Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Pravděpodobnostní metody

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc.
E-mail: Jaromir.Antoch@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~antoch/`

Anotace: Prohloubení poznatků z bakalářského kursu Pravděpodobnost a statistika a jejich rozšíření o základy dalších disciplín teorie pravděpodobnosti, zejména o teorii a využití Markovových řetězců, teorii front, teorii spolehlivosti a teorii informace.

Sylabus:

1. Spojité a diskrétní náhodné veličiny a jejich charakteristiky. Náhodné vektory a jejich charakteristiky.
2. Centrální limitní věta a její aplikace.
3. Markovovy řetězce, klasifikace stavů, pojem stacionárního rozdělení.
4. Poissonův proces a jeho aplikace.
5. Základy teorie front, modelování obslužných zařízení. Modely zrodu a zániku.
6. Exponenciální rozdělení a jeho využití v teorii spolehlivosti. Charakteristiky spolehlivosti, doba do poruchy, intenzita poruch, spolehlivost složitých systémů.
7. Pojem informace z pravděpodobnostního a statistického pohledu.

Cíl předmětu: Studenti se seznámí se základy teorie markovských řetězců, modely zrodu a zániku, modely hromadné obsluhy a náhodných procesů. Toto jim umožní pochopit stochastický přístup modelování reálných náhodných jevů v této oblasti.

Literatura:

1. Prášková Z. a P. Lachout, Základy náhodných procesů, Karolinum, Praha 1998.
2. Feller W., An introduction to probability theory and its applications, Wiley, New York 1970.

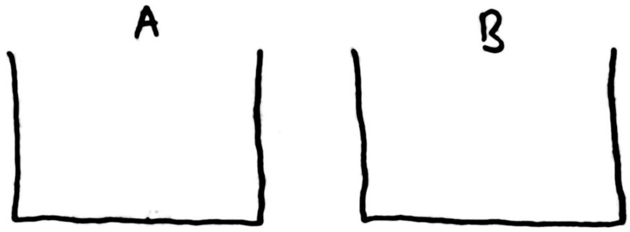
01.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

AKO SPOČÍTAŤ, ŽE NASTANE JAV ZNZZN ?

REKURENTNÉ JAVY

MARKOVOVE REŤAZCE



o o o ... o n (MOLEKÚL)

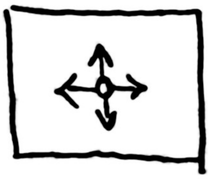
a) NÁHODNE ZVOLÍME NÁDOBU
A PRIEMESTNÍME 1 GULIČKU DO DRUHEJ NÁDOBY

b) [GULIČKY SÚ OČÍSLOVANÉ] NÁHODNE ZVOLÍME
GULIČKU A PREMIESTNIME JU DO DRUHEJ NÁDOBY

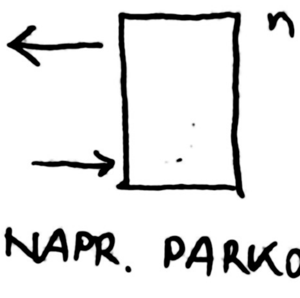
NÁHODNÉ PRECHÁDZKY

$X_1, X_2, \dots,$ $\quad S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad k = 1, 2, 3, \dots$

2D



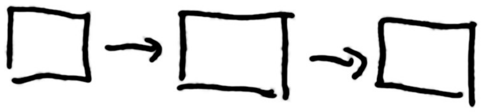
MODEL ZRODU A ZÁNIKU



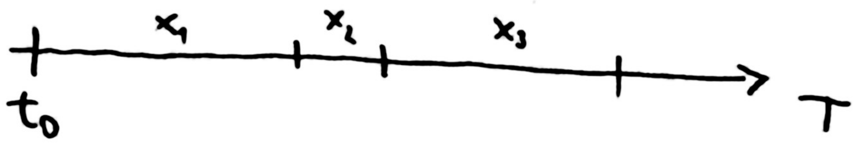
AKO DLHO BUDE TRVAŤ,
KÝM SA PARKOVISKO ZAPLNÍ ?

NAPR. PARKOVISKO.

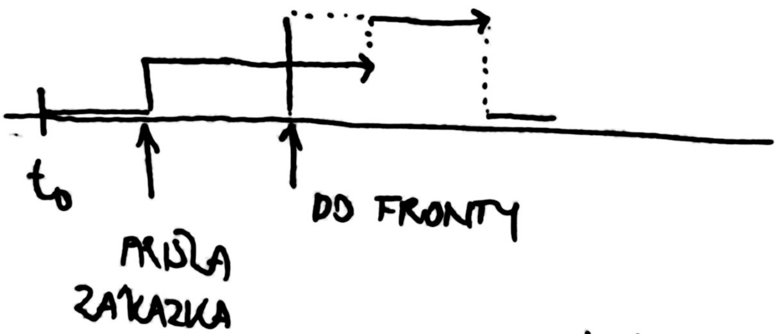
TROCHU ZLOŽITEJŠIE MODELY OBSLUHY



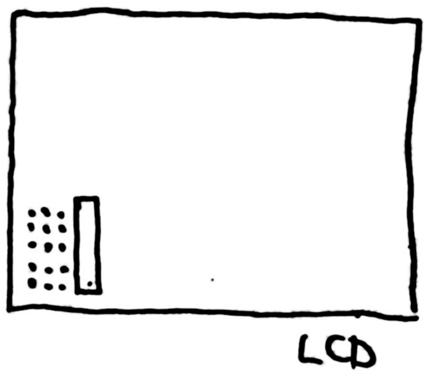
POISSONOV PROCES



MÁME STROJ, SLEDUJEME VZNIK PORÚCH



LITERATÚRA



FELLER W.: AN INTRODUCTION TO THE PROBABILITY THEORY

DUPAČ V.: MARKOVOVE REŤAZCE A PROCESY I, II

LACHOUT PRÁŠKOVÁ: ...

$19^{00} \to 20^{00}$ CVIČENIA

01.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

DISKRÉTNY PRAVD. PRIESTOR $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

card Ω < KONEČNÁ / SPOČETNÁ

$\mathcal{A}$ JE σ-ALGEBRA NÁHODNÝCH JAVOV

$A_i \in \mathcal{A}$ DISJUNKTNÉ $\Rightarrow P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

$P(\Omega) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

ELEMENTÁRNE JAVY ω_i, $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$

PRE DISKR. PRAVD. PRIESTOR

VETA O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOSTI

MAJME H_i DISJUNKTNÉ, $\bigcup H_i = \Omega$, $A, H_i \in \mathcal{A}$

$P(A) = \sum P(A \cap H_i) = \sum P(A | H_i) \cdot P(H_i)$

PROBLÉM JE ZVOLIŤ SPRÁVNE H_i

NÁHODNÁ VELIČINA $\equiv$ NÁHODNÁ FUNKCIA

$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}_1, \mathcal{B}_1)$

BINOMICKÉ ROZDELENIE $Bin(n, p)$

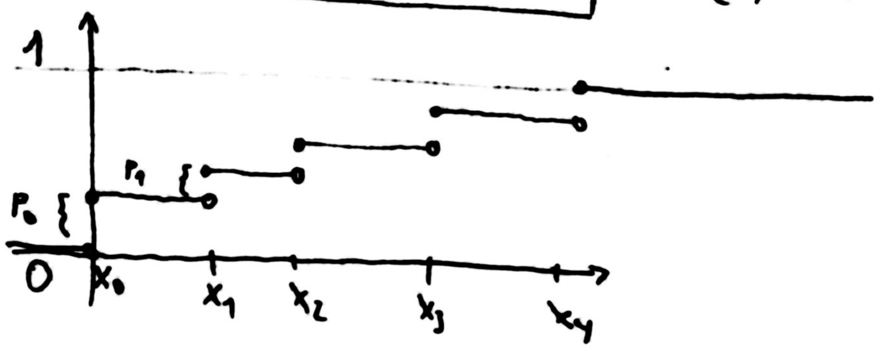
n POKUSOV < 1 p / 0 1-p . AKÁ JE PRAVD. k ZDAROV V n POKUSOCH

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

HUSTOTA : TABUĽKA DVOJIC (x_i, p_i), $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 0$
= ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI

JE DÔLEŽITÉ Z HĽADISKA MNOHO POKUSOV
(NIE Z HĽADISKA 1 POKUSU)

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA $F(x) = P(X \leq x)$



VYTVÁRAJÚCA FUNKCIA

$X \dots 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{A(x) \overset{\text{def.}}{:=} \sum_{i=0} p_i x^i}$$

PLATÍ : $p_i = \frac{A^{(i)}(0)}{i!}$

$EX = A'(1)$

$\text{var}\, X = A''(1) + A'(1) - [A'(1)]^2$

KEĎ X A Y SÚ NEZÁVISLÉ NÁH. VELIČINY,

$A_{X+Y} = A_X \cdot A_Y$

DÔKAZ POMOCOU VETY O KONVOLÚCII

01.10.2008
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBN. METÓDY

$X \ldots (x_i, p_i)$ $\quad \underline{\underline{EX \overset{def}{:=} \sum_i x_i \cdot p_i}}$

N REALIZÁCII X

V PRIEMERE ZÍSKAM $\sum p_i x_i$

STREDNÁ HODNOTA JE ZAUJÍMAVÁ IBA PRE VEĽKÝ POČET OPAKOVANÍ !!

$$E\left(\sum_i a_i X_i\right) = \sum_i a_i EX_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{var} X \overset{def}{:=} E(X - EX)^2 = \ldots = EX^2 - (EX)^2$$

$X_1, \ldots, X_n$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$\boxed{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (X_i - X_j)^2$$

$$\operatorname{var} cX = c^2 \cdot \operatorname{var} X \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{var}(a + X) = \operatorname{var} X$$

$$\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Y + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

<u>ALTERNATÍVNA NÁH. VEL.</u> $\left\langle \begin{array}{ll} \text{ÁNO} \equiv 1 & p \\ \text{NIE} \equiv 0 & 1-p = q \end{array} \right.$

<u>BINOMICKÁ NÁH. VEL.</u> $0, 1, \ldots, n$ $\quad X \sim Bin(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\equiv$ VÝBER S VRACANÍM

VÝBERY BEZ VRACANIA :

HYPERGEOMETRICKÉ ROZDELENIE

A BIELYCH
B ČIERNYCH GULÍ

VYTIAHNEME n GULÍ (BEZ VRACANIA)

$$\boxed{P(X=i) = \frac{\binom{A}{i}\cdot\binom{B}{n-i}}{\binom{A+B}{n}}}$$

POISSONOVE ROZDELENIE

$$\boxed{P(X=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad i=0,1,2,\dots}$$

SÚVISÍ S EXPONENCIÁLNYM ROZDELENÍM

ROVNOMERNÉ ROZDELENIE $1,2,\dots,n$, $p_i = \frac{1}{n}$

GEOMETRICKÉ ROZDELENIE

ČAKANIE NA PRVÝ ZDAR :

$$\underbrace{NNN\dots N}_{i-1}\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{Z}$$

$$\boxed{P(X=i) = q^{i-1}\cdot p \quad i=1,2,\dots}$$

NEGATÍVNE BINOMICKÉ ROZDELENIE

ČAKANIE NA r-TÝ ZDAR

$$\boxed{P(X=i) = \binom{n-1}{r-1}p^r\cdot q^{i-r}}$$

$NBin(r) = \sum_{i=1}^{r} Geom$

08.10.2008 Ve
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

SLIDY K PREDNÁŠKE NA vantoch-ovom WEBE

NÁH. VELIČINA X (i, p_i) $i = 0, 1, 2, \dots$

Y (j, q_j) $j = 0, 1, 2, \dots$

$Z = X + Y$ (i, r_i)

$$P(Z = k) = r_k = \sum_{j=0}^{k} P(X = j \,\&\, Y = k - j)$$

AK SÚ X, Y NEZÁVISLÉ, POTOM

$$r_k = \sum_{j=0}^{k} p_j \cdot q_{k-j}$$ (KONVOLÚCIA $\{p_i\} \otimes \{q_i\}$)

V OBECNEJŠOM PRÍPADE:

(x_i, p_i), (y_j, q_j) ...

PRE VYTVÁRAJÚCE FCIE.: $A_{X+Y} = A_X \cdot A_Y$ X, Y NEZÁV.

VO VŠEOBECNOM $A_{\sum X_i} = \prod A_{X_i}$ X_i SÚ NEZÁVISLÉ

PREMENNÝ POČET NEZ. NÁH. VELIČÍN: $\boxed{N \sim (i, q_i)}$

$$\boxed{S_N = X_1 + \dots + X_N}$$ X_i SÚ NEZÁVISLÉ

NAPR. $X_i \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases} \sim Alt(p)$, $N \sim Poiss(\lambda)$

S_N NADOBÚDA HODNÔT $0, 1, 2, \dots$

$P(S_N = k) =$ [VETA O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOSTI]

$$= \sum_n \underbrace{P(S_N = k \mid N = n)} \cdot \underbrace{P(N = n)}_{q_n}$$

$P(S_n = k) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)$

OZNAČME $p_k^{n\otimes}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{n\otimes} \cdot q_n$

OZNAČME: $r_k = P(S_N = k)$

$A_{S_N}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{n\otimes} \cdot q_n x^k =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{n\otimes} x^k \right)$

OZNAČME: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$
ZREJME $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{n\otimes} x^k = (A(x))^n$

$\Rightarrow \quad A_{S_N}(x) = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} q_n (A(x))^n}}$

KEĎ OZNAČÍME: $B(y) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n y^n$ DOSTANEME
$\underline{\underline{A_{S_N}(x)}} = B \circ A(x)$

<u>VETA</u>: VYTVÁRAJÚCA FUNKCIA S_N JE TVARU $B \circ A(x)$.

$E S_N = B'(A(x)) \cdot A'(x) \Big|_{x=1} = B'(1) \cdot A'(1) =$
$= \underline{\underline{EB \cdot EA}}$

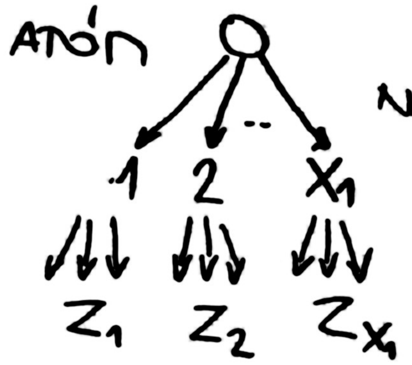
$\text{var}\, X = A_X''(1) + A_X'(1) - (A_X'(1))^2$

$\Rightarrow$ MOŽNO SPOČÍTAŤ var S_N.

08.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

PRÍKLAD: MODEL NAJJEDNODUCHŠIEHO ŠTIEPENIA



NÁHODNÝ POČET ČASTÍC

$X \equiv X_1 \sim (i, p_i) \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$A_{X_1} = P \quad \equiv P_1$

$X_2 = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{X_1} \qquad A_{X_2} = P \circ P \equiv P_2$

ATĎ.: $A_{X_n} = \underbrace{P \circ P \circ \ldots \circ P}_{n} \equiv P_n$

STREDNÝ POČET PRVKOV n-TEJ GENERÁCIE

$$EX_n = P_n'(1) = P'(P_{n-1}(x)) P_{n-1}'(x)\big|_{x=1} =$$
$$= P'(1) . P_{n-1}'(1) = (P'(1))^n = \underline{\underline{(EX)^n}}.$$

PODOBNE ROZPTYL $\mathrm{var}\, X_n$.

KEĎ SA ZAUJÍMAME O ROZDELENIE SÚČTU NÁH. V. VÄČŠINOU SA USPOKOJÍME S APROXIMÁCIOU

CENTRÁLNA LIMITNÁ VETA: X_i NEZÁVISLÉ

$EX = \mu, \quad \mathrm{var}\, X_i = \sigma^2 < \infty$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < x \right) \approx \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

DISTRIBUČNÁ FCIA. NORM. ROZD. $N(0,1)$

REKURENTNÉ JAVY

POSTUPNOSŤ POKUSOV (NIE NUTNE NEZÁVISLÝCH), KONEČNÁ / SPOČETNÁ MNOŽINA VÝSLEDKOV
$E_1, E_2, \dots$

(1) $\{E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n}\}$ OZNAČUJE JAV, ŽE 1. POKUS SKONČIL E_{j_1}, 2. E_{j_2} ATĎ.

NAPR. PRI HODE MINCOU: $\{Z, Z, N, N, Z, N\}$

(a) $P(E_{j_1} \dots E_{j_{n-1}}) = \sum_{j_n=1}^{\infty} P(E_{j_1} \dots E_{j_{n-1}}, E_{j_n})$

(b) O KAŽDEJ POSTUPNOSTI (1) VIEME JEDNOZNAČNE ROZHODNÚŤ, ČI MÁ VLASTNOSŤ $\mathcal{E}$ ALEBO NIE

$\mathcal{E}$ NASTÁVA NA n-TOM MIESTE $E_{j_1} E_{j_2} \dots$
$\Leftrightarrow$ $E_{j_1} \dots E_{j_n}$ MÁ VLASTNOSŤ $\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$ NAZÝVAME REKURENTNÝM JAVOM $\Leftrightarrow$

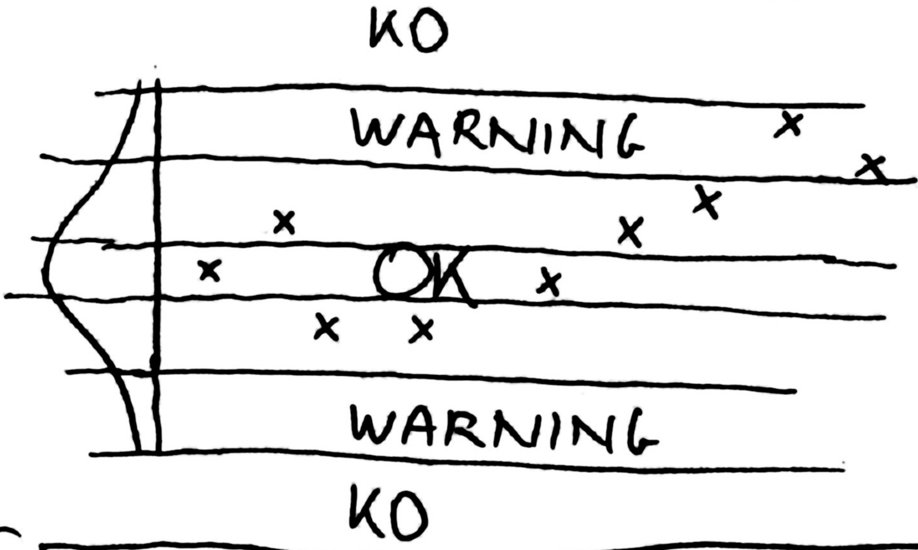
(1) $\mathcal{E}$ NASTAL NA n-TOM A (n+m)-TOM MIESTE $E_{j_1} E_{j_2} \dots E_{j_{n+m}}$ $\Leftrightarrow$ NASTAL NA POSL. MIESTE $E_{j_1} \dots E_{j_n}$ A NA POSL. MIESTE $E_{j_{n+1}} \dots E_{j_{n+m}}$

(2) V TAKOM PRÍPADE PLATÍ

$$P(E_{j_1} \dots E_{j_{n+m}}) = P(E_{j_1} \dots E_{j_n}) \cdot P(E_{j_{n+1}} \dots E_{j_{n+m}})$$

08.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY



$$\boxed{\begin{array}{l} u_i = P(\xi \text{ NASTANE V } i\text{-TOM KROKU}) \\ f_i = P(\xi \quad \text{—||— POPRVÝ KRÁT}) \\ u_0 = 1, \quad f_0 = 0 \quad \text{A ZAVEDME} \\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \end{array}}$$

JE $\{u_n\}$ ROZDELENIE PRAVD.? NIE!

$\{f_n\}$ ÁNO

$f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. $f \le 1$

AK $f < 1$, POTOM $P(\xi \text{ NENASTANE}) = 1 - f$

PLATÍ (*): $\boxed{u_n = f_0 \cdot u_n + f_1 \cdot u_{n-1} + \dots + f_n \cdot u_0 \quad n \ge 1}$

AK ξ NASTAL, MUSEL NASTAŤ POPRVÝ KRÁT.
KEDY?

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 & f_0 & n \\ 1 & f_1 & n-1 \\ 2 & f_2 & n-2 \\ 3 & f_3 & \\ \vdots & & \\ n & f_n & 0 \end{array}\right\} \text{MUSEL NASTAŤ NA KONCI POSTUPNOSTI TEJTO DĹŽKY (VLASTNOSŤ (1))}$$

VZŤAH (*) VYPLÝVA Z (2)

$$u_n = f_0 u_n + \dots + f_n u_0 \qquad n \geq 1 \qquad \Big| \cdot x^n$$

POZOR $1 = u_0 x^0 \neq f_0 x^0 = 0$

$$u_1 x^1 = f_1 u_0 x + f_0 u_1 x$$

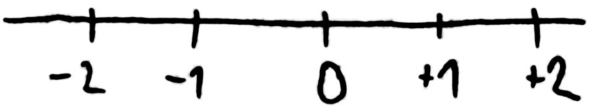
$$\cdots = \cdots$$

$$\boxed{U(x) - 1 = F(x) \cdot U(x)}$$

KDE $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

$$U(x) \rightsquigarrow F(x) = \frac{U(x) - 1}{U(x)}$$

PRÍKLAD:



VYRAZÍM Z 0, V KAŽDOM KROKU $i \begin{cases} \to i+1 & 1/2 \\ \to i-1 & 1/2 \end{cases}$

$$P(\text{PO } 2n \text{ KROKOCH SOM NA } 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

AKÁ JE PRAVD., ŽE SA NA 0 VRÁTIM PO PRVÝKRÁT !!!

