \geq 1$$

$q_{j,j+1} = j\lambda, \quad j = 0, 1, \ldots$

$q_{j,j-1} = j\mu, \quad j = 1, 2, \ldots$

$q_{ij} = 0$ PRE OSTATNÉ $i \neq j$

$q_j = j(\lambda + \mu)$

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & \ldots \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

05.05.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

VETA: PRE HOM. M.R. $\{X_t, t \geq 0\}$ SO SPOČ. NEH. STAVOV PLATÍ $\forall s \geq 0 \; \forall h > 0$:

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s+h \mid X_s = i) = e^{-q_i h}$$

D: $\{X_t\}$ JE STOCHASTICKY SPOJITÝ A SEPARABILNÝ $\Rightarrow$ (DOOB)

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s+h) = \lim_{n \to \infty} (X_{t_{0,n}} = i, \ldots, X_{t_{n,n}} = i)$$

PRE KAŽDÚ POSTUPNOSŤ $D_n = \{t_{0,n} < \ldots < t_{n,n}\}$ DELENIA INT. $\langle s, s+h \rangle$, KT. NORMA $\to 0$ PRI $n \to \infty$.

NECH $t_{k,n} = s + \frac{hk}{2^n}$ $\quad k = 0, \ldots, 2^n$.

$$P(X_t = i, s \leq t \leq s+h \mid X_s = i) = \frac{P(X_t = i, s \leq t \leq s+h)}{P(X_s = i)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{P(X_{s+\frac{hk}{2^n}} = i \quad k = 0, \ldots 2^n)}{P(X_s = i)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{P_i(0)} \cdot \overbrace{p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right) \ldots p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)}^{2^n \times}}{\cancel{P(X_s = i)}} = \lim_{n \to \infty} \left[p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[1 - q_i \frac{h}{2^n} + o\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n}$$

PRE $q_i < \infty$

PRETOŽE $p_{ii}(h) = 1 - q_i h + o(h)$

$$= e^{-q_i h}$$

□

PRE $q_i = \infty$ PRE ĽUBOVOĽNÉ $A > 0$ JE $p_{ii}(\delta) \leq 1 - A\delta \leq e^{-A\delta}$ PRE DOSTATOČNE MALÉ δ

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left[p_{ii}\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]^{2^n} \leq e^{-Ah} \Rightarrow$ TÁTO LIMITA $= 0$. ■

VETA: $q_i = 0 \Rightarrow p_{ii}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$

$0 < q_i < \infty \Rightarrow$ DOBA, PO KTORÚ REŤAZEC ZOSTANE V STAVE i, MÁ EXP. ROZD. SO STR. HODNOTOU $\frac{1}{q_i}$.

D: $p_{ii}(t) = P(X_t = i \mid X_0 = i) \geq P(X_s = i, 0 \leq s \leq t \mid X_0 = i) = e^{-q_i t}$.

$\Rightarrow$ PRE $q_i = 0$ JE $p_{ii}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$.

NECH $0 < q_i < \infty$. PREDPOKLADAJME, ŽE REŤAZEC, KT. BOL V ČASE 0 V STAVE i, VYSTÚPI Z i V ČASE

$\tau_i = \inf \{ t > 0 : X_t \neq i \}$.

POTOM $P_i(\tau_i > s) = \boxed{P(X_t = i, 0 \leq t \leq s \mid X_0 = i) = e^{-q_i s}}$.

$\Rightarrow \tau_i$ MÁ EXPONENCIÁLNE ROZDELENIE S HUSTOTOU

$$f(x) = \begin{cases} q_i e^{-q_i x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

A STREDNOU HODNOTOU $1/q_i$ ... STREDNÁ DOBA ZOSTANIA V STAVE i.

POZNÁMKA: ROZDELENIE DOBY ZOSTANIA T_i V STAVE i NEZÁVISÍ NA OKAMŽIKU, V KTOROM REŤAZEC VSTÚPI DO i.

DEFINÍCIA: STAV i SA NAZÝVA

(i) ABSORPČNÝ, AK $q_i = 0$

(ii) STABILNÝ, AK $0 < q_i < \infty$

(iii) NESTABILNÝ, AK $q_i = \infty$

05.05.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

INTENZITY VÝSTUPU q_i MAJÚ VÝZNAM PREVRÁTENÝCH STREDNÝCH DÔB ZOTRVANIA V STAVOCH $i \in S$.

V ĎALŠÍCH ÚVAHÁCH SA BUDEME ZABERAŤ IBA REŤAZCAMI, KT. VŠETKY STAVY SÚ STABILNÉ.

VETA: NECH $0 < q_i < \infty$. POTOM PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE REŤAZEC Z POČIATOČNÉHO STAVU i PREJDE NAJSKÔR DO STAVU j JE ROVNÁ $\frac{q_{ij}}{q_i}$ PRE $\forall j \neq i$.

D: OZNAČME $A := \{\omega : X_t(\omega) = i \ \forall\, 0 \le t < \tau,\ X_\tau(\omega) = j,\ \tau > 0\}$.

$$A_n := \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\omega : X_t(\omega) = i \ \forall\, 0 \le t \le \tfrac{k}{2^n},\ X_{\frac{(k+1)}{2^n}}(\omega) = j\}$$

ZREJME $A_n \to A$..

