Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Numerická matematika

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Jiří Felcman, CSc.
E-mail: felcman@karlin.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~felcman/`

Anotace: Základní kurs numerické matematiky pro informatiky.

Sylabus:

1. Aproximace funkcí v R, Lagrangeův interpolační polynom. Chyba Lagrangeovy interpolace. Kubický spline, konstrukce přirozeného kubického spline.

2. Numerická integrace funkcí, Newtonovy-Cotesovy vzorce, složené Newtonovy-Cotesovy vzorce, Rombergova kvadratura, Gaussova kvadratura.

3. Metody řešení nelineárních rovnic, Newtonova metoda, důkaz konvergence Newtonovy metody, metoda postupných aproximací pro nelineární rovnice. Kořeny polynomu, Hornerovo schéma.

4. Soustavy lineárních rovnic. Podmíněnost matic. Gaussova eliminace, pivotace, Gaussova eliminace jako faktorizační metoda, LU rozklad v obecném případě, vliv zaokrouhlovacích chyb, Choleského rozklad, QR rozklad, iterační metody řešení soustav lineárních rovnic, klasické iterační metody.

5. Výpočet vlastních čísel matic. Mocninná metoda.

6. Numerická integrace obyčejných diferenciálních rovnic. Formulace problému. Jednokrokové metody, metody typu Runge-Kutta, Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu.

7. Gradientní metody.

Cíl předmětu: Studenti se seznámí se základy numerické matematiky.

Literatura:

1. Felcman J.: (2009). Numerická matematika, učební text k přednášce.

2. Feistauer, M., Felcman, J., and Straškraba, I. (2003). Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow. Oxford University Press, Oxford.

3. Higham, N. (1989). The accuracy of solutions to triangular systems. SIAM J. Appl. Math., 26(5), 1252 – 1265.

4. Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2004). Numerical Mathematics (2nd edn), Volume 37 of Texts in Applied Mathematics. Springer, Berlin. ISBN 0-387-98959-5.

5. Segethová, J. (2000). Základy numerické matematiky. Karolinum, Praha.

6. Ueberhuber, W. (2000). Numerical Computation 1, 2: Methods, Software, and Analysis. Springer, Berlin.

This page is intentionally left blank.

20.02.2007 Ty
PETER ČERNO

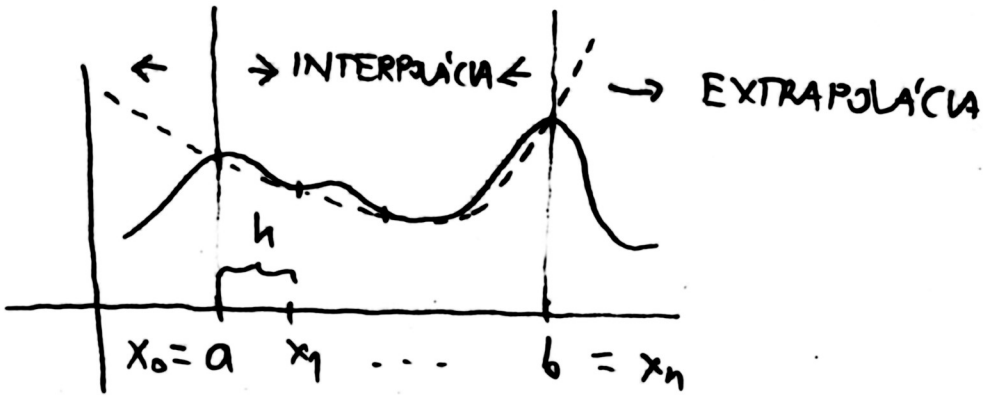
MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

DOC. RNDR. JIŘÍ FELCMAN, CSC.
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~felcman
felcman@karlin.mff.cuni.cz

APROXIMÁCIA FUNKCIÍ V $\mathbb{R}$

MÁME $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f KOMPLIKOVANÁ „ZLOŽITÁ" $\approx$ φ „JEDNODUCHŠIA"



SIEŤ UZLOV: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

EKVIDISTANTNÁ SIEŤ UZLOV

h = KROK SIETE (OKO SIETE)

$x_i = a + ih \quad i = 0 \dots n$

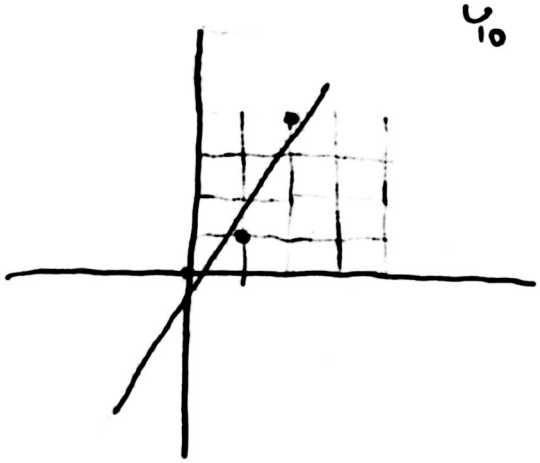
MÁME

	x_0	x_1	...	x_n
	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_n)$

DVE ROZLIŠKY: APROXIMÁCIA
INTERPOLÁCIA $\varphi(x_i) = f(x_i)$ PRE $i = 0 \dots n$

TABUĽKA

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1		y_n



POŽIADAVKY NA φ :

(a) ĽAHKO VYČÍSLITEĽNÁ

(b) $\varphi^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$, $\quad j = 0, \dots, c_i$

(c) $\|\varphi - f\|$ „MALÁ" — EXISTUJE NORMA

$\|\cdot\|$ FUNKCIA Z LIN. VEKT. PRIESTORU DO $\mathbb{R}$, KT. MÁ NEJAKÉ VLASTNOSTI

KEĎ POŽIADAVKA (b) → INTERPOLÁCIA

KEĎ NIE → APROXIMÁCIA

(NAPR. METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV)

$$\sum_{i=0}^{n} w_i \left(f(x_i) - \varphi(x_i)\right)^2 = \min_{\psi \in M} \sum_{i=0}^{n} w_i \left(f(x_i) - \psi(x_i)\right)^2$$

w_i ↳ VÁHY

KEĎ SI DEFINUJEME NORMU f AKO

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} w_i f^2(x_i)}$$

POTOM φ MINIMALIZUJE $\|f - \varphi\|$

27.02.2007
PETER ČERNO

MAI042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

ČEBYŠEVOVA (ROVNOMERNÁ) APROXIMÁCIA

MINIMALIZUJE $\max_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)|$

LAGRANGEOV INTERP. POLYNÓM

HĽADÁME $L_n \in \Pi_n$, KDE $\Pi_n = L\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

TAKÝ, ŽE $L_n(x_i) = f(x_i)$

MÁME $n+1$ UZLOV A HĽADÁME POL. STUPŇA n
MÁ $a_0, \dots, a_n$ TJ. $n+1$ KOEFICIENTOV

MÁME $n+1$ PODMIENOK
$L_n(x_i) = f(x_i)$
A $n+1$ STUPŇOV VOĽNOSTI

LAGRANGEOVE POLYNÓMY:

$$l_i(x) \overset{\text{def}}{:=} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

PLATÍ:

a) $l_i(x) \in \Pi_n$

b) $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ (KRONECKEROVO DELTA)

ZREJME $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$

JEDNOZNAČNOSŤ: $L_n^1(x_i) = L_n^2(x_i) = f(x_i) \quad i = 0 \dots n$
$\Rightarrow L_n^1(x) - L_n^2(x) \in \Pi_n$ A MÁ $n+1$ KOREŇOV. □

CHYBA LAGRANGEOVEJ INTERPOLÁCIE

NECH $f \in C^{n+1}(I)$, I JE NAJM. INT. OBSAHUJÚCI $x_0, \dots, x_n, x^*$. POTOM $\exists \xi \in I$

$$f(x^*) - L_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\, \omega_{n+1}(x^*)}{(n+1)!}$$

$x^* \neq x_i$

KDE $\omega_{n+1} = (x - x_0) \dots (x - x_n)$.

POTREBUJEME ALE ODHADNÚŤ $|f^{(n+1)}(x)|$ NA I

DÔKAZ: POLOŽÍME $\boxed{F(x) \overset{\text{def.}}{:=} f(x) - L_n(x) - t\,\omega_{n+1}(x)}$ $t \in \mathbb{R}$

ZREJME $F(x_i) = 0 \quad i = 0 \dots n$

POLOŽÍME t TAK, ABY $\boxed{F(x^*) = 0}$

TJ. $t := \dfrac{f(x^*) - L_n(x^*)}{\omega_{n+1}(x^*)}$

F MÁ $n+2$ NULOVÝCH BODOV

$\Rightarrow$ PODĽA ROLLEOVEJ VETY MÁ F' MÁ ASPOŇ $n+1$ NULOVÝCH BODOV

...

$F^{(n+1)}$ MÁ ASPOŇ 1 NULOVÝ BOD: ξ

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - \frac{f(x^*) - L_n(x^*)}{\omega_{n+1}(x^*)}\,(n+1)!$$

$$\Rightarrow \quad f(x^*) - L_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\, \omega_{n+1}(x^*)}{(n+1)!}$$

27.02.2007
PETER ČERNO

MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

POZNÁMKA: $\frac{1}{1+x^2}$ MOŽNO DOBRE APROX. IBA NA MALOM OKOLÍ 0. ROZKMITÁ SA !!

KUBICKÝ SPLINE

NECH JE DANÉ DELENIE $\langle a,b\rangle$ $a=x_0<\dots<x_n=b$

HOVORÍME, ŽE $\varphi:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ JE KUBICKÝ SPLINE, KEĎ: 1. $\varphi\in C^2\langle a,b\rangle$ T.J. φ'' JE SPOJITÁ NA $\langle a,b\rangle$

2. $\varphi|_{\langle x_i,x_{i+1}\rangle}$ $i=0\dots n-1$ JE KUBICKÝ POLYNÓM

PRIRODZENÝ KUBICKÝ SPLINE
- ↓ $\varphi''(a)=\varphi''(b)=0$
- ↓ POL. 3. STUPŇA, $\varphi\in C\langle a,b\rangle$
- ↓ PO ČASTIACH

TREBA 2 PODMIENKY NAVIAC. NAPR.:

a) $\varphi''(a)=\varphi''(b)=0$

b) $\varphi'(a)=f'(a)$, $\varphi'(b)=f'(b)$

c) $\varphi'(a)=\varphi'(b)$, $\varphi''(a)=\varphi''(b)$

KONŠTRUKCIA PRIR. KUB. SPLINE

MÁME $4n$ STUPŇOV VOĽNOSTI

MÁME	$f(x_i)=\varphi(x_i)$	$n+1$
SPOJITOSŤ	φ	$n-1$
	φ'	$n-1$
	φ''	$n-1$
		$4n-2$ PODMIENOK

27.02.2007 Th
PETER ČERNO

EX: MAI042 NUM. MATEMATIKA

INTERPOLAČNÍ POLYNOM

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~feleman/nm.pdf

x_0	...	x_n
$f(x_0)$	...	$f(x_n)$

HLEDÁME $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ TŽ. $P_n(x_i) = f(x_i)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

VANDERMOND

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1-x_0 & x_1^2-x_0^2 \\ 0 & x_2-x_0 & x_2^2-x_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_1^2-x_0^2 \\ x_2-x_0 & x_2^2-x_0^2 \end{vmatrix} =$$

