Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Pravděpodobnostní analýza algoritmů

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: RNDr. Alena Koubková, CSc.
E-mail: koubkova@d3s.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://d3s.mff.cuni.cz/~koubkova/`

Anotace: Ukázky použití metod teorie pravděpodobnosti při výpočtu očekávané časové složitosti deterministických algoritmů (třídění, grafové algoritmy apod.) a při konstrukci a analýze randomizovaných algoritmů. Předpokládají se základní znalosti pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Sylabus:

1. Časová složitost algoritmu v nejhorším a průměrném případě. Metody pro určení očekávané doby výpočtu deterministického algoritmu při známém rozložení vstupních dat (přímý výpočet, využití vytvořujících funkcí, rekurentní vztahy).

2. Vyšší momenty doby výpočtu, rozptyl. Markovova a Čebyševova nerovnost a jejich význam pro odhad pravděpodobnosti velkých odchylek skutečné doby výpočtu od očekávaného průměru.

3. Reprezentace algoritmu Markovovým řetězcem, pravděpodobnosti přechodu mezi stavy výpočtu, očekávaný počet průchodů jednotlivými stavy.

4. Princip randomizovaných (pravděpodobnostních) algoritmů a jejich význam. Výpočet očekávané časové složitosti, odhad pravděpodobnosti chyby.

5. Konkrétní příklady pravděpodobnostní analýzy algoritmů: jednoduché počítání na Turingově stroji, hledání maximálního prvku v posloupnosti, třídicí algoritmy (SelectionSort, QuickSort, InsertSort, ShellSort), grafové algoritmy (barvení grafu, tranzitivní uzávěr, náhodné procházky na grafech), pravděpodobnostní testování prvočíselnosti, randomizovaný SAT a případně další.

Literatura:

1. G. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications.Wiley, New York,1970.

2. Hofri, M.: Probabilistic analysis of algorithms. Springer-Verlag, 1987.

3. Sedgewick, R., Flajolet, P.: An introduction to the analysis of algorithms. Addison-Wesley, 1996.

This page is intentionally left blank.

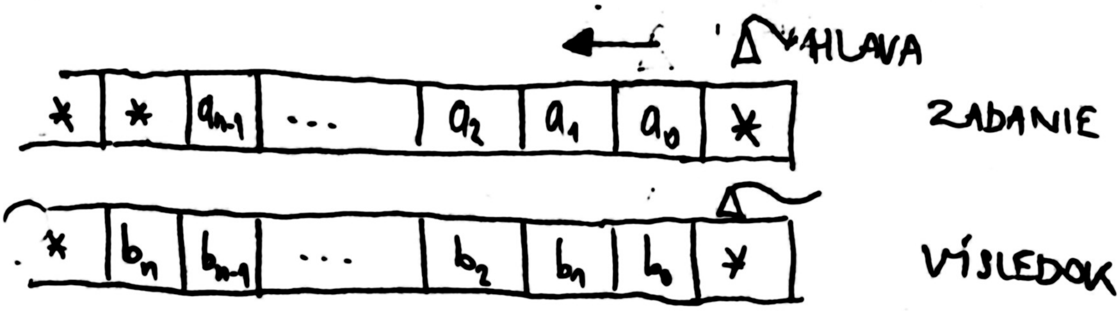
07. 10. 2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$ BINÁRNY ZÁPIS $a_i \in \{0,1\}$

<u>ÚLOHA</u>: SPOČÍTAŤ $a+1$

POČÍTANIE NA TURINGOVOM STROJI



T_n = POČET KROKOV

MINIMÁLNY POČET KROKOV $= 2$
V PRÍPADE, ŽE $a_0 = 0$

MAXIMÁLNY POČET KROKOV $= 2(n+1)$
V PRÍPADE, ŽE $a_0 = \dots = a_{n-1} = 1$

CHCEME SPOČÍTAŤ ET_n ZA PREDPOKLADU,
ŽE $\forall i \; P(a_i = 0) = P(a_i = 1) = \frac{1}{2}$
JEDNOTLIVÉ PRAVDEPODOBNOSTI SÚ NEZÁVISLÉ!

$$ET_n = \sum_k k \cdot P(T_n = k)$$

$P(T_n = k) = 0$ PRE NEPÁRNE k

$$P(T_n = 2m) = \frac{2^{n-m}}{2^n} \qquad \underbrace{??\dots?}_{n-m}0\underbrace{11\dots1}_{m-1}$$

$$= \frac{1}{2^m} \quad \text{PRE } m = 1, \dots, n$$

PRE $m = n+1$ JE $P(T_n = 2m) = \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \quad ET_n = \sum_{k=2}^{2(n+1)} k \cdot P(T_n = k) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} 2m \, P(T_n = 2m) =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{m=1}^{n} 2m \cdot 2^{-m} \quad + \quad 2(n+1) \cdot 2^{-n}}}$$

$$\sum_{m=1}^{n} m q^m = q \sum_{m=1}^{n} m q^{m-1} = q \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial q} q^m \right) =$$

$$= q \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{m=1}^{n} q^m \right) = q \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \dots$$

$$= \frac{q}{(q-1)^2} \left(1 + n q^{n+1} - (n+1) q^n \right)$$

PO DOSADENÍ $q = \frac{1}{2}$ DOSTANEME

$$ET_n = 2 \frac{1/2}{(-1/2)^2} \left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} \right) + 2(n+1) 2^{-n} =$$

$$\dots = \underline{\underline{4 - \frac{1}{2^{n-1}}}} \longrightarrow 4 \quad \text{PRE } n \to \infty$$

PRE $n = \infty$ JE $\sum_{m=1}^{\infty} m q^m = \frac{q}{(1-q)^2} \Rightarrow ET_\infty = 4$

V PODSTATE SA JEDNÁ O MODEL GEOMETRICKÉHO ROZDELENIA

07.10.2009 Wo
PETER ČERNO

NMMN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

MÁME $X_i \overset{iid}{\sim} Alt(p)$ $P(X_i=0)=1-p,\ P(X_i=1)=p$

$P(X=k) \overset{det}{=} P(X_1 = \dots X_{k-1} = 0,\ X_k = 1) =$

$= (1-p)^{k-1} p$ JE $Geom(p)$

$EX = \frac{1}{p}$ $var\, X = \frac{1-p}{p^2}$

$var\, T_n = E(T_n - ET_n)^2 =$

$= E(T_n)^2 - (ET_n)^2$

$ET_n^2 = \sum_k k^2 P(T_n = k) = \dots = 8 - \frac{8n+4}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}}$

VÝPOČET POMOCOU VYTVÁRAJÚCICH FUNKCIÍ

X NÁH. VELIČINA, NEZÁPORNÁ, CELOČÍSELNÁ

$P(X=k) = p_k$ $k = 0,1,\dots$

VYTVÁRAJÚCA FUNKCIA $G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$.

$G_X(z)$ KONVERGUJE PRE $|z| \leq 1$. (ASPOŇ)

$p_0 = G_X(0)$

$p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$ PRE $k = 1,2,\dots$

PRE $X \sim Alt(p)$ JE $G_X(z) = \underline{\underline{(1-p) + pz}}$

PRE $X \sim Bin(n; p)$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \dots, n$

$X = X_1 + \dots + X_n$, KDE $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Alt(p)$

$G_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = \underline{\underline{[(1-p) + pz]}}^n$

$G'_X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot k z^{k-1}$

$\Rightarrow G'_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = EX$

$G''_X(z) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k k(k-1) z^{k-2}$

$\Rightarrow G''_X(1) = EX(X-1)$

$\mathrm{var}\, X = EX^2 - (EX)^2 =$

$= EX(X-1) + EX - (EX)^2 =$

$= G''_X(1) + \underline{\underline{G'_X(1) - (G'_X(1))^2}}$

$P(T_n = 2m-1) = 0$

$P(T_n = 2m) = 2^{-m} \quad 1 \leq m \leq n$

$P(T_n = 2(n+1)) = 2^{-n}$

07.10.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALG.

$$G_{T_n}(z) = \sum_{m=1}^{n+1} z^{2m} P(T_n = 2m) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} z^{2m} 2^{-m} + z^{2(n+1)} 2^{-n} =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{z^2}{2}\right)^m + 2\left(\frac{z^2}{2}\right)^{n+1} =$$
$$= \frac{z^2}{2} \cdot \frac{(z^2/2)^n - 1}{(z^2/2) - 1} + 2\left(\frac{z^2}{2}\right)^{n+1}$$

ČEBYŠEVOVA NEROVNOSŤ

$$P\left(|T_n - ET_n| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{var} T_n}{\varepsilon^2}$$
$$\Rightarrow P\left(|T_n - ET_n| \geq k\sqrt{\operatorname{var} T_n}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

UŽ VIEME, ŽE $ET_n = 4$, $\operatorname{var} T_n = 8$

TJ. NAPR. $P\left(|T_n - 4| \geq 2 \cdot \sqrt{8} \doteq 5,66\right) \leq \frac{1}{4} = 0,25$

$P\left(|T_n - 4| \geq 3 \cdot \sqrt{8} \doteq 8,49\right) \leq \frac{1}{9} = 0,1\overline{1}$

$P\left(|T_n - 4| \geq 4\sqrt{8} \doteq 11,32\right) \leq \frac{1}{16} \doteq 0,06$

TAKTIEŽ PLATÍ $P(X \geq \varepsilon EX) \leq \frac{1}{\varepsilon}$

TZV. MARKOVOVA NEROVNOSŤ
(KEĎ NEPOZNÁME ROZPTYL)

$$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X-EX|^{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha}}$$

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|^{\alpha}}{a^{\alpha}}$$

ŠIKMOSŤ $\alpha = \dfrac{E(X-EX)^3}{(\sqrt{\operatorname{var} X})^3}$

$\alpha = 0$ ... SYMETRICKÉ ROZDELENIE

$\alpha > 0$ ... 

$\alpha < 0$ ... 

ŠPICATOSŤ $\beta = \dfrac{E(X-EX)^4}{(\operatorname{var} X)^2} - 3$

NORMÁLNE ROZDELENIE $N(0,1)$ MÁ $\beta = 0$

$\beta > 0$ ... 

$\beta < 0$ ... 

14.10.2009 Wc
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

ĎALŠIE CHARAKTERISTIKY: MODUS, MEDIÁN

MODUS – NAJPRAVDEPODOBNEJŠIA HODNOTA

$\hat{x}$ ... $P(X=\hat{x})$ JE MAXIMÁLNA

$P(T_n=2)$, $P(T_n=4)=\frac{1}{4}$, ..., $P(T_n=2m)=\frac{1}{2^m}$

$\Rightarrow$ MODUS JE 2.

MEDIÁN – PROSTREDNÝ PRVOK (V ZORADENEJ POST.)

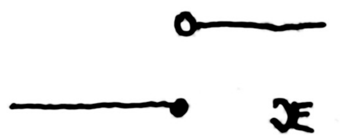
PRE SPOJITÉ ROZDELENIE $F(\tilde{x})=\frac{1}{2}$

$P(X<\tilde{x})=P(X\geq\tilde{x})=\frac{1}{2}$

PRE DISKRÉTNE ROZDELENIA $F(\tilde{x})\leq\frac{1}{2}$, $F(\tilde{x}+0)\geq\frac{1}{2}$

DISTR. FCIU. DEFINUJEME AKO $P(X<x)$

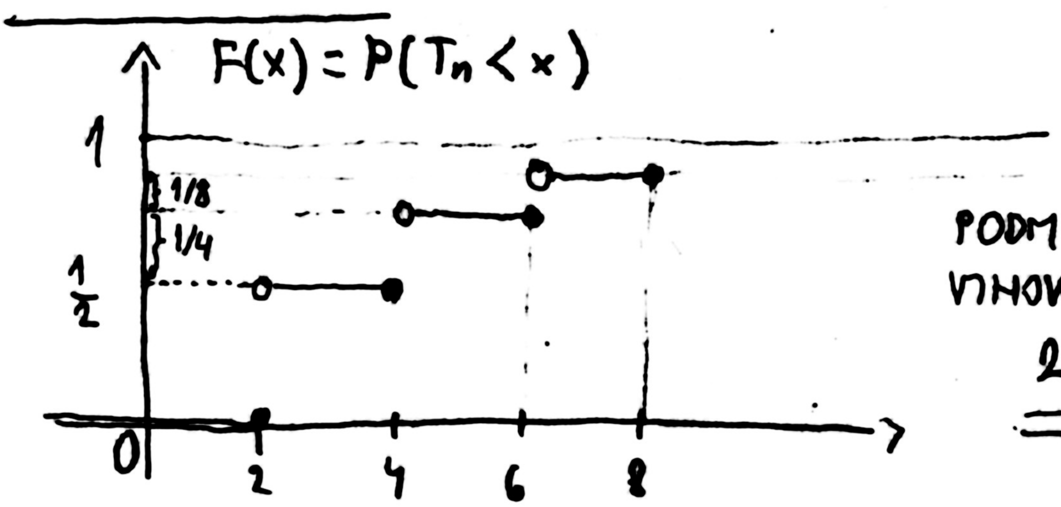
LIMITA SPRAVA



JE SPOJITÁ ZĽAVA

NAPR. $P(T_n=8)=\frac{1}{16}$, ..., $P(T_n=14)=\frac{1}{128}$

A $P(T_n\geq 16)=1-P(T_n<16)=1-\frac{127}{128}=\frac{1}{128}$



PODMIENKE MEDIÁNU VYHOVUJÚ 2 BODY:

2 A 4

MARKOVOVE REŤAZCE

MR JE POSTUPNOSŤ CELOČÍSELNÝCH N.V.
$X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$

TERMINOLÓGIA:

$X_n = j$ ... PROCES JE V ČASE n V STAVE j

X_i NIE SÚ VO VŠEOB. NEZÁVISLÉ, AVŠAK:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$
$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$ (MARKOVOVA VLASTNOSŤ)

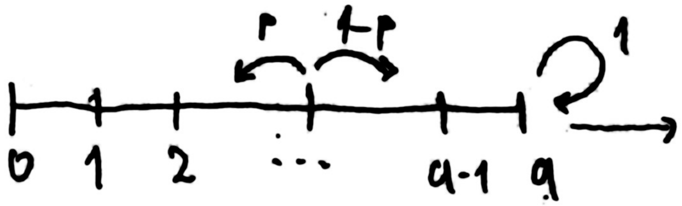
$P(X_0 = j)$ ... POČIATOČNÉ ROZDELENIE

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ... PRAVDEPODOBNOSŤ PRECHODU $p_{ij}(n, n+1)$.

HOMOGÉNNY MR $\quad p_{ij}(n, n+1) = p_{ij}$.