08. 10. 2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

$\boxed{X \sim Poiss(\lambda)}$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$

$EX=\lambda, \quad \operatorname{var} X = \lambda$

$A_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}x^k = e^{-\lambda}\,\underline{\underline{e^{\lambda x}}} = e^{\lambda x-\lambda}$

$X_1, X_2 \sim Poiss(\lambda)$ NEZÁVISLÉ

$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim Poiss(2\lambda)$

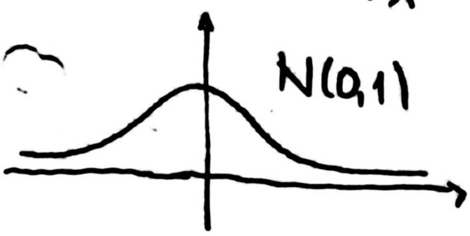
VO VŠEOBECNOSTI: $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{n} X_i}} \sim Poiss(n\lambda)$ $\quad X_i$ NEZÁV.

JE <u>PRESNÉ</u> ROZDELENIE

<u>CENTRÁLNA LIMITNÁ VETA</u>:

$$\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \approx N(0,1)$$

TJ. $\frac{Poiss(\lambda)-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(\overset{\mu}{0},\overset{\sigma^2}{1})$ JE <u>APROXIMÁCIA</u>!!



$\langle -1, 1\rangle$ .. 67 %	$\lambda \pm \sqrt{\lambda}$	!!!
$\langle -2, 2\rangle$ .. 97,5 %	$\lambda \pm 2\sqrt{\lambda}$	
$\langle -3, 3\rangle$ .. 99,7 %	$\lambda \pm 3\sqrt{\lambda}$	

$\Rightarrow$ <u>NAPR. PRE POISS (λ)</u> $\longrightarrow$

MÁME $X_i \sim Alt(p)$ NEZÁVISLÉ, $N \sim Poiss(\lambda)$

CHCEME SPOČÍTAŤ $S_N = X_1 + \dots + X_N$

$$P(S_N = k) = P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right) = \sum_n P\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k \,\middle|\, N=n\right) P(N=n)$$

$$= \sum_n \underbrace{P(Bin(n,p) = k)}_{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \cdot \underbrace{P(Poiss(\lambda) = n)}_{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}}$$

$$= \sum_n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= \sum_n \frac{p^k}{k!} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^n =$$

$$= \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k \underbrace{\boxed{\sum_n \frac{1}{n!} (1-p)^n \lambda^n}}_{= e^{(1-p)\lambda}}$$

$$= \boxed{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} \sim \underline{\underline{Poiss(\lambda p)}}$$

PRÍKLAD: ČAKANIE NA PRVÝ ZDAR

$X \sim Geom(p)$ $\quad P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ $\qquad \underbrace{NN\ldots N}_{k-1}Z$

$$\boxed{A_{Geom}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} x^n =$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} (qx)^n = \frac{p}{q}\left[\frac{1}{1-qx} - 1\right] =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{1-1+qx}{1-qx} = \underline{\underline{\frac{p}{q} \cdot \frac{qx}{1-qx}}} = \boxed{\underline{\underline{\frac{px}{1-qx}}}}$$

08.10.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

$NBin(r, p)$ ČAKANIE NA r-TY ZDAR

$$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} \cdot q^{k-r} \cdot p$$

$X = X_1 + \dots + X_r$ $X_i \sim Geom(p)$, X_i NEZÁV.

$$NN\dots NZ \mid NN\dots NZ \mid \dots \mid NN\dots NZ$$

JE TO REKURENTNÝ JAV

$$\boxed{A_{NBin}(x) = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^r}$$

ZREJME $EX = \sum EX_i = r\,EX_1$

PODOBNE $\mathrm{var}\, X = r\,\mathrm{var}\, X_1$

PROBLÉM: AKO ZRÁTAŤ, ŽE NASTAL JAV ZNNZZ ??

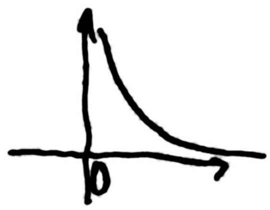
PRÍKLAD: VZŤAH MEDZI $Geom(\lambda)$ A $Exp(\lambda)$

DISKRÉTNE / SPOJITÉ

OBE NEMAJÚ PAMÄŤ:

$$P(X > x+y \mid X > x) = P(X > y)$$

$Exp(\lambda)$: $\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$ $x > 0$, $\lambda > 0$



(POUŽITIE: DOBA TRVANIA NEJAKÉHO PROCESU)

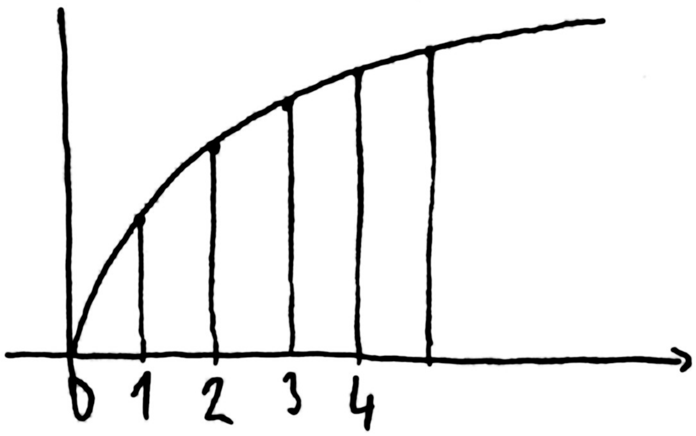
$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

$$\boxed{EX = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{var}\, X = \frac{1}{\lambda^2}}$$

PRE $i \in \mathbb{N}$ SPOČÍTAJME $F(i+1) - F(i)$

$$F(i+1) - F(i) = 1 - e^{-\lambda(i+1)} - (1 - e^{-\lambda i}) =$$
$$= e^{-\lambda i} - e^{-\lambda i - \lambda} = e^{-\lambda i}(1 - e^{-\lambda}) =$$
$$= \underbrace{(e^{-\lambda})^i}_{q^i} \underbrace{(1 - e^{-\lambda})}_{p}$$

RÝCHLE GENEROVANIE HODNÔT GEOM. ROZD.



??

15.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~antoch/mai/mai060.pdf

PRÍKLAD: CAKÁNE NA VÝSKYT r ZDAROV V POSTUPNOSTI HODOV MINCÍ

$n=3$ NZZNZZZ | ZZZ | NZNZZZ

7 10 16

$$\boxed{\begin{array}{l} u_n = P(\mathcal{E} \text{ NASTÁVA NA } n\text{-TOM MIESTE}) \\ f_n = P(\text{—\,"\,— PO PRVÝKRÁT}) \end{array}}$$

u_n NIE JE ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI, PRETOŽE JAVY $\mathcal{E}$ NASTAL V ČASE $n, n+1, \dots$, NIE SÚ NEZLUČITEĽNÉ

MÔŽE SA STAŤ, ŽE $\sum u_n = \infty$

f_n JE ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI

$$\boxed{u_n = f_0 \cdot u_n + f_1 \cdot u_{n-1} + \dots + f_n \cdot u_0}$$

$\mathcal{E}$ NASTAL V KROKU n $\equiv$ $\mathcal{E}$ NASTAL NIEKEDY (V KROKU k) PO PRVÝKRÁT, A POTOM NASTAL NA KONCI POSTUPNOSTI VO ZVYŠKU POSTUPNOSTI

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(x) - 1 = F(X) \cdot U(x)}$$

PODOBNE PRE 2. NÁVRAT

$$f_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot f_{n-i}$$

ATĎ.

VETA: PLATÍ $\boxed{\{f_n^{(r)}\} = \{f_n\}^{r*}}$

OTÁZKA: MAJME NEKONEČNE VEĽA POKUSOV, ČO MÔŽEME POVEDAŤ O POČTE VÝSKYTOV JAVU ξ ?

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE ξ NASTANE ASPOŇ r KRÁT JE f^r.

A_n^r = ξ NASTAL V POSTUPNOSTI V ČASE n PRÁVE PO r-TÝ KR.

$$P(A_n^r) = f_n^{(r)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(r)} = (\underbrace{F(1)}_{\sum f_i x^i |_{x=1} = f})^r = f^r$$

$$\lim_{r\to\infty} f^r \begin{cases} 1 & \text{AK } f=1 \\ 0 & \end{cases}$$

BOREL - CANTOLLIHO VETA

ξ SA NAZÝVA TRVALÝ $\Leftrightarrow$ $f=1$

T.J. V NEKONEČNEJ POSTUPNOSTI NASTANE NEKONEČNE VEĽA KRÁT

PRECHODNÝ JAV - VRÁTI SA IBA PÁRKRÁT.

15.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

KEĎ JE $f=1$, OZNAČME $\mu = ET_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$
$\equiv$ STREDNÁ DOBA NÁVRATU

T_1 JE N.V. S ROZDELENÍM (i, f_i)

TRVALÝ REKURENTNÝ JAV SA NAZÝVA NENULOVÝ, KEĎ $\mu < +\infty$, RESP. NULOVÝ, KEĎ $\mu = +\infty$.

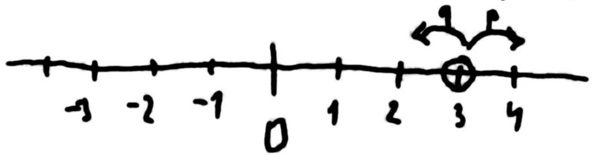
REKURENTNÝ JAV SA NAZÝVA PERIODICKÝ
$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{N}: \ u_n = 0$ PRE $\forall n \in \mathbb{N}: \lambda \nmid n$
NAJVÄČŠIE $\lambda \equiv$ PERIÓDA

$$F(x) = \frac{U(x)-1}{U(x)} \qquad F(1) = \frac{(\sum u_i)-1}{\sum u_i} = \sum f_i = f \qquad !$$

KEĎ $\sum u_i < +\infty \Rightarrow f < 1$ PRECHODNÝ JAV
KEĎ $\sum u_i = +\infty \Rightarrow f = 1$ TRVALÝ JAV

PRÍKLAD: NÁHODNÁ PRECHÁDZKA PO PRIAMKE

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \\ -1 & q = 1-p \end{cases}$$



$$\text{STAV } i < \begin{matrix} i+1 & p \\ i-1 & q = 1-p \end{matrix}$$

$\xi \equiv$ NÁVRAT SPÄŤ DO NULY

BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE NA ZAČIATKU SME V STAVE 0.

ZREJME: $u_{2n+1} = 0$, $u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$

PRE $p = q = \frac{1}{2}$, $\boxed{n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

$\Rightarrow u_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

$\sum u_{2n} \approx \sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty \Rightarrow$ TRVALÝ JAV

NÁVRATY DO NULY V PRÍPADE $p = q$
TVORIA TRVALÝ JAV

POZOR! PRE $p \neq q$ TO UŽ NEPLATÍ (HOMEWORK!)

NA CVIČENIACH SPOČÍTAME $\boxed{f_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} \frac{2}{n} \cdot (pq)^n}$

$$ET_1 = \sum n f_n = \sum \binom{2n-2}{n-1} \frac{2}{n} (pq)^n \cdot 2n$$

PRE $p = q = \frac{1}{2}$ MÁME $ET_1 = +\infty$

OZNAČME $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \begin{cases} +1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{cases}$ $S_0 = 0$

ZREJME $EX_i = 0$, $\operatorname{var} X_i = 1$

$\Rightarrow ES_n = 0$, $\operatorname{var} S_n = n$

PRIRODZENÁ NORMALIZÁCIA: $S_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$,

$ES_n^* = 0$, $\operatorname{var} S_n^* = 1$

15.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

DOKONCA PLATÍ: a) $\limsup S_n = +\infty$, $\liminf S_n = -\infty$

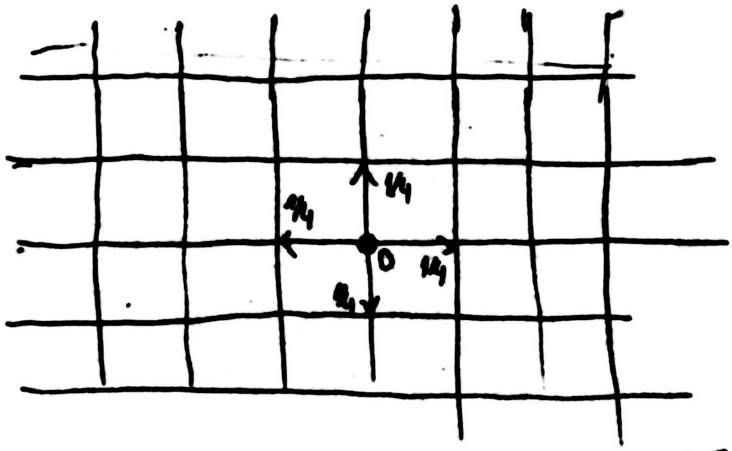
b) $\limsup S_n^* = +\infty$, $\liminf S_n^* = -\infty$

c) ZÁKON ITEROVANÉHO LOGARITMU

$$\limsup \frac{1}{\sqrt{2n \log n}} S_n = +1$$

$$\liminf \quad —\|— \quad = -1$$

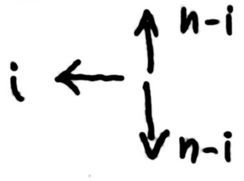
PRÍKLAD: NÁHODNÁ PRECHÁDZKA PO MRIEŽKE



$\xi \equiv$ NÁVRAT DO NULY

$$u_{2n+1} = 0, \qquad u_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

FIX $\longrightarrow$ $i = 0, 1, 2, \dots \} A_i$

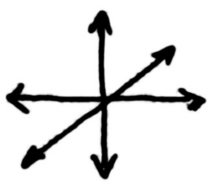


MULTINOMICKÉ ROZDELENIE

ZREJME $\boxed{u_{2n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}\frac{1}{4^{2n}} =$

$$= \binom{2n}{n}\frac{1}{4^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \boxed{\binom{2n}{n}^2 \cdot \frac{1}{4^{2n}} \approx \frac{1}{\pi n}}$$

CVIČENIE: 3D NÁHODNÁ PRECHÁDZKA

 1/6

(FIXOVANIE 2 SMEROV)

HOMEWORK!

TERAZ UŽ VYJDE: $\boxed{\sum_{n} K \cdot \frac{1}{(n\pi)^{3/2}} < \infty}$

PRÍKLAD: ČAKANIE NA r ZDAROV ZA SEBOU

ξ NASTANE V KROKU n ⟺

V ČASOCH $n, n-1, \dots, n-r+1$ NASTAL ZDAR

u_n ... P(ξ NASTAL V ČASE n)

PLATÍ $\boxed{p^r = u_n + \underbrace{u_{n-1}\,p}_{} + \dots + u_{n-r+2}\,p^{r-1}}$ $n \geq r$

$$ZZ\dots\overset{n-1}{Z} \mid \overset{n}{Z}$$

$\Downarrow$ DÔLEŽITÝ TRIK!

(1) VYMYSLITE INÉ REKURENTNÉ FORMULE

(2) VYMYSLIEŤ REK. FORMULU PRE f_n

15.10.2008 Ne
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

$r = 3, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = u_2 = 0$

$$p^3 = u_n + p\,u_{n-1} + p^2 u_{n-2} \qquad \Big| \cdot x^n$$

$$p^3 x^3 = u_3 x^3 + p\,u_2 x^3 + p^2 u_1 x^3$$

$$p^3 x^4 = u_4 x^4 + p\,u_3 x^4 + p^2 u_2 x^4$$

$$p^3 x^5 = u_5 x^5 + p\,u_4 x^5 + p^2 u_3 x^5$$

$$\dots$$

$$p^3 \frac{x^3}{1-x} = U(x) - 1 \quad \dots$$

$$\boxed{\frac{p^r x^r}{1-x} = \left(U(x)-1\right)\cdot\left(1 + px + \dots + p^{r-1}x^{r-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad U(x) = \frac{1 - x - q\,p^r x^{r+1}}{(1-x)\left(1-(px)^r\right)} \quad \rightsquigarrow \quad F(x)$$

12.11.2008 We
PETER ČERNO

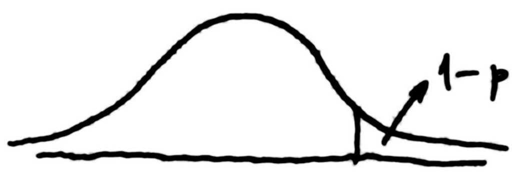
NMAI060 PRAVD. METÓDY

INVERZNÝ POHĽAD

AKO STANOVIŤ TOLERANCIU?

m_0 .. S TÝMTO HÝBAŤ NEMÔŽEM, TAKÉ BY VÝROBKY MALI BYŤ

σ^2 .. VARIABILITA VÝROBY (MÔŽEM SA SNAŽIŤ ZLEPŠIŤ, ALE INAK NIČ MOC VIAC)



PREDPÍŠEM STREDNÚ DOBU MEDZI POPLACHMI m_0.

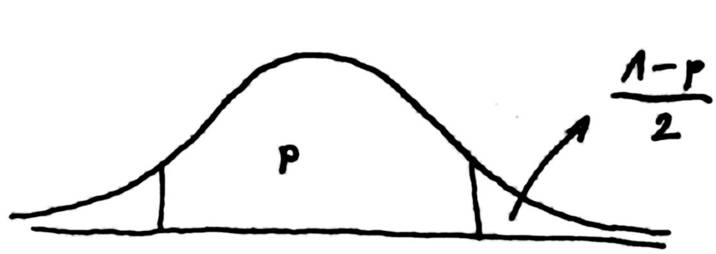
$$\Rightarrow \quad p = \frac{m_0 - 1}{m_0}$$

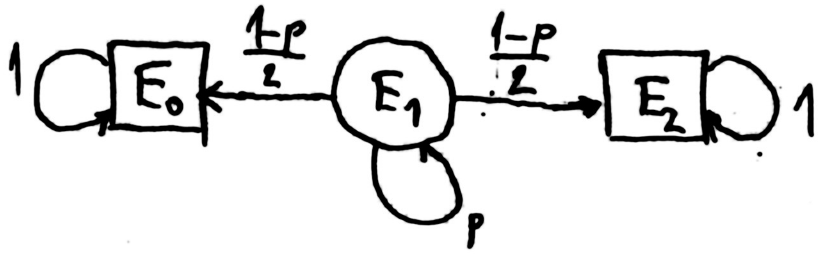
K TOMUTO p NÁJDEM TOLERANCIU

$$p = P(X \leq \text{TOLERANCIA}) = F(\text{TOLERANCIA})$$

$$\Rightarrow \text{TOLERANCIA} = F^{-1}\left(\frac{m_0 - 1}{m_0}\right)$$

PRÍKLAD:





PRÍKLAD: NÁHODNÁ PRECHÁDZKA S ODRÁŽAJÚCOU STENOU

$$i \begin{cases} \nearrow i+1 & p \\ \searrow i-1 & 1-p \end{cases} \qquad 0 \begin{cases} \nearrow 1 & p \\ \searrow 0 & 1-p \end{cases}$$

ÚLOHOU BOLO KLASIFIKOVAŤ STAVY

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & & \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & \\ 0 & q & 0 & p & & \\ & \cdots & & & \cdots & \end{pmatrix}$$

$\vec{v} \geq 0, \sum v_i = 1$

$p < \frac{1}{2}$ .. $\exists$ STACIONÁRNE STAVY $(\exists \vec{v}: \vec{v} = \mathbb{P}^T \vec{v})$

$p > \frac{1}{2}$ .. VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ

$p = \frac{1}{2}$ .. ?

VETA: MAJME NEROZLOŽITEĽNÝ MR SO STAVMI $E_0, E_1, \ldots$

VŠETKY STAVY SÚ PRECHODNÉ $\Leftrightarrow$ SÚSTAVA $\eta_j = \sum_{v=1}^{\infty} p_{jv} \eta_v \quad \forall j$ MÁ NETRIVIÁLNE OHRANIČENÉ RIEŠENIE.

!