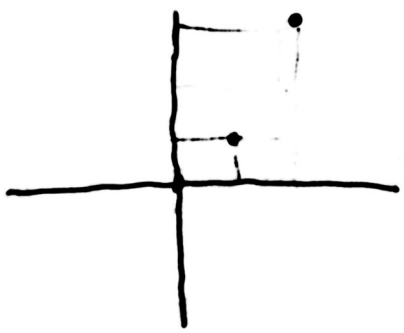
$$= (x_1-x_0)(x_2-x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1+x_0 \\ 1 & x_2+x_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1-x_0)(x_2-x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$V(x_0, \dots, x_n) = (x_0-x_n) \dots (x_{n-1}-x_n)\, V(x_1, \dots, x_n).$$

$$\Rightarrow V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

METÓDA NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV



$x_0 = 0$	1	2	$= x_n$
$f(x_0) = 0$	$\frac{1}{2}$	2	$= f(x_n)$

$$\sum_{i=0}^{n} \left((ax_i + b) - f(x_i) \right)^2 =$$

CHCEME MINIMALIZOVAŤ
$a, b = ?$

$$= F(a,b)$$

RIEŠIME $\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=0}^{n} 2 \left(ax_i + b - f(x_i) \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=0}^{n} 2 \left(ax_i + b - f(x_i) \right) \cdot x_i = 0$$

$$a \left(\sum x_i \right) + b \cdot (n+1) = \sum f(x_i)$$

$$a \left(\sum x_i^2 \right) + b \left(\sum x_i \right) = \sum x_i f(x_i)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i & n+1 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) \end{pmatrix}$$

27.02.2007 Tq
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

INÝ NÁZOV:

$$ax_0 + b = f(x_0)$$
$$ax_1 + b = f(x_1)$$
$$ax_2 + b = f(x_2)$$

RIEŠIME METÓDOU NAJM. ŠTVORCOV

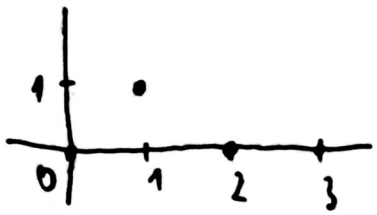
APROXIMÁCIA $f \approx \varphi$ V ZMYSLE METÓDY NAJM. ŠTVORCOV

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

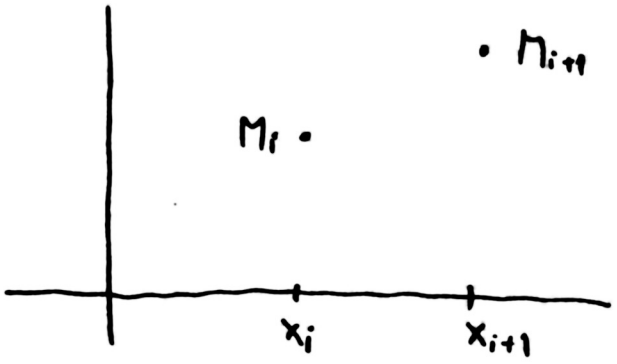
$$\{1, x\}$$
$$b \quad a$$

LAGRANGEOV INTERPOLAČNÝ POLYNÓM

PRÍKLAD:



$$P(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{1} x(x-2)(x-3)$$



MOMENTY

$$L_1(x) = M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

N.B.

ZAPAMĚTAT

PŘIROZENÝ KUBICKÝ SPLINE

06.03.2007 Th
PETER ČERNO

MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

KUBICKÝ SPLINE

NECH $f \in C^2\langle a,b\rangle$, POTOM PRE KAŽDÝ INTERPOLAČNÝ KUBICKÝ SPLINE φ SPĹŇAJÚCI $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $i = 0..n$ PLATÍ $\|\varphi\| \leq \|f\|$, KDE $\|u\|^2 \overset{def}{:=} \int_a^b |u''(x)|^2 dx$

SEMINORMA (NEPLATÍ NULOVÁ PODM.)

KEĎ JE SPLNENÁ NIEKT. Z NASL. PODMIENOK:

a) $\varphi''(a) = \varphi''(b) = 0$

b) $\varphi'(a) = f'(a)$, $\varphi'(b) = f'(b)$

c) $\varphi'(a) = \varphi'(b)$, $\varphi''(a) = \varphi''(b)$ (TZV. PERIODICKÝ PRÍPAD PERIODICKÝ SPLINE)

KONŠTRUKCIA PRIRODZENÉHO KUBICKÉHO SPLINE

NAUČIŤ

ZNAČENIE:

$d_i = f(x_i) \quad \forall i = 0..n$

$\varphi_i = \varphi|_{\langle x_i, x_{i+1}\rangle} \quad \forall i = 0..n-1$

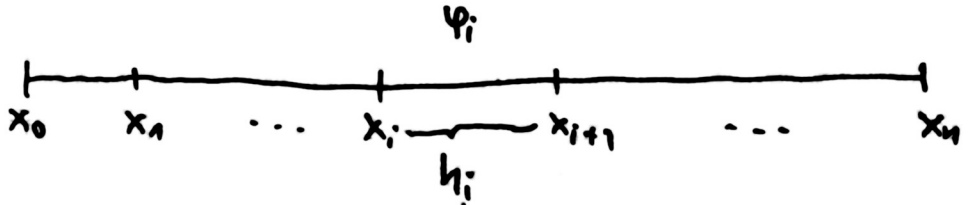
$h_i = x_{i+1} - x_i$

φ_i JE NA $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ URČENÝ 4 KOEF.

$\Rightarrow$ MÁME $4n$ STUPŇOV VOĽNOSTI

$\varphi_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ JE NEVHODNÝ TVAR

MY BUDEME KONŠTRUOVAŤ POMOCOU MOMENTOV



MYŠLIENKA:

OZNAČME $M_i := \varphi''(x_i)$ $i = 0, \dots, n$ MOMENT

PREDPOKL., ŽE MOMENTY POZNÁME
(NESKÔR UKÁŽEME, AKO M_i VYPOČÍTAŤ)

φ_i'' JE LINEÁRNA FCIA.

POLOŽME $\varphi_i'' = L_1(x, x_i, x_{i+1}, M_i, M_{i+1}) =$

$$= M_{i+1}\frac{x - x_i}{h_i} - M_i\frac{x - x_{i+1}}{h_i}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_i' = -\frac{M_i}{2h_i}(x - x_{i+1})^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + A_i$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_i = -\frac{M_i}{6h_i}(x - x_{i+1})^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + A_i(x - x_i) + B_i$$

FINTA - VHODNÝ ROZPIS INTEGR. KONŠT. !!

1. NAJSKÔR VYJADRÍME A_i A B_i POMOCOU MOMENTOV
2. ZOSTAVÍME ROVNICE PRE MOMENTY

AD (i) MÁME 2 NEZNÁME A_i, B_i A 2 ROVNICE:

$\varphi_i(x_i) = f_i$, $\varphi_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$

$$f_i = B_i + \frac{1}{6}M_i h_i^2 \Rightarrow B_i = f_i - \frac{1}{6}M_i h_i^2$$

$$f_{i+1} = \frac{1}{6}M_{i+1}h_i^2 + A_i h_i + f_i - \frac{1}{6}M_i h_i^2 \Rightarrow A_i = \frac{1}{h_i}\left(f_{i+1} - f_i + \frac{1}{6}(M_i - M_{i+1})h_i^2\right)$$

AD (ii) ZOSTAVENIE ROVNÍC PRE MOMENTY

BUDEME KONŠTRUOVAŤ PRIROD. SPLINE, TJ.

$$M_0 = M_n := 0.$$

06.03.2007 ŠT
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

PRE $i = 1, \dots, n-1$ VYUŽIJEME SPOJITOSŤ 1. DERIVÁCIE, TJ.

$$\varphi'_{i-1}(x_i) = \varphi'_i(x_i) \qquad i = 1 \dots n-1$$

$$\varphi'_i(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x - x_{i+1})^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + A_i$$

$$\varphi'_{i-1}(x) = -\frac{M_{i-1}}{2h_{i-1}}(x - x_i)^2 + \frac{M_i}{2h_{i-1}}(x - x_{i-1})^2 + A_{i-1}$$

$$\varphi'_{i-1}(x_i) = \frac{1}{2} M_i h_{i-1} + A_{i-1} = \frac{1}{2} M_i h_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + h_{i-1}\left(\frac{M_{i-1}}{6} - \frac{M_i}{6}\right)$$

$$\varphi'_i(x_i) = -\frac{1}{2} M_i h_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + h_i\left(\frac{M_i}{6} - \frac{M_{i+1}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \left(\frac{h_{i-1}}{2} - \frac{h_{i-1}}{6} + \frac{h_i}{2} - \frac{h_i}{6}\right) M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} =$$

$$= \frac{f_{i-1} - f_i}{h_{i-1}} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \qquad i = 1 \dots n-1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix}$$

PRE EKVIDISTANTNÉ UZLY DOSTÁVAME MATICE

$$\frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

JE OSTRO DIAGONÁLNE DOMINANTNÁ MATICA

VETA: KEĎ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE ODD, POTOM A JE REGULÁRNA.

1. ZÁPOČTOVÁ ÚLOHA

KONŠTRUKCIA PRIRODZENÉHO KUBICKÉHO SPLINE (15 min.)

06.03.2007 Tu
PETER ČERNO

MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU NA POČÍTAČI

CIEĽ: $\int_a^b f(x)\,dx$ ⊛

NECH JE DANÉ DELENIE INT. $\langle a,b\rangle$

$a \le x_0 < \dots < x_n \le b$. OZNAČME $h = \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} |x_{i+1} - x_i|$

CIEĽ $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_h(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$

VZOREC $I_h(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ URČITÁ TRIEDA VZORCOV

SA NAZÝVA KVADRATÚRNA FORMULA, α_i SÚ KOEF.
A x_i SÚ UZLY KVAD. FORMULE.

ČO ZNAMENÁ „DOSTATOČNE PRESNE"?

MOTIVÁCIA: $f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx$$

$$l_i(x) = \prod_{i\neq j} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

NEWTONOVÝ - COTESOVÝ VZORCE

UVAŽUJME EKVIDIST. DELENIE $x_i = x_0 + hi$

POZRI SKRIPTÁ

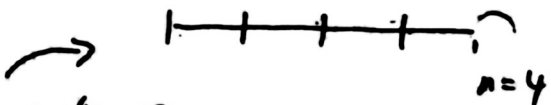
HOVORÍME, ŽE KVADR. FORMULA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ MÁ RÁD PRESNOSTI m, KEĎ m JE MAX. ČÍSLO TAKÉ, ŽE

$$\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i) \quad \text{PRE} \quad \forall p \in \Pi_m .$$

KEĎ JE KVADR. FORMULA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ SYMETRICKÁ, TJ. PRE $i = 0, \dots, n$ PLATÍ

$$b - x_{n-i} = x_i - a$$

$$\alpha_i = \alpha_{n-i}$$



A KEĎ JE JEJ RÁD $\geq n$, n JE PÁRNE, POTOM JE JEJ RÁD $\geq n+1$

LEMMA: NEWTONOV - COTESOV VZOREC JE SYMETRICKÁ KVADRATÚRNA FORMULA

PRE $2 \mid n$ JE RÁD N-C VZORCA $\geq n+1$.

ODHAD CHYBY LICHOBEŽNÍKOVÉHO PRAVIDLA
TJ. N-C VZOREC PRE $n=1$

ODHAD CHYBY SIMPSONOVHO PRAVIDLA
N-C VZOREC PRE $n=2$

TJ. MÁME 2 KRITÉRIA $<$ PRESNOSŤ KVADR. FL.
CHYBA KV. FL.