$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{\#\text{STAVOV}}$ MATICA PRAVD. PRECHODU

PRÍKLAD:



POHLCUJÚCA STENA
$p_{aa} = 1$

14.10.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & a-1 & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

MODELOVANIE PRÍKLADU "PRIPOČÍTANIE 1" POMOCOU MR

*	a_{n-1}	....	a_1	a_0	*

VSTUP $a_i \in \{0,1\}$

b_n	b_{n-1}	...	b_1	b_0	*

VÝSTUP $b_i \in \{0,1\}$

BUDEME MAŤ STAVY:

start, $a_0, \dots, a_{n-1}, b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$, koniec

MATICA PRECHODU:

$$\begin{array}{c} \\ \text{start} \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \\ \text{koniec} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \text{start} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \text{koniec} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \; \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1/2 & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & & 1/2 & 0 & 1/2 \; \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & 1 & \cdots & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ABSORPČNÝ STAV ... koniec

koniec JE DOSIAHNUTEĽNÝ Z KAŽDÉHO STAVU

$p^{(k)}_{i,\text{koniec}} > 0$ (PRE KAŽDÉ i EXISTUJE k)

UZAVRETÁ MNOŽINA STAVOV:

V NAŠOM PRÍPADE KAŽDÁ UZAVR. MN. STAVOV OBSAHUJE koniec

POZOR! $P(T_n = 2m) \neq p^{(2m)}_{\text{start},\text{koniec}}$.

$f^{(k)}_{ij}$ ... PRAVDEPODOBNOSŤ TOHO, ŽE ZAČÍNAM V STAVE i A PO k KROKOCH SA DOSTANEM DO STAVU j PO PRVÝKRÁT.

PLATÍ: $\underline{\underline{p^{(n)}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}_{ij}}} \cdot p^{(n-k)}_{jj}$

DÁ SA UKÁZAŤ, ŽE $\underline{\underline{p^{(n)}_{ij} = (\mathbb{P}^n)_{ij}}}$.

PLATÍ TOTIŽ $p_{ij}(m,n) =$

$$\sum_k p_{ik}(m,r) \cdot p_{kj}(r,n) \qquad \forall\, m \leq r \leq n$$

NAPR. $p_{ij}(n, n+2) = \sum_k p_{ik}(n, n+1)\, p_{kj}(n+1, n+2)$.

PRE HOMOGÉNNE MR: $p^{(2)}_{ij} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{kj}$.

14.10.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALG.

PLATÍ: V HOMOGÉNNOM MR:

$$P(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) =$$

$$p_{j_0} \cdot p_{j_0 j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n}$$

$$\Rightarrow P(T_n = 2m) = P(X_0 = \text{start}, X_1 = a_0, \dots$$

$$\dots, X_m = a_{m-1}, X_{m+1} = b_{m-2}, \dots, X_{2m-1} = b_0, X_{2m} = \text{koniec})$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{m} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{m} \cdot 1 = \frac{1}{2^m}$$

STACIONÁRNE ROZDELENIE $\pi = (\pi_i)_{i=1}^{\#\text{ POČET STAVOV}}$

$$\pi^T \mathbb{P} = \pi^T \qquad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$$

PLATÍ $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ (NEZÁVISÍ NA i)

RANDOMIZOVANÉ ALGORITMY

RANDOMIZOVANÝ 2-SAT

$$(f_{11} \vee f_{12}) \wedge (f_{21} \vee f_{22}) \wedge \dots \wedge (f_{m1} \vee f_{m2})$$

k-SAT OD $k \geq 3$ JE NP-ÚPLNÝ.

(1) NAJSKÔR ZVOLÍME NÁHODNÉ OHODNOTENIE PREMENNÝCH 0 A 1.

(2) OVERÍ, Č JE FORMULA SPLNENÁ
AK ÁNO, TAK KONIEC
AK NIE, GOTO (3)

(3) NÁHODNE VYBERIEME 1 Z NESPLNENÝCH FAKTOROV, V ŇOM NÁHODNE VYBERIEME 1 LITERÁL, A TEN FLIPNEME.
GOTO (2)

OČAKÁVANÁ DOBA VÝPOČTU

MR STAVY = POČET SPRÁVNE OHODNOTENÝCH PREMENNÝCH $0, 1, 2, \dots, n$ = # PREMENNÝCH

(PREDPOKLADÁME, ŽE EXISTUJE PRÁVE 1 SPRÁVNE RIEŠENIE)

V BODE (3) SA # SPRÁVNE OHODN. PREM. ZMENÍ PRÁVE O 1.

ZAUJÍMAJÚ NÁS $P_{i,i+1}$, $P_{i,i-1}$.

PLATÍ $P_{i,i+1} \geq 1/2$, $P_{i,i-1} \leq 1/2$

MY BUDEME UVAŽOVAŤ $P_{i,i+1} = P_{i,i-1} = 1/2$

$P_{0,1} = 1$, $P_{n,n-1} = 0$, $P_{n,n} = 1$.

14.10.2009 We
PETER ČERNO

NMM018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALG.

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \leftarrow \text{ABSORPČNÝ STAV}$$

BUDEME POČÍTAŤ $ET_n = h_{1,n}$, PLATÍ:

$$h_{i,n} = \frac{1}{2}(1 + h_{i-1,n}) + \frac{1}{2}(1 + h_{i+1,n}) \quad 0 < i < n$$

$$h_{0,n} = 1 + h_{1,n}$$

$$h_{n,n} = 0$$

$$h_{1,n} = h_{0,n} - 1$$

$$h_{2,n} = 2h_{1,n} - h_{0,n} - 2 = h_{0,n} - 4$$

$$h_{3,n} = h_{0,n} - 9$$

$$h_{4,n} = h_{0,n} - 16$$

$$\dots$$

$$h_{i,n} = h_{0,n} - i^2$$

$$h_{n,n} = h_{0,n} - n^2 = 0 \Rightarrow h_{0,n} = n^2$$

$$\Rightarrow h_{i,n} = n^2 - i^2 = O(n^2)$$

ALGORITMUS NECHÁME BEŽAŤ 3m KROKOV,
POTOM RESETUJEME A IDEME ZNOVU ... t KRÁT

OZNAČME p ... P(SPRÁVNY VÝBER)
POTOM t VOLÍME $\sim \frac{1}{p}$.

$(1-p)^t \leq e^{-pt}$
$\parallel\!|$
PRAVDEPODOBNOSŤ CHYBY $\leq e^{-20} \cdot 4$

$t \sim \frac{20}{p}$

$p \geq \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right)$ $k \geq 3$ k-SAT

$t \leq \left(2\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^n$

21.10.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

PRÍKLAD: NÁHODNÁ PRECHÁDZKA NA GRAFOCH

$G = (V, E)$ SÚVISLÝ, NEORIENTOVANÝ, $|V| = n$, $|E| = m$

$\Gamma(v)$ = ZOZNAM SUSEDOV VRCHOLU v

ŠPECIÁLNE PRE ÚPLNÝ GRAF MATICA PRAVD. PR.:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \cdots & & & & \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

PRE VRCHOLY u, v BUDEME POČÍTAŤ OČAKÁVANÝ POČET KROKOV Z u DO v ... $h_{u,v}$:

$$h_{u,v} = \sum_{\substack{w \in \Gamma(u) \\ w \neq v}} \frac{1}{n-1} (1 + h_{w,v}) + \frac{1}{n-1} \cdot 1$$

VYJDE $h_{u,v} = n-1$

OZNAČME h_u OČAKÁVANÝ POČET KROKOV, ABY SOM CESTOU Z u NAVŠTÍVIL $\forall$ VRCHOLY GRAFU.

$$h_u = \frac{1}{n-1}(n-1) + \frac{1}{n-2}(n-1) + \ldots + 1 \cdot (n-1) =$$

↑ VYBERIEM VRCHOL, V KT. SOM EŠTE NEBOL

↑ OČAKÁVANÝ # KROKOV

$$= (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = (n-1) H_{n-1} \sim n \log n$$

TRIEDA PP (PROBABILISTIC POLYNOMIAL TIME)

TRIEDA JAZYKOV PRIJÍMANÝCH PRAVDEPODOBN. TS V POLYNOMIÁLNOM ČASE.

PLATÍ: $NP \subseteq PP \subseteq PSPACE$

TRIEDA BPP (BOUNDED ERROR PROB. POLYN. TIME)

PRAVDEPODOBNOSŤ CHYBY ε MUSÍ BYŤ $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

→ TÝMTO ALGORITMOM SA HOVORÍ <u>MONTE CARLO</u>

PLATÍ: $BPP \subseteq PP$

TRIEDA R (JEDNOSTRANNÁ VERZIA BPP)

ALGORITMY MONTE CARLO S JEDNOSTRANNOU CHYBOU (TJ. ODPOVEĎ ÁNO JE VŽDY SPRÁVNA, ODPOVEĎ NIE JE SPRÁVNA S PRAVD. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$)

PLATÍ $P \subseteq R \subseteq NP$

TRIEDA ZPP (ZERO PROB. POL. TIME)

PRAVDEPODOBNOSŤ CHYBY JE 0

→ TÝMTO ALGORITMOM SA HOVORÍ <u>LAS VEGAS</u>

MAJME PRÍKAZY PROGRAMU:

—
—
—
—
—
—

UVAŽUJME, ŽE PRÍKAZY SÚ STAVY MARKOVOVHO REŤAZCA

21.10.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

OČAKÁVANÝ POČET PRIECHODOV STAVOM:

$$X_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{KEĎ SYSTÉM PREJDE ZO STAVU } i \text{ DO STAVU } j \text{ PO } k \text{ KROKOCH} \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

ĎALEJ:

R_{ij} = POČET PRIECHODOV STAVOM j, KEĎ POČIATOČNÝ STAV JE i

$j \neq n$, n JE KONCOVÝ STAV (ABSORPČNÝ)

$$R_{ij} = \sum_{k \geq 0} X_{ij}^{(k)}$$

$$ER_{ij} = \sum_{k \geq 0} EX_{ij}^{(k)} = \sum_{k \geq 0} p_{ij}^{(k)} = \sum_{k \geq 0} (\mathbb{P}^k)_{ij}$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & & & \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & & & \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{KDEŽTO} \quad \mathbb{T}^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0_{n,n}$$

PLATÍ $(\mathbb{P}^k)_{ij} = (\Pi^k)_{ij}$ PRE $1 \leq i,j < n$.

$\Rightarrow ER_{ij} = \sum_{k \geq 0} (\Pi^k)_{ij}$ PRE $1 \leq i,j < n$

$= \underline{\underline{(I - \Pi)^{-1}_{ij}}}$

<u>PRÍKLAD</u>: ODHAD VEĽKOSTI DYNAMICKÝCH DÁTOVÝCH ŠTRUKTÚR (SPOJÁK, HASH. TABUĽKA, ...)

$$X_n = x \Rightarrow X_{n+1} = \begin{cases} x+1 \\ x \\ x-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ MÁME MR, $p_{ij}(n, n+1)$

NENULOVÉ IBA PRE PRÍPAD $j \in \{i-1, i, i+1\}$.

p_{ij} MÔŽME DEFINOVAŤ PODĽA TOHO, S AKOU PRAVDEPODOBNOSŤOU SA OBJAVÍ INSERT, MEMBER, DELETE, ...

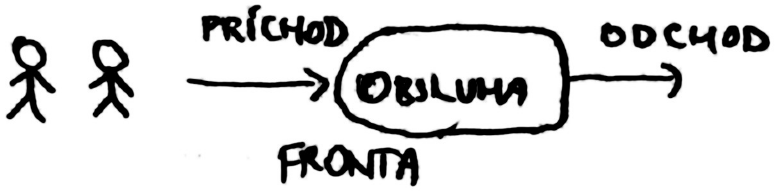
VEĽKOSŤ ŠTRUKTÚRY ... SPOČÍTAME POMOCOU STACIONÁRNEHO ROZDELENIA π

$$\pi_j = P(X = j) = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$$

21.10.2009 Ne
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

SYSTÉM HROMADNEJ OBSLUHY



AK MÁME ∞ VEĽA OBSLUŽNÝCH ZARIADENÍ, ⇒ FRONTA NEVZNIKÁ

TIETO SYSTÉMY SA OZNAČUJÚ $G/G/\infty$

ROZDELENIE PRÍCHODOV ROZDELENIE ODCHODOV

TO, ČO SA SKÚMA : POČET ZÁKAZNÍKOV V SYSTÉME ...

DÁ SA TO APLIKOVAŤ AJ NA DAT. ŠTRUKTÚRACH

PODROBNOSTI → VIĎ. MARK. PROCESY SO SPOJITÝM ČASOM

KOMBINAČNÉ ČÍSLA $\binom{n}{k}$ n,k PRIRODZENÉ, $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

PLATÍ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{BINOMICKÝ KOEFICIENT}} a^k b^{n-k}$ (*)

DEFINUJME $\binom{n}{k}$ POMOCOU (*)

TENTO PRÍSTUP SA OPLATÍ, KEĎ UVAŽUJEME OBECNEJŠIE PREDPOKLADY: $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{R}$

BINOMICKÝ RAD: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$

KDE $x \in (-1, 1]$.

$\Rightarrow$ MÁME OBECNÝ BIN. KOEF. $\binom{n}{k}$ $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{R}$

DÁ SA UKÁZAŤ, ŽE $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

NAPR. $\binom{-3}{2} = \frac{(-3)(-4)}{2} = 6$

VO VŠEOBECNOSTI:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \underline{\underline{\binom{n+k-1}{k}}}$$

TZV. ZÁPORNÝ (NEGATÍVNY) BIN. KOEFICIENT.

NEGATÍVNE BINOMICKÉ ROZDELENIE

$X_1, X_2, \dots \overset{iid}{\sim} Alt(p)$, MAJME $r \in \mathbb{N}$

$P(X = k)$ = V POSTUPNOSTI $(X_1, \dots, X_k)$

NASTAL ÚSPECH r-KRÁT, $X_k = 1$.

PLATÍ: $P(X = k+r) = \underline{\underline{\binom{k+r-1}{k} p^{r-1} p (1-p)^k}}$

TAKŽE $P(X=k+r) = (-1)^k \binom{-r}{k} p^r (1-p)^k$

STIRLINGOVO ČÍSLO 1. DRUHU

$\left[{n \atop k}\right]$, $n,k \in \mathbb{N}_0$

$\left[{n \atop k}\right]$ JE DEFINOVANÉ ROVNOSŤOU :

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} x^k$$

$\left[{n \atop 0}\right] = 0$ (STAČÍ POROVNAŤ PRÍSLUŠNÉ KOEFICIENTY)

$\left[{n \atop n}\right] = 1$

$\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$, $\left[{n \atop k}\right] = 0$ PRE $k > n$.

PRE $x=1$: $0 = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k}$

$x=-1$: $(-1)^n n! = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^n$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$

$$F_X^{(n)}(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-n+1)\, p_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} j^k p_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} j^k p_j\right)}_{EX^k}$$

STIRLINGOVE ČÍSLA 2. DRUHU

$\left\langle {n \atop k} \right\rangle \qquad n, k \in \mathbb{N}_0$

DEF. ROVNOSŤOU $x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x(x-1)\dots(x-k+1)$

$= \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle k! \binom{x}{k}$

$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 0, \ \left\langle {n \atop 1} \right\rangle = 1, \ \left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1, \ \left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$ PRE $k > n$

TAKTIEŽ $\underline{\underline{EX^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle F_X^{(n)}(1)}}$

$\left[{n \atop k} \right]$ ... POČET PERMUTÁCIÍ, KT. MAJÚ k CYKLOV

$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ ... POČET ROZKLADOV n-PRVKOVEJ MNOŽINY DO k NEPRÁZDNYCH DISJUNKTNÝCH TRIED.