VZHĽADOM K SPOJITOSTI A SEPARABILITE PROCESU:

$$P(A \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n \mid X_0 = i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_t = i \ \forall\, 0 \le t \le \tfrac{k}{2^n},\ X_{\frac{k+1}{2^n}} = j \mid X_0 = i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_t = i \ \forall\, 0 \le t \le \tfrac{k}{2^n} \mid X_0 = i\right) \cdot P\left(X_{\frac{k+1}{2^n}} = j \mid X_t = i \ \forall\, 0 \le t \le \tfrac{k}{2^n},\ X_0 = i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P\left(X_t = i \ \forall 0 \le t \le \tfrac{k}{2^n} \mid X_0 = i\right) \cdot P\left(X_{\frac{k+1}{2^n}} = j \mid X_{\frac{k}{2^n}} = i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-q_i \tfrac{k}{2^n}\right) \cdot p_{ij}\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}\left(\tfrac{1}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{1 - e^{-q_i/2^n}}$$

$$= \ldots = \underline{\underline{q_{ij} / q_i}} \ . \ \blacksquare$$

NECH $\mathcal{F}_t$ JE σ-ALGEBRA GENEROVANÁ RODINOU $\{X_s, s \le t\}$

$\tau : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ JE <u>MARKOVOVSKÝ ČAS</u> PROCESU $\{X_t, t \ge 0\}$

$\Leftrightarrow [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \ge 0.$

PRE $\tau_j = \inf\{t \ge 0, X_t = j\}$ (ČAS PRVÉHO VÝSKYTU $z\, j$):

$$[\tau_j > t] = [X_s = j,\ 0 \le s \le t] = \bigcap_{s \in Q_n \langle 0,t \rangle} [X_s = j] \in \mathcal{F}_t$$

KDE Q JE HUSTÁ V $\langle 0, +\infty)$.

PREDPOKLADAJME, ŽE NA ZAČIATKU JE REŤAZEC V NEJAKOM STAVE i. KEĎ JE $q_i > 0$, ZOSTÁVA V NŇOM PO NÁHODNÚ DOBU τ_i, A POTOM PREJDE DO STAVU j S PRAVDEPODOBNOSŤOU $\frac{q_{ij}}{q_i}$.

KEĎ JE $q_i = 0$, REŤAZEC NAVŽDY ZOSTÁVA V TOMTO STAVE.

NECH $J_0 = 0, J_1, J_2, \ldots$ SÚ PO SEBE NASLEDUJÚCE ČASOVÉ OKAMŽIKY, V KT. DOCHÁDZA K PRECHODOM MEDZI STAVMI REŤAZCA, TJ.:

$$J_1 = \inf\{t > 0 : X_t \ne X_0\}$$
$$J_2 = \inf\{t > J_1 : X_t \ne X_{J_1}\}$$
$$\ldots$$
$$J_{n+1} = \inf\{t > J_n : X_t \ne X_{J_n}\}, \quad n \ge 0$$

DOBY MEDZI PRECHODMI: $S_1 = J_1$, $S_2 = J_2 - J_1$, ... (KEĎ $J_n < \infty$)

ZREJME $J_n = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad n \ge 1$

OZNAČME $\xi = \sup J_n = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$.

05.05.2009 Tu
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESŮ

DEFINÍCIA: HOMOGÉNNY REŤAZEC SO STABILNÝMI STAVMI SA NAZÝVA **REGULÁRNY** $\Leftrightarrow$

$$P_i(\xi = \infty) = 1 \quad \forall i \in S.$$

N.V. ξ ... **ČAS EXPLÓZIE**

REGULÁRNY PROCES ... NA KAŽDOM KONEČNOM INTERVALE $(0,t)$ DÔJDE S PRAVD. 1 IBA KU KONEČNE VEĽA PRECHODOM MEDZI STAVMI

KEĎ DÔJDE K ∞-VEĽA PRECHODOM NA KONEČNOM INTERVALE ... **PROCES EXPLODUJE**

BUDEME SA ZAOBERAŤ CHOVANÍM PROCESU IBA DO ČASU EXPLÓZIE. PRE $\xi < \infty$ DEFINUJEME $X_t = \infty \ \forall t \geq \xi$.

DEFINUJME $\mathbb{Q}^* = (q^*_{ij})_{i,j \in S}$ AKO

$$q^*_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i & q_i > 0 \\ 0 & q_i = 0 \end{cases} \quad i \neq j \qquad q^*_{ii} = \begin{cases} 0 & q_i > 0 \\ 1 & q_i = 0 \end{cases}$$

A POLOŽME $Y_0 = X_0$, $Y_n = X_{J_n}$, $n = 1,2,\ldots$

$\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ JE HOMOGÉNNY M.R. S DISKRÉTNYM ČASOM A S NN. STAVOV $S = \{0,1,\ldots\}$, S MATICOU P.P. $\mathbb{Q}^*$ $\equiv$ TZV. **VNORENÝ DISKRÉTNY REŤAZEC** PROCESU $\{X_t, t \geq 0\}$.

$$P(X_t = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_n = i, J_n \leq t < J_{n+1}).$$

PODMIENKA REGULARITY JE NAPR. SPLNENÁ, KEĎ $q_i \leq C \quad \forall i \in S$.

KEĎ JE S KONEČNÁ, JE $\{X_t, t \geq 0\}$ REGULÁRNY.

PROCES, KTORÉHO VNORENÝ RETÁZEC JE NEROZLOŽ. A KTORÉHO STAVY SÚ TRVALÉ, JE REGULÁRNY.