06.03.2007 T4
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

NECH $f \in C\langle a,b\rangle$, φ JE KUBICKÝ INTERPOLAČNÍ SPLINE: $\varphi(x_i) = f(x_i) \quad i = 0..n$

$\varphi'' \in C\langle a,b\rangle$

$\varphi|_{\langle x_i, x_{i+1}\rangle} \in \Pi_3$

POTOM $\int_a^b (\varphi''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx$

KDE a) $\varphi''(a) = \varphi''(b) = 0$

b) $\varphi'(a) = f'(a), \quad \varphi'(b) = f'(b)$

c) $\varphi'(a) = \varphi'(b), \quad \varphi''(a) = \varphi''(b)$ f JE PERIODICKÁ

DOKÁŽEME $\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \|\varphi\|^2$

$$\int_a^b (f''(x) - \varphi''(x))^2 dx =$$

$$= \|f\|^2 + \|\varphi\|^2 - 2\int_a^b f''(x)\varphi''(x)\,dx =$$

$$= \|f\|^2 - \|\varphi\|^2 - 2\left(-\|\varphi\|^2 + \int_a^b f''\varphi''\right) =$$

$$= \|f\|^2 - \|\varphi\|^2 - 2\left(-\int_a^b (\varphi'(x))^2 dx + \int_a^b f''(x)\varphi''(x)\,dx\right) =$$

$$= \|f\|^2 - \|\varphi\|^2 - 2\int_a^b \varphi''(x)\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) dx$$

$$\int_a^b \varphi''(x)\left(f''(x) - \varphi''(x)\right) dx = \qquad \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\varphi''}_{v} \underbrace{\left(f'' - \varphi''\right)}_{u'} dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f' - \varphi')\varphi'' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f' - \varphi')\varphi''' =$$

$=$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f' - \varphi')\varphi'' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f' - \varphi')\varphi''' = \quad \text{KONŠTANTA}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f' - \varphi')\varphi'' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \varphi''' \left[f - \varphi \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[(f' - \varphi')\varphi'' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \left[(f' - \varphi')\varphi'' \right]_a^b \quad \textcircled{*} =$$

$$= 0. \qquad \text{V PRÍPADOCH a) b) c)}$$

$$\| f - \varphi \|^2 = \| f \|^2 - \| \varphi \|^2$$

$$\Rightarrow \| f \|^2 \geq \| \varphi \|^2$$

DÔSLEDOK: INTERP. KUBICKÝ SPLINE JE ZA VYŠŠIE UVEDENÝCH PODMIENOK a), b), c) + f JE PERIODICKÁ, URČENÝ JEDNOZNAČNE.

DÔKAZ (SPOROM). NECH φ_1 A φ_2 SÚ DVA RÔZNE KUBICKÉ SPLINY FCIE f.

POTOM $\| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 = \| \varphi_1 \|^2 - \| \varphi_2 \|^2$, PRETOŽE φ_2 JE KUBICKÝ SPLINE K φ_1.

PODOBNE $\| \varphi_2 - \varphi_1 \|^2 = \| \varphi_2 \|^2 - \| \varphi_1 \|^2$

$$\Rightarrow \| \varphi_1 - \varphi_2 \|^2 = 0$$

$$\int_a^b (\varphi_1'' - \varphi_2'')^2 \, dx = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

06.03.2007 Th
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

$$\int_a^b \left(\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)\right)^2 dx = 0$$

KEDŽE φ_1'' A φ_2'' SÚ SPOJITÉ NA $\langle a,b\rangle$,
POTOM NUTNE $\varphi_1'' = \varphi_2''$ NA $\langle a,b\rangle$

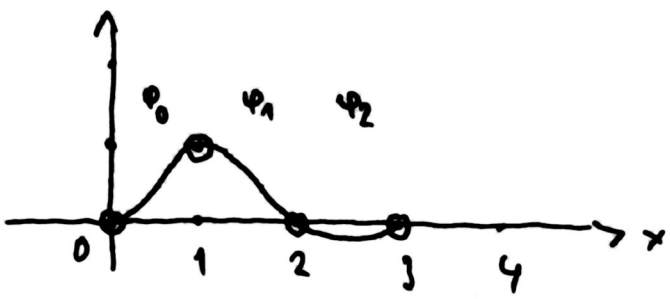
$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = Cx + D$ NA $\langle a,b\rangle$

KEĎ DOSADÍME $x=a$, $x=b$, DOSTÁVAME

$$\begin{aligned} 0 &= Ca + D \\ 0 &= Cb + D \end{aligned} \Rightarrow \underline{C = D = 0}$$

TJ. $\varphi_1 = \varphi_2$ NA $\langle a,b\rangle$, ČO JE SPOR.

PRÍKLAD:



ZOSTROJTE PRIR. INTERP. SPLINE

$h_i = h = 1 \quad i = 0..2$

ZREJME $M_0 = M_3 = 0$

$M_1 = ?, \quad M_2 = ?$

$$\varphi_i''(x) = -M_i(x - x_{i+1}) + M_{i+1}(x - x_i)$$

$$\varphi_i'(x) = -\frac{1}{2} M_i (x - x_{i+1})^2 + \frac{1}{2} M_{i+1} (x - x_i)^2 + A_i$$

$$\varphi_i(x) = -\frac{1}{6} M_i (x - x_{i+1})^3 + \frac{1}{6} M_{i+1} (x - x_i)^3 + A_i (x - x_i) + B_i$$

$f_i = f(x_i) = \varphi_i(x_i)$
$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = \varphi_i(x_{i+1})$
$\Rightarrow B_i, A_i$

$i = 0, 1, 2$

$$f_i = \varphi_i(x_i) = -\frac{1}{6} M_i \cdot (-1)^2 + \frac{1}{6} M_{i+1} \cdot 0 + A \cdot 0 + B_i$$

$$B_i = f_i - \frac{1}{6} M_i$$

$$f_{i+1} = \varphi_i(x_{i+1}) = -\frac{1}{6} M_i \cdot 0^3 + \frac{1}{6} M_{i+1} (1)^3 + A_i \cdot 1 + f_i - \frac{1}{6} M_i$$

$$A_i = f_{i+1} - f_i + \frac{1}{6} M_i - \frac{1}{6} M_{i+1}$$

$i = 0$
$$B_0 = f_0 - \frac{1}{6} M_0 = 0$$
$$A_0 = f_1 - f_0 + \frac{1}{6} M_0 - \frac{1}{6} M_1 = 1 - \frac{1}{6} M_1$$

$i = 1$
$$B_1 = f_1 - \frac{1}{6} M_1 = 1 - \frac{1}{6} M_1$$
$$A_1 = f_2 - f_1 + \frac{1}{6} M_1 - \frac{1}{6} M_2 = -1 + \frac{1}{6} M_1 - \frac{1}{6} M_2$$

$i = 2$
$$B_2 = f_2 - \frac{1}{6} M_2 = -\frac{1}{6} M_2$$
$$A_2 = f_3 - f_2 + \frac{1}{6} M_2 - \frac{1}{6} M_3 = \frac{1}{6} M_2$$

06.03.2007 14
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

$$\varphi_{i-1}'(x_i) = \varphi_i'(x_i)$$

$$\varphi_i'(x) = -\frac{1}{2} M_i (x - x_{i+1})^2 + \frac{1}{2} M_{i+1} (x - x_i)^2 + A_1$$

$$\varphi_{i-1}'(x) = -\frac{1}{2} M_{i-1} (x - x_i)^2 + \frac{1}{2} M_i (x - x_{i-1})^2 + A_{i-1}$$

$i = 1$

$$\varphi_0'(x_1) = -\frac{1}{2} M_0 (x_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2} M_1 (x_1 - x_{1-0})^2 + A_{1-0} =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 + A_0 = \frac{1}{2} M_1 + 1 - \frac{1}{6} M_1$$

$$\varphi_1'(x_1) = -\frac{1}{2} M_1 (x_1 - x_{1+1})^2 + \frac{1}{2} M_2 (x_1 - x_1)^2 + A_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} M_1 + A_1 = -\frac{1}{2} M_1 - 1 + \frac{1}{6} M_1 - \frac{1}{6} M_2$$

$$M_1 - \frac{1}{3} M_1 + \frac{1}{6} M_2 = -2$$

$$4M_1 + M_2 = -12$$

$i = 2$

$$\varphi_1'(x_2) = -\frac{1}{2} M_1 (x_2 - x_2)^2 + \frac{1}{2} M_2 (x_2 - x_1)^2 + A_1 =$$

$$= \frac{1}{2} M_2 + A_1 = \frac{1}{2} M_2 - 1 + \frac{1}{6} M_1 - \frac{1}{6} M_2$$

$$\varphi_2'(x_2) = -\frac{1}{2} M_2 (x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2} M_3 (x_2 - x_2)^2 + A_2 =$$

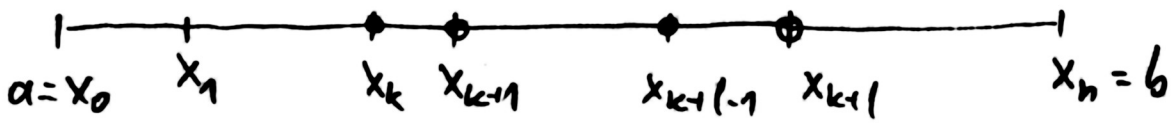
$$= -\frac{1}{2} M_2 + A_2 = -\frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{6} M_2$$

$$M_2 - \frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{6} M_1 = 1$$

$$M_1 + 4M_2 = 6$$

AITKEN - NEVILLE

VÝPOČET HODNOTY L. Č. POLYNÓMU V JEDNOM BODE BEZ TOHO, ABY SME ŠI ZOSTAVOVALI.



$$L_{k,l} = L_{k,l}(x,\ x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$$

OTÁZKA ZNIE, ČI MOŽNO $L_{k,l}$ VYJADRIŤ POMOCOU

$L_{k+1,l-1}$ A $L_{k,l-1}$ $\qquad l = 0, \dots, n,\quad k = 0, \dots, n-l$

$f(x_0) = L_{0,0} \quad L_{0,1} \quad L_{0,2}$
$f(x_1) = L_{1,0} \quad L_{1,1}$
$f(x_2) = L_{2,0}$
$\vdots$
$f(x_n) = L_{n,0}$

$$\frac{(x - \ )L_{k+1,l-1} - (x - \ )L_{k,l-1}}{\dots} = L_{k,l}$$

06.03.2007 Tu
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MAT.

$$(x - x_k) L_{k+1,\ell-1} - (x - x_{k+\ell}) L_{k,\ell-1}$$

MÁ V BODE x_k HODNOTU $(x_{k+\ell} - x_k) L_{k,\ell-1}(x_k)$

A V BODE $x_{k+\ell}$ HODNOTU $(x_{k+\ell} - x_k) L_{k,\ell-1}(x_{k+\ell})$

V MENOVATELI BUDE $x_{k+\ell} - x_k$

TJ. $$L_{k,\ell} = \frac{(x - x_k) L_{k+1,\ell-1} - (x - x_{k+\ell}) L_{k,\ell-1}}{x_{k+\ell} - x_k}$$

V UZLOCH x_k, $x_{k+\ell}$ TO FUNGUJE. VO VNÚT. UZL. x_i:

$$f(x_i) = L_{k,\ell}(x_i) \overset{A}{=} \frac{(x_i - x_k) f(x_i) - (x_i - x_{k+\ell}) f(x_i)}{x_{k+\ell} - x_k} = f(x_i).$$

V12. ROMBERGOVA INTEGRÁCIA

19.03.2007 Mo
PETER ČERNO

MAI042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

NEWTONOVE - COTESOVE VZORCE

PRE DANÉ $n \in \mathbb{N}$ UVAŽUJME EKVIDISTANTNÉ DELENIE $\langle a,b \rangle$ S KROKOM $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots, n$.

APROXIMUJEME f LAGRANGEOVÝM INTERPOLAČNÝM POL. L_n PRE UZLY $x_0, \dots, x_n$. $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b l_i(x)\,dx \right)}_{\alpha_i} f(x_i).$$ → KVADRATÚRNA FORMULA

PRE EKVIDIST. UZLY NAZÝVAME TENTO VZOREC NEWT.-COTESOV.

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx = \begin{matrix} \text{SUBST. } x = a + th \\ dx = h\,dt \end{matrix} \quad x_i = a + ih$$

$$= \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{a + th - a - jh}{a + ih - a - jh}\,h\,dt = \frac{b-a}{n} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt$$

AK $f \in \Pi_n$, POTOM $L_n = f$, A TEDA N-C VZOREC JE PRESNÝ PRE POLYNÓMY STUPŇA $\leq n$.

POZNÁMKA: VŠIMNITE SI, ŽE α_i NEZÁVISÍ NA f.

DEF.: KVADRATÚRNA FORMULA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ MÁ RÁD PRESNOSTI m, KEĎ $m \in \mathbb{N}_0$ JE MAXIMÁLNE ČÍSLO TAKÉ, ŽE $\int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p(x_i)$ $\forall p \in \Pi_m$.

LEMMA: KEĎ JE KVADR. FORMULA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ SYMETRICKÁ ($b - x_{n-i} = x_i - a$, $\alpha_i = \alpha_{n-i}$) A KEĎ JE JEJ RÁD $\geq n$, $2 \nmid n$, POTOM JEJ RÁD JE $\geq n+1$.