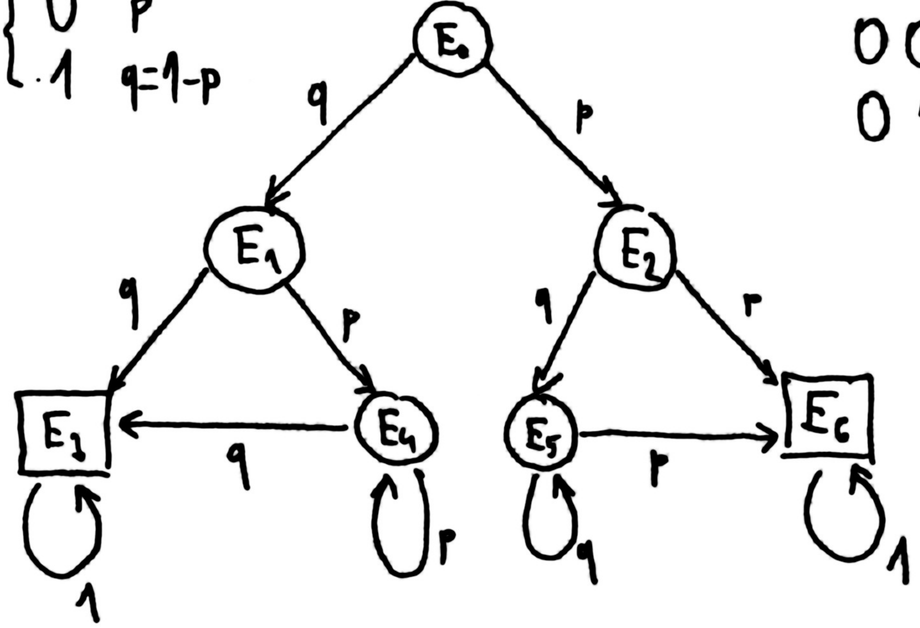
12.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

ČAKANIE NA 1. PALINDRÓM ASPOŇ DĹŽKY ≥ 2

$X \begin{cases} 0 & p \\ 1 & q = 1-p \end{cases}$

00	11
01^i0	10^i1



? STREDNÁ DOBA NA ZÍSKANIE PALINDRÓMU ?

MR 7 STAVOV, 2 POHLCUJÚCE,
2 UZAVRETÉ DISJUNKTNÉ PODMNOŽINY

$S = \{E_0, \dots, E_6\}$

$C_1 = \{E_1, E_3, E_4\}$ $\quad A_1 = \{E_3\}$

$C_2 = \{E_2, E_5, E_6\}$ $\quad A_2 = \{E_6\}$ ABSORBČNÉ STAVY

T.J. AKÁ JE STREDNÁ DOBA DO POHLTENIA ?

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & q & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & p \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\ (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{array}
$$

PRIAMY VÝPOČET :

$$
X_3 = q^2 + \sum_{i=1}^{\infty} q\,(pq)^i = q^2 \frac{1}{1-p} = q
$$

$$
X_6 = p
$$

MÁME NÁZORNÚ INTERPRETÁCIU (1. POKUS ROZHODNE)

Tj. $P(E_0 \to E_3) = q$,
$P(E_0 \to E_6) = p$

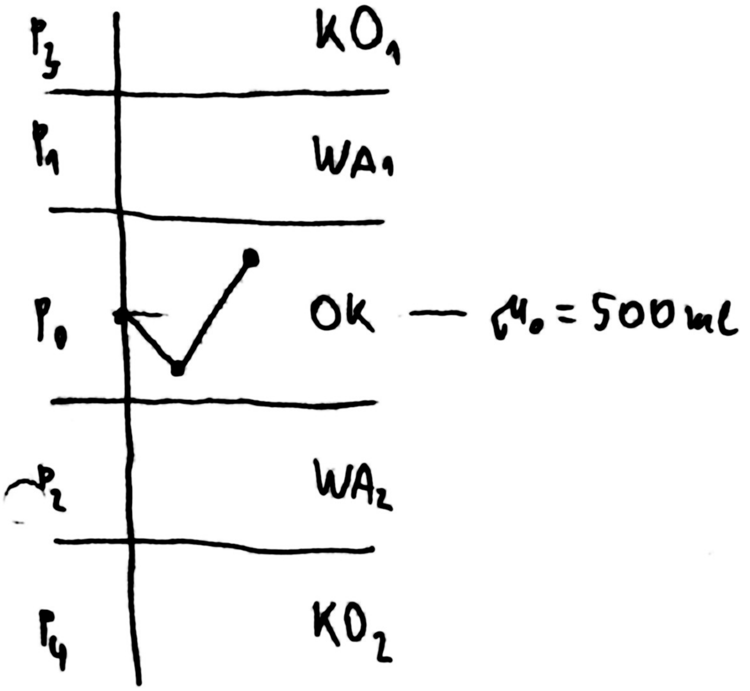
STREDNÁ DOBA ? UVAŽUJME m_i $i = 0, \dots, 6$

ZREJME $m_3 = m_6 = 0$. (POČIATOČNÉ PODMIENKY)

$$
\boxed{m_i = 1 + \sum p_{ik}\, m_k}
$$

12.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY



ZATIAĽ PREDPOKL., ŽE REALIZÁCIE MR SÚ NEZÁVISLÉ (VO VÝROBE SÚ TO NEZÁVISLE ROVNAKO ROZDELENÉ NÁH. VELIČINY)

STREDNÁ HODNOTA

$0 \;..\; 0$
$1 \;..\; 0$
$2 \;..\; q^2 + p^2$
$3 \;..\; qpq + pqp$
$4 \;..\; qp^2q + pq^2p$
$\vdots$
$i+2 \;..\; q^2p^i + p^2q^i$

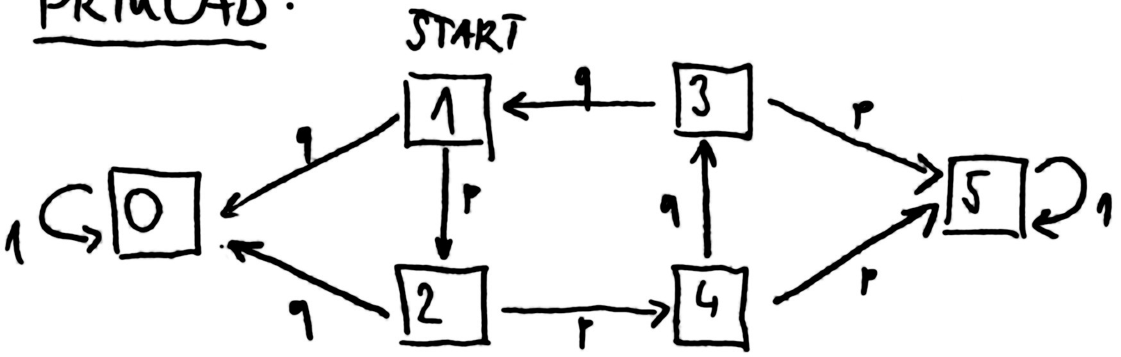
VYTVÁRAJÚCA FUNKCIA

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (q^2p^i + p^2q^i)\,x^{i+2} =$$

$$= \frac{q^2}{p^2}(px)^2\frac{1}{1-px} + \frac{p^2}{q^2}(qx)^2\frac{1}{1-px}$$

$\Rightarrow$ VYJDE $\underline{\underline{A'(1) = 3}}$ AK $p, q \neq 0$

PRÍKLAD:



$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & \end{array} \right) \end{array}$$

$$m_0 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 &= 1 + p m_2 \\ m_2 &= 1 + p m_4 \\ m_3 &= 1 + q m_1 \\ m_4 &= 1 + q m_3 \end{aligned}}$$

$$m_5 = 0$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + p\big(1 + p\big(1 + q(1 + q m_1)\big)\big) = \\ &= 1 + p + p^2\big(1 + q(1 + q m_1)\big) = \\ &= 1 + p + p^2 + p^2 q + p^2 q^2 m_1 \end{aligned}$$

$$m_1 = \frac{1 + p + p^2 + p^2 q}{1 - p^2 q^2} \overset{(\text{PRE } p = q = \frac{1}{2})}{=} 2$$

$$m_2 = 1 + p + pq\big(1 + q(1 + p m_2)\big) \Rightarrow \quad m_2 = \frac{1 + p + pq + pq^2}{1 - p^2 q^2}$$

$$m_3 = 1 + q + pq\big(1 + p(1 + q m_3)\big) \Rightarrow$$

$$m_3 = \frac{1 + q + pq + p^2 q}{1 - p^2 q^2}$$

$$m_4 = 1 + q + q^2\big(1 + p(1 + p m_4)\big) \Rightarrow \quad m_4 = \frac{1 + q + q^2 + pq^2}{1 - p^2 q^2}$$

05.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

PRE $p = q = \frac{1}{2}$:

$$v_0 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} v_1$$
$$v_1 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} v_2$$
$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3$$
$$\dots$$

RIEŠENIE

$\underline{\underline{v_i = v_0}} \quad \forall i$

$(v_0, v_0, v_0, \dots)$

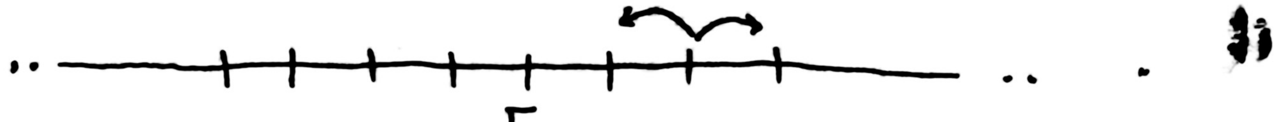
$\Rightarrow$ NEEXISTUJE STACIONÁRNE ROZDELENIE.

VŠETKY STAVY NIE SÚ TRVALÉ NENULOVÉ.

JE DÔLEŽITEJŠIA VLASTNOSŤ AKO NENULOVOSŤ

AKO MÔŽEME OVERIŤ, ČI STAVY SÚ TRVALÉ ?

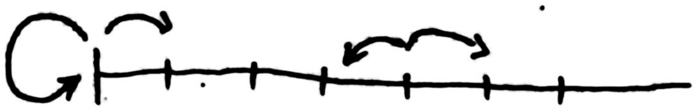
PRIECHODY STAVOM E_j (ZAFIXOVANÝM) JE REKURENTNÝ JAV.



E_0

NAŠA SITUÁCIA:

$$u_{2n+1} = 0$$
$$u_{2n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$



E_0

CHCEME SPOČÍTAŤ: $p_{00}^{(n)}$

$$p_{00}^{(1)} = q$$

$$p_{00}^{(2)} = q \cdot q + p \cdot q$$

$$p_{00}^{(3)} = q \cdot q \cdot q + p \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q$$

ODHAD

$2n \leftarrow \quad 1$

$2n-2 \leftarrow \quad ?$ $\rightarrow$ HOMEWORK

$$\mathbb{P}' = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \vdots \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ \cdots \end{pmatrix}$$

NORMOVANÝ v:

$$v_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \left(1 - \frac{p}{q}\right) \quad \text{PRE } p<q$$

$$v_0 = q v_0 + q v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{p}{q} v_0$$

$$v_1 = p v_0 + q v_2 \qquad v_2 = \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{q} - \frac{p}{q}\right) v_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 v_0$$

$$v_2 = p v_1 + q v_3 \qquad \ldots$$

$\ldots$

$$v_i = p v_{i-1} + q v_{i+1} \qquad v_{i+1} = \frac{1}{q} v_i - \frac{p}{q} v_{i-1} =$$

$$= (\text{INDUKCIA}) = \left[\frac{1}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^i - \left(\frac{p}{q}\right)^i\right] v_0 = \left(\frac{p}{q}\right)^{i+1} v_0$$

$$v_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i v_0 \qquad \left(\left(\frac{p}{q}\right)^0 v_0, \left(\frac{p}{q}\right)^1 v_0, \left(\frac{p}{q}\right)^2 v_0, \ldots \right)$$

$$\sum v_i = v_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} \quad \text{KONVERGUJE} \Leftrightarrow p < q \ !!! \quad \square$$

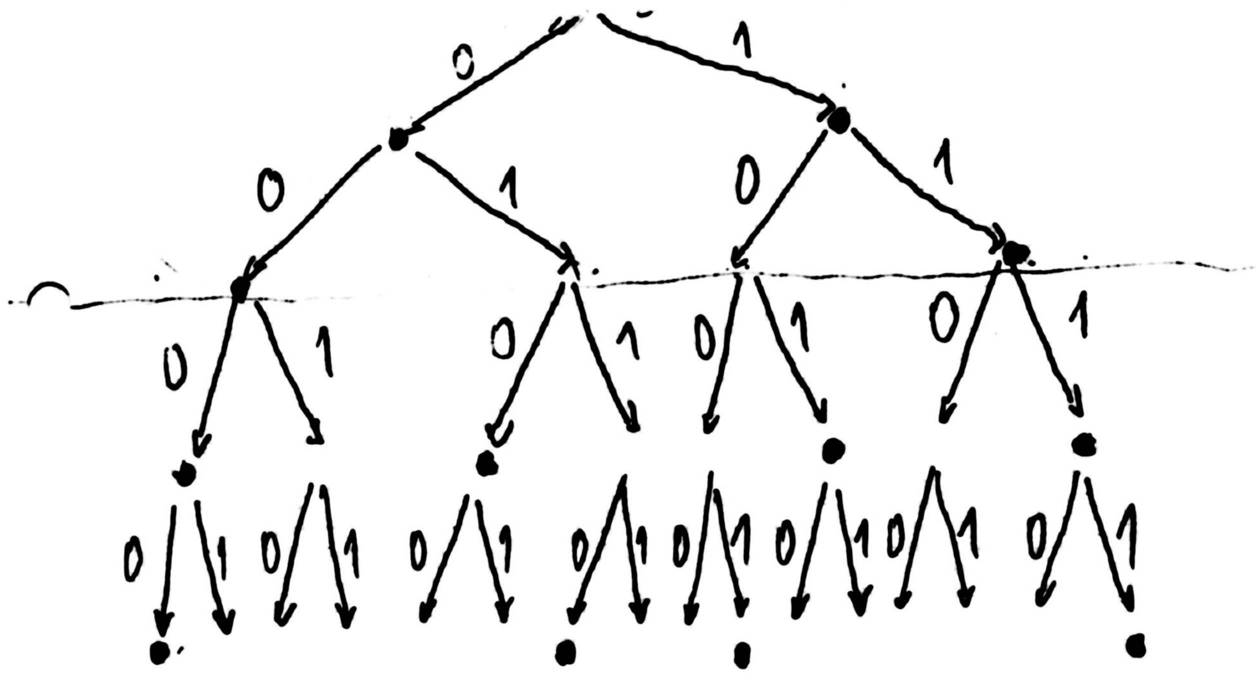
05.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

V ELIPSE SPÍ LEV
JELENOVI PIVO NELEJ
KOBYLA MÁ MALÝ BOK
RANO KUCHAR HODI DO HRACHU KONAR

PALINDROMY: $\{0, 1\}$

λ
0, 1
00, 11
000, 010, 101, 111



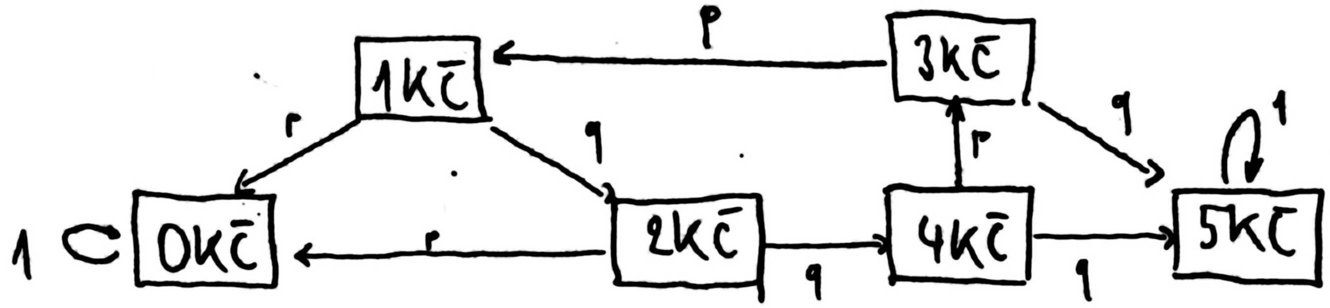
DOPOČÍTAŤ !

PRÍKLAD:

MÁTE 1Kč, CHCETE 5Kč

STRATÉGIA: VSADÍM ČO NAJVIAC

BANKÉR HODÍ MINCOU $<\begin{matrix} Z \\ N \end{matrix}$ .. BERIE



VÝHRY: $1\to2\to4\to5,\ 1\to2\to4\to3\to5,\ \dots$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1\to2\to4\to3)^n\to5 & n\geq1 \\ (1\to2\to4\to3)^n\to1\to2\to4\to5 & n\geq0 \end{array}}$$

PREHRY:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1\to2\to4\to3)^n\to1\to0 & n\geq0 \\ (1\to2\to4\to3)^n\to1\to2\to0 & n\geq0 \end{array}}$$

12. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

1) P(POHLTENIA)
2) STREDNÁ DOBA DO POHLTENIA

MAJME ROZLOŽITEĽNÝ MR ... S
T .. MNOŽINA PRECHODNÝCH STAVOV
C .. UZAVRENÁ MNOŽINA STAVOV

$$x_j = P(E_j \in T \to C)$$

$1 - x_j = P($BUĎ ZOTRVÁME NAVŽDY V T ALEBO BUDEME POHLTENÍ INDE$)$

<u>VETA</u>: AK x_j (AK EXISTUJÚ) VYHOVUJÚ SÚSTAVE

$$\xi_j = x_j^{(1)} + \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \xi_\nu$$

KDE $x_j^{(1)}$ ZNAČÍ $P(E_j \in T \to C$ V PRVOM KROKU$)$

DÔKAZ: $x_j^{(n)} = P($PRECHOD Z E_j DO C NASTANE PRÁVE V n-TOM KROKU$)$

$$x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_j^{(n)}$$ Z VETY O ÚPLNEJ PRST.

$$x_j^{(n+1)} = \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \cdot x_\nu^{(n)}$$

$$\Rightarrow x_j = x_j^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} x_j^{(n)} = x_j^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \cdot x_\nu^{(n-1)} =$$

$$= x_j^{(1)} + \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \sum_{n=1}^{\infty} x_\nu^{(n)} = x_j^{(1)} + \sum_{\nu \in T} p_{j\nu} \cdot x_\nu$$

PRÍKLAD: $p = q = \frac{1}{2}$

P_i = P (PREHRÁM VŠETKO, KEĎ SOM PRIŠIEL DO HRY S i KORUNAMI)

$$i \begin{cases} \nearrow i+1 & p \\ \searrow i-1 & q = 1-p \end{cases}$$

$$\Omega = \{ \underbrace{1_v}_{\text{1. VÝHRA}}, \underbrace{1_p}_{\text{1. PREHRA}} \}$$

$$P_i = \underbrace{P(\text{VŠETKO} \mid 1_v)}_{P_{i+1}} \cdot \underbrace{P(1_v)}_{p} + \underbrace{P(\text{VŠETKO} \mid 1_p)}_{P_{i-1}} \underbrace{P(1_p)}_{q=1-p}$$

$$\xi_j = x_j^{(1)} + \sum_{v \in T} p_{jv} \cdot \xi_v$$

S .. MNOŽINA VŠETKÝCH UZLOV MR

C .. UZAVRETÁ PODMNOŽINA

$$P_i = P(E_i \to A)$$

$A \subset C$ (A BUDE PODMNOŽINA UZLOV UZAVRETEJ MNOŽINY STAVOV)

$$P_i = \sum_k p_{ik} \cdot P_k \quad \forall i \in S \setminus C$$

POČIAT. PODMIENKY

$$P_i = \begin{cases} 1 & \forall i \in A \\ 0 & \forall i \in C \setminus A \end{cases}$$

12.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

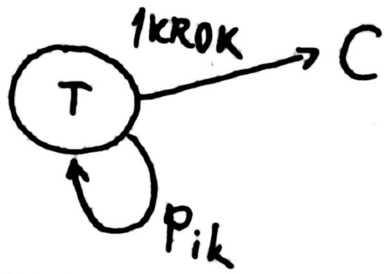
m_i = STREDNÁ DOBA DO POHLTENIA, KEĎ VYRAZÍM ZO STAVU E_i

<u>VETA</u>: PLATÍ:

$$m_i = 1 + \sum_k p_{ik} \cdot m_k \qquad \forall i \in S \setminus C$$

$$m_i = 0 \qquad \forall i \in C$$

<u>MYŠLIENKA</u>



<u>PRÍKLAD</u>: MR

$$m_0 = 1 + p\, m_0$$

POUŽITIE TOHTO MODELU:

SEKVENČNÁ KONTROLA KVALITY

VYRÁBAM VÝROBKY

VÝROBOK
- → DOBRÝ ⇒ POKRAČUJE VO VÝROBE (+ KONTROLA)
- → ZLÝ ⇒ ZASTAVÍM

VÝROBKY IDÚ SEKVENČNE ZA SEBOU

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

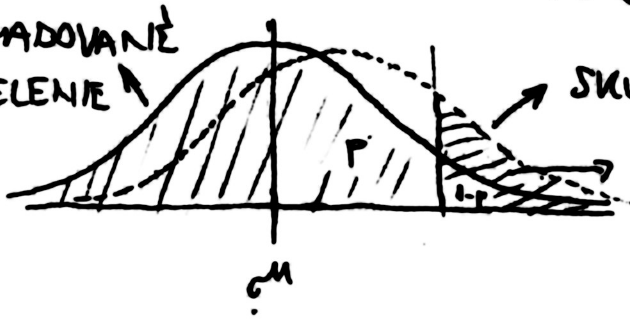
$a_1 = (1, 0)^T$

ČOMU ZODPOVEDÁ p ?