KOLMOGOROVE DIFERENCIÁLNE ROVNICE

VETA: PREDPOKLADÁME $q_i < \infty$ PRE $\forall i \in S$.
POTOM $p_{ij}(t)$ SÚ DIFER. PRE $\forall i,j \in S$, $t > 0$

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} \cdot p_{kj}(t)$$

$$\equiv \mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t) \qquad \text{RETROSPEKTÍVNA ROVNICA} \qquad (*)$$

AK $p_{ij}(h)/h \rightrightarrows q_{ij}$ ROVNOMERNE V i, POTOM:

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k \neq i} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \cdot q_{kj}$$

$$\equiv \mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{Q} \qquad \text{PROSPEKTÍVNA ROVNICA} \qquad (**)$$

VETA: NECH $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{0 \leq i,j \in N}$, $q_{ij} \geq 0$ $i \neq j$,
$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$.
POTOM EXISTUJE JEDINÉ RIEŠENIE SÚSTAVY $(*)$, $(**)$ SPĹŇAJÚCE PODMIENKU $\mathbb{P}(0) = I$:

$$\boxed{\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}^k t^k}{k!}}$$

$\mathbb{P}(t)$ PREDSTAVUJE SÚSTAVU PRAVD. PRECHODU M.R. SO SPOJITÝM ČASOM A KONEČNOU MN. STAVOV

18.05.2009 Mo
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

PRÍKLAD: MODEL PRÁCE STROJA:

DOBA BEZPORUCHOVEJ PREVÁDZKY STROJA JE N.V. S EXPON. ROZDELENÍM SO STREDNOU HODN. $1/\alpha$, $\alpha>0$.
KEĎ DÔJDE K PORUCHE, DOBA OPRAVY JE N.V. S EXPON. ROZDELENÍM SO STREDNOU HODN. $1/\beta$, $\beta>0$.

$$X_t = \begin{cases} 0 & \dots \text{ STROJ PRACUJE V ČASE } t \\ 1 & \dots \text{ STROJ JE OPRAVOVANÝ V ČASE } t \end{cases}$$

$\Rightarrow \{X_t, t\geq 0\}$ JE HOM. MARKOVOV REŤAZEC SO SPOJITÝM ČASOM A MNOŽINOU STAVOV $S=\{0,1\}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$. CHCEME NÁJSŤ $\mathbb{P}(t)$.

RIEŠIME RETROSPEKTÍVNU ROVNICU $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{Q}\mathbb{P}(t)$, KTORÁ PREDSTAVUJE SÚSTAVU LINEÁRNYCH HOMOGÉNNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC PRVÉHO RÁDU S KONŠT. KOEF.

RIEŠENIE: $\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{Q}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}^k t^k}{k!}$

$\mathbb{Q}$ MÁ VLASTNÉ ČÍSLA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(\alpha+\beta)$
A PLATÍ: $\mathbb{Q} = \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}$, KDE

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(t) = \mathbb{B}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{A}^k\right)\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}\mathbb{B}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha-\alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta-\beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha+\beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

ZA ROVNAKÝCH PODMIENOK, ZA AKÝCH SME ODVODILI SÚSTAVU PROSPEKTÍVNYCH KOLMOG. DIF. ROVNÍC, MÔŽEME ODVODIŤ SÚSTAVU DIF. ROVNÍC PRE ABSOL. PRAVD.:

$$p_j'(t) = -p_j(t)\, q_j + \sum_{k \neq j} p_k(t)\, q_{kj}, \quad j \in S$$

S POČIATOČNOU PODMIENKOU: $p_i(0) = 1; \quad p_j(0) = 0, \; j \neq i.$

STACIONÁRNE A LIMITNÉ ROZDELENIE

DEFINÍCIA: NECH $\{X(t), t \geq 0\}$ JE MARKOVOV REŤAZEC SO SPOJITÝM ČASOM, MNOŽINOU STAVOV S A MATICAMI PRAVD. PRECH. $\mathbb{P}(t)$, $t \geq 0$.
VEKTOR $\eta = (\eta_i \geq 0, i \in S)$ TAKÝ, ŽE

$$\eta^T \mathbb{P}(t) = \eta^T, \quad t \geq 0$$

SA NAZÝVA **INVARIANTNÁ MIERA** PROCESU $\{X_t, t \geq 0\}$.
AK JE TO PRAVD. ROZD. $\Rightarrow$ NAZÝVA SA **STACIONÁRNE ROZDELENIE**, OZNAČUJE SA π.

VETA: AK JE POČIAT. ROZD. HOM. M.R. $\{X_t, t \geq 0\}$ STACIONÁRNE, JE $\{X_t, t \geq 0\}$ STRIKTNE STAC. PROCES, TJ. $P(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_1+s} = i_1, \ldots, X_{t_n+s} = i_n)$.
ŠPECIÁLNE: $p_j(t) = P(X_t = j) = \pi_j, \; j \in S, \; t \geq 0$.

DEFINÍCIA: PRAVD. ROZD. $a = (a_i, i \in S)$ SA NAZÝVA **LIMITNÉ ROZDELENIE** $\Leftrightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = a_j \quad \forall i, j \in S.$$

18.05.2009 M.
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

VETA: KEĎ EXISTUJE LIMITNÉ ROZDELENIE MARKOVOVHO RETAZCA, JE TO STACIONÁRNE ROZDELENIE.

D: CHAPMAN-KOLMOGOROVA ROVNOSŤ PRE $t, h \geq 0$ $N \in \mathbb{N}$.

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\, p_{kj}(h) \geq \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t)\, p_{kj}(h).$$

$\Rightarrow$ LIMITNÝM PRECHODOM PRE $t \to \infty$:

$$a_j \geq \sum_{k=0}^{N} a_k\, p_{kj}(h)$$

$\Rightarrow$ LIMITNÝM PRECHODOM PRE $N \to \infty$:

$$a_j \geq \sum_{k \in S} a_k\, p_{kj}(h).$$

NIEKDE NASTAŤ OSTRÁ NEROVNOSŤ, $\rightsquigarrow \sum_{j \in S} a_j > \sum_{k \in S} a_k$.