LEMMA: N-C VZOREC JE SYMETRICKÁ KVADR. FLE.

LEMMA (ODHAD CHYBY LICHOBEŽNÍKOVÉHO PRAVIDLA).
NECH $f \in C^2\langle a,b\rangle$. $T_h(f)$ JE N-C VZOREC PRE $n=1$.
POTOM $\exists \xi \in \langle a,b\rangle$: $I(f) - T_h(f) = -\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \frac{h^3}{6}$
$h = b-a$ A $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

LEMMA (ODHAD CHYBY SIMPSONOVHO PRAVIDLA)
NECH $f \in C^3\langle a,b\rangle$. $S_h(f)$ JE N-C VZOREC PRE $n=2$.
POTOM $\exists \xi \in \langle a,b\rangle$: $I(f) - S_h(f) = -\frac{h^5}{90} f'''(\xi)$, $h = \frac{b-a}{2}$

DEF. ROZDIEL $I(f) - I_h(f) = E_n(f)$, KDE
$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, $I_h(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$
NAZÝVAME ROZDIEL KVADRATÚRNEHO VZORCA.

ZLOŽENÉ NEWTON-COTESOVE VZORCE

KEĎ $\langle a,b\rangle$ ROZDELÍME NA m EKVIDIŠT. SUBINTERVALOV $\langle x_i; x_{i+1}\rangle$ VEĽKOSTI H A NA KAŽDÝ POUŽIJEME N-C VZOREC PRE n EKVIDIŠT. UZLOV $x_i = x_{i0} < \dots < x_{in} = x_{i+1}$ s KROKOM h,

$x_i = a + iH$, $H = \frac{b-a}{m}$, $i = 0,\dots,m$
$x_{ij} = x_i + jh$, $h = \frac{H}{n}$, $j = 0,\dots,n$ $\quad m,n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m-1} I_h^i(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} f(x_{ij})$$

VETA: NECH $f \in C^{n+1}\langle a,b\rangle$. POTOM PRE ZLOŽENÉ N-C VZORCE PLATÍ $I(f) - I_h(f) \leq C h^{n+1}$

19.03.2007 Mo
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

ROMBERGOVA KVADRATURA

VÝPOČET $\int_a^b f(x)\,dx$ POMOCOU ZLOŽENÉHO LICHOBEŽNÍKOVÉHO PRAVIDLA PRE n UZLOV.

$$H = \frac{b-a}{n}, \quad h = H$$

VETA (EULEROVA-MACLAURINOVA). NECH $f \in C^{2N+2}\langle a,b\rangle$, $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. POTOM PRE ZLOŽENÉ LICHOB. PRAV. ($CT_h(f)$) PLATÍ:

$$CT_h(f) = P(h^2) + O(h^{2N+2}) =$$
$$= I(f) + a_1 h^2 + \ldots + a_N h^{2N} + O(h^{2N+2}), \quad P \in \Pi_N$$
$$a_0 = P(0) = \int_a^b f(x)\,dx = I(f).$$

POZRI SKRIPTÁ (ROMBERGOVA KVADRATURA)

PRE $N=2$ HĽADÁME LAGRANGEOV INT. POLYNÓM
$L_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ PRE TABUĽKU

0	$\frac{h^2}{16}$	$\frac{h^2}{4}$	h^2
LIN. KOMB.	$CT_{\frac{h}{4}}(f)$	$CT_{\frac{h}{2}}(f)$	$CT_h(f)$

$b_0 = L_2(0)$.

	EULER-MACLAURIN		LAGRANGE
$CT_h(f)$	$= I(f) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + O(h^6) =$		$b_0 + b_1 h^2 + b_2 h^4$
$CT_{\frac{h}{2}}(f)$	$= I(f) + a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + O(h^6) =$		$b_0 + b_1 \frac{h^2}{4} + b_2 \frac{h^4}{16}$
$CT_{\frac{h}{4}}(f)$	$= I(f) + a_1 \frac{h^2}{16} + a_2 \frac{h^4}{256} + O(h^6) =$		$b_0 + b_1 \frac{h^2}{16} + b_2 \frac{h^4}{256}$

LIN. KOMB. $I(f) + 0 + 0 + O(h^6) = b_0 + 0 + 0$

ZÁVER: $L_2(0)$ APROXIMUJE $\int_a^b f(x)dx$ S CHYBOU $O(h^6)$.

PROBLÉM: MÝLENIE LAGRANGEOVHO INT. POLYNÓMU V JEDINÝCH BODE POMOCOU AITKENOVEJ-NEVILLOVEJ SCH.

VETA: RÁD KVADRATÚRNEJ FORMULE $I_h(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ JE NAJVIAC $2n+1$.

DÔKAZ. UVAŽUJME $\tilde{P}(x) = \Pi_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \in \Pi_{2n+2}$.

$\tilde{P}(x) \geq 0$ NA $\langle a, b \rangle$ A $\int_a^b \tilde{P}(x)dx > 0$.

KVADRATÚRNA FLA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \tilde{P}(x_i) = 0 \neq \int_a^b \tilde{P}(x)dx$. ∎

GAUSSOVA KVADRATÚRA JE SPÔSOB KONŠTRUKCIE VZORCA $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$, KT. JE PRESNÝ PRE V POLYNÓMY STUPŇA NAJVIAC $2n+1$.

19.03.2007 M₀
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

DEF.: SKALÁRNY SÚČIN V $C\langle a,b\rangle$ JE DEF. AKO $(u,v) = \int_a^b u(x)\,v(x)\,dx$.

DEF.: MNOŽINA NORM. POLYNÓMOV

$$\tilde{\Pi}_n = \{ p \in \Pi_n : p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \}$$

MYŠLIENKA KONŠTRUKCIE GAUSSOVEJ KVADRATÚRY:

x_i (UZLY): KORENE POLYNÓMU p_{n+1} Z MNOŽINY ORTOGONÁLNYCH POLYNÓMOV $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$.

α_i URČÍME TAK, ABY $\int_a^b q(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, q(x_i) \quad \forall q \in \Pi_{2n+1}$.

VETA: (ORTOGONÁLNE POLYNÓMY). EXISTUJÚ JEDNOZNAČNE URČENÉ POLYNÓMY p_i, PRE KTORÉ PLATÍ:

1. $p_i \in \tilde{\Pi}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, $(p_i, p_j) = 0$ $i \neq j$ $(p_0(x) = 1)$
2. KORENE $x_0, \dots, x_n$ POL. p_{n+1}, $n \in \mathbb{N}_0$ SÚ REÁLNE, JEDNODUCHÉ A LEŽIA V (a,b).
3. $$A = \begin{pmatrix} p_0(x_0) & \dots & p_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_0) & \dots & p_n(x_n) \end{pmatrix}$$ JE REGULÁRNA.

HLADÁME KOEF. α_i TAK, ABY

$$\int_a^b q(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, q(x_i) \qquad \forall q \in \Pi_{2n+1}$$

K TOMU VYJADRÍME q V TVARE

$$q(x) = r(x)\, p_{n+1}(x) + s(x), \qquad r, s \in \Pi_n .$$

POLYNÓMY r A s VYJADRÍME AKO LIN. KOMB. $p_0, \dots, p_n$.

NECH $s(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j p_j(x)$.

POTOM $\int_a^b q(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b r(x)\, p_{n+1}(x)\,dx}_{0} + \int_a^b s(x)\,dx =$

$$= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \beta_j p_j(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \beta_j p_0(x)\, p_j(x)\,dx = \beta_0 \int_a^b p_0(x)\, p_0(x)\,dx = \beta_0 (b-a).$$

TJ. $\beta_0 (b-a) = \int_a^b q(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[\underbrace{r(x_i)\, p_{n+1}(x_i)}_{0} + s(x_i) \right] =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{j=0}^{n} \beta_j p_j(x_i).$$

TJ.

$$\beta_0 (b-a) + \beta_1 \cdot 0 + \dots + \beta_n \cdot 0 =$$

$$= \beta_0 \sum_{i=0}^{n} p_0(x_i)\,\alpha_i + \beta_1 \sum_{i=0}^{n} p_1(x_i)\,\alpha_i + \dots + \beta_n \sum_{i=0}^{n} p_n(x_i)\,\alpha_i .$$

POROVNÁNÍM KOEF. DOSTÁVÁME:

$$\begin{pmatrix} p_0(x_0) & \dots & p_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_0) & \dots & p_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

KOEF. α_i SÚ KLADNÉ. STAČÍ UVÁŽIT $\tilde{p}_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)^2 \in \Pi_{2n}$.

19.03.2007 Mo
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUMERICKÁ MATEMATIKA

VÝPOČET HODNOTY POLYNÓMU (RESP. DERIVÁCIE) V BODE z.

$$p(x) = (x-z)\,q(x;z) + c, \qquad c = p(z)$$

$$p'(x) = q(x;z) + (x-z)\,q'(x;z)$$

$$p'(z) = q(z;z).$$

$$\begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ -\underline{\left(a_n x^n - a_n z x^{n-1}\right)} \\ \underbrace{(a_n z + a_{n-1})}_{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots \\ \dots \end{array} \quad : \; x - z = a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots$$

$$\dots + b_1 + \frac{b_1 z + a_0}{x-z} = b_0$$

$$q(x;z) = b_n x^{n-1} + \dots + b_1$$

HORNEROVA SCHÉMA:

$s := a_n$

$s := sx + a_{n-i} \qquad i = 1, \dots, n$

$p(x) = s.$

KOEFICIENTY POL $q(x;z)$:

$b_n = a_n$

$b_{n-i} = b_{n-i+1} z + a_{n-i}$

b_0

$p'(z) = q(z;z)$

$p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 2$

	1	3	0	−1	2
$p(2)$	1	5	10	19	(40)
$p'(2)$	1	7	24	(67)	
$p''(2)$	1	9	(42)		
$p'''(2)$	1	(11)			
$p^{(4)}(2)$	(1)				

PAMÄTÁME SI MEDZIVÝSLEDKY

VÝPOČET MSSÝCH DERIVACÍ:

TAYLOR: $p(x) = p(z) + p'(z)\frac{x-z}{1!} + p''(z)\frac{(x-z)^2}{2!} + \ldots + p^{(n)}(z)\frac{(x-z)^n}{n!} =$

$= (x-z)\underbrace{\left[p'(z) + p''(z)\frac{x-z}{2!} + \ldots + p^{(n)}(z)\frac{(x-z)^{n-1}}{n!}\right]}_{q(x;z)} + p(z) =$

$= (x-z)\, q(x;z) + c$

$q(x;z) = (x-z)\underbrace{\left[p''(z)\frac{1}{2!} + p'''(z)\frac{x-z}{3!} + \ldots + p^{(n)}(z)\frac{(x-z)^{n-2}}{n!}\right]}_{\tilde{q}(x;z)} + p'(z)$

$\tilde{q}(z;z) = p''(z)\frac{1}{2!}$

...

ORTOGONÁLNE POLYNÓMY

$\tilde{\Pi}_n = \{ p \in \Pi_n : p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \}$

VETA. NECH $a<b$, $\langle u|v\rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$ $\forall u,v \in C\langle a,b\rangle$.
POTOM $\exists$ JEDNOZNAČNE URČENÉ POLYNÓMY
$p_i \in \tilde{\Pi}_i$ $i \in \mathbb{N}_0$: $\forall i,j \in \mathbb{N}_0$ $i \neq j$ JE $\langle p_i | p_j\rangle = 0$.
PLATÍ:

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - b_1$

$b_{i+1} = \frac{\langle xp_i | p_i\rangle}{\langle p_i | p_i\rangle}$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$

$c_{i+1} = \frac{\langle p_i | p_i\rangle}{\langle p_{i-1} | p_{i-1}\rangle}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$p_{i+1} = (x - b_{i+1})p_i - c_{i+1}p_{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

13.03.2007 Po
PETER ČERNO

EX: MAI042 NUM. MATEMATIKA

DÔKAZ: $\{1, x, x^2, \dots\}$ GRAMM-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZÁCIA DÁVA ORTONORM. BÁZU. (JEDNOZN.)