(NEROZ<u>LÍŠITEĽ</u>NÝCH !!)

04. 11. 2009 Ne
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEP. ANALÝZA ALGORITMŮ

HĽADANIE MAXIMA V $A_1, \dots, A_n$

1. read n .... $1\times$
2. $k := 1$ .... $1\times$
3. $m := A_k$ .... $(M_n + 1)\times$
4. $k := k+1$ .... $n\times$
5. if $k > n$ .... $n\times$
6. then goto 10 .... $1\times$
7. if $m > A_k$ .... $(n-1)\times$
8. then goto 4 .... $[(n-1) - M_n]\times$
9. else goto goto 3 .... $M_n\times$ (POČET PRIEBEŽNÝCH MAXÍM)
10. print m .... $1\times$

$$T_n = \alpha + \beta n + 2 M_n$$

M_n JE NÁHODNÁ VELIČINA

$M_n = 0$ ... MAXIMUM JE A_1

$M_n = n-1$ ... ZOTRIEDENÁ POSTUPNOSŤ

BUDEME POČÍTAŤ EM_n

$$ET_n = \alpha + \beta n + 2\, EM_n$$

PREDPOKLAD: $A_1, \dots, A_n$ JE NÁHODNÁ PERMUTÁCIA ČÍSIEL $1, \dots, n$.

→ VIĎ TEÓRIA REKORDOV V TEÓRII PRAVD.

$$EM_n = \sum_{i=0}^{n-1} i\, P(M_n = i)$$

CHCEME SPOČÍTAŤ $P(M_n = i)$

PERMUTÁCIE SI ROZDELÍME DO DVOCH SKUPÍN:

(1) PERMUTÁCIE, KT. MAJÚ MAXIMUM NA KONCI ... TÝCH JE $(n-1)!$

$$\Rightarrow \quad P(A_n = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

ZA TEJTO PODMIENKY ZREJME PLATÍ

$$M_n = M_{n-1} + 1,$$

TJ. $P(M_n = i \mid A_n = n) = P(M_{n-1} + 1 = i) =$

$$= P(M_{n-1} = i-1).$$

(2) OSTATNÉ PERMUTÁCIE ... JE ICH $n! - (n-1)! =$
$= (n-1)!\,(n-1)$.

$P(A_n \neq n) = \frac{n-1}{n}$. ZREJME V TAKOM PRÍPADE:

$$M_n = M_{n-1},$$

TJ. $P(M_n = i \mid A_n \neq n) = P(M_{n-1} = i)$

VETA O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOSTI NÁM DÁVA:

$$P(M_n = i) = P(M_n = i \mid A_n = n)\, P(A_n = n) + \ldots =$$

$$= P(M_{n-1} = i-1)\frac{1}{n} + P(M_{n-1} = i)\frac{n-1}{n}.$$

04. 11. 2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

REKURZIA: $p_{n,i} = \frac{1}{n} p_{n-1,i-1} + \frac{n-1}{n} p_{n-1,i}, \quad i \geq 1 \quad (*)$

OKRAJOVÉ PODMIENKY:

$$p_{1,i} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

$$p_{n,0} = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$$

RIEŠENIE POMOCOU VYTVÁRAJÚCEJ FUNKCIE:

$$G_n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{n\,i} z^i \quad \ldots \text{ VYTV. FCIA. } M_n$$

Z (*) PO VYNÁSOBENÍ z^i A SČÍTANÍ $\sum_{i\geq 1}$:

$$\sum_{i\geq 1} p_{n,i} z^i = \frac{1}{n} \sum_{i\geq 1} p_{n-1,i-1} z^i + \frac{n-1}{n} \sum_{i\geq 1} p_{n-1,i} z^i$$

$$\underbrace{\sum_{i\geq 1} p_{n,i} z^i}_{\left(\sum_{i\geq 0} p_{n,i} z^i\right) - p_{n,0}} = \frac{z}{n} \underbrace{\sum_{i\geq 1} p_{n-1,i-1} z^{i-1}}_{\sum_{i\geq 0} p_{n-1,i} z^i} + \frac{n-1}{n} \underbrace{\sum_{i\geq 1} p_{n-1,i} z^i}_{\left(\sum_{i\geq 0} p_{n-1,i} z^i\right) - p_{n-1,0}}$$

$$G_n(z) - \cancel{\frac{1}{n}} = \frac{z}{n} G_{n-1}(z) + \frac{n-1}{n}\left[G_{n-1}(z) - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right]$$

$$\underline{\underline{G_n(z) = \frac{z+n-1}{n} G_{n-1}(z)}}\,; \qquad \underline{\underline{G_1(z) = p_{1,0} = 1}}$$

$$G_n(z) = \frac{z+n-1}{n} \cdot \frac{z+n-2}{n-1} \cdots \frac{z+1}{2} \cdot 1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{z}\binom{z+n-1}{n}}} = \frac{1}{z}(-1)^n\binom{-z}{n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{z\, n!} n! \binom{-z}{n}$$

STIRLINGOVÉ ČÍSLA 1. DRUHU:

$$n!\binom{x}{n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \left[{n \atop i}\right] x^i$$

$$x := -z \Rightarrow n!\binom{-z}{n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \left[{n \atop i}\right] z^i \Rightarrow$$

$$G_n(z) = \frac{\cancel{(-1)^n}}{z\, n!} \sum_{i=1}^{n} \cancel{(-1)^n} \left[{n \atop i}\right] z^i \quad , \quad \text{PRETOŽE } \left[{n \atop 0}\right] = 0$$

$$\text{D. } \underline{\underline{G_n(z) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \left[{n \atop i+1}\right] z^i}}$$

$$\Rightarrow p_{n,i} = \frac{1}{n!} \left[{n \atop i+1}\right]$$

$\Rightarrow \left[{n \atop i+1}\right]$ JE POČET PERMUTÁCIÍ,

KDE MÁME $M_n = i$ (POČET PRIEBEŽNÝCH MAXÍM)

04.11.2009 Ut
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$EM_n = \sum_{i=0}^{n-1} i\, p_{n,i} = \sum_{i=0}^{n-1} i \frac{\left[{n \atop i+1}\right]}{n!}$$

$$\left[{n \atop 0}\right] = 0,\ \left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!,\ \sum_{m=0}^{n} \left[{n \atop m}\right] = n!$$

ĎALEJ: $\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right]\binom{k}{m} = \left[{n+1 \atop m+1}\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{k \atop m}\right]\frac{n!}{k!}$

$$EM_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\left[{n \atop i}\right] =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} i\left[{n \atop i}\right] - \frac{1}{n!}\overbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left[{n \atop i}\right]}}^{= n!}$$

$$EM_n = \left(\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{i=0}^{n} i\left[{n \atop i}\right]}\right) - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left[{n \atop i}\right]\binom{i}{1} = \left[{n+1 \atop 1+1}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[{k \atop 1}\right]\frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{k!}\cdot n! =$$

$$= n!\, H_n$$

$$\Rightarrow EM_n = \underline{\underline{H_n - 1}} \sim \ln n$$

$$ET_n = \alpha + \beta n + \vartheta(H_n - 1) = \underline{\underline{O(n + \ln n)}}$$

$$EM_n = G_n'(1)$$

$$G_n(z) = \frac{z+n-1}{n} G_{n-1}(z); \quad G_1(z) = 1$$

$$G_n'(z) = \frac{1}{n} G_{n-1}(z) + \frac{z+n-1}{n} G_{n-1}'(z)$$

$$G_n'(1) = \frac{1}{n} + G_{n-1}'(1), \quad G_1'(1) = 0$$

$$\Rightarrow EM_n = \frac{1}{n} + EM_{n-1}, \quad EM_1 = 0$$

$$\Rightarrow EM_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} = \underline{\underline{H_n - 1}}$$

ĎALŠÍ SPÔSOB:

$$G_n(z) = \underbrace{\frac{z+n-1}{n}} G_{n-1}(z)$$

OZNAČME AKO $Q_n(z)$ ...

HĽADÁME $\underline{\text{N.V. } X_n}$ S MTVORIACOU FCIOU. $Q_n(z)$

$$\Rightarrow M_n = X_n + M_{n-1}$$

A ODTIAĽ $EM_n = EX_n + EM_{n-1}$.

ZREJME $X_n \sim Alt\left(\frac{1}{n}\right)$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow EM_n = \frac{1}{n} + EM_{n-1} = \dots = H_n - 1$$

04. 11. 2009 ut
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

TO ČO VYUŽIJEME JE NEZÁVISLOSŤ X_n A M_{n-1}
$\Rightarrow$ SPOČÍTAME ROZPTYL M_n

$$\operatorname{var} M_n = \operatorname{var} X_n + \operatorname{var} M_{n-1} =$$
$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \operatorname{var} M_{n-1} \; ; \qquad \operatorname{var} M_1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} M_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = H_n - 1 - \left(H_n^{(2)} - 1\right) =$$
$$= \underline{\underline{H_n - H_n^{(2)}}}$$

KDE $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$

$$\Rightarrow \operatorname{var} \underline{\underline{M_n}} = O(\ln n)$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} T_n = \vartheta^2 \operatorname{var} M_n = O(\ln n)$$

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

$$H_n^{(1)} \rightarrow \ln n$$

PRE $r > 1$ $H_n^{(r)}$ KONVERGUJE

PRE $r = 2m$ $H_n^{(r)}$ VIEME DOKONCA SPOČÍTAŤ PRE $n \to \infty$

SELECTION SORT

TRIEDENIE EXTRAKCIOU MINIMA

for $i \leftarrow 1$ to $n-1$ do
    NÁJDI $a[k]$ AKO MINIMUM Z $\{a[i], \dots, a[n]\}$
    VYMEŇ $a[i] \leftrightarrow a[k]$

```
for i ← 1 to n-1 do
    k ← i ; x ← a[i]
    for j ← i+1 to n do
        if a[j] < x then k ← j, x ← a[j]
    a[k] ← a[i], a[i] ← x
```

ZLOŽITOSŤ TRIEDIACICH ALGORITMOV SA MERIA POČTOM POROVNANÍ

TO, KDE ALG. MÔŽE ČAS UŠETRIŤ SÚ PREPÍSANIA PREMENNÝCH (AKO NAPR x, k, ...)

Y_n := OČ. POČET PREPÍSANIA x VO VNÚTORNOM CYKLE ZA CELÝ VÝPOČET

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} E M_i .$$

04.11.2009
PETER ČERNO

NTIN098 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

HĽADÁM MINIMUM V CELEJ PERM. $\{1, \dots, n\}$

$$P(a[1] = m) = \frac{1}{n} \quad \forall m = 1, \dots, n$$

KEĎ JE $a[1] = 1$, POTOM $Y_n = 0$

KEĎ JE $a[1] = m > 1$, POTOM SA x PREPÍŠE, ALE IBA PRVKAMI S HODNOTAMI $1, 2, \dots, m-1$

PRVKY $> m$ TO NEOVPLYVNÍ $\Rightarrow$ NECHÁME ICH.

V TAKOMTO PRÍPADE:

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{m=2}^{n} (1 + Y_{m-1})$$

$$\Rightarrow n Y_n = \sum_{m=2}^{n} (1 + Y_{m-1}) = n - 1 + \sum_{m=2}^{n} Y_{m-1}$$

$$(n+1) Y_{n+1} = n + \sum_{m=2}^{n+1} Y_{m-1}$$

ODČÍTAM

$$(n+1) Y_{n+1} - n Y_n = 1 + Y_n$$

$$Y_{n+1} = \frac{1}{n+1} + Y_n$$

$$\Rightarrow Y_{n+1} = H_{n+1}.$$

11. 11. 2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEP. ANALÝZA ALGORITMOV

INVERZIA V PERMUTÁCII

$\sigma = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$

INVERZIA (a_i, a_j) : $a_i > a_j$, $i < j$

INVERZNÁ TABUĽKA $I_n = (i_1, \dots, i_n)$

i_j = # PRVKOV PREDCHÁDZAJÚCICH PRVOK j, KT. SÚ VÄČŠIE

PRÍKLAD: $(7, 4, 5, 3, 2, 6, 1)$

$\rightsquigarrow I = (6, 4, 3, 1, 1, 1, 0)$

Z I VIEME VYROBIŤ σ :

PRED 7 JE 0 VÄČŠÍCH : 7

PRED 6 JE 1 VÄČŠÍ : 7, 6

PRED 5 JE 1 VÄČŠÍ : 7, 5, 6

PRED 4 JE 1 VÄČŠÍ : 7, 4, 5, 6

PRED 3 SÚ 3 VÄČŠIE : 7, 4, 5, 3, 6

PRED 2 SÚ 4 VÄČŠIE : 7, 4, 5, 3, 2, 6

PRED 1 JE 6 VÄČŠÍCH : 7, 4, 5, 3, 2, 6, 1

i_j ... NÁH. VELIČINA, $0 \le i_j \le n-j$

i_j SÚ NEZÁVISLÉ $P(i_j = k) = \frac{1}{n-j+1}$, $\forall k = 0, \dots, n-j$

ZDRUŽENÁ DIST. FCIA. $G_{i_1, \dots, i_n}(z_1, \dots, z_n) =$

$= \sum_{k_1=0}^{n-1} \dots \sum_{k_n=0}^{0} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} P(i_1 = k_1, \dots, i_n = k_n).$

ZREJME $P(i_1=k_1, \ldots, i_n=k_n) = \frac{1}{n!}$

(VZÁJOMNE JEDNOZNAČNÁ KORESPONDENCIA MEDZI PERM. A ICH INV. TABUĽKAMI)

$$G_{i_1,\ldots,i_n}(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k_1=0}^{n-1} z_1^{k_1}\frac{1}{n}\sum_{k_2=0}^{n-2} z_2^{k_2}\frac{1}{n-1}\cdots$$
$$\cdots\sum_{k_n=0}^{0} z_n^{k_n}\cdot 1 = G_{i_1}(z_1)\cdot\ldots\cdot G_{i_n}(z_n)$$

$\Rightarrow$ NEZÁVISLOSŤ N.V. $i_1,\ldots,i_n$.

PRÍKLAD: $3, 2, 7, \ldots \Rightarrow i_7=0$

$\Rightarrow$ M_n+1 = POČET NÚL V INVERZNEJ TABUĽKE !

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{KEĎ } i_j=0 \\ 0 & \text{KEĎ } i_j\neq 0 \end{cases}$$

$$P(X_j=1) = P(i_j=0) = \frac{1}{n-j+1}$$

$$M_n+1 = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\Rightarrow E(M_n+1) = \sum_{j=1}^{n} EX_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n-j+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$$

$$\Rightarrow EM_n = \underline{\underline{H_n-1}}$$

11.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$\operatorname{var} M_n = \operatorname{var}(M_n+1) = \operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) =$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n-j+1}\right] - \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n-j+1}\right)^2\right] =$$
$$= \underline{\underline{H_n - H_n^{(2)}}}$$

$I_n = \sum_{j=1}^{n} i_j$ = CELKOVÝ POČET INVERZIÍ V PERM.

ALG. INSERTION SORT

for $i = 2$ to n do
  PRVOK $a[i]$ ZARADÍM DO UŽ ZOTRIEDENEJ
  POSTUPNOSTI $a[1 \ldots i-1]$.