$\Rightarrow$ a_i JE STACIONÁRNE ROZDELENIE. ■

DEFINÍCIA: STAV j M.R. $\{X_t, t \geq 0\}$ JE **DOSIAHNUTEĽNÝ** ZO STAVU i $\Leftrightarrow$

$$P_i(X_t = j) = p_{ij}(t) > 0 \quad \text{PRE NEJAKÉ } t > 0.$$

$\Rightarrow$ ANALOGICKÝ ROZKLAD DVOJICE STAVOV ... ATĎ.

VETA: NASL. VZŤAHY MEDZI $\{X_t, t \geq 0\}$ A VNORENÝM RETAZCOM $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ SÚ EKVIVAL.:

(1) j JE DOSIAHNUTEĽNÝ Z i V $\{X_t, t \geq 0\}$
(2) j JE — II — Z i V $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$
(3) $q_{i_0 i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} > 0$, $i_0 = i$, $i_n = j$
(4) $p_{ij}(t) > 0 \quad \forall t > 0$
(5) $\exists t > 0 : p_{ij}(t) > 0$.

D: (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) ZREJMÉ

(1) $\Rightarrow$ (2): $p_{ij}(t) > 0$ PRE NEJAKÉ $t > 0$ $\Rightarrow$
$q_{ij}^{*(n)} > 0$ PRE NEJAKÉ $n > 0$

(2) $\Rightarrow$ (3): $q_{ij}^{*(n)} > 0 \Rightarrow$ EXISTUJE CESTA z i DO j v $\{Y_n\}$
$q_{ii_1}^{*} \cdots q_{i_{n-1}j}^{*} > 0 \Rightarrow q_{ii_1} \cdots q_{i_{n-1}j} > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4): $q_{kl} = p'_{kl}(0+) > 0 \Rightarrow p_{kl}(t) > 0 \quad \forall t > 0$

$\Rightarrow p_{ij}(t) \geq p_{ii_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdots p_{i_{n-1}j}\left(\frac{t}{n}\right) > 0 \quad \forall t > 0.$ ■

$\{X_t, t \geq 0\}$ JE NEROZLOŽ. $\Leftrightarrow$ VNOR. $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ JE NER.

DEFINÍCIA: STAV j REŤAZCA $\{X_t, t \geq 0\}$ JE:

TRVALÝ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} q_j = 0 & \text{(ABSORPČNÝ)} \\ q_j > 0 \wedge P_j(\tau_j(1) < \infty) = 1 \end{cases}$

KDE $\tau_j(1) = \inf\{t \geq \tau_1 : X_t = j\}$ ... ČAS PRVÉHO NÁVR.

PRECHODNÝ $\Leftrightarrow q_j > 0 \wedge P_j(\tau_j(1) = \infty) > 0$

TRVALÝ STAV SA NAZÝVA NENULOVÝ $\Leftrightarrow$
$q_j = 0 \vee E_j \tau_j(1) < \infty$.

j JE TRVALÝ v $\{Y_n\} \Leftrightarrow$ j JE TRVALÝ v $\{X_t\}$
j JE NENULOVÝ v $\{Y_n\} \not\Rightarrow$ j JE NENULOVÝ v $\{X_t\}$

05.06.2009 Fr
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

VETA: $\{X_t, t \geq 0\}$ MARKOVOV REŤAZEC SO SPOJ. ČASOM, S MATICOU INTENZÍT $\underline{Q}$, S VNORENÝM REŤAZCOM $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, KTORÝ JE NEROZLOŽ. A KTOREHO STAVY SÚ TRVALÉ.
POTOM EXISTUJE INVARIANTNÁ MIERA η PROCESU $\{X_t, t \geq 0\}$, KTORÁ JE URČENÁ (AŽ NA NÁSOB. KONŠT.) AKO RIEŠENIE SÚSTAVY: $\boxed{\eta^T \underline{Q} = 0^T}$ A $\boxed{0 < \eta_j < \infty \ \forall j}$

VETA: KEĎ $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ $\pi_j > 0$ $\forall j \in S$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ JE RIEŠENÍM $\pi^T \underline{Q} = 0^T$, POTOM:

(i) $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad \forall i, j \in S$

(ii) $\lim_{t \to \infty} p_j(t) = \pi_j \quad \forall j \in S$.

D: PLATÍ $\pi^T \underline{P}(t) = \pi^T \ \forall t \geq 0$.
VNOR. REŤAZEC JE NEROZLOŽ. $\Rightarrow p_{ij}(t) > 0 \quad \forall t > 0 \ \forall i, j \in S$
PRE $h > 0$ A $Z_n := X_{nh}$ JE
$$P(Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_1, \ldots, Z_0 = i_0) = p_{ij}(h)$$
$\Rightarrow \{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ JE MARKOVOV REŤAZEC S DISKR. ČASOM, MATICOU PRAVD. PRECHODU $\underline{P}(h)$, π JE STAC. ROZD. $\{Z_n\}$.
$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}(h) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}(nh) = \pi_j \quad \forall i, j \in S$.