ODVODENIE REKURENTNÉHO VZŤAHU

$p_i \in \tilde{\Pi}_i$, $\quad xp_i = \sum_{j=0}^{i+1} d_j p_j = d_{i+1} p_{i+1} + d_i p_i + \dots + d_0 p_0$.

NUTNE $\quad d_0 = d_1 = \dots = d_{i-2} = 0$.

PREČO?

NAPR. PRE $i=3$ JE

$$xp_3 = d_4 p_4 + d_3 p_3 + \dots + d_0 p_0 .$$

ZREJME $\quad$ LIN. KOMB. p_0, p_1

$$0 = \langle p_3 \mid xp_0 \rangle = \langle xp_3 \mid p_0 \rangle = d_4 \langle p_4 \mid p_0 \rangle + \dots + d_1 \langle p_1 \mid p_0 \rangle + d_0 \underbrace{\langle p_0 \mid p_0 \rangle}_{\neq 0} \Rightarrow d_0 = 0.$$

$$0 = \langle p_3 \mid xp_1 \rangle = \langle xp_3 \mid p_1 \rangle = d_4 \langle p_4 \mid p_1 \rangle + \dots + d_1 \underbrace{\langle p_1 \mid p_1 \rangle}_{\neq 0} + d_0 \langle p_0 \mid p_1 \rangle \Rightarrow d_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \text{MÁME} \quad xp_i = \underbrace{d_{i+1}}_{=1} p_{i+1} + d_i p_i + d_{i-1} p_{i-1}$$

$$\Rightarrow \quad p_{i+1} = (x - d_i) p_i - d_{i-1} p_{i-1}$$

MÁME $p_{i+1} = (x - d_i) p_i - d_{i-1} p_{i-1}$.

POTOM $\langle p_{i+1} | p_i \rangle = \langle x p_i | p_i \rangle - d_i \langle p_i | p_i \rangle - d_{i-1} \langle p_{i-1} | p_i \rangle$

$\Rightarrow \quad d_i = \dfrac{\langle x p_i | p_i \rangle}{\langle p_i | p_i \rangle}$

PODOBNE $\langle p_{i+1} | p_{i-1} \rangle = \langle x p_i | p_{i-1} \rangle - d_i \langle p_i | p_{i-1} \rangle - d_{i-1} \langle p_{i-1} | p_{i-1} \rangle$

$\Rightarrow \quad d_{i-1} = \dfrac{\langle x p_i | p_{i-1} \rangle}{\langle p_{i-1} | p_{i-1} \rangle} = \dfrac{\langle p_i | p_i \rangle}{\langle p_{i-1} | p_{i-1} \rangle}$

PRETOŽE $\langle x p_i | p_{i-1} \rangle = \langle p_i | \underbrace{x p_{i-1}}_{\in \Pi_i} \rangle = \langle p_i | p_i \rangle$. ∎

VETA: p_{n+1} MÁ V KORENE $x_0, \dots, x_n$ REÁLNE, NAVZÁJOM RÔZNE A Z INTERVALU (a, b).

DÔKAZ: NECH $x_0, \dots, x_\ell$ SÚ KORENE p_{n+1} S NEPÁRNOU NÁSOBNOSŤOU A $\ell + 1 < n + 1$.

POLOŽME $p = (x - x_0) \dots (x - x_\ell) \in \tilde{\Pi}_{\ell+1}$.

$p \cdot p_{n+1}$ MÁ KORENE IBA PÁRNEJ NÁSOBNOSTI

$\Rightarrow \langle p_{n+1} | p \rangle \neq 0$, ČO JE SPOR. ∎

19.03.2007 M.
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

VETA: MATICA

$$A = \begin{pmatrix} P_0(x_0) & P_0(x_1) & \dots & P_0(x_n) \\ P_1(x_0) & P_1(x_1) & \dots & P_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n(x_0) & P_n(x_1) & \dots & P_n(x_n) \end{pmatrix}$$

JE REGULÁRNA.

DÔKAZ: NECH $\exists v \in \mathbb{R}^n \; v \neq \vec{0} : \; v^T A = 0.$

POLOŽME $q(x) = \sum_{j=0}^{n} v_j P_j(x)$

POTOM MÁ q MIN KOREŇOV $x = x_i \quad i = 0, \dots, n.$

KEĎŽE $q \in \Pi_n$, NUTNE $q \equiv 0$, ČO JE SPOR.

S LINEÁRNOU NEZÁVISLOSŤOU $P_0, \dots, P_n$. ∎

20.03.2007 Tu
PETER ČERNO

MAI042 NUM. MATEMATIKA

METÓDY RIEŠENIA NELIN. ROVNÍC

NECH JE DANÉ $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.
HĽADÁME α : $F(\alpha) = 0$. [F JE VEKTOR FCIÍ.]

ITERAČNÉ METÓDY.

- NEWTONOVA METÓDA = METÓDA DOTYČNÍC

JE ZALOŽENÁ NA LINEARIZÁCII
PROBLÉM $F(x) = 0$ NAHRADÍME LINEÁRNYM PROBLÉMOM $L_k(x) = 0$,
$L_k: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $k = 0, 1, \ldots$
RIEŠENIA $L_k(x) = 0$ KONVERGUJÚ K RIEŠENIU $F(x) = 0$.

PRE DANÚ APROXIMÁCIU $x^{(k)}$ UVAŽUJEME $L_k(x)$
AKO LINEÁRNU ČASŤ TAYLOROVHO ROZVOJA
- ZOBRAZENIA F V BODE $x^{(k)} \in \mathbb{R}^N$.

PLATÍ:

$$F(x) = \overbrace{F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)})}^{L_k(x)} + O(\|x - x^{(k)}\|^2).$$

$J_F(x^{(k)})$ JE JAKOBIHO MATICA ZOBR. F V BODE $x^{(k)}$

KEĎ $F = (f_1, \ldots, f_N)^T$, POTOM

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$$

TAYLOROV POLYNÓM $T_f^n(a)$ FCIE. f V BODE a ST. n JE POLYNÓM P. STUPŇA n TAKÝ, ŽE

$$p(a) = f(a),\quad p'(a) = f'(a),\ \ldots,\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

PRE FCIU $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ PLATÍ:

$$f(x) \approx f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a) + o(\|x-a\|^2)$$

PRE ZOBR. $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ DOSTÁVAME:

$$F(x) = F(a) + J_F(a)\,(x-a) + o(\|x-a\|^2).$$

$$F(x) = 0 \quad \approx \quad L_k(x) = 0$$

TJ. $$F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})\,(x - x^{(k)}) = 0$$

RIEŠENIE α NELIN. PROB. APROXIMUJEME RIEŠENÍM $x^{(k+1)}$ LIN. PROB.

$$\alpha \quad \approx \quad x^{(k+1)} := x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})\,F(x^{(k)})$$

V NUM. MATEMATIKE SA NEOPLATÍ POČÍTAŤ INVERZNÚ MATICU.

RIEŠIME SÚSTAVU $\underbrace{J_F(x^{(k)})}_{\text{MATICA}}\ \underbrace{(x-x^{(k)})}_{\text{NEZN. VEKTOR } \delta x^{(k)}} = \underbrace{-F(x^{(k)})}_{\text{PRAVÁ STRANA}}$

VIZ METÓDY NESKÔR (SOR)

KEĎ NÁJDEME $\delta^{(k)}$, POTOM $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)}$

20.03.2007 Tu
PETER ČERNO

MAI042 NUM. MATEMATIKA

PRE $N=1$ MÁ NEWTONOVA METÓDA NÁZORNÝ GEOMETRICKÝ ZMYSEL.

SPÔSOB AKO NAHRADIŤ FUNKCIU f PRIAMKOU PRECHÁDZAJÚCOU BODOM $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ NIE JE JEDINÝ. ĎALŠIE NAPR.: METÓDA SEČNÍC, JEDNOBODOVÁ METÓDA SEČNÍC, METÓDA TETIV, METÓDA REGULA FALSI

KONVERGENCIA NEWTONOVEJ METÓDY PRE SÚSTAVY.
NECH $F \in C(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ KONVEXNÁ, OTVORENÁ, OBSAHUJE α: $F(\alpha)=0$. NECH $\exists J_F^{-1}(\alpha)$, NECH $\exists R>0, c>0, L>0$:

$$\|J_F^{-1}(\alpha)\| \le c, \qquad \underbrace{\|J_F(x) - J_F(y)\|}_{\text{MATICOVÁ N.}} \le L \underbrace{\|x-y\|}_{\text{VEKTOROVÁ N.}}$$

PRE $\forall x, y \in U(\alpha, R)$. (LIPSCHITZOVSKOSŤ)

POTOM $\exists h$, $\forall x^{(0)} \in B(\alpha, r)$ JE POSTUPNOSŤ $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ JEDNOZNAČNE DEF. A KONVERGUJE K α.

PLATÍ $\|\alpha - x^{(k+1)}\| \le cL \|\alpha - x^{(k)}\|^2$.

KEDY KONVERGUJE? KEĎ JE $x^{(0)}$ BLÍZKO α.

MOTIVÁCIA. $N=1$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

KONVERGUJE $x^{(k)} \to \alpha$?

$$\alpha - x^{(k+1)} = \alpha - x^{(k)} + \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

TAYLOR $0 = f(\alpha) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot (\alpha - x^{(k)}) + \frac{f''(\xi)(\alpha - x^{(k)})^2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} + \alpha - x^{(k)}} + \frac{f''(\xi)(\alpha - x^{(k)})^2}{2 f'(x^{(k)})}$$

$$\Rightarrow |\alpha - x^{(k+1)}| = \left| \frac{f''(\xi)(\alpha - x^{(k)})^2}{2 f'(x^{(k)})} \right|$$

CHCEME HORNÝ ODHAD PRE f''
A DOLNÝ ODHAD PRE f' TJ. HORNÝ ODHAD PRE $\frac{1}{f'}$

$$|\alpha - x^{(k+1)}| \le c\,|\alpha - x^{(k)}|^2 = \frac{1}{c}\left(c\,|\alpha - x^{(k)}|\right)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{c}\left(c \cdot c\,|\alpha - x^{(k-1)}|^2\right)^2 \le \dots$$

$$\le \frac{1}{c}\left(\underbrace{c\,|\alpha - x^{(0)}|}_{<1}\right)^{2^{k+1}}.$$

20.03.2007Th
PETER ČERNO

EX: MAI042 NUM. MATEMATIKA

$x^{(0)}$ VOLÍME TAK, ABY $J_F^{-1}(x_0)$ EXISTOVALA
(TJ. DOSTATOČNĚ BLÍZKO α)
TAKTO NOZNO URČIT r

LEMMA: $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ JE REGULÁRNÍ A

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

NORMY VEKTORŮ:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{1/p}$

$\|x\|_2$ = EUKLIDOVSKÁ NORMA

NORMY MATICE:

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \langle 0; +\infty)$

1. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

KONZISTENTNÍ (KOMPATIBILNÍ) MATICOVÁ NORMA
KDY $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

SUBMULTIPLIKATIVNÍ MATICOVÁ NORMA
KDY $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

PRÍKLAD MATICOVEJ NORMY, KT. NIE JE SUBMULTIPLIKATÍVNA:

$$\|A\|_\Delta := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

PRÍKLAD: $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ FROBENIOVA NORMA

PREČO SA TAM PÍŠE $_F$ A NIE $_2$?

ČASTO UVAŽUJEME NORMU MATICE INDUKOVANÚ NORMOU VEKTORU:

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

TAKŽE $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

TAKTO DEF. NORMA MATICE JE KONZISTENTNÁ, SUBMULTIPLIKATÍVNA A NAVIAC $\|I\| = 1$.

DÁ SA UKÁZAŤ, ŽE $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ ↗ STĹPCOVÉ SÚČTY

STAČÍ DOSADZOVAŤ VEKT. $e_1, e_2, \dots, e_n$.

PODOBNE $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ → RIADKOVÉ SÚČTY

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^T)}$ $\rho(B) = \max |\lambda_i|$ SPEKTRÁLNY POLOMER

20.03.2007 Th
PETER ČERNO

EX: MAI042 Num. matematika

DÔKAZ LEMMY:

$\|A\| < 1 \Rightarrow \det(I-A) \neq 0$, TJ. 0 NIE JE VL. ČÍSLO MATICE $I-A$.