CHARAKTERISTIKA VÝROBKU MÁ NEJAKÉ ROZDELENIE P.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

VÝROBOK JE ZLÝ : $X \geq$ TOLERANCIA



KEĎ SA ZASTAVUJEME PRÍLIŠ ČASTO, ZLE SME ODHADLI ROZDELENIE

S NENULOVOU PRST. VYRÁBAM DOBRE, A MÔŽE SA OBJAVIŤ ZLÝ VÝROBOK

ZASTAVÍM VÝROBU A IDE PRI TOM O FALOŠNÝ POPLACH

AKO ČASTO BUDE <u>FALOŠNÝ POPLACH</u> KEĎ VYRÁBAME V PORIADKU

$$m_0 = \frac{1}{1-p}$$ STREDNÁ DOBA MEDZI ZASTAVENIAMI

NORMÁLNY POPLACH .. KEĎ SA S VÝROBOU NIEČO STANE, T. ZAČNE SYSTEMATICKY VYRÁBAŤ S VÄČŠÍM μ ALEBO VÄČŠÍM ROZPTYLOM

29.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBN. METÓDY

MARKOVOVE REŤAZCE

POSTUPNOSŤ POKUSOV (KAŽDÝ MÁ TÚ ISTÚ KONEČNÚ / SPOČETNÚ MN. VÝSLEDKOV) NAZVEME MARKOVOVÝM REŤAZCOM

$\Leftrightarrow \quad P(E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = a_{j_0} p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n}$

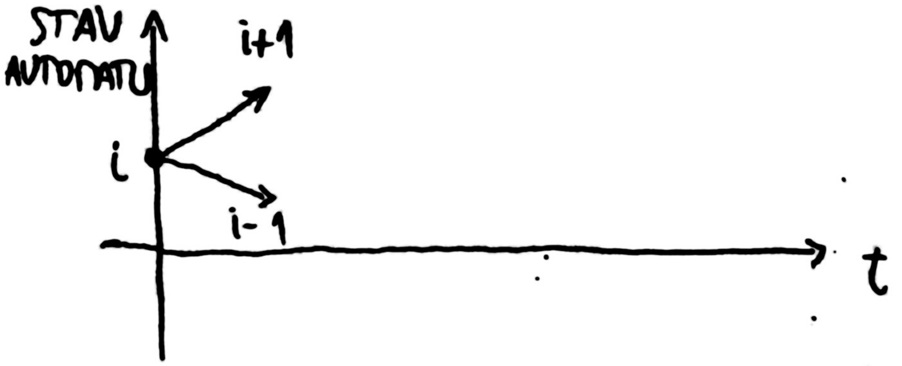
KDE a_k, $k = 1, 2, \dots$ SÚ PRAVDEPODOBNOSTI VÝSL. NULTÉHO POKUSU

p_{jk}, $1 \leq j,k < +\infty$ JE PODMIENENÁ PRAVDEP. VÝSLEDKU E_k ZA PODMIENKY VÝSLEDKU E_j V PREDCHÁDZAJÚCOM POKUSE.

$\{a_k\}$ .. POČIATOČNÉ ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI
$\{p_{jk}\}$ .. PRAVDEPODOBNOSTI PRECHODU $P(E_j \to E_k)$

K POPISU POKUSOV NEZÁVISLÝCH JAVOV STAČÍ POZNAŤ PRAVDEPODOBNOSTI p_i

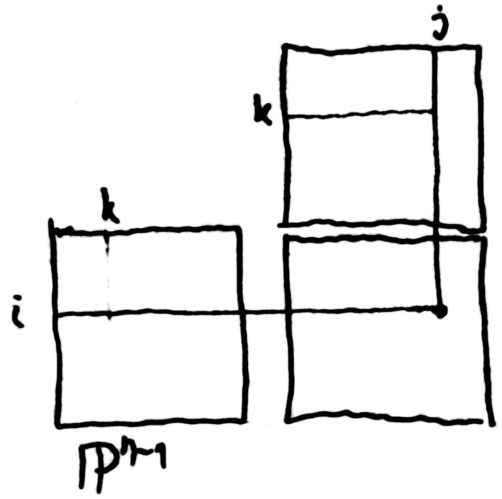
K POPISU MARKOVOVHO REŤAZCA POTREBUJEME POZNAŤ $\mathfrak{a} = \{a_k\}$ A $\mathbb{P} = \{p_{jk}\}$.



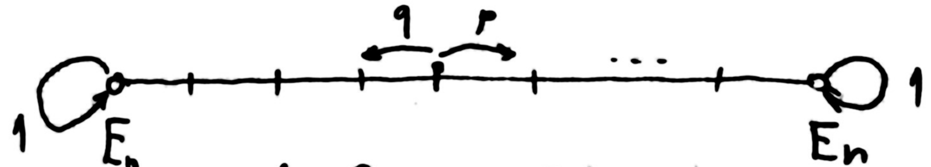
PLATÍ $\sum a_k = 1$, $\sum p_{jk} = 1 \quad \forall j$

KAŽDÝ MARK. REŤAZEC MOŽNO NAMAPOVAŤ NA GRAF

PRAVDEPODOBNOSTI PRECHODOV Z E_j DO E_k PO n KROKOCH DOSTANEME AKO PRVKY MATICE $\mathbb{P}^n$. DEFINUJEME $\mathbb{P}^0 = I$



$$\sum_k \underbrace{p_{ik}^{n-1} \cdot p_{kj}}_{\sum_k P(E_i \overset{n-1}{\rightsquigarrow} E_k) \cdot P(E_k \to E_j)}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \emptyset \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$f_{jj}^{(n)}$ .. ROZDELENIE PRAVDEP. PRVÝCH NÁVRATOV DO STAVU E_j, KEĎ ZAČÍNAME E_j

$p_{jj}^{(n)}$ .. PRAVD., ŽE SYSTÉM JE V STAVE E_j V ČASE n, KEĎ ZAČÍNAME V. E_j

$f_{ij}^{(n)}$ .. PRAVD. PRVÉHO PRIECHODU STAVOM E_j, KEĎ ZAČÍNAME V E_i

$$f_{jj}^{(0)} = 0, \quad p_{jj}^{(0)} = 1, \quad p_{jj}^{(1)} = p_{jj}, \quad f_{ij}^{(0)} = 0, \quad p_{ij}^{(0)} = 0$$

PLATÍ:

$$p_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(0)} \cdot p_{jj}^{(n)} + \dots + f_{jj}^{(n)} \cdot p_{jj}^{(0)}$$

$$\{p_{ij}^{(n)}\} = \{f_{ij}^{(n)}\} + \{f_{jj}^{(n)}\} * \{p_{ij}^{(n)}\}$$

<u>VETA</u>: ZVOĽME PEVNE E_j

(a) KEĎ SME V STAVE E_j, POTOM KAŽDÝ PRIECHOD STAVOM E_j JE REK. JAV

$$P(\cancel{E_j}\, E_{j_1} \dots E_{j_{n-1}} E_j E_{j_{n+1}} \dots E_{j_{n+m-1}} E_j) =$$

$$= \underbrace{q_j}_{=1} \underbrace{p_{j_1 j_2} \cdot p_{j_2 j_3} \cdots p_{j_{n-1} j}}_{P(E_{j_1} \dots E_j)} \overset{\cdot 1 \cdot}{} \underbrace{p_{j j_{n+1}} \cdots p_{j_{n+m-1} j}}_{P(E_{j_{n+1}} \dots E_j)}$$

$$P(E_{j_1} \dots E_j) \cdot P(E_{j_{n+1}} \dots E_j)$$

KDE $P(E_{j_1} \dots E_{j_k})$ OZNAČUJE PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE NASTANE $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}$, KEĎ ZAČÍNAME V E_j.

$$\boxed{\begin{aligned} f_n &= f_{jj}^{(n)} \\ u_n &= p_{jj}^{(n)} \end{aligned}}$$

MÔŽEME POUŽIŤ VETY A VLASTNOSTI REK. JAVOV

(b) KEĎ JE SYSTÉM NA ZAČIATKU V STAVE E_i, POTOM KAŽDÝ PRIECHOD STAVOM E_j JE REKURENTNÝ JAV S ONESKORENÍM.

ROZLOŽITEĽNOSŤ MARKOVOVÝCH REŤAZCOV

DEF.: STAV E_k JE DOSIAHNUTEĽNÝ ZO STAVU E_j, KEĎ $\exists$ ČAS $n \geq 1$ TAKÝ, ŽE $p_{jk}^{(n)} > 0$

MARKOVOV REŤAZEC JE NEROZLOŽITEĽNÝ, KEĎ VŠETKY JEHO STAVY SÚ NAVZÁJOM DOSIAHNUTEĽNÉ.

PREDPOKLADAJME, ŽE (PERMUTÁCIOU RIADKOV/STĹPCOV) POSTAVENE

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} P_1 & \emptyset \\ B & P_2 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{P_1}_{m \times m},\ \underbrace{P_2}_{k \times k} \text{ SÚ ŠTVORCOVÉ}$$

$$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c} P_1^2 & \emptyset \\ \hline \dots & P_2^2 \end{array}\right)$$

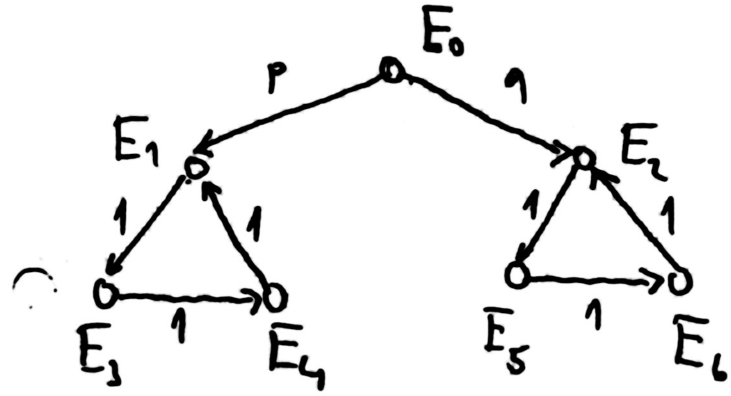
$\dots$

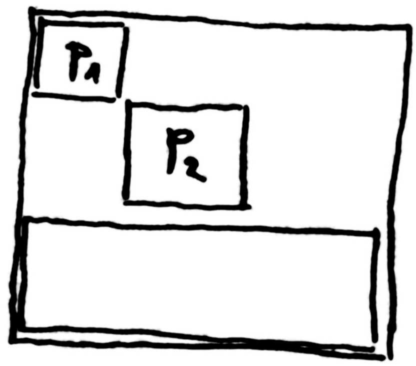
KEĎ SME SCHOPNÍ (AŽ NA PRÍP. PREČÍSLOVANIE STAVOV) V TVARE $\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c} & \emptyset \\ \hline & \end{array}\right)$, POTOM SA JEDNÁ O ROZLOŽITEĽNÝ MARKOVOV REŤAZEC.

29.10.2008 Wb
PETER ČERNO

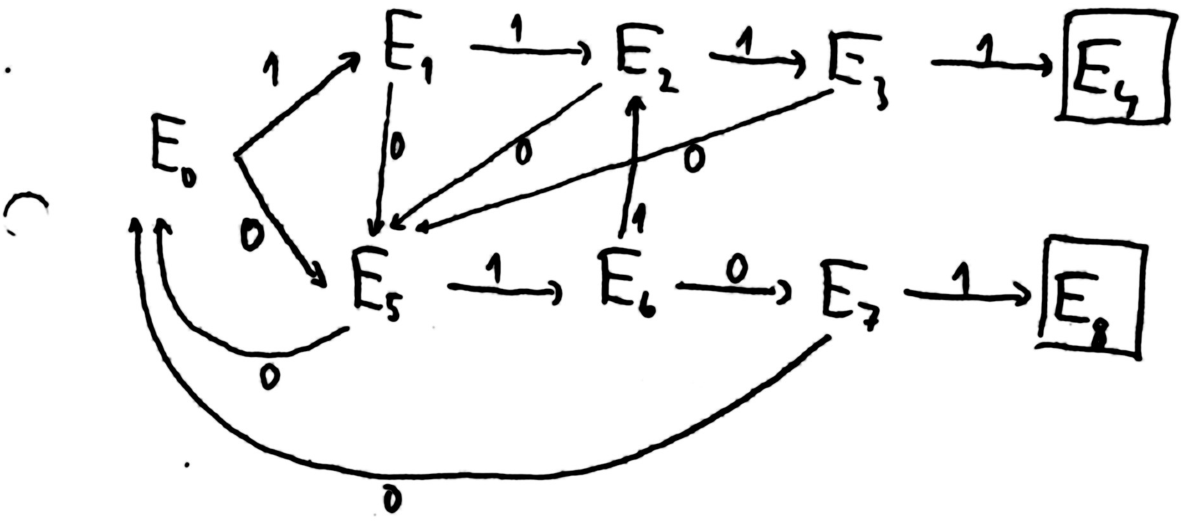
NMAI060 PRAVD. METÓDY

DÔSLEDOK: STAVY POPÍSANÉ MATICOU P_1 TVORIA OPÄŤ MARKOVOV REŤAZEC (PO DOPLNENÍ VEKTOROM POČIATOČNÝCH PRAVD. a_1)





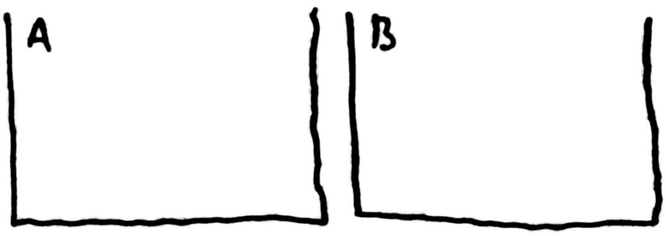
HRA: 1, 1, 1, 1
0, 1, 0, 1



$a = (1, 0, \ldots 0)$

DEF. MNOŽINA STAVOV C MARK. REŤAZCA SA NAZÝVA UZAVRETÁ $\Leftrightarrow$ ŽIADEN STAV MIMO C NIE JE ZO ŽIADNEHO STAVU VO VNÚTRI C DOSIAHNUTEĽNÝ

PRÍKLAD : <u>EHRENFESTOV</u> MYSLENÝ POKUS



n MOLEKÚL

STAV SYSTÉMU $\equiv$ POČET MOLEKÚL V NÁDOBE A

TJ. $E_0, \dots, E_n$

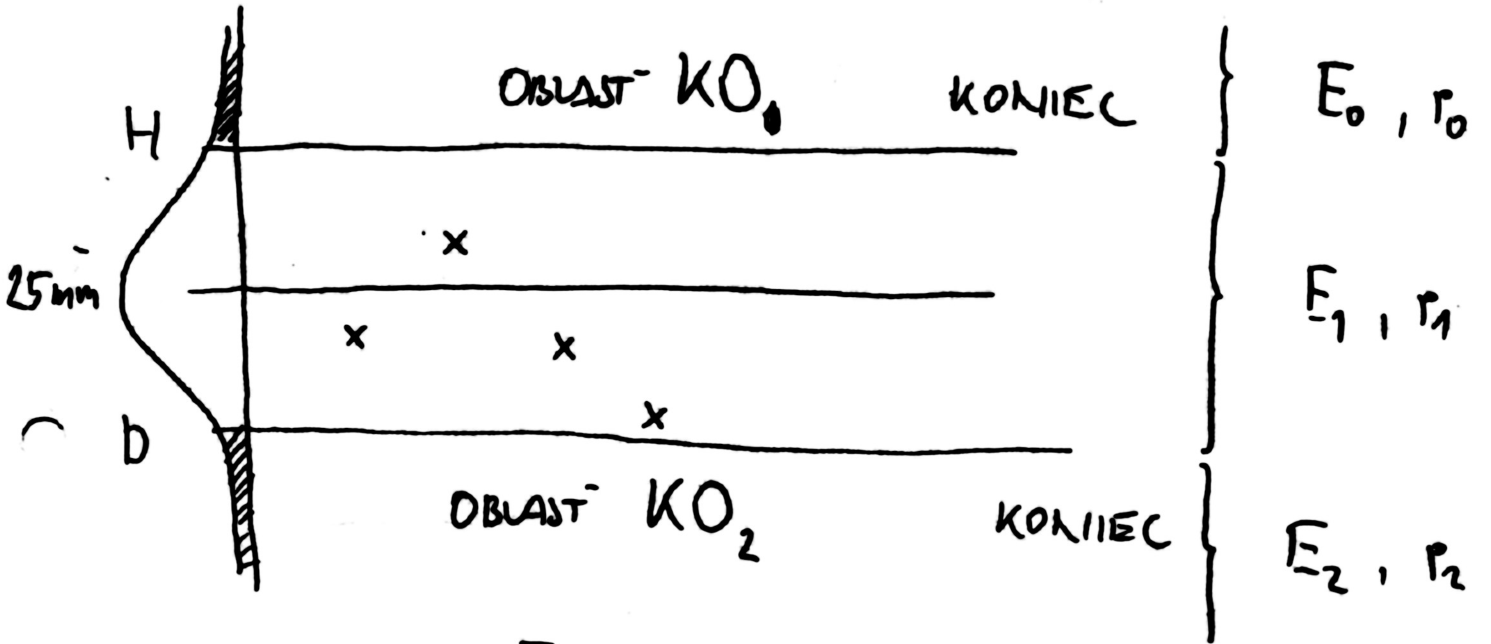
(1) NÁHODNE VYBERIEM NÁDOBU A PRENIESEM JEDNU NÁHODNE VYBRANÚ MOLEKULU DO DRUHEJ NÁDOBY

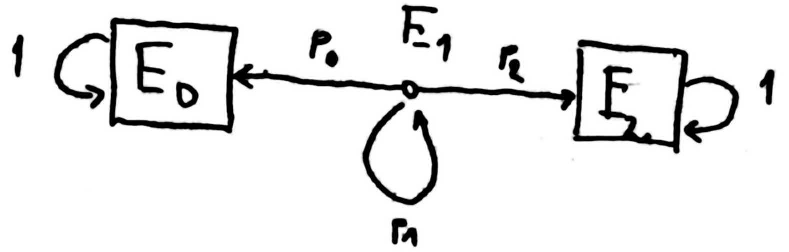
(2) NÁHODNE VYBERIEM MOLEKULU A PRENIESEM JU DO DRUHEJ NÁDOBY

29. 10. 2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

VYRÁBAM HRIADEĽ DĹŽKY $d = 25$ mm





$X_1, \dots, X_n$ DĹŽKY n HRIADEĽOV VYROBENÝCH ZA OPTIMÁLNYCH PODMIENOK

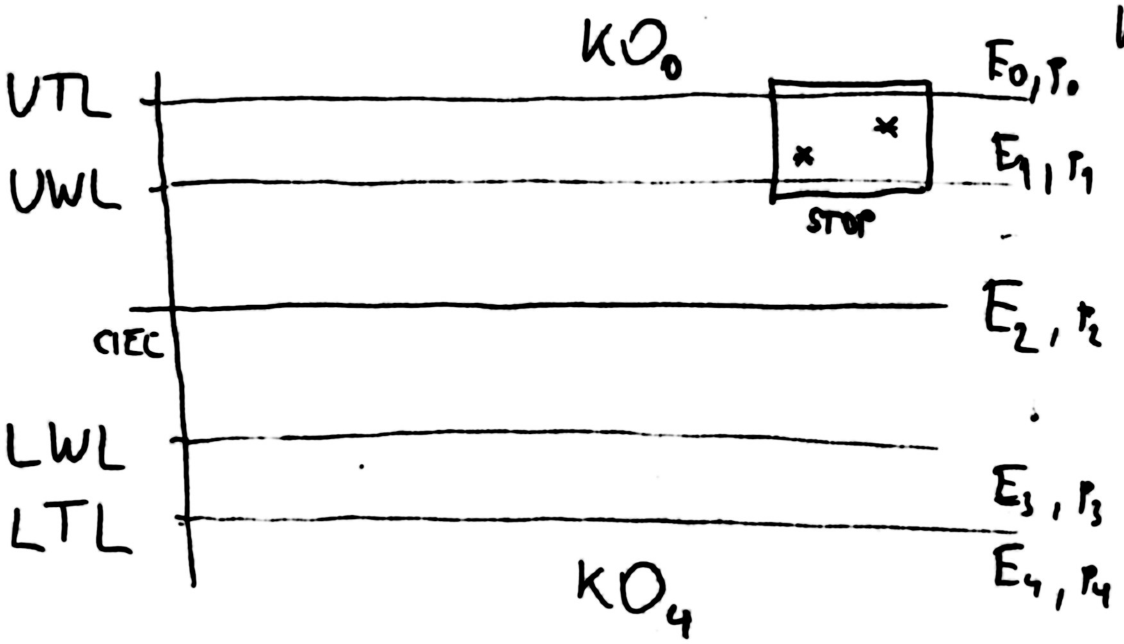
PRÍSTUP 1: PREDPOKLADAŤ TYP ROZDELENIA

NAPR. $N(\mu, \sigma^2)$

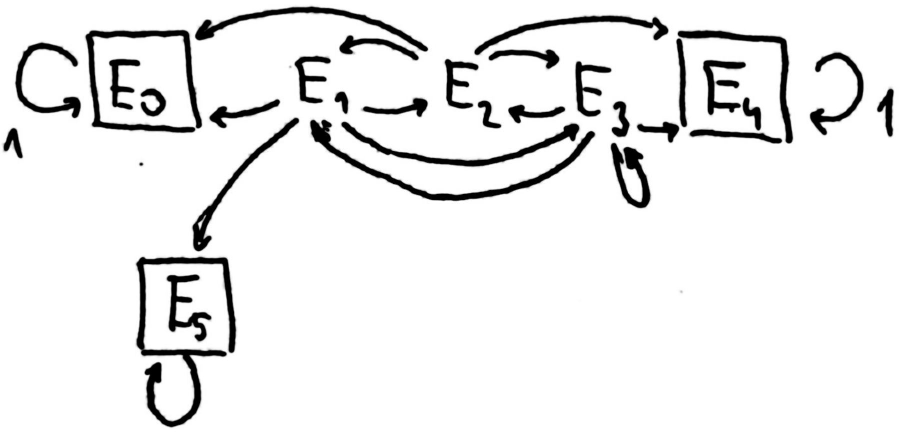
$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X_n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X_n})^2$$

W.. WARNING



NAPR.
KEĎ 4 Z 5 PO SEBE IDÚCICH POZOROVANÍ MEDZI UWL A UTL ⇒ <u>STOP</u>



E5 .. FIKTÍVNY POMLCUJÚCI STAV POPISUJÚCI 2x ZA SEBOU UWL

05. 11. 2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

? JE MOŽNÉ STAVY MR CHARAKTERIZOVAŤ „NARAZ" ?