ZVYŠOK PLYNIE Z ROVNOMERNEJ SPOJITOSTI $p_{ij}(t)$
(ii) DOSTANEME Z $p_j(t) = \sum_{i \in S} p_i(0) p_{ij}(t)$, $j \in S$ LIMITNÝM PRECHODOM PRE $t \to \infty$. ■

POISSONOV PROCES

$\{X_t, t \geq 0\}$, NEZÁVISLÉ PRÍRASTKY $X_{t+h} - X_t$

$P(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h)$

$P(\text{—"—} = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ ROVNOMERNE PRE $\forall t$

$P(\text{—"—} \geq 2) = o(h)$

IDE O MR SO SPOJ. ČASOM, $S = \{0, 1, \dots\}$

$p_0(0) = P(X_0 = 0) = 1, \quad p_j(0) = 0$ PRE $j \neq 0$

$q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_i = -q_{ii} = \lambda, \quad q_{ij} = 0$ INAK.

RIEŠIME:

$$(*) \quad \begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \quad 1 \leq j < \infty \end{aligned}$$

POLOŽME: $\Pi(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j \equiv$ VYTV. FCIA. $\{p_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$

$Z\ (*)\ \sum_{j=0}^{\infty} p_j'(t) s^j = -\lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j + \lambda s \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) s^j$

$\equiv \frac{\partial}{\partial t} \Pi(s,t) = -\lambda(1-s)\Pi(s,t)$, POČ. PODM. $\Pi(s,0) = 1$

$\Rightarrow \lambda t . \Pi(s,t) = C(s) \cdot e^{-\lambda t(1-s)}$, NUTNE $C(s) = 1$

$\Rightarrow \Pi(s,t) = e^{-\lambda t + \lambda t s} = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} s^j$

$\Rightarrow p_j(t) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^j}{j!} \quad 0 \leq j < \infty, \ t > 0 \quad \sim \underline{\text{Poiss}(\lambda t)}$

$\Rightarrow$ PRÍRASTKY $X_{s+t} - X_s$ MAJÚ POISSONOVÉ ROZDELENIE S PARAMETROM λt.

05.06.2009 Fr
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

LINEÁRNY PROCES RASTU (YULEOV PROCES)

POPULÁCIA JEDINCOV, KTORÍ SA MÔŽU ROZMNOŽOVAŤ, ALE NEMÔŽU ZANIKAŤ
Z KAŽDÉHO JEDINCA MÔŽE V INTERVALE $(t, t+h\rangle$ VZNIKNÚŤ NOVÝ JEDINEC S PRAVD. $\lambda h + o(h)$ NEZÁVISLE NA OSTATNÝCH, ŽIADEN S P. $1-\lambda h + o(h)$
X_t .. POČET JEDINCOV V ČASE t.

$$P_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1}(\lambda h + o(h))(1-\lambda h + o(h))^{j-1} = j\lambda h + o(h)$$
$$P_{j,j+k}(h) = o(h), \quad k \geq 2$$
$$P_{jj}(h) = (1-\lambda h + o(h))^j = 1 - j\lambda h + o(h)$$

$q_{j,j+1} = j\lambda$, $q_j = j\lambda$, $q_{jk} = 0$ INAK
$P_1(0) = 1$, $P_j(0) = 0$, $j > 1$, $S = \{1, \dots\}$

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t)$$
$$P_j'(t) = -\lambda j P_j(t) + \lambda(j-1) P_{j-1}(t), \quad j > 1$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} P_j'(t) s^j = -\lambda s \sum_{j=1}^{\infty} j P_j(t) s^{j-1} + \lambda s^2 \sum_{j=1}^{\infty} j P_j(t) s^{j-1}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi(s,t) = -\lambda s \frac{\partial}{\partial s}\Pi(s,t) + \lambda s^2 \frac{\partial}{\partial s}\Pi(s,t)$$
$$\equiv \lambda s(1-s)\frac{\partial}{\partial s}\Pi(s,t) + \frac{\partial}{\partial t}\Pi(s,t) = 0, \quad \text{poč. p. } \Pi(s,0) = s$$
$$\Rightarrow \Pi(s,t) = \frac{se^{-\lambda t}}{1-s(1-e^{-\lambda t})} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1} s^k$$
$$EX_t = e^{\lambda t}$$

OBECNÝ PROCES RASTU

$\{X_t,\ t\geq 0\}$, $S=\{i_0, i_0+1, \dots\}$, $p_{i_0}(0)=1$, $p_j(0)=0$ $j>i_0$

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_{i_0} & \lambda_{i_0} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & -\lambda_{i_0+1} & \lambda_{i_0+1} & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda_{i_0+2} & \lambda_{i_0+2} & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

MÔŽE $p_{i_0}(t)=e^{-\lambda_{i_0}t}$, $p_j(t)=\lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}p_{j-1}(s)\,ds$, $j>i_0$

LINEÁRNY PROCES MNOŽENIA A ZÁNIKU

POPULÁCIA, KTORÉJ JEDINCI SA MÔŽU MNOŽIŤ A ZANIKAŤ

PR. MNOŽENIA V $(t, t+h\rangle$ JE $\lambda h+o(h)$

PR. ZÁNIKU V $(t, t+h\rangle$ JE $\mu h+o(h)$

X_t .. ROZSAH POPULÁCIE V ČASE t

$q_{j,j+1}=j\lambda \qquad 0\leq j<\infty$

$q_{j,j-1}=j\mu \qquad 0\leq j<\infty$

$q_{jk}=0$ INAK

$q_j=-q_{jj}=j(\lambda+\mu) \qquad 0\leq j<\infty$

$p_1(0)=1, \quad S=\{0,\dots\}$

↖ 1. JEDINEC MÔŽE ZANIKNÚŤ

$p_0'(t)=\mu p_1(t)$ $\qquad j>0$

$p_j'(t)=(j-1)\lambda p_{j-1}(t)-j(\mu+\lambda)p_j(t)+(j+1)\mu p_{j+1}(t)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Pi(s,t)=(\mu-\lambda s)(1-s)\frac{\partial}{\partial s}\Pi(s,t), \quad \Pi(s,0)=s$