- SÚVISLOSŤ VLASTNÝCH ČÍSIEL MATÍC A A $I-A$.

λ JE VL. ČÍSLO $A \Leftrightarrow \det(A-\lambda I) = 0$

$A - \lambda I = -(-A+\lambda I) = -(I-A+(\lambda-1)I) =$

$= -(I-A-(1-\lambda)I)$

$1-\lambda$ JE VL. ČÍSLO MATICE $I-A$.

- SÚVISLOSŤ $\|A\|$ A $\varrho(A)$

$A v_\lambda = \lambda v_\lambda$

$\|A v_\lambda\| = |\lambda| \, \|v_\lambda\| \leq \|A\| \cdot \|v_\lambda\|$

$\Rightarrow \forall \lambda \quad \|A\| \geq |\lambda|$

$\Rightarrow \|A\| \geq \varrho(A)$

AK $1 > \|A\|$, POTOM $1 > \varrho(A) \Rightarrow 1 - \varrho(A) > 0$.

$\Rightarrow$ MATICA $I-A$ NEMÁ NULOVÉ VL. ČÍSLO.

DOKÁŽEME $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

$\|(I-A)^{-1}(I-A)\| \leq \|I-A\| \cdot \|(I-A)^{-1}\|$??

$\frac{1}{\|(I-A)\|} \leq \|(I-A)^{-1}\|$

$\|I\| = \|I-A+A\| \leq \|I-A\| + \|A\|$

$1 - \|I-A\| \geq 1 - \|A\|$

$\frac{1}{\|I-A\|} \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

$\|A^{-1}\| = \sup \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|A\|\,\|A^{-1}\| =$

$= \sup \frac{\|A^{-1}x\| \cdot \|A\|}{\|x\|} \overset{?}{\leq} \sup \frac{\|AA^{-1}x\|}{\|x\|} = 1$

$I = I - A + A$

$(I-A)^{-1} = I + A(I-A)^{-1}$

$\|(I-A)^{-1}\| \leq 1 + \|A\| \cdot \|(I-A)^{-1}\|$

$(1 - \|A\|) \cdot \|(I-A)^{-1}\| \leq 1$ ∎

DOKONČIT DŮKAZ (VIZ SKRIPTA)

27.03.2007 TU
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

RÁD KONVERGENCIE

DEF. RÁD KONV. IT. METÓDOU PRE RIEŠ. $F(x) = 0$
POSTUPNOSŤ $\{x^{(k)}\}$ GEN. NUM. METÓDOU
KONVERGUJE K α S RÁDOM $p \geq 1$, KEĎ $\exists c > 0$

$$\frac{\|\alpha - x^{(k+1)}\|}{\|\alpha - x^{(k)}\|^p} \leq c \quad \forall k \geq k_0$$

V TAKOM PRÍPADE SA NUM. METÓDA NAZÝVA RÁDU p.

NEWTONOVA METÓDA JE KVADRATICKY KONV.:

$$\|\alpha - x^{(k+1)}\| \leq c \|\alpha - x^{(k)}\|^2.$$

KEĎ JE $x^{(0)}$ DOSTATOČNE BLÍZKO α A $J(\alpha)$ JE REGUL.

ČÍM VÄČŠÍ RÁD, TÝM LEPŠIA METÓDA

METÓDA POLENIA INTERVALU
SEČIENI, TETIV, REGULA FALSI

METÓDY VYŠŠIEHO RÁDU AKO 2 = PROBLÉM
ADAPTÍVNE METÓDY

MOMENTÁLNE SÚ METÓDY S $p = 2$ AŽ 3

AITKENOV δ^2 - PROCES PRE URÝCHLENIE KONV.
METÓD 1. RÁDU V NASL. ZMYSLE

BEHOM RÝCHLOSTI POSTUPNOSTI $x^{(k)}$

KONŠTRUUJEME $y^{(k)}$ POMOCOU LIN. KOMB. $x^{(k)}, x^{(k+1)}, x^{(k+2)}$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha - y^{(k)}}{\alpha - x^{(k)}} = 0$$

VIĎ CVIČENIE

METÓDA POSTUPNÝCH APROXIMÁCIÍ PRE NELIN. R.

PROBLÉM $F(x) = 0$ JE MOŽNÉ TRANSF.

NA PROBLÉM $x - \phi(x) = 0$ (NEJEDNOZNAČNE)

NAPR. PRE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, KEĎ POLOŽÍME

$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ DOSTÁVAME NEWTONOVU METÓDU

x_0 JE DANÉ, $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$

BANACHOVA VETA O KONTRAKCII (VIĎ ANALÝZA)

KORENE POLYNÓMU

- LOKALIZÁCIA KOREŇOV V $\mathbb{C}$
- APROXIMÁCIA KOREŇOV

27.03.2007 T4
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

VETA (DESCARTES)

VETA (CAUCHY) KOŘENE POLYNOMU LEŽÍ V KRUHU

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 + \eta, \eta = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\}$$

NEWTON – HORNEROVA SCHÉMA

ALGORITMUS:

for $m = n$ downto 1 do

1. NÁJDENIE KOREŇ POLYNÓMU $P_m(x)$, OZNAČ. r

(NEWTON) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{P_n(x^{(k)})}{P_n'(x^{(k)})}$, $x^{(0)}$ JE DANÉ

$$P_n(x) = \underbrace{q_{n-1}(x,z)}_{b_n, \dots, b_1}(x-z) + b_0$$

$$P_n'(x) = q_{n-1}(x,z) + q_{n-1}'(x,z)_x(x-z)$$

$$P_n'(z) = q_{n-1}(z,z)$$

2. MEŠLINE $q_{m-1}(x, n)$
3. $P_{m-1} := q_{m-1}$

$P(x) = x^2 + 3x + 6$
$P'(x) = 2x + 3$
$P''(x) = 2$

P	1	3	2	
$x=2$	1	5	(12)	$P(2)$
$x=2$	1	(7)		$P'(2)/1!$
$x=3$	(1)			$P''(2)/2!$

SÚSTAVY LIN. ROVNÍC

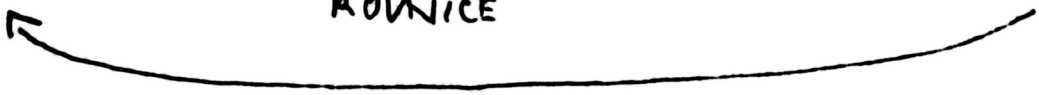
PRIAME - KONEČNÝ POČET KROKOV (GAUSSOVA ELIM.) PRE NÁJD. RIEŠ.
ITERAČNÉ - KONŠTRUOVANIE POSTUPNOSTI VEKTOROV

RIEŠIME $Ax = b$

PRIAME METÓDY MÔŽU BYŤ NESTABILNÉ
RIEŠENIE DOSTANEME AŽ NA KONCI ALGORITMU.

APLIKÁCIA ITERAČNÝCH METÓDU (FILOZOFICKÝ POHĽAD)

FYZIKA ⟶ MATEMATIKA (ROVNICE) ⟶ $Ax=b$ ⟶ x



PRIAME METÓDY SA UPLATŇUJÚ NAPR. PRI RIEDKYCH MATICIACH

27.03.2007 Tu
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

AITKENOV δ^2-PROCES

$f(x) = 0$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x = g(x)$, $\quad x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$, $\quad x^{(k)} \to \alpha$

FUNGUJE IBA PRE

$\lim \frac{\|\alpha - x^{(k+1)}\|}{\|\alpha - x^{(k)}\|} = c < 1$ .. NEXÚCI 1. RÁDU.

UKÁŽEME, ŽE Z $x^{(k)}, x^{(k+1)}, x^{(k+2)}$ MOŽNO SKONŠTRUOVAŤ $y^{(k)}$ T.Ž.

$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha - y^{(k)}}{\alpha - x^{(k)}} = 0$, TJ. $y^{(k)} \to \alpha$ RÝCHLEJŠIE NEŽ $x^{(k)}$

VYMYSLENIE VZORCA

VIEME, ŽE $\frac{\alpha - x^{(k+1)}}{\alpha - x^{(k)}} \approx c$, $\frac{\alpha - x^{(k+2)}}{\alpha - x^{(k+1)}} \approx c$ SÚSTAVA 2 ROVNÍC O 2 NEZN.

$\Rightarrow \alpha \approx x^{(k)}$ - NIEČO

$y^{(k)} :=$ KOMB. $(x^{(k)}, x^{(k+1)}, x^{(k+2)})$

DOPREDNÉ DIFERENCIE: $\delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

$\delta^2 x^{(k)} = \delta(\delta x^{(k)})$

$\alpha - x^{(k+1)} \approx c\alpha - c x^{(k)}$

$\alpha - x^{(k+2)} \approx c\alpha - c x^{(k+1)}$

$\alpha \approx x^{(k)} - \frac{(\delta x^{(k)})^2}{\delta^2 x^{(k)}}$

$\Rightarrow (\alpha - x^{(k+1)})^2 \approx (\alpha - x^{(k)})(\alpha - x^{(k+2)})$

$\alpha^2 - 2\alpha x^{(k+1)} + (x^{(k+1)})^2 \approx \alpha^2 - \alpha(x^{(k)} + x^{(k+2)}) + x^{(k)} x^{(k+2)}$

$\alpha(x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k+2)} - x^{(k+1)}) \approx x^{(k)} x^{(k+2)} - x^{(k+1)} x^{(k+1)}$

$\alpha \approx \frac{x^{(k)}(x^{(k)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k+2)}) - x^{(k)}x^{(k)} + 2x^{(k)}x^{(k+1)} - x^{(k)}x^{(k+2)} - x^{(k+1)}x^{(k+1)}}{x^{(k)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k+2)}}$

$\alpha \approx +x^{(k)} - \frac{(x^{(k)} - x^{(k+1)})^2}{x^{(k)} - 2x^{(k+1)} + x^{(k+2)}}$

PRÍKLAD: DOPREDNÉ DIFERENCIE SÚ DÔLEŽITÉ PRI DISKRETIZÁCII DERIVÁCIÍ



TAYLOR: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f \in C^2\langle a,b\rangle$

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{1!} + O\left(|x^{(k+1)} - x^{(k)}|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}$$

$$f''(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)}) - 2f(x^{(k+1)}) + f(x^{(k+2)})}{h^2}$$

MÁME $\quad y^{(k)} := x^{(k)} - \dfrac{(\delta x^{(k)})^2}{\delta^2 x^{(k)}}$

VETA: NECH JE DANÁ POSTUPNOSŤ $\{x_n\}$ $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_n \to \alpha$, $F, F' \in C\,U(\alpha)$ $F'(x) \neq 0$ NA OKOLÍ $U(\alpha)$. NECH

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} \right| = |F'(\alpha)| < 1.$$ POTOM

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - y_n}{\alpha - x_n} \right| = 0 \qquad y_n = x_n - \frac{(\delta x_n)^2}{\delta^2 x_n}$$

$$\delta^{k+1} = \delta(\delta^k), \quad \delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

27.03.2007 Th
PETER ČERNO

EX: NA1042 NUM. MATEMATIKA

DŮKAZ: $\varepsilon_n = \alpha - x_n$

$$\varepsilon_{n+1} = \alpha - x_{n+1} = F(\alpha) - F(x_n) = F'(\xi_n)\underbrace{(\alpha - x_n)}_{\varepsilon_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = \lim_{n\to\infty} |F'(\xi_n)| = |F'(\alpha)| < 1$$

$\sim F'(\xi_n) = F'(\alpha) + q_n$

ZO SPOJITOSTI F' PLYNIE $q_n \to 0$ PRE $n \to \infty$

TREBA SPOČÍTAŤ $\lim \frac{|\alpha - y_n|}{|\alpha - x_n|}$

$$\alpha - y_n = \alpha - x_n - \frac{(\alpha - x_{n+1} - (\alpha - x_n))^2}{-\alpha + x_n - 2(-\alpha + x_{n+1}) - \alpha + x_{n+1}}$$