PRE NEROZLOŽITEĽNÉ REŤAZCE TO ČASTOKRÁT IDE

DEF.: POVIEME, ŽE v JE STACIONÁRNYM ROZDELENÍM NEROZLOŽITEĽNÉHO MR $(\mathbb{P}, a)$, KEĎ

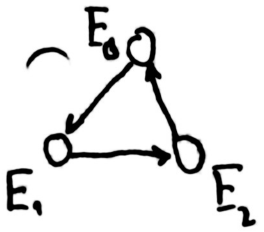
$$\mathbb{P}^T v = v$$

$v_i \geq 0$, $\sum v_i = 1$, TJ. JEDNÁ SA O ROZDELENIE PRST.

<u>VETA</u>: KEĎ V MR $\exists$ STACIONÁRNE ROZDELENIE, POTOM: $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = v_j$, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = v_j$

STACIONÁRNE ROZDELENIE POPISUJE „ROVNOVÁŽNY" STAV MR. (TIEŽ „USTÁLENÝ")

V TAKOM PRÍPADE SÚ VŠETKY STAVY TRVALÉ NENULOVÉ



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{v_i = \frac{1}{3}}}$$

JE JASNÉ, ŽE KEĎ MR $(\mathbb{P}, a)$ JE NEROZLOŽITEĽNÝ A MÁ KONEČNE VEĽA STAVOV, POTOM STACIONÁRNE ROZDELENIE <u>VŽDY EXISTUJE</u>.

EMP I

n molekúl

$E_i \equiv$ # molekúl v nádobe A $(i = 0, 1, \dots, n)$

Náhodne vyberieme nádobu a premiestnime guličku do druhej nádoby

$$E_i \begin{cases} \nearrow E_{i+1} & 1/2 \\ \searrow E_{i-1} & 1/2 \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$E_0 \begin{cases} \nearrow E_1 & 1/2 \\ \searrow E_0 & 1/2 \end{cases} \qquad E_n \begin{cases} \nearrow E_n & 1/2 \\ \searrow E_{n-1} & 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$a := \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)^T$$

$$\left.\begin{aligned} 1/2\, v_0 + 1/2\, v_1 &= v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_0 \\ 1/2\, v_0 + 1/2\, v_2 &= v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_0 \\ &\cdots \\ 1/2\, v_{n-1} + 1/2\, v_n &= v_n \quad \Rightarrow \quad v_n = v_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{v = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)^T}}$$

05.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

POZNÁMKA: $\sum_i \mathbb{P}_{\cdot i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbb{P} - I_n) = 0$

$\mathbb{P}$ má vlastné číslo 1. OTÁZKA: $\mathrm{rank}(\mathbb{P} - I_n) \overset{?}{=} n-1$

EMP II : NÁHODNE VYBRANÚ GULIČKU PREMIESTNIM DO DRUHEJ NÁDOBY

$$E_i \begin{cases} \nearrow E_{i+1} & \frac{n-i}{n} \\ \searrow E_{i-1} & \frac{i}{n} \end{cases} \qquad \begin{matrix} E_0 \to E_1 & 1 \\ E_n \to E_{n-1} & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n-2}{n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_0 = \frac{1}{n} v_1$

$v_1 = v_0 + \frac{2}{n} v_2$

$v_2 = \frac{n-1}{n} v_1 + \frac{3}{n} v_3$

$\dots$

$v_{n-1} = \frac{2}{n} v_{n-2} + v_n$

$v_n = \frac{1}{n} v_{n-1}$

$$\underline{\underline{v_i = \frac{n-i+1}{n} v_{i-1} + \frac{i+1}{n} v_{i+1}}}$$

PRE $i = 1, \dots, n-2$

$\underline{\underline{v_0 = \frac{1}{n} v_1}}, \quad \underline{\underline{v_n = \frac{1}{n} v_{n-1}}}$

VYJDE $\boxed{v_i = v_0 \cdot \binom{n}{i}}$

$X \sim Bi(n, p)$

$EX = np$

$\text{var}\, X = np(1-p)$

$$v_0 = v_0$$
$$v_1 = \underline{\underline{n v_0}}$$
$$v_2 = \frac{n}{2}(v_1 - v_0) = \underline{\underline{\frac{n(n-1)}{2} v_0}}$$
$$v_3 = \frac{n}{3} v_2 - \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{n} v_1 = \frac{n}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} v_0 - \frac{n}{3} \cdot (n-1) v_0 =$$
$$= \frac{n}{3} \cdot (n-1)\left(\frac{n}{2} - 1\right) v_0 = \underline{\underline{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} v_0}}$$

...

PRÍKLAD: $E_i \begin{cases} \to E_{i+1} & p \\ \to E_{i-1} & q = 1-p \end{cases}$ $\quad E_0 \begin{cases} \to E_1 & p \\ \to E_0 & q \end{cases}$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \\ 0 & q & 0 & p & \\ & \cdots & \ddots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P} = \mathbb{P}^T$$

$$v_0 = q v_0 + q v_1$$
$$v_1 = p v_0 + q v_2$$
$$v_2 = p v_1 + q v_3$$
$$\cdots$$
$$v_i = p v_{i-1} + q v_{i+1}$$
$$\cdots$$

PRE AKÉ HODNOTY p EXISTUJE STAC. ROZDELENIE?

a) $p > \frac{1}{2}$ NEEXISTUJE

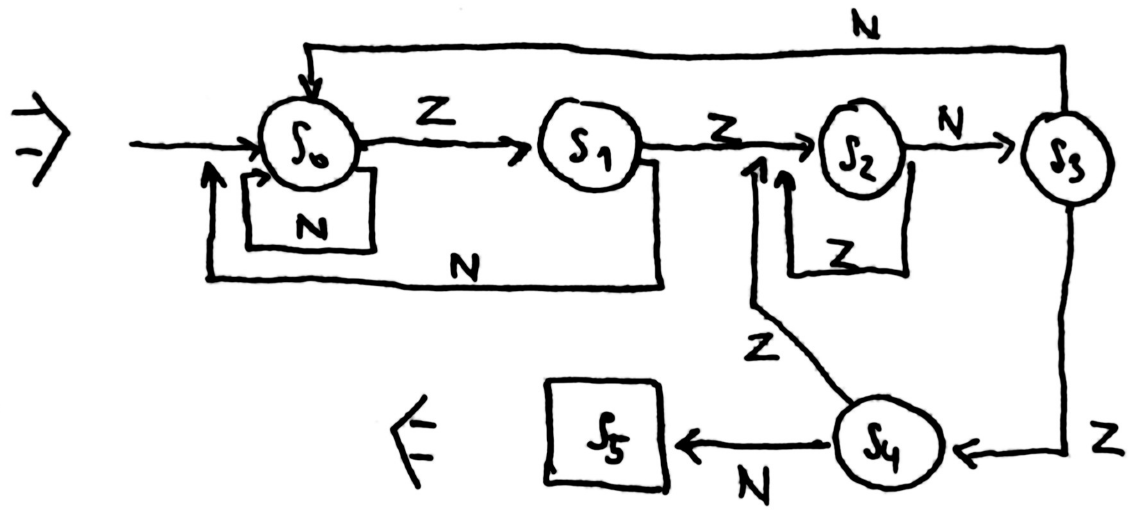
b) $p < \frac{1}{2}$ EXISTUJE

c) $p = \frac{1}{2}$??

15.10.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

PRÍKLAD: ZZNZN



MÁM MINCE 1, 2, 3, 4, 5, 6
KOĽKÝMI SPÔSOBMI MOŽNO ZAPLATIŤ SUMU k

$$\prod_{i=1}^{6}(1+x^i) = \ldots + [\underline{\underline{\quad}}]\cdot x^k + \ldots$$

ALEBO $$\prod_{i=1}^{6}(1+y x^i) = y^1(x+x^2+\ldots+x^6) +$$

$$+ y^2(x^3+2x^4+\ldots) + \ldots$$

POUŽIJEM 2 MINCE

$$S_i = \sum_j P_j^{(i)} x^j$$

$i = 0, 1, \ldots, 5$

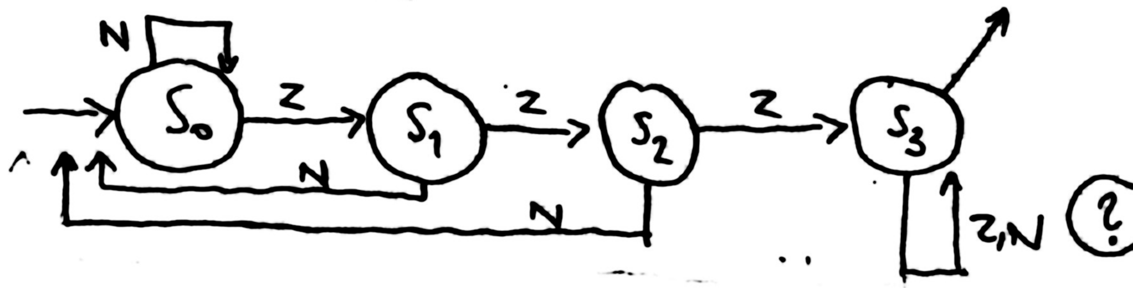
$P_j^{(i)}$ PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE REŤAZEC DĹŽKY j NÁS DOSTANE DO STAVU i

PLATÍ: $S_0 = 1 + N.S_0 + N.S_1 + N.S_3$
$S_1 = Z.S_0$
$\ldots$
$S_5 = N.S_4$

$Z \equiv px$
$N \equiv qx$

S_i SÚ NEZNÁME VYTVÁRAJÚCE FUNKCIE

PRÍKLAD: ZZZ



$$S_0 = 1 + NS_0 + NS_1 + NS_2$$
$$S_1 = ZS_0$$
$$S_2 = ZS_1$$
$$S_3 = ZS_2$$

$$Z = px$$
$$N = qx$$

VYJDE:

$$\Rightarrow \quad S_3 = \frac{Z^3}{1 - N - NZ - NZ^2} = \frac{p^3x^3}{1 - qx - pqx^2 - p^2qx^3}$$

$$\frac{p^3}{\underbrace{1-(1-p)-p(1-p)-p^2(1-p)}_{p-p+p^2-p^2+p^3 = p^3}} = 1 \quad \checkmark \text{OK}$$

22.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

$T \sim \{f_n\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad F(x) = \sum_i f_i x^i$

$f_n \equiv$ PRAVDEPODOBNOSŤ PRVÝCH NÁVRATOV

AK $\sum f_n < 1 \Rightarrow P(T = +\infty) \overset{def}{:=} 1 - f$

KEĎ ŠTUDUJEME r-TÉ NÁVRATY : NÁH. VEL. T,
$T_1, T_2, \dots, T_r$ NEZÁVISLÉ $\sim \{f_n\}$

$T^{(r)} = T_1 + \dots + T_r$ S VYTVÁRAJÚCOU FCIOU. $(F(x))^r$

TENTO PRÍSTUP (M.J.) UKÁŽE MOŽNOSŤ
AKO PRAVDEPODOBNOSŤ $f_n^{(r)}$ APROXIMOVAŤ
POMOCOU CENTRÁLNEJ LIMITNEJ VETY.

VETA: MAJME TRVALÝ NEPERIODICKÝ REKUR. JAV $\mathcal{E}$.
POTOM $\lim_{n \to \infty} u_n = \begin{cases} 1/\mu & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$

$\mu = \sum_i i f_i$ STREDNÁ HODNOTA PRVÝCH NÁVRATOV

PRE TRVALÝ PERIODICKÝ REKUR. JAV $\mathcal{E}$ PLATÍ :

$$\lim_{n \to \infty} u_{n\lambda} = \begin{cases} 1/\mu & \mu < \infty \\ 0 & \mu = \infty \end{cases}$$

> VETA : MAJME TRVALÝ REKURENTNÝ JAV,
> NECH $ET_1 = \mu < \infty$, $\operatorname{var} T_1 = \sigma^2 < \infty$.
> OZNAČME N_n : POČET VÝSKYTOV $\mathcal{E}$ V ČASE n.

$$\boxed{\text{POTOM} \quad N_n \sim N\left(\frac{n}{\mu}, \frac{n\sigma^2}{\mu^3}\right) \quad \text{PRE } n \to \infty . \qquad \boxed{[N_n \geq r] \equiv [T^{(r)} \leq n]} \quad \text{KĽÚČOVÝ KROK}}$$

$$ET^{(r)} = r\,ET_1 = r\mu$$
$$\operatorname{var} T^{(r)} = r \operatorname{var} T_1 = r\sigma^2 \Rightarrow \frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{\sigma^2 r}} \sim N(0,1)$$

<u>CLV</u>: $P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}} \leq x\right) \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

$$P(N_n \geq r) = P\Bigg(\underbrace{\frac{N_n - \frac{n}{\mu}}{\sqrt{\frac{n\sigma^2}{\mu^3}}}}_{N^*} \geq \underbrace{\frac{r - \frac{n}{\mu}}{\sqrt{\frac{n\sigma^2}{\mu^3}}}}_{RHS = x}\Bigg) =$$

$$= P(N^* \geq RHS)$$

POLOŽME $x = \left(r - \frac{n}{\mu}\right) / \sqrt{\frac{n\sigma^2}{\mu^3}} \Rightarrow r = \frac{n}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{n}{\mu}}$

$$\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{\sigma^2 r}} \sim N(0,1) \qquad P\left(T^{(r)} \leq n\right) = P\left(\frac{T^{(r)} - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}} \leq \frac{n - r\mu}{\sqrt{r\sigma^2}}\right)$$

$$\frac{n - \frac{n}{\mu}\cdot\mu - \mu \cdot \frac{x\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{n}{\mu}}}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{n}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu}\sqrt{\frac{n}{\mu}}\right)}} = \frac{-x\sqrt{\frac{n}{\mu}}}{\sqrt{\frac{n}{\mu} + \cdots}} \xrightarrow[n \to \infty]{} -x$$

$\square$

22.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

PRÍKLAD: ξ .. NASTALO r ZDAROV ZA SEBOU

$$p^r = u_n + p\,u_{n-1} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1}$$

$$\rightsquigarrow \quad U(x) = \frac{1 - x + q p^r x^{r+1}}{(1-x)\left(1-(px)^r\right)}$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{U(x)} = \frac{(px)^r (1-px)}{1 - x + q p^r x^{r+1}}$$

$$ET_1 = F'(1) = \dots = \underline{\underline{\frac{1-p^r}{q p^r}}}$$

$$\operatorname{var} T_1 = F''(1) + F'(1) - (F'(1))^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{q^2 p^{2r}} - \frac{2r+1}{q p^r} - \frac{p}{q^2}}}$$

DOSAĎME: $r = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mu = 14$, $\sigma^2 = 142$

$n = 2800$, $P(175 \leq N_{2800} \leq 225) \cong 0{,}95$

PRÍKLAD: NÁVRATY DO NULY V NÁHODNEJ PRECH.

$u_{2n+1} = 0, \quad u_{2n} = \binom{2n}{n} (pq)^n \rightsquigarrow U(x)$

$\rightsquigarrow F(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ (VIĎ OBECNÁ BIN. VETA)

AK $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ TRVALÝ JAV, NULOVÝ

AK $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ PRECHODNÝ JAV

$$P(N_n \geq r) = P(T^{(r)} \leq n)$$

LEMMA: $X \sim (j, p_j)$, $r_j = P(X \leq j)$ DISTRIBUT. FCIA. N.V. X

$$\underbrace{\sum_j r_j x^j}_{\text{VYTVÁR. FCIA. } r_j} = r_0 x^0 + r_1 x^1 + r_2 x^2 + \dots$$

$r_j = p_0 + p_1 + \dots + p_j$

$$= p_0 x^0 +$$
$$p_0 x^1 + p_1 x^1 +$$
$$p_0 x^2 + p_1 x^2 + p_2 x^2 +$$
$$\dots$$
$$= p_0 (1 + x + x^2 + \dots) + p_1 x^1 (1 + x + x^2 + \dots) + \dots$$
$$= \frac{1}{1-x} (p_0 + p_1 x^1 + \dots).$$

TJ. $\boxed{R(x) = \frac{P(x)}{1-x}.}$

22.10.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

$$\boxed{EN_n = \sum_{r=1}^{\infty} P(N_n \geq r) = \sum_{r=1}^{\infty} P(T^{(r)} \leq n)}$$

VYTVÁRAJÚCA FCIA $T^{(r)}$ JE $(F(x))^r$ ... $\{P(T^{(r)} = n)\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow$ POSTUPNOSŤ $\{P(T^{(r)} \leq n)\}_{n=1}^{\infty}$ MÁ VYTV. FCIU. $\dfrac{(F(x))^r}{1-x}$

T.J. $\sum_{n=1}^{\infty} (EN_n) x^n = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{(F(x))^r}{1-x} = \dfrac{F(x)}{(1-x)(1-F(x))}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (EN_n) x^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} P(N_n \geq r) \right) x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} P(T^{(r)} \leq n) x^n \right) = \ldots$$

$$= \boxed{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(F(x))^r}{1-x}} =$$

NECH $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$

$a_0 = 0$, $0 \leq a_n \leq 1$, $b_n \geq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $\sum b_n < \infty$

$u_n = b_n + a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_n u_0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \{u_n\} = \{b_n\} + \{a_n\} * \{u_n\}$

TZV. <u>ROVNICA OBNOVY</u>

NÁHODNÁ PRECHÁDZKA PO PRIAMKE
VYCHÁDZAME Z NULY,
ZAUJÍMA NÁS JAV : NÁVRATY DO 10

T_1 .. PRAVDEPODOBNOSTI PRVÉHO DOSIAHNUTIA
URČITÉHO STAVU (DO 10)

$T_2, \ldots, T_r$ NEZÁVISLÉ N.V. POPISUJÚCE NÁVRATY
DO DANÉHO STAVU

u_n = P (JAV NASTAL V ČASE n) =
P ({ NIEKEDY NASTAL POPRVÝKRÁT } ∪
{ JAV $\underbrace{\text{NASTAL VO ZVYŠNOM}}$ ČASE })

∪ NIEKEDY PRVÝ NÁVRAT A NÁVRAT
VO ZVYŠKOVOM ČASE

$$T^{(r)} = \underbrace{T_1}_{\text{INÉ}} + \underbrace{T_2 + \ldots + T_r}_{\text{ROVNAKÉ}}$$ ALE NEZÁVISLÉ !