ZLOŽITOSŤ $O(n +$ POČET INVERZIÍ$)$

KEĎŽE $0 \leq i_j \leq n-j \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \sum_{j=1}^{n} n-j =$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} k = \underline{\underline{\binom{n}{2}}} = O(n^2)$$

CHCEME SPOČÍTAŤ $E I_n$

MÁM PERM. $\pi \in S_{n-1} \ldots I_{n-1}$

CHCEM PRIDAŤ PRVOK n DO π (n MOŽNOSTÍ)

$$I_n = \begin{cases} I_{n-1} + 0 & n \text{ PRIDÁM NA KONIEC}, \ p = \frac{1}{n} \\ I_{n-1} + 1 & \ldots \\ \ldots & \\ I_{n-1} + (n-1) & \end{cases}$$

$I_n = I_{n-1} + X_n$, KDE X_n JE N.V.

$P(X_n = k) = \frac{1}{n}$ PRE $k = 0, \dots, n-1$ ..

$$\Rightarrow I_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$EI_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\binom{n}{2}}}$$

$$\operatorname{var} I_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var} X_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2-1}{12} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - n\right) = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n\right] =$$

$$= \frac{(n-1)n(2n+5)}{72} = O(n^3)$$

SHELLSORT (1959)

VSTUP ROZDELÍM NA

(1) 1. PRVKY NA NEPÁRNYCH POZÍCIACH $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ .. INSERTSORT

2. —11— PÁRNYCH POZÍCIACH $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ ... INSERTSORT

(2) NA VÝSLEDOK APLIKUJEM INSERTSORT

PRVÁ FÁZA : $\frac{1}{2}\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{2} + \frac{1}{2}\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{2} \sim \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{2} = \frac{n^2}{8}$

TERAZ MUSÍME SPOČÍTAŤ OČAKÁVANÝ POČET INVERZIÍ V CELEJ POST. NA ZAČIATKU DRUHEJ FÁZY

11. 11. 2009 We
PETER ČERNO

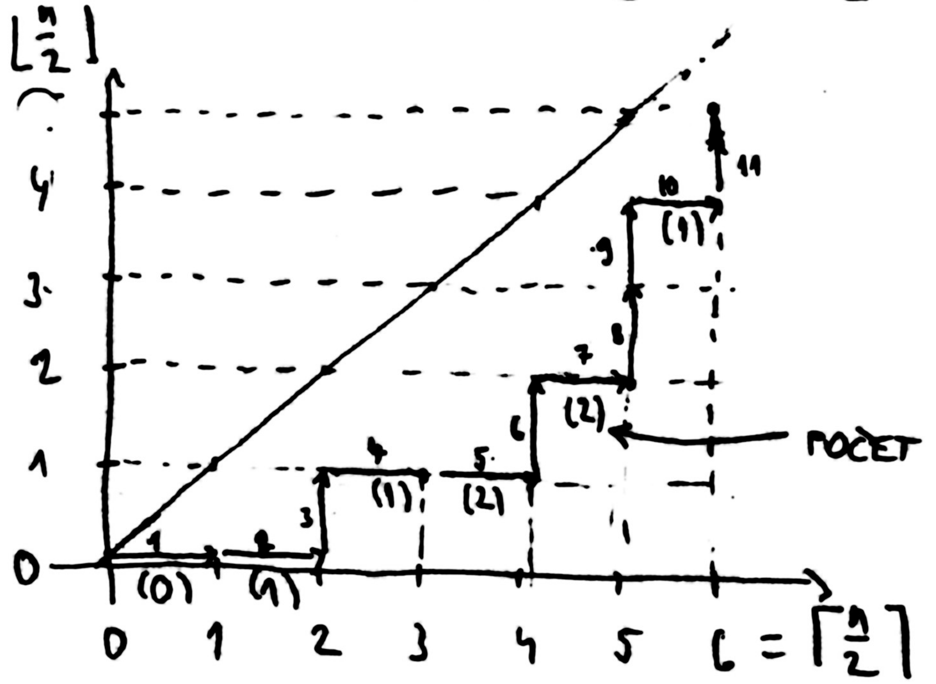
NTIN098 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMU

PRÍKLAD: 1, 3, 2, 6, 4, 8, 5, 9, 7, 11, 10

(pozície: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.)

INVERZIE MÔŽU NASTAŤ IBA NA POZÍCIACH RÔZNYCH PARÍT..

(3, 2), (6, 4), (6, 5), (8, 5), (8, 7), (9, 7), (11, 10)



POČET INVERZIÍ

STACÝ POČÍTAŤ INVERZIE K PRVKOM, KT. SÚ NA NEP. POZÍCIACH

CESTA Z (0,0) DO $(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

k-TY KROK DOPRAVA, KEĎ k JE NA NEP. MIESTE

—— " —— HORE, —— " —— PÁRNOM MIESTE

KEĎ ZAFIXUJEM ÚSEK (i, j) DO $(i+1, j)$

ZODPOVEDÁ MU ČÍSLO $i+j+1$

INVERZIÍ JE TAM $|i-j|$

ČÍSLO $i+j+1$ JE V PERMUTÁCII NA POZÍCII $2i+1$

ROZDIEL HODNOTY ČÍSLA A JEHO POZÍCIE JE PRÁVE POČET INVERZIÍ TOHOTO ČÍSLA

OČAKÁVANÝ POČET INVERZIÍ JE:

$$\sum_i \sum_j |i-j| \; P(\text{CESTA PRECHÁDZA ÚSEKOM } (i,j) \to (i+1,j))$$

TÁTO PRAVDEPODOBNOSŤ SA POČÍTA AKO PODIEL

$$\frac{\forall \text{CESTY Z } (0,0) \text{ DO } (i,j) * \text{ Z } (i+1,j) \text{ DO } (\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} =$$

$$= \frac{\binom{i+j}{i}\binom{n-i-j-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j}}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} .$$

$\Rightarrow$ OČAKÁVANÝ POČET INV. =

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |i-j| \cdot \binom{i+j}{i}\binom{n-i-j-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j}}_{\text{OZNAČME AKO } A_n}$$

$$A_{2m} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (i-j)\binom{i+j}{i}\binom{2m-i-j-1}{m-j} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i}^{m} (j-i)\binom{i+j}{i}\binom{2m-i-j+1}{m-j} =$$

V 2. SUČTE PREHODÍME PORADIE SČÍTANIA A POTOM PREZNAČÍME INDEXY

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (i-j)\binom{i+j}{i}\left[\binom{2m-i-j-1}{m-j} + \binom{2m-i-j-1}{m-j-1}\right]$$

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} (r-j) \binom{i+j}{i} \binom{2m-i-j}{m-j}$$

PRÍLIŠ KOMPLIKOVANÉ

VÝSLEDOK JE: $m \cdot 4^{m-1}$ PODOBNE:

$$A_{2m+1} = 2m \cdot 4^{m-1}$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor 2^{n-2}$$

OČAKÁVANÝ POČET INVERZIÍ JE $\dfrac{A_n}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \sim 0{,}157\, n^{3/2}$

POMOCOU STIRLINGOVEJ FORMULE:

$$\binom{n}{k} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{A_n}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \sim \frac{\frac{n}{2} 2^{n-2}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\cancel{n}}{2\pi \frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}(n-\frac{n}{2})}}}_{\sqrt{\frac{1}{\pi \frac{n}{2}}}} \underbrace{\left(\frac{n}{\frac{n}{2}}\right)^{n/2}}_{2^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\left(\frac{n}{n-\frac{n}{2}}\right)^{n-n/2}}_{2^{\frac{n}{2}}}}$$

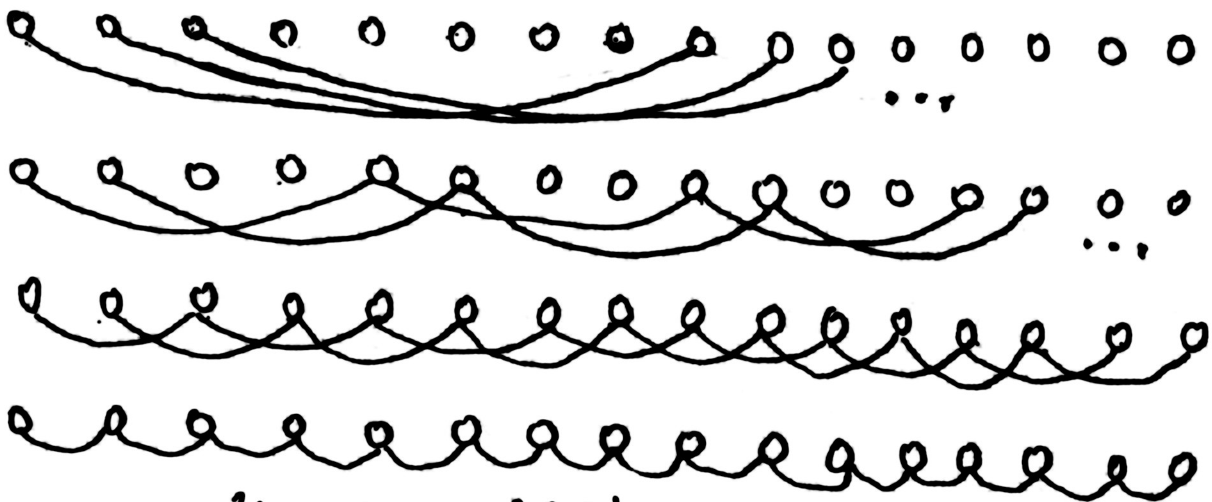
$$\sim \frac{\frac{n}{2} 2^{-2}}{\sqrt{\frac{2}{\pi n}}} = \sqrt{\frac{\pi}{128}}\, n^{\frac{3}{2}} \doteq 0{,}157\, n^{3/2}$$

18.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEP. ANALÝZA ALGORITMŮ

SHELL SORT

1.
2. $4\left(\frac{n}{4}\right)^{3/2}$
3. $2\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2}$
4. $n^{3/2}$



SPOLU $n^{3/2} \sum_{k=0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = O(n^{3/2})$

PRÍPUSTKOVÁ SEKVENCIA $h_1, h_2, \dots, h_t$

$h_1 = 1, \quad h_t < n$ $\longleftarrow$

PRE KLASICKÝ SHELLSORT JE TO:

$1, 2, 2^2, \dots, 2^k < n$

PRE $n = 10$: $1, 2, 4, 8$

1. FÁZA : $a_1 \leftrightarrow a_9$, $a_2 \leftrightarrow a_{10}$

2. FÁZA : $a_1 \leftrightarrow a_5 \leftrightarrow a_9$, $a_2 \leftrightarrow a_6 \leftrightarrow a_{10}$

...

NIEKEDY SA BERIE : $1, \dots, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

TJ. PRE $n = 10$: $1, 2, 5$

UVAŽUJME POSTUPNOSŤ n PRVKOV

POLOVICU MENŠÍCH DÁME NA NEPÁRNE POZÍCIE
POLOVICU VÄČŠÍCH DÁME NA PÁRNE POZÍCIE

KEĎ CHCEM ZATRIEDIŤ i-TY Z TÝCH NAJMENŠÍCH, TAK TEN SA NACHÁDZA NA POZÍCII $2i-1$

ABY SA DOSTAL NA POZÍCIU i MUSÍME VYKONAŤ $i-1$ POSUNOV DOPREDU

ZATRIEDIŤ MENŠIE PRVKY ZABERIE ČAS:
$$\sum_{i=1}^{n/2} (i-1) = \Theta(n^2).$$

UVAŽUJME PRÍRASTKOVÚ SEKVENCIU: $h_k = 2^k - 1$

$\Rightarrow$ DOSTANEME ČASOVÚ ZLOŽITOSŤ $O(n^{3/2})$ V NAJHORŠOM PRÍPADE ! <u>HIBBARD</u> (1962)

SÚ AJ INÉ PRÍRASTKOVÉ SEKVENCIE: <u>SEDJEWICH</u> (1982-4)

$$h_k = 2.4^k - 9.2^k + 9$$
$$h_k = 4^{k+1} + 2.2^k + 1$$

$\Rightarrow$ NAJHORŠÍ PRÍPAD: $O(n^{4/3})$

NAJRÝCHLEJŠÍ SHELLSORT VYMYSLEL <u>PRATT</u>: $O(n \log^2 n)$

$h_{ij} = 2^i 3^j$ (V PRAXI SA NEPOUŽÍVA)

POSTUPNE PRECHÁDZAME i A j TAK, ABY $i+j = 0, 1, \ldots$

$\Rightarrow 1, 2, 3, 2^2, 2\cdot3, 3^2, 2^3, 2^2\cdot3, 2\cdot3^2, 3^3, \ldots$

V KAŽDEJ FÁZE POROVNÁME IBA KAŽDÝ PRVOK S PREDCH.

18.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

1. FÁZA: $a_1, a_{1+h}, \dots$
$a_2, a_{2+h}, \dots$
$\dots$
$a_h, a_{2h}, \dots$

$\}$ h POSTUPNOSTÍ

CELKOM h POSTUPNOSTÍ, KAŽDÁ DĹŽKY $\frac{n}{h}$
KAŽDÚ TRIEDIM INSERTION SORTOM
OČAKÁVANÝ POČET INVERZIÍ V 1 POSTUPNOSTI
JE $\frac{1}{2}\binom{n/h}{2} \Rightarrow$ CELKOVÝ POČET (OČ.):

$$\underline{\underline{\frac{h}{2}\binom{n/h}{2}}} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\frac{n}{h}\left(\frac{n}{h}-1\right)}{2} \sim \frac{n^2}{4h}$$

... OČ. ZLOŽITOSŤ 1. FÁZY

2. FÁZA: INVERZIE MÔŽU BYŤ IBA MEDZI
PRVKAMI RÔZNYCH POSTUPNOSTÍ

VEZMEM VŠETKY DVOJICE: TÝCH JE $\binom{h}{2}$
OČAKÁVANÝ POČET INVERZIÍ JE
$\binom{h}{2}$ · POČET INVERZIÍ V POSTUPNOSTI, KTORÁ
JE TVORENÁ JEDNOU DVOJICOU

MÁ DĹŽKU $2 \cdot \frac{n}{h}$ $\dots \Rightarrow \dfrac{A_{2\frac{n}{h}}}{\binom{2n/h}{n/h}}$

CHCEME SPOČÍTAŤ: $\binom{h}{2} \dfrac{A_{2\frac{n}{h}}}{\binom{2n/h}{n/h}} = \binom{h}{2} \dfrac{\frac{n}{h} 2^{2n/h-2}}{\binom{2n/h}{n/h}} =$

$$\binom{n}{k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}$$

DOSTANEME: $$\binom{h}{2} \frac{\frac{n}{h} 2^{2n/h-2}}{\sqrt{\frac{h}{\pi n}}\, 2^{2n/h}} = \frac{h(h-1)}{2} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{n}{h}\right)^{3/2} \sim$$

$$\sim \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{8} h^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}}_{\text{ZLOŽITOSŤ 2. FÁZE}}$$

CELKOM: $$\frac{n^2}{4h} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} h^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}} = f(n,h)$$

PRE AKÉ h NADOBÚDA MINIMUM?

$$\frac{\partial f(n,h)}{\partial h} = -\frac{n^2}{4}\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{8} n^{3/2} \frac{1}{\sqrt{h}} = 0 \quad / \cdot 16h^2$$

$$-4n^2 + \sqrt{\pi}\, n^{3/2} h^{3/2} = 0$$

$$h^{3/2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n^{1/2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} n}$$

$$f(n,h) = \frac{n^2}{4\sqrt[3]{\frac{16}{\pi} n}} + \frac{\sqrt{\pi}}{8} \cdot \sqrt[6]{\frac{16}{\pi} n}\, \sqrt{n} =$$

$$= \text{const} \cdot n^{2-\frac{1}{3}} + \text{const} \cdot n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}} = O(n^{5/3})$$

18.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

PRE 1, g, h : KNUTH (1997)

KEĎ ZVOLÍME $g = \Theta(n^{7/15})$, $h = \Theta(h^{1/5})$

$\Rightarrow$ OČ. ČAS $O(n^{23/15})$

JIANG, LI, VITÁNYI (1999):

OČAKÁVANÁ ZLOŽITOSŤ p-STUPŇOVÉHO SHELLSORTU JE $\Omega(p n^{1+\frac{1}{p}})$ PRE $\forall p \leq \log n$

PRE $p = \log n$ DOSIAHNEME $\Omega(n \log n)$.