05.06.2009 Fr
PETER ČERNO

ZÁKLADY NÁHODNÝCH PROCESOV

OBECNÝ PROCES NARODENIA A ZÁNIKU

$\{X_t, t \geq 0\}$, $S = \{0, 1, \dots\}$ $p_i(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ $j \neq i$

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \vdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

MATICA PR. PRECHODU VNORENÉHO RETAZCA:

$$\mathbb{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

VNORENÝ RETAZEC JE NEROZLOŽITEĽNÝ PRE $\lambda_0 > 0$.
O TOM, ČI SÚ JEHO STAVY TRVALÉ, MOŽEME ROZHODNÚŤ NAPR. PODĽA EXISTENCIE STAC. ROZD.
STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE $\sum_{j \in S} \pi_j q_j < \infty$, KDE $\pi^T \mathbb{Q} = \mathbb{O}^T$,
PRIČOM $\{\pi_j q_j\}$ JE INVARIANTNÁ MIERA VO VN. RET.

DOSTÁVAME: $\pi_j = \dfrac{\lambda_{j-1} \cdots \lambda_0}{\mu_j \cdots \mu_1} \pi_0$

SYSTÉMY HROMADNEJ OBSLUHY

DOBY MEDZI PRÍCHODMI PO SEBE NASLEDUJÚCICH ZÁKAZNÍKOV SÚ NEZÁVISLÉ N.V. S ROZDELENÍM A

DOBY OBSLUHY ZÁKAZNÍKOV NEZÁV. N.V. ... B

SYSTÉM $\equiv (A/B/c)$, c .. POČET STANIC OBSLUHY

$A, B \in$ { M ... EXPONENCIÁLNE
D ... DETERMINISTICKÉ
G ... VŠEOBECNÉ } ROZDELENIE

07.06.2009 Su
PETER ČERNO

RECURRENT EVENTS

A SEQUENCE OF n LETTERS S AND F CONTAINS AS MANY S-RUNS OF LENGTH r AS THERE ARE NON-OVERLAPPING UNINTERRUPTED BLOCKS CONTAINING EXACTLY r LETTERS S EACH.
$\mathcal{E}$ OCCURS AT THE n-TH TRIAL IF A NEW RUN OF LENGTH r IS ADDED TO THE SEQUENCE.

DEFINITIONS

WE CONSIDER A SEQUENCE OF REPEATED TRIALS WITH POSSIBLE OUTCOMES E_j $(j=1,2,\dots)$
NOT NECESSARILY INDEPENDENT.
$P(E_{j_1}, \dots, E_{j_n})$ ARE DEFINED CONSISTENTLY
LET $\mathcal{E}$ BE AN ATTRIBUTE OF FINITE SEQUENCES:
IT IS UNIQUELY DETERMINED WHETHER A SEQUENCE $(E_{j_1}, \dots, E_{j_n})$ HAS, OR HAS NOT, THE CHARACTERISTIC $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}$ OCCURS AT THE nTH PLACE IN THE SEQUENCE $E_{j_1}, \dots \Leftrightarrow E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ HAS THE ATTRIBUTE $\mathcal{E}$

DEFINITION: THE ATTRIBUTE $\mathcal{E}$ DEFINES A RECURRENT EVENT IF:

(a) $\mathcal{E}$ OCCURS AT THE nTH AND THE $(n+m)$TH PLACE OF THE SEQUENCE $(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n+m}}) \Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ OCCURS AT THE LAST PLACE IN EACH OF THE TWO SUBSEQUENCES $(E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}), (E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}})$.

(b) IF $\mathcal{E}$ OCCURS AT THE nTH PLACE THEN IDENT.:

$$P(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n+m}}) = P(E_{j_1}, \ldots, E_{j_n}) \, P(E_{j_{n+1}}, \ldots, E_{j_{n+m}})$$

$u_n := P(\mathcal{E} \text{ OCCURS AT THE } n\text{TH TRIAL})$

$f_n := P(\mathcal{E} \text{ OCCURS FOR THE FIRST TIME AT THE } n\text{TH TRIAL})$

$f_0 := 0, \quad u_0 := 1$

$F(s) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k, \quad U(s) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k s^k$

EVENTS "$\mathcal{E}$ OCCURS FOR THE FIRST TIME AT THE nTH TRIAL" ARE MUTUALLY EXCLUSIVE

$$\Rightarrow \quad f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq 1$$

$1 - f \equiv$ THE PROBABILITY THAT $\mathcal{E}$ DOES NOT OCCUR IN AN INFINITELY PROLONGED SEQUENCE OF TRIALS

IF $f = 1 \Rightarrow$ WE DEFINE T: $P(T = n) = f_n$

FOR $f < 1$ $\quad P(T = \infty) = 1 - f$

07.06.2009 Su
PETER ČERNO

RECURRENT EVENTS

BY DEFINITION: $\mathcal{E}$ OCCURS FOR THE FIRST TIME AT TRIAL NUMBER k AND FOR THE SECOND TIME AT THE nTH TRIAL $= f_k f_{n-k}$.

$$\Rightarrow f_n^{(2)} = f_1 f_{n-1} + \ldots + f_{n-1} f_1$$

MORE GENERALLY: $f_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{n-i}^{(r-1)}$

$\{f_n^{(r)}\}$ IS THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF

$$T^{(r)} = T_1 + \ldots + T_r$$

T_i INDEPENDENT WITH DISTRIBUTION $\{f_n\}$

$\{f_n^{(r)}\}$ HAS THE GENERATING FUNCTION $F^r(s)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(r)} = F^r(1) = f^r$$

$=$ THE PROBABILITY THAT $\mathcal{E}$ OCCURS AT LEAST r TIMES EQUALS f^r

DEFINITION: A RECURRENT EVENT $\mathcal{E}$ WILL BE CALLED PERSISTENT IF $f=1$ AND TRANSIENT IF $f<1$.