DEF. TAKÝTO REKURENTNÝ JAV NAZÝVAME
<u>REKURENTNÝ JAV S ONESKORENÍM</u>

VYUŽIJEME PRI KONŠTRUKCII <u>MARKOVOVÝCH
RETAZCOV</u> A ICH CHARAKTERIZÁCII

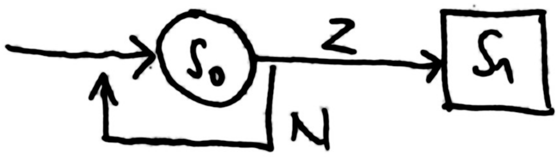
22.10.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

Geom (p) : Z

$P(X=k) = pq^{k-1} \qquad k=1,2,\dots$

$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}x^k = px \sum_{k=1}^{\infty} (qx)^{k-1} = \underline{\underline{\frac{px}{1-qx}}}$



$\Omega = \{ \overset{\omega_1}{Z}, \overset{\omega_2}{NZ}, \overset{\omega_3}{NNZ}, NNNZ, \dots \}$

$S_0 = 1 + NS_0 \qquad Z = px \qquad P(\omega_i) = P(\underbrace{NN\dots N}_{i-1}Z)$

$S_1 = ZS_0 \qquad N = qx$

$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{Z}{1-N} = \underline{\underline{\frac{px}{1-qx}}}$

PRÍKLAD: ZZ

$\Omega = \{ ZZ, NZZ, NNZZ, \dots, N\dots NZZ,$
$ZNZZ, ZNNZZ, \dots, ZN\dots NZZ,$
$\dots \}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-3} N ZZ$

$$\boxed{p^r = u_n + p\,u_{n-1} + \dots + p^{r-1} u_{n-r+1}}$$

~~$f_n = p^r (1-f_{n-1}) \dots (1-f_0)$~~ ?

$$(1-P(A))\cdot(1-P(B))$$
$$(X\setminus A)\cap(X\setminus B) =$$
$$= X\setminus(A\cup B)$$
$$1-P(A)-P(B)$$

MÁME JEDNOHLAVÝ TURINGOV STROJ
PRIPOČÍTAVA 1 V BIN. REPREZENTÁCII
$*$, 0, 1, VRACIA SA NA ZAČIATOK.
AKÝ JE STREDNÝ POČET OPERÁCIÍ, KT.
K TOMU POTREBUJE ? AKÝ JE ROZPTYL

USEKNUTIE GEOM. ROZDELENIA

$$X \sim Geom(p) \qquad P(X=k) = p\,q^{k-1} \qquad k=1,2,\dots$$

PRE $k=1,2,\dots n$, [T.J. VIEME, ŽE NASTAL $X\in\{1,\dots,n\}$]

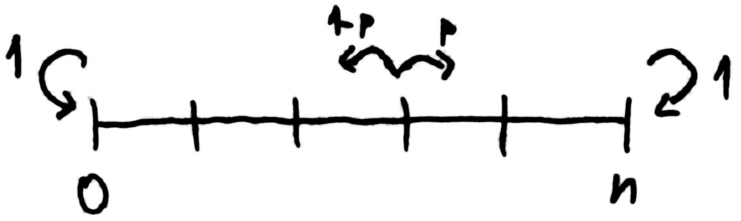
$$P(X^*=k) = \frac{P(X=k)}{P(1\leq X\leq n)} =$$

$$= \frac{pq^{k-1}}{\sum_{j=1}^{n} p\,q^{j-1}} = \frac{pq^{k-1}}{p\cdot\frac{1+q^n}{1-q}} = \frac{p\,q^{k-1}}{1-q^n}$$

$$EX = \frac{p+q}{p} \qquad \text{PRE } p=q=\tfrac{1}{2} \text{ JE } EX=2$$

22.10.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY



$0 \leq i \leq n$

$P_i = P($ PRIJDEM DO HRY S i KORUNAMI A VYHRÁM VŠETKO $)$

AKO DLHO TO BUDE V PRIEMERE TRVAŤ ?

$P_i = p \cdot P_{i+1} + q \cdot P_{i-1}$

$P_0 = 0$

$P_n = 1$

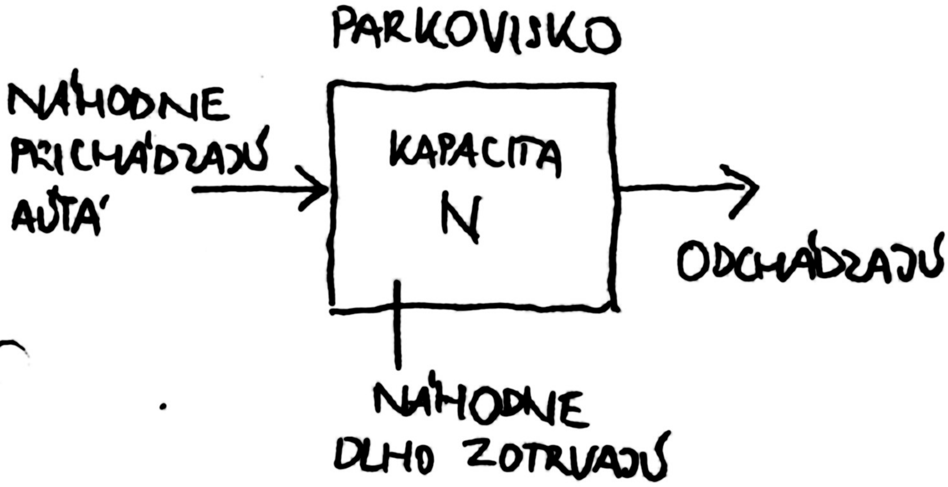
PODMIEŇOVANIE + VETA O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOSTI

VYJDE: $\underline{\underline{p_i = \frac{i}{n}}}$ PRE $p = q = \frac{1}{2}$

19.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVDEPODOBNOSTNÉ METÓDY

PRÍKLAD:



$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0, \ \lambda > 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$

EXP. ROZDELENIE NEMÁ PAMÄŤ

$$P(X > x+y \mid X > x) =$$

$$= \frac{P(X > x+y \cap \cancel{X > x})}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = \underline{\underline{P(X > y)}}.$$

VETA: MEDZI SPOJITÝMI N.V. JE EXPONENC. ROZDELENIE JEDINÉ, KTORÉ NEMÁ PAMÄŤ.

DOKAZ: $\frac{G(x+y)}{G(x)} = G(y) \equiv$

$$G(x+y) = G(x) \cdot G(y).$$

VTEDE $G(x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. $\square$

MEDZI DISKRÉTNYMI N. V. EXISTUJE IBA GEOMETRICKÉ ROZDELENIE AKO ROZDELENIE BEZ PAMÄTI

EXISTUJE VZŤAH $Ge(p) \leftrightarrow Exp(\lambda(p))$

DEF.: INTENZITA (PRÚD)

P(OKAMŽITÉHO ZLYHANIA) (*)

X.. DOBA DO KONCA ŽIVOTA ...

$(*) = P(x \leq X < x+\Delta \mid X > x)$, KDE Δ JE MALÉ

$$= \frac{P(x \leq X < x+\Delta \cap X > x)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{P(X > x)} \cdot \frac{\Delta}{\Delta} = \Delta \cdot \frac{\frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta}}{1 - F(x)}$$

PRE $\Delta \to 0$ JE $(*) = \underline{\underline{\Delta \cdot \frac{f(x)}{1 - F(x)}}}$

19.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

DEF.: MAJME N.V. X (SPOJITÚ) S HUSTOTOU $f(x)$ A DIST. FUNKCIOU $F(x)$. POTOM INTENZITOU ROZUMIEME

$$\boxed{\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}}$$

DEF.: PRE DISKRÉTNU N.V. (x_i, p_i) $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ JE INTENZITA

$$\boxed{\lambda(i) = \frac{p_i}{\sum_{j \geq i} p_j}}$$

PRE $\mathrm{Exp}(\lambda)$:

$$\lambda(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})} = \lambda$$

$\Rightarrow$ λ JE INTENZITA, (TJ. INTENZITA PORÚCH) JE KONŠTANTNÁ.

$$EX = \int_0^\infty f(x)\,dx = \dots = \frac{1}{\lambda}$$

$$\operatorname{Var} X = \dots = \frac{1}{\lambda^2}$$

INTENZITA = KOĽKO UDALOSTÍ NASTANE ZA JEDNOTKU ČASU (TJ. PORÚCH, ...) !!

$\boxed{\text{PRÍKLAD: PARKOVISKO}}$

STAV SYSTÉMU, E_i, JE POČET ÁUT NA PARKOVISKU.

$i = 0, 1, \dots, N$.

$$\langle t, t+\Delta) \; : \; E_i \to \begin{cases} E_{i+1} \\ E_{i-1} \\ E_i \\ E_{i\pm j} \quad i>1 \end{cases}$$

Δ JE MALÉ

PREDPOKLADAJME, ŽE:

$$P(\langle t, t+\Delta) \; E_i \to E_{i+1}) = \lambda_i \Delta + o(\Delta)$$
$$\text{— " —} \quad E_i \to E_{i-1} = \mu_i \Delta + o(\Delta)$$
$$\text{— " —} \quad E_i \to E_i = 1 - \lambda_i \Delta - \mu_i \Delta + o(\Delta)$$
$$\text{— " —} \quad E_i \to E_{i\pm j} = o(\Delta)$$

⚠ AK ZABUDNEME NA ČLEN $o(\Delta)$, TAK VLASTNE PREDPOKLADÁME, ŽE DOBY MEDZI UDALOSŤAMI SA RIADIA EXPONENCIÁLNYM ROZDELENÍM S PARAMETROM λ_i, RESP. μ_i.

TOMUTO MODELU SA HOVORÍ

<u>OBECNÝ MODEL ZRODU A ZÁNIKU</u>

$P_n(t)$ .. PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE SYSTÉM JE V ČASE t V STAVE E_n.

19.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

Δ MALÉ : $P_n(t+\Delta)$

ČAS t → ČAS $t+\Delta$

$$\begin{array}{lcl} E_{n+1} & \searrow & \\ E_n & \longrightarrow & E_n \\ E_{n-1} & \nearrow & \\ E_{n\pm j} \quad j>1 & \uparrow & \end{array}$$

VETA O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOSTI

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta) = {} & P_n(t)\left(1-\lambda_n\Delta-\mu_n\Delta+o(\Delta)\right) \\ & + P_{n-1}(t)\cdot\left(\lambda_{n-1}\Delta+o(\Delta)\right)+ \\ & + P_{n-1}(t)\cdot\left(\mu_{n+1}\Delta+o(\Delta)\right) + o(\Delta) \end{aligned}$$

STAV E_0 :

ČAS t → ČAS $t+\Delta$

$$\begin{array}{lcl} E_1 & \searrow & \\ E_0 & \longrightarrow & E_0 \\ E_j \quad j>1 & \uparrow & \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta) = {} & P_0(t)\cdot\left(1-\lambda_0\Delta+o(\Delta)\right)+ \\ & + P_1(t)\cdot\left(\mu_1\Delta+o(\Delta)\right) + o(\Delta) \end{aligned}$$

POČIATOČNÉ PODMIENKY :

$$P_i(0)=1, \quad P_j(0)=0 \quad \forall j\neq i$$

$\Rightarrow$

$$P_0(t+\Delta) - P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)\Delta + P_0(t)\,o(\Delta) + P_1(t)\mu_1\Delta + P_1(t)\,o(\Delta) + o(\Delta)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta) - P_0(t)}{\Delta} = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1 + \underbrace{(\dots)\frac{o(\Delta)}{\Delta}}_{\to 0}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{P_0(t+\Delta) - P_0(t)}{\Delta} = \underline{\underline{-\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1}}$$

PODOBNE:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{P_n(t+\Delta) - P_n(t)}{\Delta} = -\lambda_n P_n(t) - \mu_n P_n(t) + \underline{\underline{+ P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}}}$$

NÁS BUDE ZAUJÍMAŤ SITUÁCIA PODOBNÁ STACIONÁRNEMU ROZDELENIU, TJ. ČO SA DEJE PRI $t \to \infty$.

TOTO DOSTANEME TAK, ŽE L'S POLOŽÍME $= 0$ A $P_n(t)$ NAHRADÍME PRSTMI. p_n ($\equiv$ LIMITNÉ PST.)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1} + \lambda_{n-1}p_{n-1} \\ 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ &(+\text{ POČIATOČNÉ PODMIENKY}) \end{aligned}\right\}$$ HĽADÁME STACIONÁRNE ROZDELENIE

19.11.2008 Ue
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

EXPLICITNÉ RIEŠENIE SÚSTAVY $\exists$ PRE NIEKTORÉ ŠPECIÁLNE PRÍPADY, NAPR. $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$, ALEBO $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$, ... APOD.

POZNÁMKA: LINEÁRNY MODEL VZNIKU A ZÁNIKU

$\equiv$ $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$

MÁME n PRVKOV (KVASINKY)
KAŽDÝ PRVOK SA BUĎ ROZDELÍ, ZOMRE ALEBO ZOTRVÁ

$$\begin{cases} \text{ROZDELÍ} & \lambda\Delta + o(\Delta) \\ \text{ZOTRVÁ} & 1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + o(\Delta) \\ \text{ZANIKNE} & \mu\Delta + o(\Delta) \end{cases}$$

$$E_i \longrightarrow E_{i+1} : \binom{n}{1}(\lambda\Delta + o(\Delta))(1 - \lambda\Delta \overset{-\mu\Delta}{} + o(\Delta))^{n-1}$$

$$(1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + o(\Delta))^{n-1} = 1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + o(\Delta) + \Delta^2(\dots)$$

$$\Rightarrow \binom{n}{1}(\lambda\Delta + o(\Delta))(1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + o(\Delta))^{n-1} =$$

$$= \boxed{n\lambda\Delta} + \Delta^2(\dots) + o(\Delta)(\dots)$$

$$E_i \to E_{i+2} : \binom{n}{2}(\lambda\Delta + o(\Delta))^2(1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + o(\Delta))^{n-2}$$

$$= \dots = o(\Delta)$$

VETA: MAJME MODEL LINEÁRNEHO RASTU A ZÁNIKU, TJ. $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = n\mu$, <u>NECH $\mu=\lambda$</u>

POTOM:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1+\lambda t)^{n+1}} \quad \text{PRE } n \geq 1$$

$$P_0(t) = \frac{\lambda t}{1+\lambda t}$$

$$\underline{\underline{P_0(t) \equiv P(\text{VYMRETIE POPULÁCIE})}}$$

PRE $\lambda \neq \mu$ JE

$$P_n(t) = (1-A(t))(1-B(t))(B(t))^{n-1}$$

$$P_0(t) = A(t)$$

KDE $\underline{\underline{A(t) = \frac{\mu\left(e^{(\lambda-\mu)t}-1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}}}$, $\underline{\underline{B(t) = \frac{\lambda\left(e^{(\lambda-\mu)t}-1\right)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}}}$

DÔKAZ: POMOCOU PARCIÁLNYCH DIF. ROVNÍC A VYTVÁRAJÚCICH FUNKCIÍ

PODOBNÁ VETA PLATÍ A) PRE PRÍPAD:

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n\mu$$

19.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

λ .. INTENZITA VZNIKU
μ .. INTENZITA ZÁNIKU

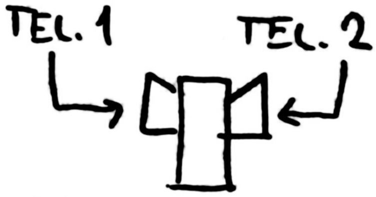
PRE $\mu > \lambda$ .. DÁVA TÁ VETA ZMYSEL ?

NAPR. $P_0(t)$ PRAVDEPODOBNOSŤ VYMRETIA POPULÁCIE

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}{\lambda \cdot e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} = \underline{\underline{1}}$$

PRE $\mu = \lambda$ JE $\lim_{t\to\infty} P_0(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{1+\lambda t} = \underline{\underline{1}}$

PRÍKLAD: TELEFÓNNA DVOJBUDKA, 1 FRONTA



E_0 .. $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = \lambda$
E_1 .. $\mu_1 = \mu$, $\lambda_1 = \lambda$
E_2 .. $\mu_2 = 2\mu$, $\lambda_2 = \lambda$
E_3 ≡ 1 ČLOVEK VO FRONTE
⋮ ... ...
E_{N+2} ≡ FRONTA MAX. DĹŽKY

1 FRONTA
MAX. N ĽUDÍ

→ E_i .. $\mu_i = 2\mu$, $\lambda_i = \lambda$ $\quad i = 3 \ldots N+1$
E_{N+2} .. $\mu_{N+2} = 2\mu$, $\lambda_{N+2} = 0$

PARKOVISKO S FRONTOU JE PODOBNE, AŽ NA

$$\mu_i = i \cdot \mu, \quad \lambda_i = \lambda \quad \underbrace{, \lambda_N = 0}_{\text{V PRÍPADE KONEČNEJ KAP.}}.$$

POKIAĽ UVAŽUJEME AJ FRONTU, TAK OD URČITÉHO i_0 JE $\mu_i = i_0 \cdot \mu$. !!!

POLOŽME $p_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t)$

OTÁZKA: JE $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ ROZDELENIE PRAVDEPODOBNOSTI ?

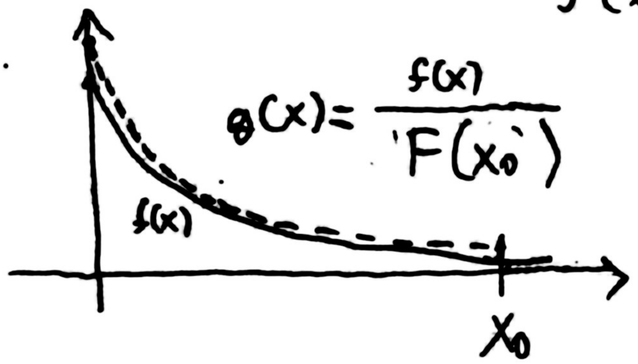
ÁNO, TJ. $\sum p_n = 1$

ČO ZNAMENÁ POJEM $\boxed{\text{USEKNUTÉ ROZDELENIE}}$?

(A) PRE SPOJITÚ N.V. X

$X \sim Exp(\lambda)$, $\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$

$\qquad\qquad\qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$



$g(x) = \dfrac{f(x)}{F(x_0)}$ $\qquad G(x) = \dfrac{1}{F(x_0)} F(x)$

(B) DISKRÉTNA N.V.

$q_i = \dfrac{p_i}{\sum_{j=0}^{i_0} p_j}$

2/2

19.11.2008 We
PETER ČERNO

EX: NMAI060 PRAVD. METÓDY

PRÍKLAD: MAJME VÝROBKY, KTORÉ SA NEJAK KAZIA
MAJME OPRAVÁROV

N .. VÝROBKOV
A .. OPRAVÁROV

$$N \geq A \geq 1$$

OZNAČME E_i .. POČET STROJOV V PORIADKU .. $0, \dots, N$

$$E_i \to E_{i-1} \qquad i\mu \qquad i = 0, 1, \dots, N$$

$$E_i \to E_{i+1} \qquad (N-i)\lambda \qquad i = N-A, \dots, N-1$$

$$A\lambda \qquad i = 0, 1, \dots, N-A$$

$$E_N \to E_{N-1} \qquad N\mu$$

$$E_N \to \qquad 0$$

26.11.2008 Me
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

PRÍKLAD : TELEFÓNNA ÚSTREDŇA
S NEKONEČNE VEĽA LINKAMI

$\lambda_n = \lambda$ ĽUBOVOĽNÝ HOVOR KONČÍ
S PRAVD. $\mu h + o(h)$ $\updownarrow$

$\mu_n = n\mu$ HOVOR PRÍDE S PRAVD. $\lambda h + o(h)$

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

$$P_n'(t) = -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \qquad n \geq 1$$

USTÁLENÝ STAV $\Rightarrow$

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + n\mu) p_n + (n+1)\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$n = 1 : \quad 0 = -(\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$n = 2 : \quad 0 = -(\lambda + 2\mu) p_2 + 3\mu p_3 + \lambda \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$\Rightarrow \dots \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{n!} p_0$$

$p_n = P($ V NEKONEČNE DLHOM HORIZONTE $\equiv$ V USTÁLENOM STAVE BUDEME V STAVE $E_n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}}_{e^{\lambda/\mu}} = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

LIMITNÉ ROZDELENIE JE POISSONOVO S PARAMETROM λ / μ.

$X \sim Po(\lambda)$

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \qquad n \geq 1$$

$EX = \lambda$, $\operatorname{var} X = \lambda$

REALIZÁCIE SA S PRST. 0,999 BUDÚ POHYBOVAŤ V INTERVALE $\boxed{\lambda \pm \sqrt{3\lambda}}$.

AKO SA DOSTANEM K λ, ČI μ?

MERIAM DĹŽKY OBSLUHY

$X_1, \dots, X_n$, X_i NEZÁVISLÉ $\sim Po(\mu)$ } PREDPOKLAD

METÓDA MV (MAXIMÁLNEJ VIEROHODNOSTI)

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \boxed{\prod_{i=1}^{n} P_i(\mu)} \qquad X_i \sim P_0(\mu)$$

KEĎ MÁME K DISPOZÍCII DATA (POZOROVANIA), PRE AKÉ μ SA JEDNÁ O NAJPRAVD. VÝSLEDOK

26.11.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$$\underset{\mu}{\operatorname{argmax}} \left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\mu} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} \right)$$

x_i .. SÚ NAPOZOROVANÉ ÚDAJE

HĽADÁME μ, PRE KTORÉ JE DOSIAHNUTÉ MAXIMUM

PRÍKLAD: $X \sim Alt(p)$

$P(X=0) = q, \quad P(X=1) = p = 1-q$

T.J. $p^X (1-p)^X$

$$\underset{\mu}{\operatorname{argmax}} \quad e^{-n\mu} \cdot \frac{\mu^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

PO ZLOGARITMOVANÍ:

$$-n\mu + \sum x_i \ln \mu - \cancel{\text{CONST.}}$$

PO ZDERIVOVANÍ $-n + \sum x_i \frac{1}{\mu} = 0$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum x_i$$

PRÍMA!!