QUICKSORT TRIEDIME $\pi \in S_n$

$$T(n) = 1 + n + T(k-1) + T(n-k)$$

PIVOT MÁ HODNOTU k

NAJHORŠÍ ČAS:

$$T(n) = 1 + n + T(n-1) \quad \dots \quad O(n^2)$$

OČAKÁVANÝ ČAS:

$$ET(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + n + ET(k-1) + ET(n-k)\right) =$$

$$= 1 + n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ET(k-1) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ET(n-k) =$$

$$= 1 + n + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} ET(k-1) \qquad / \cdot n$$

$$n\,ET(n) = (1+n)n + 2\sum_{k=0}^{n-1} ET(k)$$
$$(n+1)ET(n+1) = (2+n)(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n} ET(k)$$

$$(n+1)ET(n+1) - n\,ET(n) = (n+2)(n+1) - (n+1)n + 2ET(n)$$

$$ET(n+1) = \frac{n+2}{n+1} ET(n) + 2$$

$$ET(n) = 2\sum_{i=2}^{n} \frac{n+1}{i+1} = 2(n+1)\left(H_{n+1} - \frac{3}{2}\right)$$

PRETOŽE $ET(0) = ET(1) = 0$

$$\Rightarrow ET(n) \sim n \log n$$

ROZPTYL QUICKSORTU JE $\sim n^2$.

INÝ SPÔSOB:

$$ET(n) = n+1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ET(k)$$

PRE POSTUPNOSŤ $c_0, c_1, \dots$

DEFINUJEME $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

UVAŽUJME $c_n = ET(n)$.

18.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$c_n = n+1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}$$

$$n c_n = n(n+1) + 2 \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}$$

$$n c_n z^n = n(n+1) z^n + 2 \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} z^n$$

$$\sum_n n c_n z^n = \sum_n n(n+1) z^n + 2 \sum_n \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} z^n$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$C'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n z^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n z^n = z \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{z}{1-z} \right) = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

25.11.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALG.

DOPÍSAŤ POZNÁMKY Z 25.11.2009 PRVÝCH 30 min.

RIEŠENIE DIF. ROVNICE:

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

HOMOGÉNNA ROVNICA: $y' + a(x)\,y = 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -a(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx$$

$$\ln y = -\int a(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-\int a(x)\,dx}$$

METÓDA VARIÁCIE KONŠTÁNT

PREDP., ŽE $y = Q(x)\,e^{-\int a(x)\,dx}$, KDE $Q(x)$ MUSÍME DOPOČÍTAŤ.

$$y' = Q'(x)\,e^{-\int a(x)\,dx} - Q(x)\,a(x)\,e^{-\int a(x)\,dx}$$

DOSADÍME DO $y' + a(x)\,y = b(x)$:

$$Q'(x)\,e^{-\int a(x)\,dx} - Q(x)\,a(x)\,e^{-\int a(x)\,dx} + a(x)\,Q(x)\,e^{-\int a(x)\,dx} = b(x)$$

$$\Rightarrow Q'(x)\cdot e^{-\int a(x)\,dx} = b(x)$$

$$Q'(x) = b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}$$

$$\underline{\underline{Q(x) = \int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = e^{-\int a(x)\,dx}\int b(x)\,e^{\int a(x)\,dx}\,dx}}$$

$$y' + a(x)\, y = b(x)$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int a(x)\,dx} \int b(x) e^{\int a(x)\,dx}\, dx$$

$$z\, C'(z) = \frac{2z}{(1-z)^3} + \frac{2z}{1-z} C(z) \qquad \left(\text{Z MINULEJ PREDNÁŠKY} \right)$$

$$C'(z) = \underbrace{\frac{2}{(1-z)^3}}_{b(z)} + \underbrace{\frac{2}{1-z}}_{-a(z)} C(z)$$

NAJSKÔR SPOČÍTAME $-\int a(z)\,dz = \int \frac{2}{1-z}\,dz = \ln \frac{1}{(1-z)^2}$

$$\Rightarrow e^{-\int a(z)\,dz} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \int \frac{2}{(1-z)^3} (1-z)^2\, dz =$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2} \int \frac{2}{1-z}\, dz = \frac{2}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z}$$

$$C_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{... PROBLEMATICKÉ VYPOČÍTAŤ !}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right)' =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i z^{i-1} = \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} i z^i$$

25. 11. 2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$\ln \frac{1}{1-z} = -\ln(1-z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{2}{z} \sum_{i=0}^{\infty} i z^i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} z^j =$$

$$= 2 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i z^i}_{A(z)} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} z^j}_{B(z)} =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) z^n =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (n-k) \frac{1}{k+1} \right) z^n =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)-(k+1)}{k+1} \right) z^n =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \right) \right) z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2(n+1)\left(H_{n+1} - 1\right)}_{c_n} z^n$$

$$ET_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[(n+1) + ET_{n-k} + ET_k \right]$$

$\uparrow$ $P(\text{PIVOT} = k)$

KEĎ BERIEME PIVOT = MEDIÁN Z 3

$\Rightarrow$ ZMENÍ SA $P(\text{PIVOT} = k)$

AKO VYBRAŤ 3 PRVKY Z n TAK, ŽE MEDIÁN $= k$?

$$P(\text{PIVOT} = k) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}$$

PROBLÉM : TÚTO PRAVDEPODOBNOSŤ NEMÔŽEME VYTKNÚŤ, PRETOŽE OBSAHUJE k

$$ET_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}} \left(n+1 + ET_{n-k} + ET_{k-1}\right)$$

VYJDE ROVNICA :

$$C'''(z) = \frac{24}{(1-z)^5} + 12\,\frac{C'(z)}{(1-z)^2}$$

A DÁ SA SPOČÍTAŤ

$$C_n = \frac{12}{7}(n+1)\left(H_{n+1} - \frac{23}{14}\right)$$

25.11.2009 Ue
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMOV

MERGESORT

$$T_n = 2T_{n/2} + n, \quad T_1 = 0$$

$n = 2^k$,

$C_k = T_{2^k}$: $\quad C_k = 2C_{k-1} + 2^k \quad / \cdot z^k \; \sum_k$

$$\sum_{k\geq 1} c_k z^k = 2z \sum_{k\geq 1} c_{k-1} z^{k-1} + \sum_{k\geq 1} 2^k z^k$$

$$C(z) = 2z\,C(z) + \frac{2z}{1-2z}$$

$$C(z) = \frac{2z}{(1-2z)^2} \Rightarrow C_k = \underline{\underline{k\,2^k}} = \log n \cdot n$$

ZHRNUTIE VYTV. FCIÍ. N.V.

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

$$p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

$Alt(p)$: $\quad G_X(z) = q + pz, \quad q = 1-p$

$Bi(p, n)$: $\quad G_X(z) = (q+pz)^n$

$Poiss(\lambda)$: $\quad G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$

VÝPOČET MOMENTOV

ROZDELENIE SÚČTU NEZ. N.V.

X, Y NEZÁVISLÉ, $Z = X + Y$, $p_n = P(X=n)$, $q_n = P(Y=n)$

$$P(Z=k) = \sum_{n+m=k} P(X=n, Y=m) =$$
$$= \sum_{n+m=k} p_n \cdot q_m = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j} \quad \text{PRE } n,m \geq 0$$

$$G_X(z) G_Y(z) = \sum_n p_n z^n \sum_m q_m z^m =$$
$$= \sum_n \sum_m p_n q_m z^{n+m} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j} \right) z^k$$

$X_1 + X_2 + \dots + X_N$, X_i i.i.d. $\sim G$, $N \sim G_N$

$$= G_{X_1 + \dots + X_N}(z) = G_N(G(z))$$

ZMES ROZDELENÍ $X_0, X_1, \dots$ $P(X_n = k) = p_{nk}$

$Y \dots$ $P(Y=k) = q_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_{nk}$, $\alpha_n \geq 0, \sum \alpha_n = 1$

$$G_Y(z) = \sum_k q_k z^k = \sum_k \sum_n \alpha_n p_{nk} z^k =$$
$$= \sum_n \alpha_n \sum_k p_{nk} z^k = \sum_n \alpha_n G_{X_n}(z)$$

NEZÁVISLOSŤ

$$G_{X,Y}(z_1, z_2) = G_X(z_1) G_Y(z_2)$$

LIMITNÉ ROZDELENIE

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

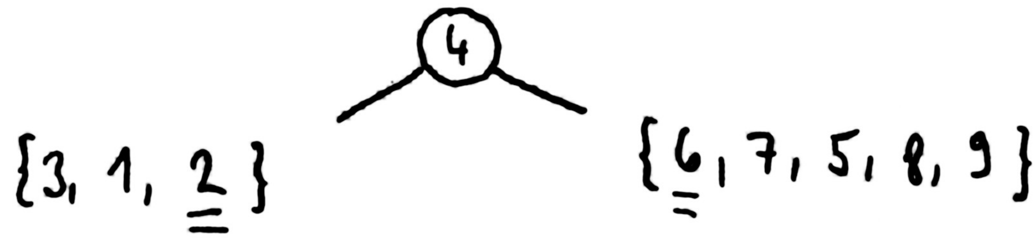
PRE $p = \frac{\lambda}{n}$, $n \to \infty$

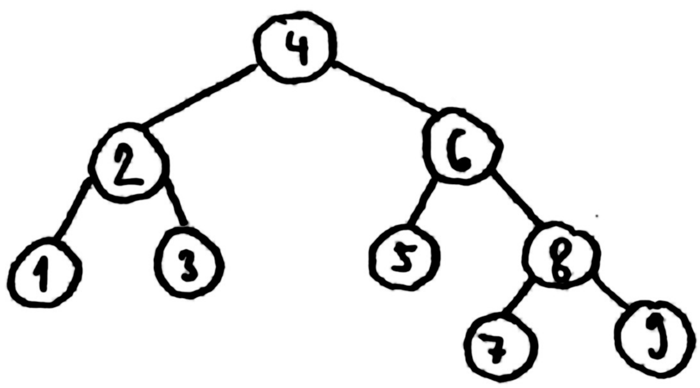
02.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

RANDOMIZOVANÝ QUICKSORT

3, 4, 6, 1, 2, 7, 5, 8, 9





VIEME URČIŤ, KTORÉ PRVKY SA S KTORÝMI POROVNALI

i A j SA POROVNALI $\Leftrightarrow$ KEĎ V STROME JE JEDEN Z NICH PREDOK DRUHÉHO.

X_{ij} NÁHODNÁ VELIČINA: $\begin{cases} 1 & i \text{ A } j \text{ SA POROVNÁVAJÚ} \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$

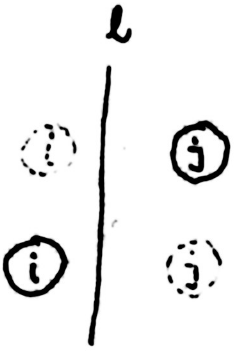
POČET POROVNANÍ: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} X_{ij}$

OČ. POČET POROVNANÍ: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} EX_{ij}$

$EX_{ij} = P(X_{ij} = 1) =: p_{ij}$

VYTVORME POSTUPNOSŤ PREHĽ. DO ŠÍRKY:

$\pi = (4, 2, 6, 1, 3, 5, 8, 7, 9)$



i A j SA POROVNÁVAJÚ $\Leftrightarrow$

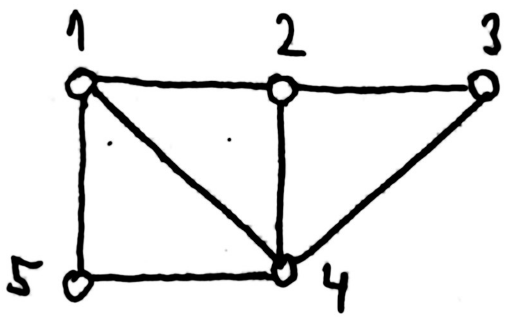
i ALEBO j SA V π VYSKYTUJE SKÔR NEŽ KAŽDÉ l, PRE KTORÉ $i < l < j$

p_{ij} = P(i LEŽÍ V π AKO PRVÉ Z PRVKOV $i, i+1, \dots, j$) + P(j —"—)

$$= 2 \cdot \frac{1}{j-i+1}$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \frac{1}{j-i+1} \leq 2n H_n .$$

FARBENIE GRAFOV



k = POČET FARIEB = 3

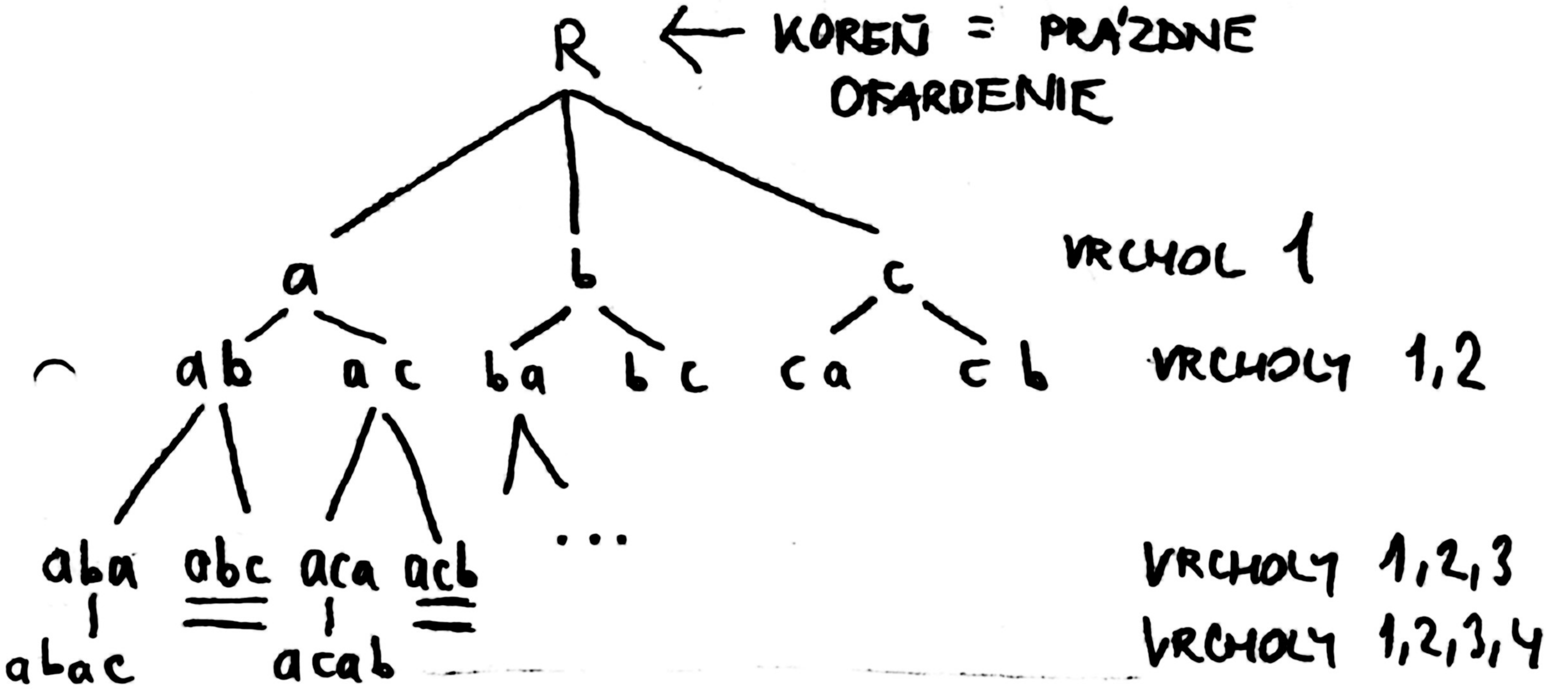
JE TO NP-ÚPLNÝ PROBL.