WITH PROBABILITY ONE A PERSISTENT $\mathcal{E}$ IS BOUND TO OCCUR INFINITELY OFTEN WHEREAS TRANSIENT $\mathcal{E}$ OCCURS ONLY A FINITE NUM. OF TIMES.

DEFINITION THE RECURRENT EVENT $\mathcal{E}$ IS CALLED **PERIODIC** $\Leftrightarrow$ THERE EXISTS AN INTEGER $\lambda > 1$: $\mathcal{E}$ CAN OCCUR ONLY AT TRIALS $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$ (I.E., $\lambda \nmid n \Rightarrow u_n = 0$)
THE GREATEST λ WITH THIS PROPERTY $\equiv$ **THE PERIOD OF** $\mathcal{E}$

VARIABLES T_r STAND FOR THE WAITING TIMES BETWEEN THE SUCCESSIVE OCCURENCES OF $\mathcal{E}$ (**THE RECURRENCE TIMES**)

WE HAVE FOR $n \geq 1$:

$$\boxed{u_n = f_1 u_{n-1} + \ldots + f_n u_0}$$

AT THE RIGHT SIDE $\{f_k\} * \{u_k\}$

RIGHT SIDE $\equiv$ GENERATION FUNCTION $F(s)\,U(s)$
LEFT SIDE $\equiv$ GENERATION FUNCTION $U(s) - 1$

THEOREM :
$$\boxed{U(s) = \frac{1}{1 - F(s)} = \sum_{r=0}^{\infty} F^r(s)} \quad (\text{FOR } s<1)$$

$$\Rightarrow \quad u_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \ldots \quad \text{FOR } n \geq 1.$$

CLEARLY $f_n^{(r)} = 0$ FOR $r > n$.

THEOREM : $\boxed{\mathcal{E} \text{ IS TRANSIENT} \Leftrightarrow u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \text{ IS FINITE.}}$

IN THIS CASE $\boxed{f = \frac{u-1}{u}}$.

$u_1 + \ldots + u_n$ IS THE EXPECTED NUMBER OF OCCURENCES OF $\mathcal{E}$ IN n TRIALS, $u - 1$ ... IN INF. MANY TRIALS.

07.06.2009 S4
PETER ČERNO

RECURRENT EVENTS

PROOF: $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \lim_{s\to 1-} U(s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$

$U(s) \to \frac{1}{1-f}$ FOR $f<1$ AND $U(s)\to\infty$ FOR $f=1$. ■

THEOREM: LET $\mathcal{E}$ BE PERSISTENT AND NOT PERIODIC AND DENOTE μ THE MEAN OF THE RECURRENCE TIMES T_v THAT IS,

$$\boxed{\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j f_j = F'(1)} \quad (\text{POSSIBLY } \mu=\infty)$$

THEN: $\boxed{u_n \to \mu^{-1}}$.

IF $\mathcal{E}$ HAS PERIOD λ, THEN:

$$\boxed{u_{n\lambda} \to \lambda\mu^{-1}}.$$

EXAMPLE: RETURNS TO EQUILIBRIUM

AT THE kTH TRIAL THE ACCUMULATED NUMBERS OF HEADS AND TAILS CAN BE EQUAL ONLY IF $k=2n$

$$\boxed{u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \binom{-1/2}{n}(-4pq)^n}$$

FROM THE BINOMIAL EXPANSION:

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} \Rightarrow F(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$$

FOR $s=1$ WE GET $f = 1 - |p-q|$.

THE NUMBER OF OCCURENCES OF $\mathcal{E}$

N_n ... THE NUMBER OF OCCURENCES OF $\mathcal{E}$ IN THE FIRST n TRIALS

$T^{(r)}$ ... THE NUMBER OF TRIALS UP TO AND INCLUDING THE rTH OCCURENCE OF $\mathcal{E}$

$$\boxed{P(N_n \geq r) = P(T^{(r)} \leq n)}$$

SUPPOSE $\mathcal{E}$ IS PERSISTENT, THE DISTRIBUTION $\{f_n\}$ OF ITS RECURRENCE TIMES HAS FINITE MEAN μ AND VARIANCE σ^2.

THE CENTRAL LIMIT THEOREM ASSERTS THAT FOR EACH FIXED x AS $r \to \infty$:

$$P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \leq x\right) \to \Phi(x)$$

NOW LET $n \to \infty$ AND $r \to \infty$ IN SUCH A WAY THAT

$$(*) \quad \frac{n - r\mu}{\sigma\sqrt{r}} \to x$$

THEN $P(N_n \geq r) \to \Phi(x)$.