$\sim$

$$\alpha - y_n = \varepsilon_n - \frac{(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}}$$

$$\varepsilon_{n+1} = F'(\xi_n)\,\varepsilon_n = (F'(\alpha) + q_n)\,\varepsilon_n \qquad q_n \to 0$$

$$\alpha - y_n = \varepsilon_n - \frac{[(F'(\alpha) + q_n)\varepsilon_n - \varepsilon_n]^2}{\varepsilon_n - 2(F'(\alpha) + q_n)\varepsilon_n + (F'(\alpha) + q_{n+1})(F'(\alpha) + q_n)\varepsilon_n}$$

$$\frac{\alpha - y_n}{\varepsilon_n} = 1 - \frac{[F'(\alpha) + q_n - 1]^2}{1 - 2(F'(\alpha) + q_n) + (F'(\alpha) + q_{n+1})(F'(\alpha) + q_n)}$$

$$\to 1 - \frac{(F'(\alpha) - 1)^2}{1 - 2F'(\alpha) + (F'(\alpha))^2} = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

03.04.2007 Tu
PETER ČERNO

MAI042 NUM. MATEMATIKA

PROBLÉM: NÁJSŤ x : $Ax = b$
MALÁ ZMENA A ALEBO b MÔŽE SPÔSOBIŤ VEĽKÚ ZMENU x

ČÍSLO PODMIENENOSTI $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
EXISTUJÚ PRIBLIŽNÉ METÓDY (ODHADY) cond

ČÍM JE TOTO ČÍSLO VÄČŠIE, TÝM JE MATICA A HORŠIE NAMÄTENÁ (NESTABILNÁ, PODMIENENÁ)

MATICA SA NAZÝVA <u>DOBRE PODMIENENÁ</u>, AK MALÉ ZMENY V KOEFICIENTOCH SPÔSOBIA MALÚ ZMENU V RIEŠENÍ.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

DÔKAZ: VIĎ SKRIPTÁ

GAUSSOVA ELIMINÁCIA

$Ax = b \iff Ux = \hat{b}$, KDE U JE HORNÁ Δ MATICA

ALGORITMUS: VIĎ SKRIPTÁ

POČET OPERÁCIÍ GAUSSOVEJ ELIMINÁCIE JE cca $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ (VIĎ CVIČENIA)

GE JE NUMERICKY NESTABILNÁ

NÁPRAVA: ŠKÁLOVANIE - VNÁŠA ZAOKRÚHĽ. CHYBY

GE AKO LU ROZKLAD

ROZKLAD A NA L.U (LOWER, UPPER)

$A = \Delta \nabla$

$Ax = b \rightsquigarrow LUx = b$

$\Rightarrow Ly = b, \quad Ux = y$

NECH P_j JE MATICA, KT. V j-TOM KROKU GE REALIZUJE ZÁMENU p-tého a j-tého RIADKU V A

$$P_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ p \\ \\ \end{matrix}$$

L_j JE MATICA POMOCOU, KTOREJ SA VYKONÁVA NULOVANIE j-TEHO STĹPCA

03.04.2007 Tq
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

NAPR.

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -l_{43} & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -l_{53} & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -l_{63} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

ALGORITMUS GE MOŽNE ZAPÍSAŤ AKO: $\underbrace{L_{n-1}P_{n-1}\dots L_1P_1}_{M}A = U$

OZNAČÍME $P_{n-1}P_{n-2}\dots P_1 = P$

MÁME $MA = U$, TJ. $MP^{-1}PA = U$

TAKŽE $PA = \underbrace{PM^{-1}}_{L}U$

KDE MATICA $PM^{-1} = L$ JE DOLNÁ Δ.

- LU ROZKLAD MATICE A DOSTANEME POMOCOU GE, KEĎ POČAS ALGORITMU GE NEMUSÍME PREHADZOVAŤ RIADKY.

VETA: KEĎ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE REGULÁRNA, POTOM EXISTUJE PERMUTAČNÁ MATICA $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ A REGULÁRNE MATICE L, U S 1 NA DIAGONÁLE TAKÉ, ŽE $PA = LU$. L JE Δ, P JE ∇

RIEŠENIE $Ax = b$:

1. $PA = LU$
2. $PAx = L\underbrace{Ux}_{\hat{b}} = Pb$

$$L\hat{b} = Pb$$

3. $Ux = \hat{b}$

KVALITA RIEŠENIA $r = b - A\tilde{x}$ REZIDUUM

VETA (ODHAD REZIDUA): NECH $\tilde{x}$ JE PRIBLIŽNÉ RIEŠENIE $Ax = b$, $r = b - A\tilde{x}$ REZIDUUM

NECH JE DANÉ:

$$0 \leq \delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad 0 \leq \delta b \in \mathbb{R}^n$$

POTOM $\tilde{x}$ JE PRESNÉ RIEŠENIE

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \text{ KDE}$$

$$|\tilde{A} - A| \leq \delta A, \quad |\tilde{b} - b| \leq \delta b$$

$|\cdot|$ JE ABSOLÚTNA HODNOTA PO ZLOŽKÁCH

$\Leftrightarrow$

$$|r| \leq \delta A\,|\tilde{x}| + \delta b$$

DÔKAZ. $\Rightarrow$)

$$|r| = |b - A\tilde{x}| = |b - \tilde{b} + \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{A}\tilde{x} - A\tilde{x}|$$

$$\leq |\delta b| + |(A - \tilde{A})|\,|\tilde{x}|$$

$$\leq |\delta b| + |\delta A|\,|\tilde{x}|$$

03.04.2007 Tu
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

KONŠTRUKCIA LU ROZKLADU:

$$A = L.U$$

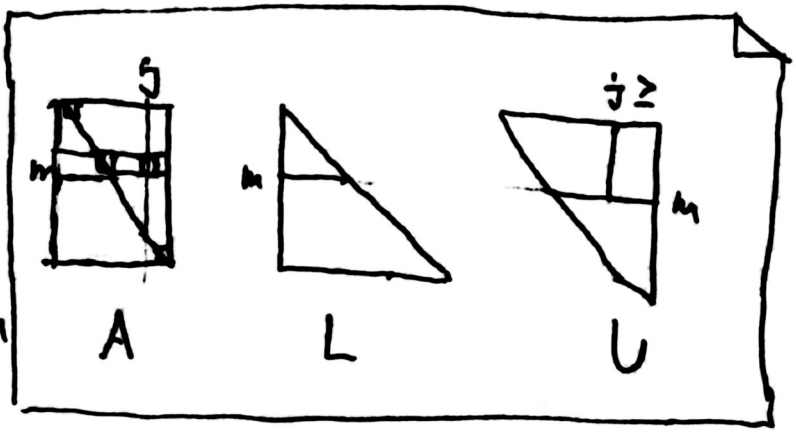
$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj}$ $\quad n^2$ ROVNÍC

L MÁ $\frac{n(n+1)}{2}$ AJ U MÁ $\frac{n(n+1)}{2}$ PRVKOV

$\Rightarrow n^2+n$ NEZNÁMYCH

DOPLNÍME PODMIENKY: $l_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, n$

NÁVOD: 1. SPOČÍTAJ PRVKY m-TÉHO RIADK MAT. U
2. SPOČÍTAJ PRVKY m-TÉHO STĹPCA MATICE L
KDE $m = 1, \dots, n$



$$a_{mj} = \sum_{k=1}^{n} l_{mk} \cdot u_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk} u_{kj} + 1 \cdot (u_{mj}) \quad j \geq m$$

$$a_{im} = \sum_{k=1}^{m-1} l_{ik} u_{km} + (l_{im}) u_{mm} \quad i > m$$

VETA: NECH, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. FAKTORIZÁCIA $A = L.U$
EXISTUJE [redacted] A JE JEDNOZNAČNE URČENÁ $\Leftrightarrow$
VŠETKY HLAVNÉ MINORY A, TJ. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$
$k = 1, \dots, n-1$ SÚ NENULOVÉ.

03.04.2007 TU
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MAT.

PRÍKLAD:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21} u_{11} & l_{21} u_{12} + u_{22} \end{pmatrix}$$

$u_{11} = 0$

$u_{12} = 1$

$l_{21} u_{11} = 0 \qquad l_{21} \cdot 0 = 0$

$l_{21} u_{12} + u_{22} = 2 \qquad l_{21} + u_{22} = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$u_{11} = a_{11}$

$u_{12} = a_{12}$

$u_{13} = a_{13}$

$l_{21} u_{11} + 1 \cdot 0 = a_{21}$

$l_{31} u_{11} \circledast = a_{31}$

$l_{21} u_{12} + u_{22} = a_{22}$

$l_{21} u_{13} + u_{23} = a_{23}$

$l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = a_{32}$

$l_{31} u_{13}\, l_{32} u_{23} + u_{33} = a_{33}$

PRÍKLAD: POČET OPERÁCIÍ GE

VIĎ SKRIPTÁ

CHOLESKÉHO ROZKLAD: PRE KAŽDÚ SYMETRICKÚ, POZITÍVNE DEFINITNÚ MATICU $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ EXISTUJE PRÁVE JEDNA DOLNÁ Δ MATICA L S KLADNÝMI PRVKAMI NA DIAGONÁLE TAK, ŽE

$$A = L \cdot L^T$$

DÔKAZ (INDUKCIA)

VETA: NECH $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE SYMETRICKÁ, OSTRO DOMINANTNÁ DIAGONÁLNE $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $a_{ii} > 0$, POTOM A JE POZ. DEFINITNÁ.

QR ROZKLAD: KU KAŽDEJ REGULÁRNEJ MATICI $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ EXISTUJE ORTOGONÁLNA MATICA $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(Q Q^T = Q^T Q = I)$ A REGULÁRNA HORNÁ Δ MATICA R TAKÁ, ŽE $A = Q \cdot R$.

TÁTO TRANSFORMÁCIA NEZVÝŠUJE ČÍSLO PODMIENENOSTI

PREDPODMIENENIE:

$$Ax = b$$

$$\rightsquigarrow \quad \underbrace{PA}\, x = Pb$$

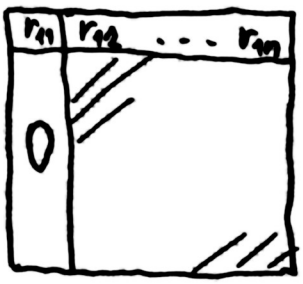
DOBRÁ PODMIENENOSŤ

03.04.2007 T4
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MAT.

HAUSEHOLDEROVA TRANSFORMÁCIA A JEJ VUŽITIE PRE QR ROZKLAD

KONŠTRUKCIA MATICE Q:

$P_1 A =$ 

P_i SÚ ORTOGONÁLNE $\Rightarrow$ $Q^T = P_{n-1} \dots P_1$

UVAŽUJME P- ORTOGONÁLNE MATICE

POZNÁMKA: $\langle Px \mid Px \rangle = x^T P^T P x = \langle x \mid x \rangle$

TJ. $\|Px\|^2 = \|x\|$.