KROK 0 : VEZMEME PRÁZDNY PODGRAF S PRÁZDNYM OFARBENÍM ≡ KOREŇ STROMU R

02.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ AN. ALGORITMY

KROK 1 : GRAF TVORENÝ VRCHOLOM 1



KROK 2 : VRCHOLY 1, 2

KROK 3 : VRCHOLY 1, 2, 3

KROK 4 : VRCHOLY 1, 2, 3, 4

KROK 5 : —||— 1,...,5 → abacb, acabc, ...

TENTO STROM PREHĽADÁVAME DO HĹBKY
→ BACKTRACKING

ZLOŽITOSŤ JE ÚMERNÁ POČTU VRCHOLOV V STROME

NAJMENŠÍ STROM – PRE ÚPLNÝ GRAF
MÁ $1 + K + K(K-1) + K(K-1)(K-2) + \dots$

K JE KONŠTANTA $\Rightarrow O(1)$

NAJHORŠÍ PRÍPAD : KOMPLETNE NESÚVISLÝ GRAF

$$1 + K + K^2 + \dots + K^n, \quad n = \text{POČET VRCHOLOV}$$

$\equiv$ EXPONENCIÁLNA ZLOŽITOSŤ

DÁ SA UKÁZAŤ, ŽE $\chi(G) \geq \dfrac{n}{2(1+\varepsilon)\log n}$

KDE ε JE ASI HUSTOTA $\frac{m}{n}$ ... ?!

VEZMIME SI L-TÚ HLADINU STROMU

... ZODPOVEDÁ OFARBENIAM $H_L(G)$

KDE $H_L(G)$ OZNAČUJE $G[\{1, 2, \dots, L\}]$

$B(G)$ ... POČET VRCHOLOV V STROME OFARBENÍ

$$K! \leq B(G) \leq K^n$$

$$E\,B(G) = B_n = \sum_{G \in \mathcal{G}_n} B(G) \cdot 2^{-\binom{n}{2}}$$

<u>LEMMA 1</u> : NECH C JE JEDNO Z K^L MOŽNÝCH OFARBENÍ ABSTRAKTNÝCH BODOV $1, 2, \dots, L$ K FARBAMI.

OZNAČME $Q(L)$ POČET GRAFOV G S L VRCHOLMI, PRE KT. JE C SPRÁVNE OFARBENIE.

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

POTOM $Q(L) \leq 2^{L^2(1-\frac{1}{k})/2}$.

DŮKAZ: OFARBENIE ROZDELUJE VRCHOLY DO k TRIED VEĽKOSTÍ $s_1, \ldots, s_k$.
OFARBENIE JE SPRÁVNE, KEĎ HRANY VEDÚ IBA MEDZI RÔZNYMI TRIEDAMI.
MAXIMÁLNY POČET HRÁN $\sum_{1 \leq i < j \leq k} s_i s_j = \frac{1}{2}\left(\sum_i^n \sum_j^n - \sum_{i=j}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(L^2 - \sum_{i=1}^k s_i^2\right)$.

POČET GRAFOV JE TEDA $2^{\frac{1}{2}\left(L^2 - \sum_{i=1}^k s_i^2\right)}$

CHCEME ODHADNÚŤ ZHORA, T.J.
CHCEME ODHADNÚŤ $\sum_{i=1}^k s_i^2$ ZDOLA

MINIMUM $\Leftrightarrow s_i = \frac{L}{k} \ \forall i$

$\Rightarrow \ \leq 2^{\frac{1}{2}\left(L^2 - k \cdot \frac{L^2}{k^2}\right)}$

$\square$

<u>LEMMA 2</u>: NECH $P(K, G)$ JE POČET "SPRÁVNYCH" OFARBENÍ GRAFU G K FARBAMI A NECH $M_L(k) = \sum_{G \in \mathcal{G}_L} P(K, G)$.

$M_L(K) \leq K^L \, 2^{\frac{1}{2}L^2(1-\frac{1}{k})}$

DŮKAZ. VEZMIME SI OPÄŤ C OFARBENIE L VRCHOLOV K FARBAMI.

$$f(C,G) = \begin{cases} 1 & \text{KEĎ } C \text{ JE SPRÁVNE OF. } G \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

$$M_L(K) = \sum_{G \in \mathcal{G}_L} P(K,G) = \sum_{G \in \mathcal{G}_L} \sum_C f(C,G) =$$

$$= \sum_C \sum_{G \in \mathcal{G}_L} f(C,G) \leq \sum_C \max_C \left(\sum_{G \in \mathcal{G}_L} f(C,G) \right)$$

$$\leq K^L \cdot Q(L). \quad \square$$

$$B_n = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} B(G) =$$

$$= 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} \sum_{L=0}^{n} P(K, H_L(G)) =$$

$$= 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} \sum_{H \in \mathcal{G}_L} \sum_{\{G : H_L(G) = H\}} P(K,H)$$

POČET GRAFOV $\in \mathcal{G}_n$ OBSAHUJÚCICH L VRCHOLOVÝ PODGRAF JE $2^{\binom{n}{2} - \binom{L}{2}}$

$$= 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{L=0}^{n} \sum_{H \in \mathcal{G}_L} P(K,H) \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{L}{2}} =$$

$$= \sum_{L=0}^{n} 2^{-\binom{L}{2}} \underbrace{\left(\sum_{H \in \mathcal{G}_L} P(K,H) \right)}_{= M_L(K)}$$

$$\leq \sum_{L=0}^{n} 2^{-\binom{L}{2}} K^L 2^{\frac{1}{2} L^2 (1 - \frac{1}{K})} =$$

$$= \sum_{L=0}^{n} K^L 2^{\frac{L}{2}} 2^{-\frac{L^2}{2K}} \leq \sum_{L=0}^{\infty} K^L 2^{\frac{L}{2}} 2^{-\frac{L^2}{2K}} \to h(K) < \infty$$

$$h(3) = 197$$

$$\Rightarrow B_n \leq h(K) \Rightarrow \underline{\underline{B_n = O(1)}}. \quad \square \qquad h(5) = 755\,000$$

09.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMU

TRANZITÍVNY UZÁVER GRAFOV (A REFLEXÍVNY)

$G = (V, E) \longrightarrow G^* = (V, E^*)$

$E^* = \{(u,v) \mid \exists\, u \rightsquigarrow_G v\}$

$(u,u) \in E^*$

G JE ORIENTOVANÝ, REPREZENTOVANÝ ZOZNAMOM NÁSLEDNÍKOV

PREDPOKLADÁME, ŽE G JE ACYKLICKÝ $\Rightarrow$ MÁ TOPOLOGICKÉ USPORIADANIE

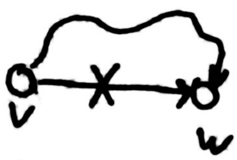
$out(v)$ = ZOZNAM NÁSLEDNÍKOV $= \{w \in V : (v,w) \in E\}$

PREDPOKLADÁME, ŽE JE ZOTRIEDENÝ VZOSTUPNE

$out^*(v)$ = TRANZITÍVNY A REFL. UZÁVER v

$= \{w \in V : \exists\, v \rightsquigarrow_G w\} \cup \{v\}$

$out^{red}(v)$ = TRANZITÍVNY REDUKT =



$\{w \in out(v) : \neg\exists p : v \rightsquigarrow_G w : |p| \geq 2\}$

$v \notin out^{red}(v)$

$G \longrightarrow G^{red} = (V, E^{red})$

ZREJME $(G^{red})^* = G^*$

$out(v) = \{w_1 < w_2 < \ldots < w_s\}$

$out^*(v) = \{v\} \cup out^*(w_1) \cup \ldots \cup out^*(w_s)$.

$$w_i \notin out^{red}(v) \iff w_i \in out^*(w_1) \cup \dots \cup out^*(w_{i-1})$$

$$\iff out^*(w_i) \subseteq out^*(w_1) \cup \dots \cup out^*(w_{i-1})$$

$$out^{red}(v) = \{ w_i \in out(v) : w_i \notin out^*(w_1) \cup \dots \cup out^*(w_{i-1}) \}$$

ALGORITMUS $\quad V = \{1, 2, \dots, n\} \leftarrow$ TOP. USPORIADANÉ

for $v = n$ downto 1 do
  $out^*(v) := \{v\}$ BITVECTOR
  $out^{red}(v) := \emptyset$ BITVECTOR
  for $w \in out(v)$ do (V RASTÚCOM PORADÍ)
    if $w \notin out^*(v)$ then $O(1)$

VYKONÁ SA $|E^{red}| \times$
      $out^*(v) := out^*(v) \cup out^*(w)$ BITVECTOR SPOJÁK $O(n)$
      $out^{red}(v) := \underbrace{out^{red}(v) \cup \{w\}}_{O(1)}$
    endif
  enddo
  PŘEVOD BITVECTORU NA SPOJÁK
enddo

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ : $|E^{red}| \times O(n) + O(n^2)$

NAJHORŠÍ PRÍPAD : $|E^{red}| = \Theta(n^2)$

PRIEMERNÝ PRÍPAD : $E(|E^{red}|) = \Theta(n \log n)$

OČAKÁVANÝ ČAS $O(n^2 \log n)$.

09.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

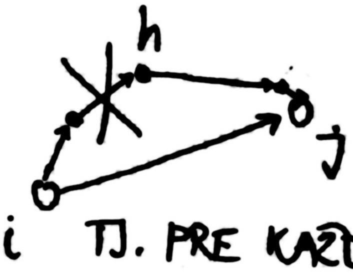
$G_{n,p}$ $\quad n$ = POČET VRCHOLOV, $\quad p$ = PR. HRANY

$$\forall i : \quad X_j(G) = \begin{cases} 1 & \text{KEĎ } (i,j) \in E^{red} \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$$

$$\sum_j X_j(G) = |out^{red}(i)|$$

$$E\Big(\sum_j X_j(G)\Big) = \sum_j E X_j(G) =$$

$$= \sum_j P\big((i,j) \in E^{red}\big).$$



TJ. PRE KAŽDÉ $i < h < j$ BUĎ $i \not\to h$, ALEBO $h \not\to j$

$$P\big((i,j) \in E^{red}\big) \leq$$

MY SI TO ZJEDNODUŠÍME NA: BUĎ $(i,h) \notin E, \ldots$

$$\leq P\big((i,j) \in E \;\&\; \forall h : i < h < j$$

$$\text{BUĎ } (i,h) \notin E, \text{ ALEBO } (h,j) \notin E\big) =$$

$$= P\big((i,j) \in E\big) \prod_{i<h<j} \Big[P\big((i,h) \notin E\big) + P\big((h,j) \notin E\big) -$$

$$- P\big((i,h) \notin E \;\&\; (h,j) \notin E\big)\Big] =$$

$$= p \cdot \prod_{i<h<j} \left[(1-p) + (1-p) - (1-p)^2\right] =$$

$$= p \prod_{i<h<j} (1-p^2) = \underline{\underline{p\,(1-p^2)^{j-i-1}}}$$

$$EX_j \leq p(1-p^2)^{j-i-1} \quad \forall i < j$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} p(1-p^2)^{j-i-1} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-2} p(1-p^2)^{j} = p\,\frac{1-(1-p^2)^{n-1}}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1-(1-p^2)^{n-1}}{p}}}$$

$\leq \sqrt{n}$ PRE $\forall p$.

NECH $p \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$: $\frac{1-(1-p^2)^{n-1}}{p} \leq \frac{1}{p} \leq \sqrt{n}$

NECH $p < \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$1-(1-p^2)^{n-1} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k p^{2k} =$$

$$= \cancel{1-1} + \binom{n-1}{1} p^2 - \binom{n-1}{2} p^4 + \binom{n-1}{3} p^6$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} p^{2(n-1)} \leq$$

$$\leq np^2 \underbrace{- \binom{n-1}{2} p^2 + \binom{n-1}{3} p^6}_{\text{KAŽDÁ TAKÁTO DVOJICA } \leq 0} - \dots + (-1)^{n-1} p^{2(n-1)}$$

$$\Rightarrow 1-(1-p^2)^n \leq np^2 \Rightarrow \frac{np^2}{p} = np < \frac{n}{\sqrt{n}} = \underline{\underline{\sqrt{n}}}$$

$$-\binom{n-1}{k} p^{2k} + \binom{n-1}{k+1} p^{2(k+1)} = p^{2k}\left(\binom{n-1}{k+1} p^2 - \binom{n-1}{k}\right) <$$

$$< p^{2k}\left(\binom{n-1}{k+1}\frac{1}{n} - \binom{n-1}{k}\right) = p^{2k}\binom{n-1}{k}\left(\frac{n-k-1}{k+1}\,\frac{1}{n} - 1\right) < 0.$$

09.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVD. ANALÝZA ALGORITMŮ

DOPÍSAŤ POSLEDNÍCH 20 min

$\Rightarrow \forall i \quad E(|out^{red}(i)|) \leq \sqrt{n}$

$\Rightarrow E(|E^{red}|) \leq n\sqrt{n}$

$\Rightarrow$ OČ. ČAS ALGORITMU $\leq n^2\sqrt{n} = \underline{\underline{n^{5/2}}}$.