07.06.2009 §4
PETER ČERNO

RECURRENT EVENTS

WE INTRODUCE THE REDUCED VARIABLE:

$$N_n^* = (\mu N_n - n)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma^2 n}}$$

$$N_n \geq r \Leftrightarrow N_n^* \geq (\mu r - n)\sqrt{\frac{\mu}{\sigma^2 n}} =$$

$$= \frac{\mu r - n}{\sigma\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r\mu}{n}} \to -x \cdot \sqrt{\frac{r\mu}{n}}$$

ON DIVIDING (*) BY r IT IS SEEN THAT $\frac{n}{r} \to \mu$

$$\Rightarrow N_n^* \geq \frac{\mu r - n}{\sigma\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r\mu}{n}} \to -x$$

SINCE $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ IT FOLLOWS THAT

$$P(N_n^* \geq -x) \to \Phi(x), \quad P(N_n^* \leq -x) \to 1 - \Phi(x)$$

$$\boxed{E(N_n) \sim \frac{n}{\mu} \qquad \operatorname{var}(N_n) \sim \frac{n\sigma^2}{\mu^3}}$$

THEOREM: IF THE RECURRENT EVENT $\mathcal{E}$ IS PERSISTENT AND ITS RECURRENCE TIMES HAVE FINITE MEAN μ AND VARIANCE σ^2, THEN BOTH $T^{(r)}$ AND N_n ARE ASYMPTOTICALLY NORMALLY DISTRIBUTED.

$$EN_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

APPLICATION TO THE THEORY OF SUCCESS RUNS

r WILL DENOTE A FIXED POSITIVE INTEGER & WILL STAND FOR THE OCCURENCE OF A SUCCESS RUN OF LENGTH r IN A SEQUENCE OF BERNOULLI TRIALS.

THE PROBABILITY THAT r TRIALS NUMBER $n, n-1, \ldots, n-r+1$ RESULT IN SUCCESS IS OBVIOUSLY p^r. IN THIS CASE & OCCURS AMONG THESE r TRIALS.
THE PROBABILITY THAT & OCCURS AT THE TRIAL NUMBER $n-k$ $(k=0, \ldots, r-1)$ AND THE FOLLOWING k TRIALS RESULT IN k SUCCESSES EQUALS $u_{n-k}\, p^k$.
SINCE THESE r POSSIBILITIES ARE MUTUALLY EXCLUSIVE, WE GET:

$$(*) \qquad \boxed{p^r = u_n + u_{n-1}\, p + \ldots + u_{n-r+1}\, p^{r-1}}$$

VALID FOR $n \geq r$.

CLEARLY $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0, \quad u_0 = 1$.

ON MULTIPLYING $(*)$ BY s^n AND SUMMING OVER $n = r, r+1, \ldots$ WE GET ON THE RIGHT SIDE:

$$\left(U(s) - 1\right)\left(1 + ps + p^2 s^2 + \ldots + p^{r-1} s^{r-1}\right)$$

07.06.2009 SU
PETER ČERNO

RECURRENT EVENTS

ON THE LEFT SIDE: $p^r(s^r + s^{r+1} + \dots)$

$$\Rightarrow (U(s)-1)\frac{1-(ps)^r}{1-ps} = \frac{p^r s^r}{1-s}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{1-s+qp^r s^{r+1}}{(1-s)(1-p^r s^r)}$$

THE GENERATING FUNCTION OF THE RECURRENCE TIMES:

$$F(s) = \frac{p^r s^r (1-ps)}{1-s+qp^r s^{r+1}} = \frac{p^r s^r}{1-qs\left(1+ps+\dots+p^{r-1}s^{r-1}\right)}$$

- THE FACT THAT $F(1)=1$ SHOWS THAT IN A PROLONGED SEQUENCE OF TRIALS THE NUMBER OF RUNS OF ANY LENGTH IS CERTAIN TO INCREASE OVER ALL BOUNDS.

IF WE CALCULATE THE DERIVATES OF $F(s)$, WE GET:

$$\mu = \frac{1-p^r}{qp^r} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{(qp^r)^2} - \frac{2r+1}{qp^r} - \frac{p}{q^2}$$

FOR FIXED $\alpha < \beta$ THE PROBABILITY THAT

$$\frac{n}{\mu} + \alpha\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}} < N_n < \frac{n}{\mu} + \beta\sigma\sqrt{\frac{n}{\mu^3}}$$ TENDS TO $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$

RENEWAL THEORY

WE START FROM TWO ARBITRARY SEQUENCES:
$f_1, f_2, \ldots, \quad b_0, b_1, \ldots$ (WE PUT $f_0 = 0$)

A NEW SEQUENCE $V_0, V_1, \ldots$ IS DEFINED BY:

$$V_n = b_n + f_1 V_{n-1} + f_2 V_{n-2} + \ldots + f_n V_0 \,, \quad \{V_n\} = \{b_n\} + \{f_n\} * \{V_n\}$$

WE CONSIDER ONLY SEQUENCES SATISFYING:

$$f_n \geq 0, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty, \quad b_n \geq 0, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

THE CORRESPONDING GENERATING FUNCTIONS MUST SATISFY:

$$V(s) = \frac{B(s)}{1 - F(s)} \,.$$

THE SEQUENCE $\{f_n\}$ HAS PERIOD $\lambda > 1$ IF $f_n = 0$ EXCEPT WHEN $\lambda \mid n$, λ IS GREATEST SUCH ...

$$\mu := \sum n f_n \leq \infty \,.$$

RENEWAL THEOREM: SUPPOSE $\{f_n\}$ IS NOT PERIODIC.

(i) IF $f < 1$ THEN $V_n \to 0$ AND $\sum_{n=0}^{\infty} V_n = \frac{b}{1-f}$

(ii) IF $f = 1$ THEN $V_n \to b\mu^{-1}$