$E\hat{\mu} = \frac{1}{n} n\mu = \mu$ $\quad$ $\hat{\mu}$ ODHAD INTENZITY PRÍCHODU

$n\hat{\mu} \sim Po(n\lambda)$

$$\Rightarrow \operatorname{var} \hat{\mu} = \frac{1}{n^2} n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

ČEBYŠEV $\Rightarrow$ KONZISTENTNOSŤ

POČET UDALOSTÍ ZA ČAS T SA RIADI POISSONOVÝM ROZDELENÍM $Po(\lambda T)$

PARKOVISKO PRED MFF

KONEČNÁ KAPACITA, NEMÔŽE SA TVORIŤ FRONTA

$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n\mu \quad n = 1, \dots, N$

OPÄŤ VYJDE $\quad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0$

$\sum_{n=0}^{N} p_n = 1 \Rightarrow p_0 = \left(\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \right)^{-1}$

TOTO UŽ NIE JE POISSONOVE ROZDELENIE,

ALE USEKNUTÉ ROZDELENIE

PARKOVISKO + FRONTA

KONEČNÁ KAPACITA, FRONTA DĹŽKY $\leq K$

$\lambda_n = \lambda$

$\mu_n = n\mu \quad n = 1, \dots, N$

$\mu_n = N\mu \quad n = N+1, \dots, N+K$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \cdot p_0 \quad n = 1, \dots, N$$

PRE $n = N$

$$0 = -(\lambda + N\mu) p_{N+1} + N\mu\, p_{N+2} + \lambda p_{N-1}$$

07.01.2009 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$Po(\lambda)$

$$P(X=i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \quad i=0,1,\dots$$

(1) AKO ODHADNÚŤ λ ?

METÓDA MOMENTOV

$EX = \lambda$

KONZISTENTNÝ ODHAD EX JE $\bar{X}_n$

$$P(|\bar{X}_n - \lambda| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

MAXIMÁLNE VIEROHODNÝ ODHAD

AK MÁME POZOROVANIE Z DANEJ DISTRIBÚCIE, TAK SA SNAŽÍME NÁJSŤ TAKÚ HODNOTU PARAMETROV, PRE KTORÉ DANÉ POZOROVANIA TVORIA NAJPRAVDEPODOBNEJŠIU REALIZÁCIU

$f(x_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$ MARGINÁLNA HUSTOTA

ZDRUŽENÁ HUSTOTA $\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod x_i!}$

NAJPRAVDEPODOBNEJŠIE λ ... $\prod f(x_i)$ JE MAXIMÁLNE

VÝSLEDOK SA NEZMENÍ POUŽITÍM RASTÚCEJ TRANSFORMÁCIE

$$\underset{\lambda}{\arg\max} \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$-\lambda n + (\sum x_i) \ln \lambda + \log \prod x_i! \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$-n + \frac{1}{\lambda} \sum x_i + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum x_i}$$

(2)

AKÉ JE ROZDELENIE $\hat{\lambda}$?

$$n\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Po(n\lambda)$$ PRESNÉ ROZDELENIE

$$A(x) = x^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \underline{\underline{e^{-\lambda} e^{\lambda x}}}$$

$$A_{x+y} = A_x \cdot A_y = e^{-\lambda_1 + \lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 + \lambda_2 x} =$$

$$= \underline{\underline{e^{-(\lambda_1+\lambda_2) + (\lambda_1+\lambda_2)x}}}$$

NAVIAC SÚČET MÔŽEME APROXIMOVAŤ NORMÁLNYM ROZDELENÍM (CLV)

$$\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \sim N(0,1)$$

(3) $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ X_i NEZÁVISLÉ, $X_i \sim N(0,1)$

χ_n^2 JE UMELÉ ROZDELENIE, POUŽÍVA SA AK ODHADUJEME ROZPTYL

$\chi_n^2 = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\Gamma(a,c) + \Gamma(b,c) = \Gamma(a+b,c)$

EXISTUJE PRIAMY VZŤAH MEDZI $Po(\lambda)$ A χ^2

AKO NÁJSŤ INTERVALOVÝ ODHAD λ ?

$[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, $\left.\begin{array}{l}\underline{\lambda} = f_0(x_i, i=1..n) \\ \overline{\lambda} = f_1(x_i, i=1..n)\end{array}\right\}$ HRANICE TOHTO INTERVALU SÚ NÁHODNÉ

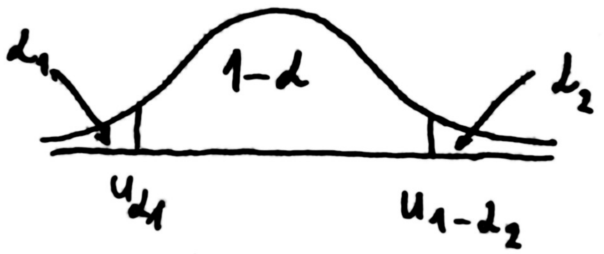
$P(\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}) \geq 1-\alpha$ α JE MALÉ KLADNÉ

07. 01. 2009 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

AKO NÁJST $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$



ČASTO SA VOLÍ $\alpha_1 = \alpha_2$, KEĎ CHCEM INTERVAL NAJKRATŠEJ DĹŽKY

$$\boxed{P\left(u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1-\alpha}$$

NIE JE ĽAHKÉ PREJSŤ K

$$P(\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda})$$

RIEŠENIE I : NEZNÁMU λ NAHRADÍM ODHADOM

$$u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n \bar{X}_n}} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \text{RIEŠENIE I}$$

VETA: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, g JE DOSTATOČNE HLADKÁ FUNKCIA

$$\Rightarrow \quad g(X) \sim N(g(\mu), \; g'^2(\mu)\,\sigma^2)$$

DÔKAZ: $g(X) = g(\mu) + (X-\mu)\dfrac{g'(\mu)}{1!} + R$

$Eg(X) = g(\mu)$, $\operatorname{var} g(X) = g'^2(\mu) \cdot \sigma^2$ ...

VEZMIME $g(x)=\sqrt{x}$ $\qquad \dfrac{\bar{X}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \sim N(0,1)$

POTOM

$$\sqrt{\bar{X}_n} \sim N\left(\sqrt{\lambda},\ \frac{\lambda}{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= N\left(\sqrt{\lambda},\ \frac{1}{4n}\right)$$

$n\bar{X}_n \sim N(n\lambda, n\lambda)$

$\bar{X}_n \sim N(\lambda, \frac{\lambda}{n})$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{\bar{X}_n}-\sqrt{\lambda}}{1/4n} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightsquigarrow \underline{\lambda}^*,\ \bar{\lambda}^*$$

$\rightarrow$ RIEŠENIE II.

POZNÁMKA TESTY DOBREJ ZHODY V PRÍPADE POISSONOVHO ROZDELENIA NESMIEME VZIAŤ KOLMOGOROV-SMIRNOVOV ODHAD, ALE MUSÍME POUŽIŤ PRÍSTUP FREKVENČNÝ (PEARSONOV) $\equiv$ KLASICKÝ TEST DOBREJ ZHODY

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$$

JOHNSON - KOTZ: DISTRIBUTIONS IN STATISTICS; WILEY

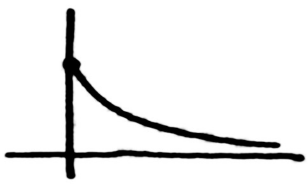
07.01.2009 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad EX = \lambda, \; var\, X = \lambda^2$

$f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$ $\quad x > 0, \; \lambda > 0$

$F(x,\lambda) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$



NEMÁ PAMÄŤ, MÁ KONŠTANTNÚ INTENZITU PORÚCH $= \frac{1}{\lambda}$.

(1) METÓDA MOMENTOV $\quad Exp(\lambda) \equiv \Gamma(1,\lambda)$

$EX = \lambda$ ODHADNEME $\overline{X}_n$,

$\hat{\lambda} = \overline{X}_n$ KONZISTENTNÝ ODHAD

(2) $\prod \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{\sum x_i}{\lambda}}$

$\log(\dots) = -n \log \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum x_i \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}$

$-\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum x_i = 0$

$\Rightarrow n\lambda = \sum x_i \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum x_i$

POMOCOU VETY O KONVOLÚCII:

$\sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

POZNÁMKA: $\chi 2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$n \hat{\lambda} \sim \Gamma(n, \lambda)$

DEF. $Z \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad x>0,\ \alpha,\beta>0)$$

(1) INFERENCIU MÔŽEME ROZBIŤ NA Γ ROZD.

(2) POUŽIJEM CLV

$$n\bar{X}_n \sim N(n\lambda, n\lambda^2)$$

$$\frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda^2}} \sim N(0,1)$$

$$u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda^2}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} \rightsquigarrow$$ DÁ SA SPRAVIŤ ODHAD $\frac{1}{\lambda}$

(1) DOPLNIŤ NA ŠTVORCE

(2) ODHADNÚŤ λ^2 V MENOVATELI POMOCOU $\bar{X}_n^2$

(3) POUŽIŤ $\sqrt{\ }$ TRANSFORMÁCIU

TDZ: MOŽNO POUŽIŤ JAK KS, TAK PTDS

POZOR! AK NEPOZNÁME λ

$\rightsquigarrow$ <u>LILIENFORSTOV TEST</u>!

AKO OTESTOVAŤ ZMENU V INTENZITE HPP?

02.12.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

H.P. BARENDREGT - LAMBDA CALCULI WITH TYPES

136-143

NÁHODNÝ PROCES

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ PSTNÝ. PRIESTOR

$\{X_t, t \in T\}$ MNOŽINA NÁHODNÝCH JAVOV, $T \subset \mathbb{R}$

DVA POHĽADY: $X_t(\omega)$ PODĽA TOHO, ČO JE PREMENNÁ

$t \in T: \quad X_t(\cdot): \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \in \Omega: \quad X_\cdot(\omega): T \to \mathbb{R}$

↳ TRAJEKTÓRIA

(HOMOGÉNNY) POISSONOV NÁH. PROCES $N_t \equiv N(t, \cdot)$

DEFINÍCIA 1: NECH SA UDALOSTI VYSKYTUJÚ V ČASE, S INTERVALMI MEDZI NASLEDUJÚCIMI UDALOSŤAMI I.I.D. (NEZÁV., ROVNAKO ROZDELENÉ) PODĽA $Exp(\lambda)$

$$Exp(\lambda) \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

ZOBERME INTERVAL $[0, t]$. POČET UDALOSTÍ V TOMTO INTERVALE OZNAČME $N(t)$.
POTOM $\{N(t), t \geq 0\}$ NAZÝVAME POISSONOV PROCES S INTENZITOU λ.

DEFINÍCIA 2: $\{N(t), t \geq 0\}$, $N(t) \in \mathbb{N}_0$

(a) $\{N(t)\}$ MÁ STACIONÁRNE NEZÁVISLÉ PRÍRASTKY

(b) $0 \leq s < t$ ... $N(t) - N(s) = \#$ UDALOSTÍ v $(s, t]$

$$P\big(N(t) - N(s) = k\big) = \frac{\exp\{-\lambda(t-s)\}}{k!}[\lambda(t-s)]^k$$

POZNÁMKA: $N(t) \sim Po(t\lambda)$

PREDPOKLADÁME $N(0) = 0$

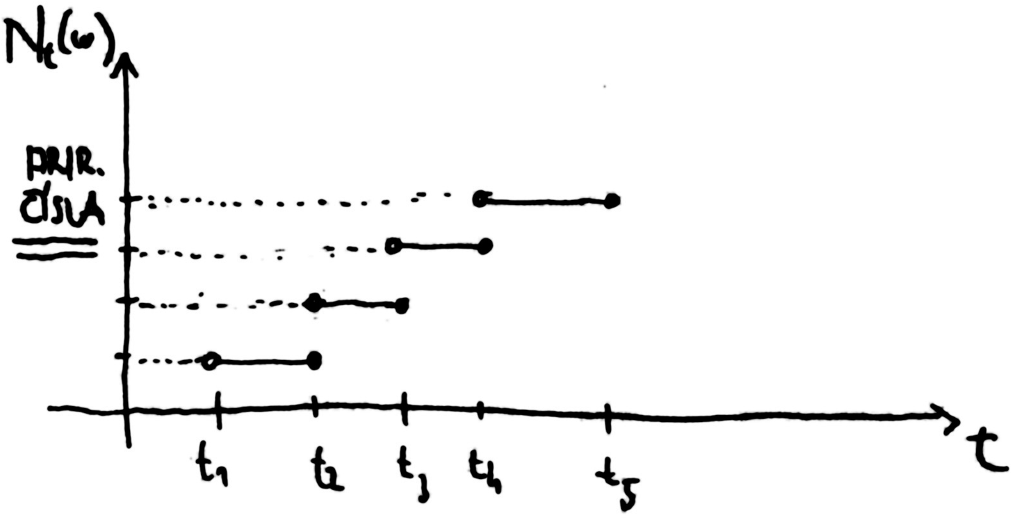
$[0, t]$ $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$

$$N(t_k) - N(t_{k-1}) \perp\!\!\!\perp N(t_{k+1}) - N(t_k)$$

$\forall h > 0$ $N(t_k) - N(t_{k-1}) \sim$

$$\sim N(t_k + h) - N(t_{k-1} + h)$$

$$EN(t) = \lambda t$$



03.12.2008 We
PETER ČERNO

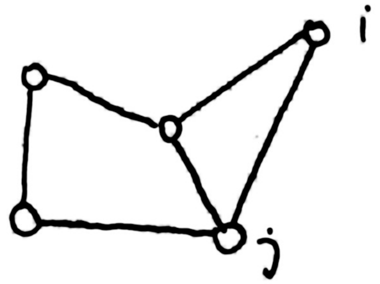
NMAI060 PRAVD. METÓDY

DEFINÍCIA 3: $\{N(t),\ t \geq 0\}$
$N(t) = \#$ UDALOSTÍ V $[0,t]$

(a) PRAVDEPODOBNOSŤ, ŽE UDALOSŤ NASTALA POČAS INTERVALU $[t, t+h)$ JE $\lambda h + o(h)$.

(b) PRAVD., ŽE VIAC UDALOSTÍ POČAS $[t, t+h)$ JE $o(h)$.

PRÍKLAD:



$p_{ij}(h)$ .. PRAVDEPODOBNOSŤ $i \to j$ ZA h ČASOVÝCH JEDNOTIEK

HOMOG. MARKOVOVSKÝ RETAZEC

VĚTA: POISSON JE HMR (TJ. p_{ij} SA NEMENIA)

$$p_{ij}(h) = P[N(t+h) = j \mid N(t) = i] =$$

$$= \begin{cases} \lambda h + o(h) & ; \quad j = i+1 \\ o(h) & ; \quad j > i+1 \\ 1 - \lambda h + o(h) & ; \quad j = i \\ 0 & \quad j < i \end{cases}$$

INTENZITY HMR ... V NAŠOM PRÍPADĚ
EM
INTENZITY POISSON

$$i \neq j : q_{ij} \overset{\text{def.}}{:=} \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} \qquad \left[\overset{j=i+1}{=} \lim_{h\to 0+} \left(\frac{\lambda h}{h} + \frac{o(h)}{h} \right) = \lambda \right]$$

AK $i=j$:

$$q_{ii} \equiv -q_i \overset{\text{def}}{:=} - \lim_{h \to 0+} \frac{1 - p_{ij}(h)}{h} \qquad \left[= 0 \quad \text{PRE } j > i+1 \right]$$

$$\left[\doteq - \lim_{h \to 0+} \frac{1 - (1 - \lambda h + o(h))}{h} \doteq -\lambda \right]$$

TJ. $q_i = \lambda$

Q .. <u>MATICA INTENZÍT</u> $\underline{Q} = \{q_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$

PRE POISSONOV (HOMOGÉNNY)

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \hline 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ \vdots & & & & \ddots \end{array}$$

POZOR! TOTO NIE JE MATICA PRECHODU, ALE <u>MATICA INTENZÍT</u>

JE VÝHODNÁ KVÔLI VÝPOČTOM

SÚČTY V RIADKOCH $= 0$

(V MATICE PRECHODU SÚ SÚČTY V RIADKOCH $= 1$)

<u>LINEÁRNY PROCES RASTU</u> (YULEOV PROCES)

- VZNIK
  INTENZITA λ
- ZÁNIK
  ?

03.12.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$[t, t+h)$

$$p_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1}\left(\lambda h + o(h)\right)\left(1 - \lambda h + o(h)\right)^{j-1}$$

$$p_{j,j+k}(h) = o(h), \quad k > 1$$

$$p_{j,j}(h) = \left(1 - \lambda h + o(h)\right)^{j}$$

INTERPRETÁCIA: BAKTÉRIE, KTORÉ SA ROZMNOŽUJÚ

10. 12. 2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

POISSONOV PROCES $N(t)$

SO SPOJITÝM ČASOM

- DÁ SA DEFINOVAŤ PRE $\forall t \geq 0$
- TRAJEKTÓRIA NIE JE SPOJITÁ (SKOKOVITÁ)
- MNOŽINA STAVOV $S = \mathbb{N}_0$

∇ HMR (HOMOGÉNNY MARKOVOV REŤAZEC)

$$P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o(h)$$
$$P[\qquad\qquad = 0] = 1 - \lambda h + o(h)$$
$$P[\qquad\qquad = ?] = o(h)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & \emptyset \\ \emptyset & -\lambda & \lambda \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

HMR STACIONÁRNY $\Leftrightarrow \pi^T Q = 0^T$

KOLMOGOROVE DIFERENCIÁLNE ROVNICE

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{p_j'(t) = -p_j(t)\, \underbrace{q_j}_{-q_{jj}}}} + \sum_{k \neq j} p_k(t)\, q_{kj}, \quad j \in S \; \text{(MN. STAVOV} \; (\mathbb{N}_0))$$

q_{kj}: Z MATICE INTENZÍT $\underset{\sim}{Q}$
INTENZITA Z k DO j

$$p_j(t) = P[N(t) = j]$$

PRE POISSONA TO BUDE VYZERAŤ TAKTO:

$$[\mathbb{P}'(t)]^T = [\mathbb{P}(t)]^T Q$$ (POZOR! NEKONEČNÉ VEKT.)

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$
$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$
$$\dots$$
$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) + \lambda p_k(t) \qquad k \geq 1$$

VYJDE $$p_j(t) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^j}{j!} \sim Po(\lambda t)$$

LINEÁRNY PROCES RASTU (YULEOV) X_t

INTERVAL $[t, t+h)$

DELENIE V POPULÁCII (VZNIK NOVÝCH JEDINCOV) NEZÁVISÍ NA INÝCH ČLENOCH POPULÁCIE

VZNIK JEDINCA ... PRAVDEP. $\lambda h + o(h)$

NEVZNIK JEDINCA ... $1 - \lambda h + o(h)$

OSTATNÉ PRÍPADY ... $o(h)$

PRAVDEPODOBNOSTI PRECHODU: (STAVY $S = \mathbb{N}_0$)

$$p_{j,j+1}(h) = \binom{j}{1}(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))^{j-1} =$$
$$= j \cdot \lambda h + o(h)$$

10.12.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$$p_{j,j+k}(h) = o(h) \quad \text{PRE } k > 1$$

$$p_{j,j}(h) = (1 - \lambda h + o(h))^j = $$
$$= 1 - j\lambda h + o(h)$$

MATICA INTENZÍT:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \end{array} \\ Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & \emptyset \\ & -2\lambda & 2\lambda & \\ & & -3\lambda & 3\lambda \\ \emptyset & & & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[\mathbb{P}'(t)]^T = [\mathbb{P}(t)]^T Q \quad \text{(KOLMOGOROV)}$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

$$\dots$$

$$\underline{\underline{p_k'(t) = \quad k\lambda p_{k-1}}}(t) - (k+1)\lambda p_k(t) \quad k \geq 1$$

LINEÁRNY PROCES RASTU ⇝
VŠEOBECNÝ PROCES RASTU

$$q_{jj} = -\lambda_j \quad , \quad q_{j,j+1} = +\lambda_j$$

(MNOŽENIA)
LINEÁRNY PROCES VZNIKU A ZÁNIKU X_t ... HMR

INTERVAL $[t, t+h)$

JEDINEC VZNIKNE S PRAVD. $\lambda h + o(h)$

VIAC ZNIKNE $o(h)$

ZANIKNE $\mu h + o(h)$

OSUDY JEDINCOV SÚ NEZÁVISLÉ

$$q_{j,j+1} = \lambda j \qquad j = 0, 1, \dots$$

$$q_{j,j-1} = \mu j \qquad j = 1, 2, \dots$$

$$q_{j,k} = 0 \qquad |j-k| > 1$$

$$q_{j,j} = -j(\lambda + \mu)$$

$$\underset{\sim}{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \emptyset \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\mu \\ \emptyset & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$p_0'(t) = \mu\, p_1(t)$$

$$p_1'(t) = -(\lambda+\mu)\, p_1(t) + 2\mu\, p_2(t)$$

...

$$p_j'(t) = \lambda(j-1)\, p_{j-1}(t) - j(\lambda+\mu)\, p_j(t) + $$
$$+ (j+1)\mu\, p_{j+1}(t) \qquad j \geq 2$$

10. 12. 2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

VŠEOBECNÝ PROCES VZNIKU A ZÁNIKU

$$q_{j,j+1} = \lambda_j$$
$$q_{j,j-1} = \mu_j$$

SYSTÉMY HROMADNEJ OBSLUHY $(A/B/c)$

ROZDELENIA → A, B; ČÍSLO (A) +∞) → c

STANICE ← PRICHÁDZAJÚ ZÁKAZNÍCI

A ... ROZDELENIE DĹŽKY MEDZI PRÍCHODMI (PREDPOKLADÁME, ŽE DOBY SÚ NEZÁVISLÉ)

B ... ROZDELENIE DOB OBSLUHY (NEZÁVISLÉ)

c ... POČET STANÍC

POZN: M... Exp, D... DETERMINISTICKÉ, G... VŠEOB.