INÝ ODHAD:

(1) VYPOČÍTAME (ODHADNEME) $E\,\vartheta_n^*$, KDE
$\vartheta_n^* = |out^*(1)[G_{n,p}]|$

(2) ODVODÍME (A POUŽIJEME) VZŤAH

$$E\,\vartheta_n^{red} = \frac{p}{1-p}(n - E\,\vartheta_n^*)$$

KDE $\vartheta_n^{red} = |out^{red}(1)(G_{n,p})|$

(3) ZÍSKAME ODHAD $E|E^{red}| = n\,E\,\vartheta_n^{red}$

$\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \ldots, \vartheta_n^*$ ... MARKOVOVSKÝ REŤAZEC SO STAVMI - POČTY VRCHOLOV V PRÍSL. ϑ_i^*

$P(\vartheta_n^* = l \mid \vartheta_{n-1}^* = l-1) = P($ EXISTUJE $w \in out^*(1)(G_{n-1,p}) : (w,v) \in E) = 1 - P(\forall w \in out^*(1)(G_{n-1,p}) : (w,v) \notin E) = 1 - (1-p)^{l-1}$.

$P(\vartheta_n^* = l \mid \vartheta_{n-1}^* = l) = (1-p)^{l-1}$

$$p_{n,\ell} = P(\vartheta_n^* = \ell) = P(\vartheta_n^* = \ell \mid \vartheta_{n-1}^* = \ell-1) \cdot P(\vartheta_{n-1}^* = \ell-1) + P(\vartheta_n^* = \ell \mid \vartheta_{n-1}^* = \ell) \cdot P(\vartheta_{n-1}^* = \ell)$$

PO DOSAZENÍ:

$$p_{n,\ell} = \left(1-(1-p)^{\ell-1}\right) p_{n-1,\ell-1} + (1-p)^{\ell}\, p_{n-1,\ell} \qquad n>1$$

$$p_{1,1} = 1$$

16.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBN. ANALÝZA ALGORITMOV

$$P(\vartheta_n^* = l) = (1-(1-p)^{l-1})\,P(\vartheta_{n-1}^* = l-1) + (1-p)^l\,P(\vartheta_{n-1}^* = l)$$

OZNAČME $P_{n,l} = P(\vartheta_n^* = l)$, $\lambda_l = 1-(1-p)^l$

T.J. $P_{n,l} = \lambda_{l-1} P_{n-1,l-1} + (1-\lambda_l) P_{n-1,l} \quad n>1$

PRE $n=1$: $P_{11} = 1$.

NECH φ JE REÁLNA FUNKCIA DEF. AKO

$$\varphi(l) = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{\lambda_j}$$

POTOM PRE $\forall n$ JE $E(\varphi(\vartheta_n^*)) = n-1$.

$$E\varphi(\vartheta_n^*) = \sum_{l=1}^{n} \varphi(l) P_{n,l}$$

$$E\varphi(\vartheta_1^*) = \sum_{l=1}^{1} \varphi(l) P_{1,l} = 0\cdot 1 = 0 = 1-1 \quad \checkmark$$

$$E\varphi(\vartheta_n^*) = \sum_{l=1}^{n} \varphi(l) P_{n,l} = \sum_{l=1}^{n} \varphi(l)\left[(1-\lambda_l)P_{n-1,l} + \lambda_{l-1}P_{n-1,l-1}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \varphi(l) P_{n-1,l} - \sum_{l=1}^{n} \varphi(l)\lambda_l P_{n-1,l} +$$

(*) $$+ \sum_{l=1}^{n} \varphi(l)\lambda_{l-1} P_{n-1,l-1}$$

(IND. PREDP.)

$$P_{n-1,n} = 0 \Rightarrow \sum_{l=1}^{n} \varphi(l) P_{n-1,l} = E\varphi(\vartheta_{n-1}^*) = n-2$$

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi(l)\,\lambda_{l-1}\,P_{n-1,\,l-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(l+1)\,\lambda_l\,P_{n-1,\,l}$$

$P_{n-1,\,0} = 0 \Rightarrow$ DOLNÚ MEZ l MÔŽEME ZMENIŤ NA 1

$$\varphi(l+1) = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\lambda_j} = \varphi(l) + \frac{1}{\lambda_l}$$

$$\Rightarrow (*) = (n-2) - \sum_{l=1}^{n-1} \varphi(l)\,\lambda_l\,P_{n-1,\,l} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \left[\varphi(l) + \frac{1}{\lambda_l}\right] \lambda_l\,P_{n-1,\,l}$$

$$= n-2 + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_l}\,\lambda_l\,P_{n-1,\,l} = n-2+1 = \underline{\underline{n-1}}\,. \quad \square$$

$$\varphi(l) = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{1-(1-p)^j} =$$

$$= \frac{1}{p} + \sum_{j=2}^{l-1} \frac{1}{1-(1-p)^j} \leq \frac{1}{p} + \sum_{j=2}^{l-1} \int_{j-1}^{j} \frac{dx}{1-(1-p)^x} \quad (**)$$

$\dfrac{1}{1-(1-p)^j}$ JE NERASTÚCA (KLESAJÚCA) PODĽA j

$$\Rightarrow \int_{j-1}^{j} \frac{dx}{1-(1-p)^x} \geq \frac{1}{1-(1-p)^j} \cdot (j-(j-1))$$

$$\Rightarrow (**) = \frac{1}{p} + \int_{1}^{l-1} \frac{dx}{1-(1-p)^x}$$

$$\int \frac{dx}{1-(1-p)^x} = x - \frac{\ln(1-(1-p)^x)}{\ln(1-p)}$$

16.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALG.

$$(**) = \frac{1}{p} + l - 1 - \frac{\ln\left(1-(1-p)^{l-1}\right)}{\ln(1-p)} - 1$$

$$+ \frac{\ln(1-(1-p))}{\ln(1-p)} \leq$$

$$\leq l - 2 + \frac{\ln(1-p) + p\ln p}{p\ln(1-p)} \leq$$

$$\leq l - 2 + \frac{1+|\ln p|}{p}$$

STAČÍ UKÁZAŤ $\frac{p\ln p}{\ln(1-p)} \leq |\ln p|$.

$$\frac{p\ln p}{\ln(1-p)} = \frac{p\ln p}{-p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{3}-\dots} = -\frac{\ln p}{\underbrace{1+\frac{p}{2}+\frac{p^2}{3}+\dots}_{\geq 1}}$$

$$\leq \frac{-\ln p}{1} = \underline{\underline{|\ln p|}} \qquad p \in (0,1)$$

$$\Rightarrow (**) \leq l - 2 + \frac{1+|\ln p|}{p} =: \phi(l).$$

$$n-1 = E\varphi(\mathcal{D}_n^*) = \sum_{l=1}^{n} \varphi(l)\, P_{n,l} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n} \phi(l)\cdot P_{n,l} = E\phi(\mathcal{D}_n^*) =$$

$$= E\left(\mathcal{D}_n^* - 2 + \frac{1+|\ln p|}{p}\right) = (E\mathcal{D}_n^*) - 2 + \frac{1+|\ln p|}{p}$$

$$\Rightarrow \quad E\mathcal{D}_n^* \geq \underline{\underline{n+1}} - \frac{1+|\ln p|}{p}$$

ĎALEJ CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE :

$$E(\mathcal{D}_n^{red}) = \frac{p}{1-p}\left(n - E(\mathcal{D}_n^*)\right)$$

$$P((1,n)\in E^*) = P\Big(\text{EXISTUJE } w \in out^*_{n-1}(1) \text{ TAKÉ, ŽE } (w,n)\in E\Big)$$

$$P((1,n)\in E^*) = \sum_{l=1}^{n-1} P\left((1,n)\in E^* \,\middle|\, \mathcal{D}^*_{n-1}=l\right)\cdot$$
$$\cdot P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l) = \sum_{l=1}^{n-1} P\left(\mathcal{D}_n^*=l+1 \,\middle|\, \mathcal{D}^*_{n-1}=l\right)\cdot$$
$$\cdot P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l) = \sum_{l=1}^{n-1} \underline{\underline{\left(1-(1-p)^l\right) P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l)}}$$

$$P((1,n)\in E^{red}) = P((1,n)\in E)\cdot$$
$$P\left(\forall w\in out^*_{n-1}(1) : (w,n)\notin E\right) =$$
$$= p\cdot \sum_{l=1}^{n-1} P\left(\mathcal{D}_n^*=l \,\middle|\, \mathcal{D}^*_{n-1}=l\right) P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l) =$$
$$= p \sum_{l=1}^{n-1} (1-p)^{l-1} P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l) =$$
$$= \frac{p}{1-p}\cdot \sum_{l=1}^{n-1} \left(1-1+(1-p)^l\right) P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l) =$$
$$= \frac{p}{1-p}\left(1 - \sum_{l=1}^{n-1}\left(1-(1-p)^l\right) P(\mathcal{D}^*_{n-1}=l)\right)$$
$$\Rightarrow P((1,n)\in E^{red}) = \frac{p}{1-p}\left(1 - P((1,n)\in E^*)\right).$$

16.12.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÍZA ALG.

DOKÁZANÝ VZŤAH PLATÍ I PRE $j = 2, 3, \dots, n$.

DEF. $X_j = \begin{cases} 1 & \text{KEĎ } (1,j) \in E^{red} \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$

$$\mathcal{D}_n^{red} = \sum_{j=2}^n X_j, \quad E\mathcal{D}_n^{red} = \sum_{j=2}^n EX_j =$$

$$= \sum_{j=2}^n P\left((1,j) \in E^{red}\right) =$$

$$= \sum_{j=2}^n \frac{p}{1-p}\left(1 - P((1,j) \in E^*)\right) =$$

$$= \frac{p}{1-p}\left[(n-1) - \sum_{j=2}^n P((1,j) \in E^*)\right] =$$

$$= \frac{p}{1-p}\left[\underline{\underline{n - E\mathcal{D}_n^*}}\right]$$

$$E\mathcal{D}_n^{red} = \frac{p}{1-p}\left(n - E\mathcal{D}_n^*\right)$$

$$E(|E^{red}|) = E\left(\mathcal{D}^{red}(1) + \mathcal{D}^{red}(2) + \dots + \mathcal{D}^{red}(n)\right) \leq$$

$$\leq n\, E\mathcal{D}_n^{red} = n\frac{p}{1-p}\left(n - E\mathcal{D}_n^*\right)$$

$$E\mathcal{D}_n^* \geq n + 1 - \frac{1 + |\ln p|}{p}$$

$$\Rightarrow E(|E^{red}|) \leq n\frac{p}{1-p}\left[n - \left(n + 1 - \frac{1+|\ln p|}{p}\right)\right] =$$

$$= n\frac{p}{1-p}\left(-1 + \frac{1+|\ln p|}{p}\right) = n\frac{\cancel{p}}{1-p}\,\frac{1+|\ln p| - p}{\cancel{p}} =$$

$$= n\,\underline{\underline{\left(1 + \frac{|\ln p|}{1-p}\right)}}$$

$$\ln p = \ln(1-(1-p))$$

$$\Rightarrow n\left(1+\frac{|\ln p|}{1-p}\right) = n\left(1+\frac{(1-p)+\frac{(1-p)^2}{2}+\frac{(1-p)^3}{3}+\cdots}{1-p}\right)$$

$$\leq n\left(1+1+|\ln p|\right) = \underline{\underline{n(|\ln p|+2)}}$$

$$E(|E^{red}|) \leq n(|\ln p|+2)$$

(a) $p > \frac{\ln n}{n} \Rightarrow |\ln p| < \left|\ln \frac{\ln n}{n}\right| =$

$$= |\ln \ln n - \ln n| \leq \underline{\underline{\ln n}}$$

(b) $p \leq \frac{\ln n}{n}$

$$|E^{red}| \leq |E| \Rightarrow E(|E^{red}|) \leq E(|E|) \leq pn^2 \leq \underline{\underline{n \ln n}}$$

$$\Rightarrow E(|E^{red}|) = O(n \log n).$$

$\Rightarrow$ ZLOŽITOSŤ ALGORITMU $O(n^2 \log n)$

ZLOŽITEJŠOU ANALÝZOU SA DÁ UKÁZAŤ ZLOŽITOSŤ ALGORITMU $O(n^2)$

06.01.2010 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPOD. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$P_{nl} = (1-p)^{l} P_{n-1,l} + \left(1-(1-p)^{l-1}\right) P_{n-1,l-1}$$

PRIČOM $P_{11} = 1$.

DÁ SA SPOČÍTAŤ, ŽE:

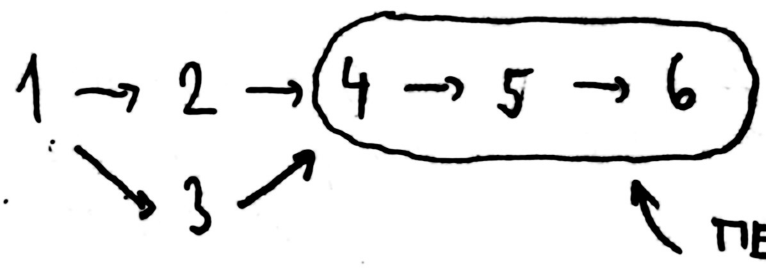
$$P_{nl} = (1-p)^{n-l} \prod_{i=1}^{l-1} \left(1-(1-p)^{n-i}\right) \qquad \text{(INDUKCIOU)}$$

$$\Rightarrow E(\vartheta_n^*(1)) = n - \sum_{j=1}^{n-1} (1-p)^j \sum_{l=1}^{j} \prod_{i=1}^{l-1} \left(1-(1-p)^{j-i}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \prod_{i=1}^{l-1} \left(1-(1-p)^{n-i}\right) =: a_n$$

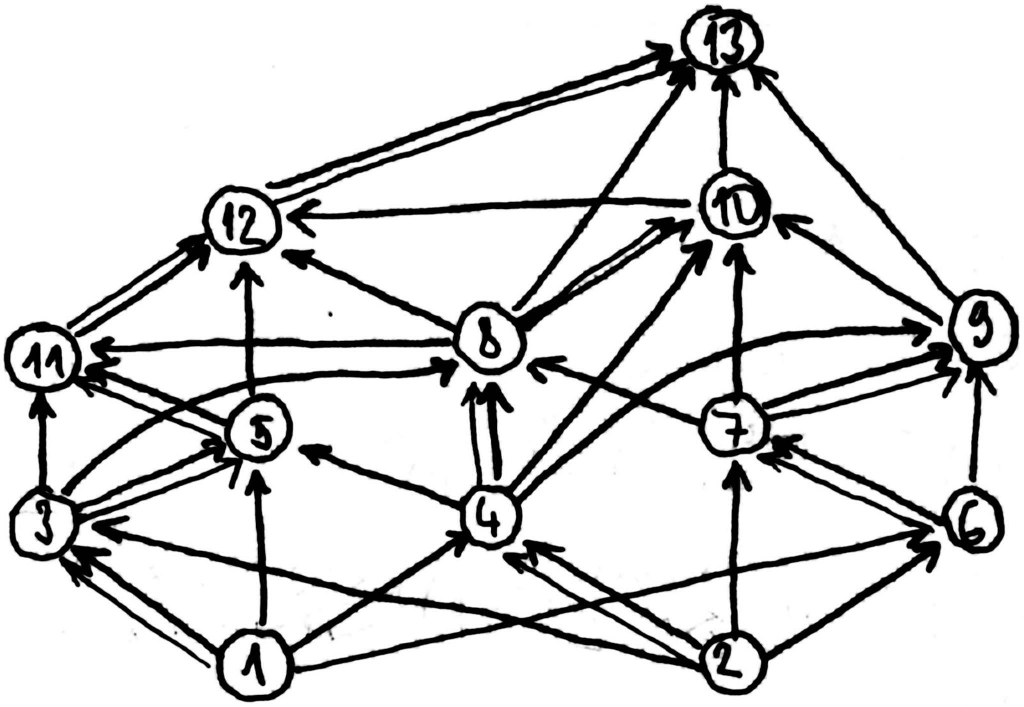
PRE $p = \frac{(\ln n)^\alpha}{n}$ A $\alpha < 1$ JE OČAKÁVANÁ DOBA VÝPOČTU ALGORITMU $O(n^2)$. POUŽIJE SA:

$$E(\vartheta_n^{red}(1)) = \frac{p}{1-p}(n - a_n).$$



TIETO VRCHOLY SA PRIDÁVAJÚ OPAKOVANE...

$$out^*(3) = \{3\} \cup out^*(4)$$
$$out^*(2) = \{2\} \cup out^*(4)$$
$$out^*(1) = \{1\} \cup out^*(2) \cup out^*(3)$$



(PREDP. TOP. USP.)