MODEL $(M/M/\infty)$

⇔ LIN. PROCES VZNIKU A ZÁNIKU

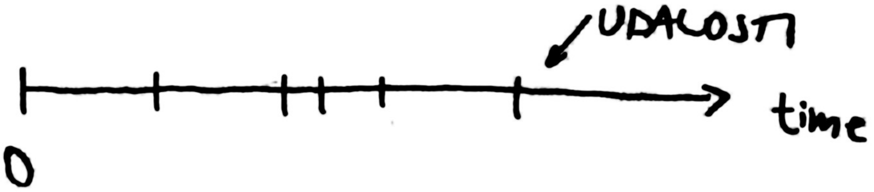
PRÍCHODY ZÁKAZNÍKOV ... POISSON S INTENZITOU $\lambda > 0$ (IID)

DOBY OBSLUHY ... POISSON S INTENZITOU μ (IID)

1/3

17.12.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY



SKUTOČNÉ DOBY BUDEME POVAŽOVAŤ ZA REALIZÁCIE NÁHODNÝCH VELIČÍN

$X_1, X_2, X_3 \quad \dots$ MODEL N.V. $\equiv X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$x_1, x_2, x_3 \quad \dots$ POZOROVANIA $\equiv$ ČÍSLA, VEKTORY

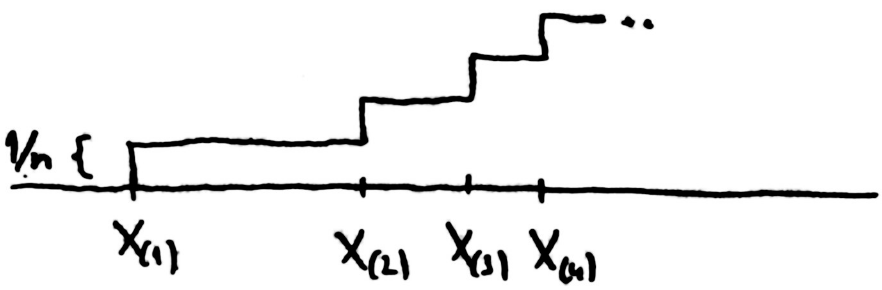
$\boxed{\text{(1) AKO ODHADNÚŤ } f(x) \text{, RESP. } F(x) \text{ ?}}$

$F(x)$ ... DEF. EMPIRICKÁ DISTRIBUČNÁ FUNKCIA

$$\boxed{\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I[X_i \le x]}$$

$$I[\,..\,] = \begin{cases} 0 & \text{false} \\ 1 & \text{true} \end{cases} \quad \text{(INDIKÁTOR)}$$

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ USPORIADANÉ $X_1, \dots, X_n$



VETA (GLIVENKO): $\hat{F}_n(x) \to F(x)$ SKORO ISTO

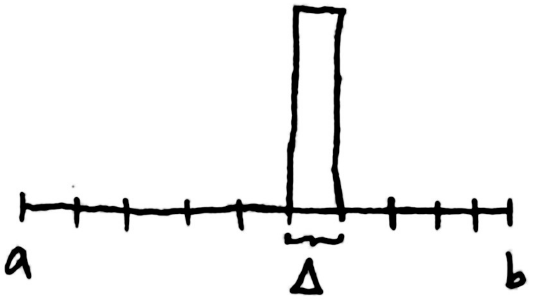
MIERA MNOŽINY, NA KT. TO NEKONV. JE NULOVÁ

ČEBYŠEVOVA NEROVNOSŤ: $P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \le \dfrac{\operatorname{var} \overline{X}_n}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$

$E\overline{X}_n = \mu$ (PRAVDEPODOBNOSTNÁ KONVER. JE SLABŠIA)

AKO ODHADOVAŤ HUSTOTU?

DEF. HISTOGRAM $\begin{cases} \text{FREKVENČNÝ} \\ \text{PRAVDEPODOBNOSTNÝ} \end{cases}$



PRE KAŽDÝ DIELIK:

$$\frac{\#\ \text{PRÍPADOV V DANOM INTERV.}}{\#\ \text{POZOROVANÍ}}$$

$\rightsquigarrow$ ODHAD:

$$P(a+i\Delta \leq X \leq a+(i+1)\Delta) = p_i$$

JE TO KONZISTENTNÝ ODHAD PSTI., ŽE PRÍSLUŠNÁ N.V. PADNE DO $(a+i\Delta,\ a+(i+1)\Delta\rangle$

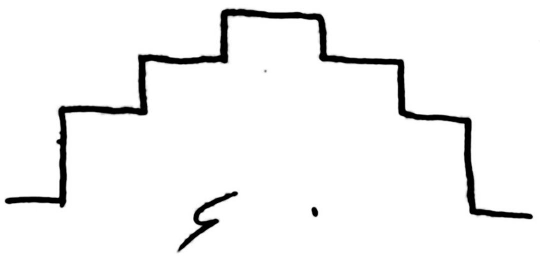
FREKVENČNÝ HISTOGRAM ≡ TVAR HUSTOTY

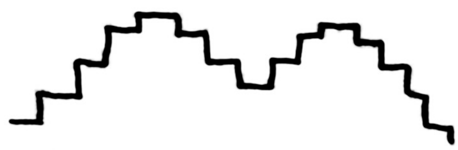
PRAVDEPODOBN. HIST. ≡ HRUBÝ ODHAD HUSTOTY

PROBLÉMY:

(1) AKO ZVOLIŤ POČIATOK?

(2) AKO ZVOLIŤ Δ? ≡ KOĽKO ZVOLIŤ PODINTERVALOV?





17.12.2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$x \pm \Delta/2$

VYZNAČÍM # POZOROVANÍ V OKIENKU

SKOKY VZNIKNÚ IBA KEĎ DO OKIENKA PRIBUDNE NOVÉ POZOROVANIE, ALEBO UBUDNE STARÉ POZOROVANIE

$\Rightarrow$ DOSTANEM:

TZV. <u>KĹZAVÝ JADROVÝ ODHAD</u>

$\frac{1}{n\Delta}$

OTÁZKA: AKO VOLIŤ Δ?

ZOVŠEOBECNENIE: $X_1, \dots, X_n$ SÚ POZOROVANIA

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n h_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

x .. BOD, V KTOROM ODHADUJEM

$K(x) \geq 0 \qquad \int_{\mathbb{R}_1} K(x)\,dx = 1 \qquad K$ JE JADROVÁ FUNKCIA

PODĽA TOHO, AKO JE X_i ĎALEKO, PODĽA TOHO MU DÁME VÁHU.

PRE $K(x) = \begin{cases} 0 & \\ 1 & x \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle \end{cases}$ MÁME KĹZAVÝ JADROVÝ ODHAD

JADROVÁ FUNKCIA (KERNEL FUNCTION)

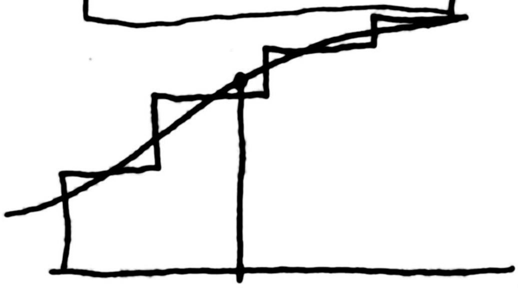
GAUSOVKA

UKAZUJE SA, ŽE VOĽBA $K(..)$ NIE JE PODSTATNÁ

VOĽBA h_n JE! PODSTATNÁ.

UKAZUJE SA, ŽE VHODNÁ VOĽBA JE:

$$\boxed{h_n = C \cdot n^{-\frac{1}{3}}}$$



RÁD $-\frac{1}{3}$ JE KOMPROMIS MEDZI ROZPTYLOM A VYCHÝLENÍM DANÉHO ODHADU...

HYPOTÉZA O TVARU ROZDELENIA

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I[X_i \le x] \approx F(x) \qquad n \gg 0$$

PRIRODZENÁ TRANSFORMÁCIA JE NA PRIAMKU

VIEME, ŽE $\boxed{F^{-1}(F(x)) = x}$ (KVANTILOVÁ FUNKCIA)

ALE $F(x)$ NEPOZNÁME

$\Rightarrow$ POUŽIJEME $F^{-1}\left(\hat{F}_n(x)\right)$

NAPR. PRE $Exp(\lambda)$ .. $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\delta}} = t \Rightarrow \boxed{\log \frac{1}{1-t}} = \frac{x}{\delta}$

17. 12. 2008 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$\left(X_{(i)}, \frac{i}{n}\right)$ (NAMERANÉ DATA ... NAŠA $\hat{F}_n(x)$)

$\Rightarrow$ ZA PLATNOSTI HYPOTÉZY O <u>EXP. ROZDELENÍ</u>
BY $\left(X_{(i)}, \log\frac{1}{1-\frac{i}{n}}\right) = \left(X_{(i)}, \log\frac{n}{n-i}\right)$
MALI LEŽAŤ NA PRIAMKE. (PRIBLIŽNE).

AK $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (<u>NORM. ROZDELENIE</u>)

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}\left(\underbrace{P(X \leq x)}\right) = \frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$$

POUŽIJEME $\hat{F}_n(x)$

KEDYSI SA POUŽÍVAL <u>PRAVDEPODOBNOSTNÝ PAPIER</u>.

PREDPOKLADAJME, ŽE DATA O TEL. HOVOROCH SA RIADIA EXP. ROZDELENÍM. OTESTUJME TO!

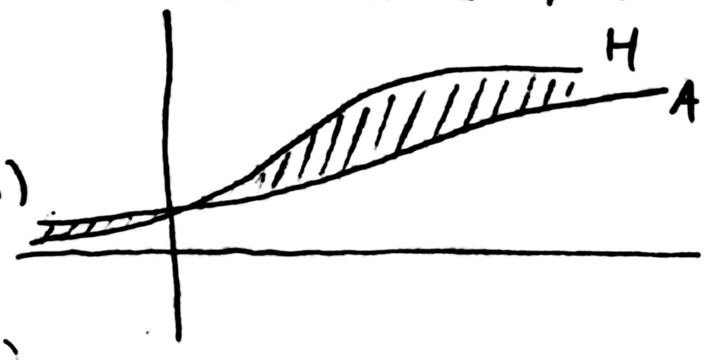
H : MÁM VÝBER Z DANÉHO ROZDELENIA
$X_1, \dots, X_n$ NEZÁV. ROVNAKO ROZD. Z $F(x)$

A : DISTRIBÚCIA JE INÁ, TJ. NIE $F(x)$ ← PRÍLIŠ OBECNÁ ALTERNATÍVA

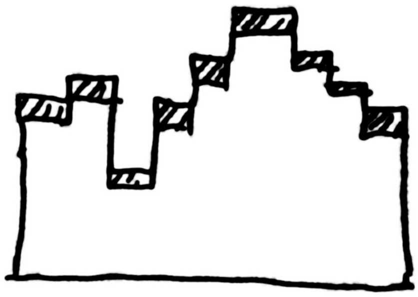
ČASTEJŠIE: A : $F(x+\Delta)$
A : $F\left(\frac{x-\Delta}{\sigma}\right)$
$\vdots$

TESTY { MERIAME VZDIALENOST HYPOTÉZY A ALTERNATÍVY (1)
FREKVENČNÝ (2)

(1)



(2)



07.01.2009 We
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METODY

DVOJVÝBEROVÝ PROBLÉM

$(X_1, \dots, X_n)$ ... IQ PRAHY $\sim F$
$(Y_1, \dots, Y_m)$ ... IQ HRADEC KR. $\sim G$
DISTRIBÚCIE

HYPOTÉZA:

$H: F \equiv G$ $\quad F(x)$ $\quad F \sim N(125, \sigma^2)$

$A: F \not\equiv G$ $\quad F(x-\Delta)$ $\quad G \sim N(130, \sigma^2)$

$\bar{X}_n \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$\bar{Y}_m \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma^2}{m}\right)$

AK $\mu_x = \mu_y$, POTOM BY $\bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$

TJ. $\dfrac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \sim N(0,1)$.

V NAŠICH MODELOCH MÁME NAVIAC ČAS.

$t_1 < t_2 < \dots$ JE TO INFORMÁCIA NAVIAC

$(X_1, \dots, X_n)$ TENTO MOMENT

JEDNÁ SA O NÁH. VÝBER Z ROVNAKÉHO ROZDELENIA, ALEBO DOŠLO V ČASE K ZMENE ROZDELENIA?

2 RIEŠENIA: 1) S KAŽDÝM NOVÝM POZOROVANÍM KONTROLUJEM, ČI DOŠLO K ZMENE ROZDELENIA
= SEKVENČNÝ $\boxed{\text{(ONLINE) PRÍSTUP}}$

2) ... AŽ NA KONCI NEJAKÉHO OBDOBIA
= $\boxed{\text{OFFLINE PRÍSTUP}}$

$$X_i = \mu + \varepsilon_i \qquad i = 1, \dots, m$$
$$X_i = \mu + \Delta + \varepsilon_i \qquad i = m+1, \dots, n$$

μ = CHARAKTERISTIKA VÝROBKU (JAVU)

PRÍKLADY OTÁZOK: • ZMENÍ SA MI CHARAKTER VÝROBKU POTOM, AKO ZAČNEM POUŽÍVAŤ INÚ ZNAČKU

• ZMENÍ SA PREMÁVKA NA CESTE PO 10:00 ?

VARIANTY: A) m POZNÁM ⇒ KLASICKÝ DVOJVÝBEROVÝ PR.

B) m NEPOZNÁM

H: $X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$

A: $\exists m$ TAKÉ, ŽE

$X_i = \mu + \varepsilon_i$ PRE $i = 1, \dots, m$

$X_i = \mu + \Delta + \varepsilon_i$ PRE $i = m+1, \dots, n$

NEPOZNÁME μ, Δ, m

NIEKEDY MOHLO DOJSŤ K ZMENE, A TO V $1, 2, \dots, n-1$

KAŽDÚ ZAFIXOVANÚ MOŽNOSŤ VIEM RIEŠIŤ

⇒ MÁM $n-1$ DVOJVÝBEROVÝCH TESTOV

ZAMIETAM, AK $T_{m,n}$ JE VEĽKÉ = 1 KROK

CELÉ ZAMIETAM, AK ASPOŇ V JEDNOM KROKU BOLO $T_{m,n}$ VEĽKÉ, TJ. $\max\limits_{1 \le m < n} T_{m,n}$ VEĽKÉ

PROBLÉM → ROZDELENIE JE ZLOŽITÉ

DÔVOD: $X_1, \dots, X_n$ NEZÁVISLÉ

$X_{(1)} \le \dots \le X_{(n)} = \max X_i$.

07.01.2009 ut
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = (F(x))^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

KONŠTRUUJÚ SA NEJAKÉ PRAVDEPODOBNOSTI $\{a_n\}, \{b_n\}$
TAK, ABY $P(a_n + b_n X_{(n)} \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-e^{-x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

μ POLOŽÍM (BÚNO) $= 0$

$$H: X_i = \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$A: X_i = \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$X_i = \varepsilon_i + \Delta, \quad i = m+1, \dots, n$$

$$\boxed{\frac{\prod_{i=1}^n f_A(x_i)}{\prod_{i=1}^n f_H(x_i)}} = \frac{\prod_{i=m+1}^n f_\Delta(x_i)}{\prod_{i=m+1}^n f_0(x_i)} = \frac{\prod_{i=m+1}^n \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x_i-\Delta)^2}{2}}}{\prod_{i=m+1}^n \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{x_i^2}{2}}}$$

PO ZLOGARITMOVANÍ:

$$-\sum_{i=m+1}^n \frac{(x_i-\Delta)^2}{2} + \sum_{i=m+1}^n \frac{x_i^2}{2} = \dots = \underbrace{\Delta \boxed{\sum_{i=m+1}^n x_i} - \frac{(n-m)}{2}\Delta^2}$$

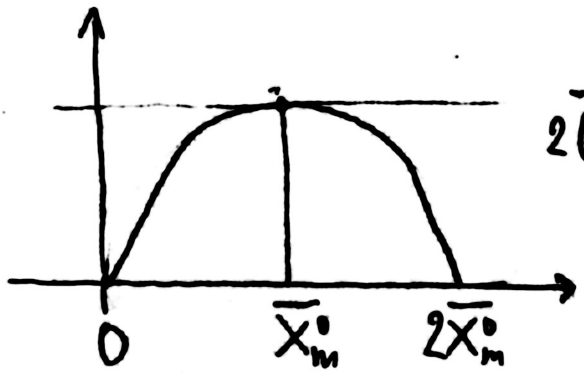
TAKÁ ŠTATISTIKA BUDE ZÁVISIEŤ LEN NA HODNOTÁCH DRUHÉHO VÝBERU

$$\boxed{\sup_{\Delta} T\left(\Delta, \sum_{m+1}^n x_i\right)}$$

Z OBECNÝCH ÚVAH O MAX. VIEROHODNOSTI PLYNIE, ŽE Δ MÔŽEME NAHRADIŤ MAX. VIEROHODNÝM ODHADOM

ROZKLAD $\equiv$ $\Delta \cdot \left(\sum_{i=m+1}^n x_i - \frac{(n-m)}{2}\Delta \right)$

MÁ 2 KORENE, JEDEN $= 0$.



$$\frac{1}{2(n-m)}\left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right)^2$$

ZAMIETAM, POKIAĽ JE VEĽKÉ : (MÁ ZLOŽITÉ ROZDELENIE)

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{i=m+1}^{n} X_i \overset{H_0}{\sim} N(0,1)}$$ ... JEDNODUCHÉ ROZDELENIE

$T_m \sim N(0,1)$, $\max\limits_{1\leq m<n} T_m$ JE ALE SILNO ZÁVISLÉ

BONFERONIHO NEROVNOSŤ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(\max T_m > C) \leq \sum_{i=1}^{n} P(T_m > C) =$$
$$= n\, P(T_1 > C) < \alpha$$

$\underline{\underline{c = u_{1-\frac{\alpha}{n}}}}$ APROXIMÁCIA

X_i ... DOBY MEDZI UDALOSŤAMI $\sim$ HPP
(HOMOGÉNNY POISSONOV PROCES)

H: $X_1, \dots, X_n$ NEZÁVISLÉ $\sim Exp(\lambda)$

A: $\exists m$ TAK, ŽE

$X_1, \dots, X_m \sim Exp(\lambda_1) \equiv HPP(\lambda_1)$

$X_{m+1}, \dots, X_n \sim Exp(\lambda_2) \equiv HPP(\lambda_2)$

07.01.2009 $\mathcal{U}$
PETER ČERNO

NMAI060 PRAVD. METÓDY

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x>0,\ \lambda>0$$

$$EX = \lambda, \qquad \hat{\lambda} = \overline{X}_n$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n f_A(X_i)}{\prod_{i=1}^n f_H(X_i)} = \frac{1/\lambda^n \; e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n X_i}}{1/\lambda_1^m \; e^{-1/\lambda_1 \sum_{i=1}^m X_i} \cdot 1/\lambda_2^{n-m} \; e^{-1/\lambda_2 \sum_{i=m+1}^n X_i}}$$

$$\log \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{\lambda^n} \underbrace{\underbrace{- \frac{1}{\underset{\uparrow}{\underset{\overline{X}_n}{\lambda}}} \sum_{i=1}^n X_i}_{-n} \underbrace{+ \frac{1}{\underset{\uparrow}{\underset{\overline{X}_m}{\lambda_1}}} \sum_{i=1}^m X_i}_{+m} \underbrace{+ \frac{1}{\underset{\uparrow}{\underset{\overline{X^0_m}}{\lambda_2}}} \sum_{i=m+1}^n X_i}_{+n-m}}_{0}$$

$$= m \log \overline{X}_m + (n-m) \log \overline{X^0_m} - n \log \overline{X}_n =$$

$$= m \log \frac{\overline{X}_m}{\overline{X}_n} + (n-m) \log \frac{\overline{X^0_m}}{\overline{X}_n} =$$

$$= m \cdot \log \left[\frac{n}{m} \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{i=m+1}^n X_i} \right] + (n-m) \log \left[\frac{n}{n-m} \frac{\sum_{i=m+1}^n X_i}{\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{i=m+1}^n X_i} \right]$$

$\Rightarrow$ TAKÁ ŠTATISTIKA ZÍSKANÁ POSUNOM VIEROHODNOSTI PRE PRAVDEPODOBNOSŤ HYPOTÉZY, ŽE K ZMENE V INTENZITE HPP DOŠLO ČASOM.

$$X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma_n(\lambda, n)$$

JADRO MOJICH ŠTATISTÍK :

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} X_i}{\sum_{i=1}^{m} X_i + \sum_{i=m+1}^{n} X_i} \equiv \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$H: \begin{array}{l} \Gamma_1 \sim \Gamma(\lambda, m) \\ \Gamma_2 \sim \Gamma(\lambda, n-m) \end{array} \qquad A: \begin{array}{l} \Gamma_1 \sim \Gamma(\lambda_1, m) \\ \Gamma_2 \sim \Gamma(\lambda_2, n-m) \end{array}$$

ZA H: $\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sim \mathrm{Beta}(m, n-m)$

$$\leadsto \quad m \log\left(\frac{n}{m} X\right) + (n-m) \log\left(\frac{n}{n-m}(1-X)\right) \equiv B_m$$

KDE $X \sim \mathrm{Beta}(m, n-m)$

$$\rightarrow \max_{1 \leq m < n} B_m$$