(1) ROZKLAD NA DISJUNKTNÉ REŤAZCE (HLADOVO)

$z_1: 1 \to 3 \to 5 \to 11 \to 12 \to 13$

$z_2: 2 \to 4 \to 8 \to 10$

$z_3: 6 \to 7 \to 9$

k = POČET REŤAZCOV

ZLOŽITOSŤ

$O(|V|+|E|)$

$niv_1(4) = 5$

$niv_2(4) = 4$

$niv_3(4) = 9$

INDEX REŤAZCA

VRCHOL

(2) NÁJDENIE HODNÔT $niv_j(v)$

HĽADÁME TRAN. REDUKT, $O(|E| + k\,|E^{red}|)$

(3) KONŠTRUKCIA UZÁVERU

$$out^*(v) = \bigcup_{1 \le j < k} \{ w \in z_j \mid w \geq niv_j(v) \}$$

VRCHOLY j-TEHO REŤAZCA

ČAS. ZL. $O(|E^*|)$

POZOR! k A $|E^{red}|$ NIE SÚ NEZÁVISLÉ

06. 01. 2010
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPOD. ANALÝZA ALGORITMOV

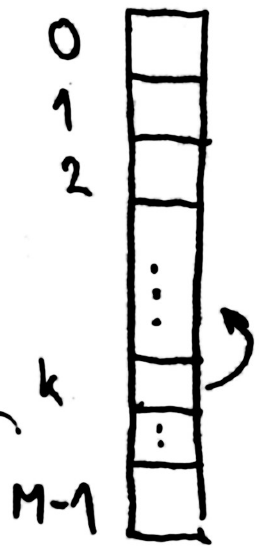
ANALÝZOU NÁJDE.:

$$E(k\,|E^{red}|) = O(n^2) \quad \text{PRE} \quad \frac{\log^2 n}{n} \le p < 1$$

$$= O(n^2) \quad \text{INAK.}$$

(MOŽNO NÁJSŤ V MONOGRAFII OD MELHORNA)

HASHOVANIE S LINEÁRNYM PRIDÁVANÍM



AK VKLADÁME DO POLÍČKA S $h(x) = k$, KTORÉ JE UŽ OBSADENÉ, TAK SA POZERÁME DOZADU, AŽ NÁJDEME PRVÉ VOĽNÉ POLÍČKO

VŽDY BUDE ASPOŇ 1 VOĽNÝ RIADOK

M ... VEĽKOSŤ TABUĽKY
N ... POČET VLOŽENÍCH PRVKOV
$a_1, a_2, \dots, a_N$ ... HASHOVACIE ADRESY VL. PRVKOV

PREDPOKLAD: VŠETKY POSTUPNOSTI HASH. ADRIES SÚ ROVNAKO PRAVDEPODOBNÉ

C_N ... OČAKÁVANÝ POČET TESTOV PRI ÚSPEŠNOM VYHĽADÁVANÍ

C'_N ... —||— PRI NEÚSPEŠNOM VYHĽADÁVANÍ

$$C_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C'_k$$

C'_{N-1} = OČAKÁVANÝ POČET TESTOV PRI INSERTE N-TÉHO PRVKU

VÝSLEDKY:

$$C'_N \sim \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2\right) \qquad \text{KDE } \alpha = \frac{N}{M}$$

$$C_N \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \qquad \text{TZV. FAKTOR NAPLNENIA}$$

$f(M,N)$ = POČET HASH. POSTUPNOSTÍ (ADRIES) TAKÝCH, ŽE ADRESA 0 BUDE PRÁZDNA

P(ADRESA 0 JE PRÁZDNA) =

$= 1 - P$ (ADRESA 0 JE OBSADENÁ) $= 1 - \frac{N}{M} =$

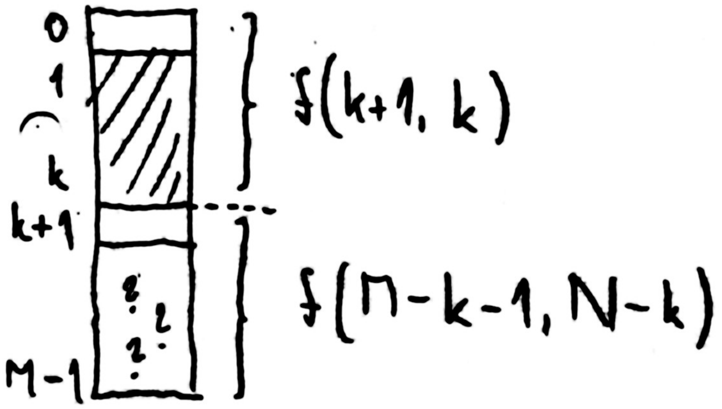
$$= \frac{f(M,N)}{M^N} \Rightarrow f(M,N) = \underline{\underline{\left(1-\frac{N}{M}\right)M^N}}.$$

DEFINUJME EŠTE $f(0,0) := 1$.

06.01.2010 We
PETER ČERNO

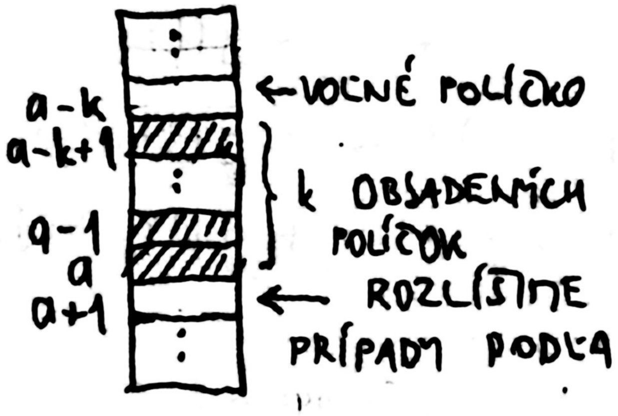
NTIN018 PRAVDEP. ANALÝZA ALGORITMŮ

$g(M, N, k)$ = POČET $\forall$ HASH. POSTUPNOSTÍ TAKÝCH, ŽE ADRESA 0 JE PRÁZDNA, ADRESY $1, \dots, k$ SÚ OBSADENÉ, ADRESA $k+1$ JE PRÁZDNA



$$\Rightarrow \quad g(M, N, k) = \binom{N}{k} f(k+1, k)\, f(M-k-1, N-k)$$

$P_k = P($ PRI INSERT-E $(N+1)$-VÉHO PRVKU POTREBUJEM $k+1$ POKUSOV $)$.



$a+1$ VOĽNÁ $\Rightarrow$ # PRÍPADOV $g(M, N, k)$

$a+1$ OBSADENÁ, $a+2$ VOĽNÁ $g(M, N, k+1)$

ATĎ.

$$\Rightarrow \quad P_k = \frac{1}{M^N} \left(g(M, N, k) + g(M, N, k+1) + \dots + g(M, N, N) \right)$$

$$\Rightarrow \quad C'_N = \sum_{k=0}^{N} (k+1) P_k \;, \quad C_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C'_k$$

BUDEME POČÍTAŤ $M^N C'_N = M^N \sum_{k=0}^{N} (k+1) P_k =$

$$= g(M,N,0) + g(M,N,1) + \dots + g(M,N,N) +$$
$$+ 2g(M,N,1) + \dots + 2g(M,N,N) +$$
$$\dots$$
$$+ (N+1)\, g(M,N,N) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} (j+1)\, g(M,N,k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} g(M,N,k) \cdot \frac{1}{2} (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} (k+1)\, g(M,N,k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} (k+1)^2 g(M,N,k)$$

$$\sum_{k=0}^{N} (k+1)\, g(M,N,k) =$$

$$= g(M,N,0) + g(M,N,1) + g(M,N,2) + \dots + g(M,N,N)$$
$$+ g(M,N,1) + g(M,N,2) + \dots + g(M,N,N)$$
$$+ g(M,N,2) + \dots + g(M,N,N)$$
$$\dots \dots$$
$$+ g(M,N,N)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{PRVÝ RIADOK} = M^N P_0 \\ \text{DRUHÝ RIADOK} = M^N P_1 \\ \dots \end{array}\right\} \text{SPOLU} = M^N \sum_{k=0}^{N} P_k = \underline{\underline{M^N}}$$

06.01.2010 WE
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEP. ANALÝZA ALGORITMŮ

$$g(M,N,k) = \binom{N}{k} f(k+1,k)\, f(M-k-1, N-k) =$$

$$= \binom{N}{k} \underbrace{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)(k+1)^k}\ \underbrace{\left(1-\frac{N-k}{M-k-1}\right)(M-k-1)^{N-k}} =$$

$$= \binom{N}{k} (k+1)^{k-1} \quad (M-k-1)^{N-k-1} \quad (M-N-1)$$

$$\sum_{k=0}^{N} (k+1)^2 g(M,N,k) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (k+1)^{k+1}$$

$$(M-k-1)^{N-k-1} (M-N-1) \quad = \quad (*)$$

BEZ DŮKAZU:

NECH $s(n,x,y) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} (x+k)^{k+1}$
$(y-k)^{n-k-1}\,(y-n)$.

POTOM $s(n,x,y) = x\,(x+y)^n +$
$n\, s(n-1, x+1, y-1)$.

$(*) = \underline{\underline{s(N, 1, M-1)}}$.

13.01.2010 We
PETER ČERNO

NTIN018 PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

ODPUSTENÉ NA SKÚŠKU:

- VŠETKY VÝPOČTY SO STIRL. ČÍSLAMI SÚ ODPUSTENÉ
- VEDIEŤ SPOČÍTAŤ CESTY NA MRIEŽKE (SHELL-SORT), ALE NETREBA DOPOČÍTAŤ DO $\sim n^{3/2}$
- QUICKSORT - DIF. ROVNICU NETREBA VEDIEŤ RÁTAŤ
- TRANZITÍVNY UZÁVER - STAČÍ IBA 1. JEDNODUCHÁ ANALÝZA

SKÚŠKU - PO DOHODE CEZ mail

$$M^N C_N' = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} (k+1)\, g(M,N,k)}_{=M^N} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} (k+1)^2 g(M,N,k).$$

$$M^N C_N' = \frac{1}{2} M^N + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (k+1)^{k+1} (M-k-1)^{N-k-1} (M-N-1)}_{=s(N,1,M-1)}$$

$$s(n,x,y) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} (x+k)^{k+1} (y-k)^{n-k-1} (y-n)$$

$$s(n,x,y) = x(x+y)^n + n\, s(n-1, x+1, y-1)$$

$$\Rightarrow M^N C_N' = \frac{1}{2}\left(M^N + M^N + N s(N-1, 2, M-2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(M^N + M^N + N \cdot 2M^{N-1} + N(N-1)\, s(N-2, 3, M-3)\right)$$

$$= \frac{1}{2} M^N \Big(1 + \underbrace{1 + 2\frac{N}{M} + 3\frac{N(N-1)}{M^2} + \dots}_{Q_1(M,N)}\Big)$$

$$Q_1 = \sum_{k\geq 0} (k+1) \frac{N}{M} \cdot \frac{N-1}{M} \cdot \ldots \frac{N-k+1}{M}$$

Q_1 JE SPECIÁLNY PRÍPAD

$$Q_r(M,N) = \sum_{k\geq 0} \binom{r+k}{k} \frac{N}{M} \cdot \frac{N-1}{M} \cdots \frac{N-k+1}{M}$$

$$Q_0(M,N) = \sum_{k\geq 0} \frac{N}{M} \cdot \frac{N-1}{M} \cdots \frac{N-k+1}{M}$$

TZV. RAMANUJAN Q-FUNKCIE

$$\Rightarrow C_N' = \frac{1}{2}\left(1 + Q_1(M,N)\right)$$

STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE $Q_1(M,N) \sim \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ $\quad \alpha = \frac{N}{M}$

$$Q_1(M,N) \leq \sum_{k\geq 0} (k+1)\alpha^k = \left(\sum_{k\geq 0} \alpha^{k+1}\right)' =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)' = \underline{\underline{\frac{1}{(1-\alpha)^2}}}$$

DÁ SA SPRAVIŤ AJ DOLNÝ ODHAD $\sim \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

<u>ÚSPEŠNÝ PRÍPAD</u>: $C_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k' =$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(1 + Q_1(M,k)\right) = \ldots \text{ CHCEME UKÁZAŤ}$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\left(1 + Q_0(M,N-1)\right)$$

$$Q_0(M,N) \leq \sum_{k\geq 0} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow C_N \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

13.01.2009 We
PETER ČERNO

NTIN018: PRAVDEPODOBNOSTNÍ ANALÝZA ALGORITMŮ

$$Q_0(M,N) = \sum_{k\geq 0} \frac{N}{M} \cdot \frac{N-1}{M} \cdots \frac{N-k+1}{M}$$

$$Q_1(M,N) = \sum_{k\geq 0} (k+1) \frac{N}{M} \cdot \frac{N-1}{M} \cdots \frac{N-k+1}{M}$$

$$C_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{l\geq 0} (l+1) \frac{k}{M} \cdot \frac{k-1}{M} \cdots \frac{k-l+1}{M} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l\geq 0} (l+1) \frac{\binom{k}{l} l!}{M^l} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l\geq 0} (l+1)! \binom{k}{l} / M^l \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{l\geq 0} (l+1)! / M^l \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k}{l} \right]$$

PLATÍ $\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k}{l} = \binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \cdots + \binom{N-1}{l} =$

$$= \underbrace{\binom{l+1}{l+1} + \binom{l+1}{l}} + \binom{l+2}{l} + \cdots + \binom{N-1}{l} =$$

$$= \binom{l+2}{l+1} + \binom{l+2}{l} + \cdots + \binom{N-1}{l} =$$

$$= \cdots = \binom{N}{l+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{l\geq 0} \frac{(l+1)!}{M^l} \binom{N}{l+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{l\geq 0} \frac{N \cdot (N-1) \ldots (N-l)}{M^l} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + Q_0(M, N-1) \right]$$