HAUS·HOLDEROVA TR.:

HĽADÁME TRANSFORMÁCIU (ORTOGONÁLNU) TAKÚ, ŽE $Px = (\alpha, 0, \dots, 0)^T = \alpha e_1$

TRANSFORMÁCIU HĽADÁME V TVARE

$P = I - 2ww^T$, KDE $w^T w = 1$

VIDÍME, ŽE $PP^T = I$

$(I - 2ww^T)(I^T - 2ww^T) = I - 4ww^T + 4ww^T ww^T = I$. □

$Px = x - 2ww^T x = \alpha e_1 \qquad w = \frac{x - \alpha e_1}{2w^T x}$

$$x - \alpha e_1 = 2ww^T x \qquad /^2$$

$$\|x - \alpha e_1\|^2 = 4\, x^T w w^T w w^T x = 4\|w^T x\|^2 = (2w^T x)^2$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|}$$

musí být $x - \alpha e_1 \neq \vec{0}$

$$\|x - \alpha e_1\|^2 = \|x\|^2 - 2\alpha x_1 + \alpha^2 > 0$$

TREBA VŽDY ZVOLIT $\alpha := -\operatorname{sgn}(x_1)\,\|x\|$

VIEME (Z $Px = \alpha e_1$), ŽE $\alpha^2 = \|x\|^2$

OPTIMÁLNE

10.04.2007 Fu
PETER ČERNO

MAI042 NUM. MATEMATIKA

ITERAČNÉ METÓDY RIEŠENIA SÚSTAV LINEÁRNYCH ROVNÍC

IDEA ITERAČNÝCH METÓD: KONŠTRUKCIA $\{x^{(k)}\}$

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}, \quad \text{KDE} \quad Ax = b$$

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ REZIDUUM

VÝPOČET REZIDUA $O(n^2)$

IT. METÓDY SÚ SCHOPNÉ VYUŽIŤ INFORMÁCIE O ŠTRUKTÚRE MATICE (RIEDKOSŤ, BLOKOVÁ DIAGONÁLNOSŤ)

ÚLOHU PREVEDIEME NA $x = \varphi(x)$
RIEŠIME POMOCOU VETY O PEVNOM BODE

KLASICKÉ ITERAČNÉ METÓDY

IDEA: VETA O PEVNOM BODE

$$Ax = b \Leftrightarrow x = G(x)$$

PRE DANÉ $x^{(0)}$ SA RIEŠENIE HĽADÁ AKO LIMITA POSTUPNOSTI $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$

1. RICHARDSONOVA METÓDA

$$x = x + b - Ax$$
$$x = \underbrace{(I - A)}_{B_R} x + b$$
$$x^{(k+1)} = B_R x^{(k)} + b$$

2. JACOBIHO METODA

$$A = E + D + F$$

E JE OSTRO DOLNÁ Δ MATICA
D JE DIAGONÁLNA M.
F JE OSTRO HORNÁ Δ MATICA

$$Ax = b \Leftrightarrow (E+D+F)x = b$$

$$Dx = -(E+F)x + b$$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(E+F)}_{B_J} x + \underbrace{D^{-1}b}_{f_J}$$

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J$$

3. GAUSOVA - SEIDELOVA METODA

$$Ax = b \Leftrightarrow (D+E)x + Fx = b$$

$$(D+E)x = -Fx + b \qquad \text{(PO ZLOŽKÁCH)}$$

$$x = \underbrace{-(D+E)^{-1}F}_{B_{GS}}x + \underbrace{(D+E)^{-1}b}_{f_{GS}} \qquad \text{(MATICOVO)}$$

$$x^{(k+1)} = B_{GS} x^{(k)} + f_{GS}$$

DOLEŽITÉ: MATICU $(D+E)^{-1}$ NEMOŽEME !!!
RIEŠIME V TVARE $(D+E)x = -Fx + b$
[ZÁPIS PO ZLOŽKÁCH]

10.04.2007 Ut
PETER ČERNO

MAI042 NUM. MATEMATIKA

PRI PROGRAMOVANÍ SA POUŽÍVA:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}E\,x^{(k+1)} - D^{-1}F\,x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ x & 0 & & \\ x & x & 0 & \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix}}_{D^{-1}E}\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x & x & x \\ & 0 & x & x \\ & & 0 & x \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_{D^{-1}F}\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}}_{D^{-1}b}$$

GAUß-SEIDELOVA METÓDA JE VLASTNE JACOBIHO METÓDA, ALE S TÝM ROZDIELOM, ŽE <u>ČO SPOČÍTAM HNEĎ POUŽIJEM</u> !!

V JACOBIHO METÓDE SI TREBA PAMÄTAŤ CELÝ VEKTOR $x^{(k)}$ PRE VÝPOČET NOVEJ ITERÁCIE.

U METÓDY GAUß-SEIDEL SI REZERVUJEME MIESTO IBA PRE JEDEN VEKTOR, NA KT. MIESTO SA POSTUPNE UKLADAJÚ ZLOŽKY VEKTORU $x^{(k+1)}$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{x}^{(k+1)} \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & x & x & x \\ x & 0 & x & x \\ x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{x}^{(k)} \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

JACOBIHO METÓDA, ALE POSTUPNE PREPÍSUJEME ZLOŽKY VEKTORA $x^{(k)}$ ...

4. METÓDA SOR (SUPERRELAXAČNÁ)

SUPER OVER RELAXATION

POZOR! PROGRAMOVAŤ PO ZLOŽKÁCH

MÁME DANÉ $x^{(k)}$, SPOČÍTAME $\tilde{x}^{(k+1)}$ POMOCOU GAUB-SEIDELA.

SOR: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}^{(k+1)} - x^{(k)}\right)$

OVER : $\omega \notin (0,1)$ ↓ RELAXAČNÝ PARAMETER

↑ TU JE TO BEZ VLNOVKY !!

$$\tilde{x}^{(k+1)} = -D^{-1}E\,x^{(k+1)} - D^{-1}F\,x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\left(\tilde{x}^{(k+1)} - x^{(k)}\right)$$

POČÍTAME PO ZLOŽKÁCH

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)I\,x^{(k)} + \omega\left(-D^{-1}E\,x^{(k+1)} - D^{-1}F x^{(k)} + D^{-1}b\right)$$

$$\left(I+\omega D^{-1}E\right)x^{(k+1)} = \left((1-\omega)I - D^{-1}F\right)x^{(k)} + \omega D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = \left(I+\omega D^{-1}E\right)^{-1}\left((1-\omega)I - D^{-1}F\right)x^{(k)} + \omega\left(I+\omega D^{-1}E\right)D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} =$$

VIĎ SKRIPTÁ

10.04.2007 Tu
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

UVAŽUJME IT. METÓDU $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

DEF. IT. METÓDA JE KONZISTENTNÁ S $Ax=b$
$\Leftrightarrow$ $x = Bx + f$, KDE $Ax=b$

VETA: POSTUPNOSŤ $\{x^{(k)}\}$ KONV. K x^*, KDE $Ax^*=b$
PRE ĽUBOVOĽNÉ $x^{(0)}$, PRÁVE VTEDY KEĎ
$\rho(B)$ (SPEKTR. POLOMER B, $\rho(B) = \max |\lambda_i|$) JE MENŠÍ AKO 1.
PLATÍ IBA PRE KONZISTENTNÉ IT. METÓDY

DÔKAZ: CHYBA: $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$

KONZ. MET.: $x^* = Bx^* + f$
IT. METÓDA: $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)}$$

VIĎ SKRIPTÁ

VÝPOČET VLASTNÝCH ČÍSIEL MATÍC

MOCNINNÁ METÓDA

(ODLOŽÍME NA ĎALŠIU PREDNÁŠKU)

DOMÁCE CVIČENIE: ODVOĎTE RK METÓDU 2. RADU

NUMERICKÁ INTEGRÁCIA OBYČ. DIF. ROVNÍC

DANÉ: $f: \langle a,b\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, $x \in \langle a,b\rangle$, $y \in \mathbb{R}$

DANÁ POČ. PODM. $g \in \mathbb{R}$. HĽADÁME $y: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

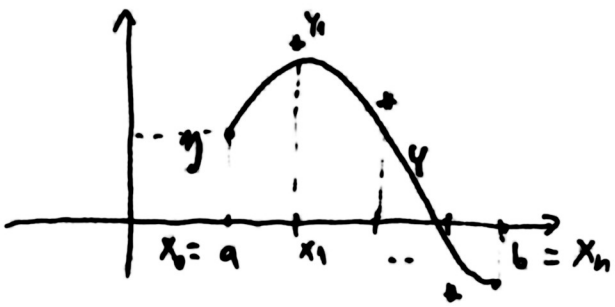
SPĹŇAJÚCU: $y'(x) = f(x, y(x))$ $x \in \langle a,b\rangle$

$y(a) = g$

f JE SPOJITÁ A LOK. LIPSCHITZOVSKÁ V DRUHEJ PREM.

JEDNOKROKOVÉ METÓDY

ROZDELÍME $\langle a,b\rangle$ S UZLAMI $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$



PROBLÉM: $y' = f(x,y)$

TAYLOR: $y(x_i + h) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + o(h^2)$, $y \in C^2\langle a,b\rangle$

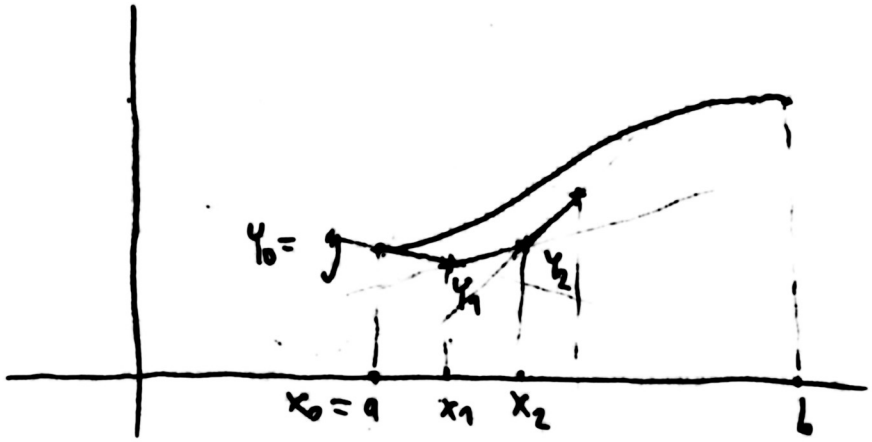
$$y'(x_i) = \frac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h} + o(h) = f(x_i, y(x_i))$$

NUM. MAT.: $$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

13.04.2007 TU
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

$$\Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$
$$y_0 = y$$



OBECNE ZAPÍŠEME METÓDY TYPU.:

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{\phi(x_i, y_i, h)}_{\text{PARAMETROVÉ ZOBR.}}$$

ϕ = SÚ TO OBECNÉ JEDNOKROKOVÉ METÓDY

$$y(x_i + h) = y(y_i) + \frac{h}{1!} y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2}\left(f_x + f_y f\right) + O(h^2)$$

1. CIEĽ: MINÚŤ SA VÝRAZU $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$
2. CIEĽ: KONVERGENCIA

DEF.: METÓDA JE RÁDU p, KEĎ ...

DEF.: METÓDA JE KONVERGENTNÁ S RÁDOM p

RUNGE-KUTTA : METÓDY VYSOKÉHO RÁDU
(NIE ČASTEJŠIE 4), NEVYŽADUJÚ DERIVÁCIE PRAVEJ. STR.

$$y_{i+1} = y_i + h\,\Phi(x_i, y_i, h) \quad , \quad \text{KDE}$$

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \Phi(x, y(x), h) + O(h^p)$$

$$+ \quad \Phi = \omega_1 k_1 + \ldots + \omega_s k_s$$

$\omega_1, \ldots, \omega_s$ SÚ ČÍSLA
$k_1, \ldots, k_s$ SÚ FUNKCIE

$$k_1(x, y) = f(x, y)$$
$$k_2(x, y) = f(x + \alpha_2 h,\ y + h\,\beta_1 k_1)$$

...

$$\boxed{k_i(x, y) = f\left(x + \alpha_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \cdot k_j\right)}$$

ω_i, α_i SÚ ČÍSLA, KT. VYPOČÍTAME TAK, ABY

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \simeq \Phi(x, y(x), h) + o(h^p)$$

10.04.2007 Fri
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

KONSTRUOVÁNÍ

$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i, h)$, RÁDU $p=2$

$\phi = w_1 k_1 + w_2 k_2$

AŽ DO RÁDU 4 JE $s=p$, POTOM JE $s > p$

$k_1 = f(x, y)$

$k_2 = f(x + \alpha h,\ y + h\beta f(x,y))$

HLEDÁME α, β, w_1, w_2

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \phi(x, y, h) + O(h^2)$$

MYŠLENKA: w_1, w_2, α, β NASTAVÍME TAK ABY:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \text{TAYLOR 1} + O(h^2)$$

$$\phi(x, y(x), h) = \text{TAYLOR 2} + O(h^2)$$

TAYLOR 1 = TAYLOR 2

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + O(h^3)$$

$$\Rightarrow \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f + \frac{h}{2}\left(f_x \cdot 1 + f_y \cdot f\right) + O(h^2)$$

$$\Phi = \omega_1 f + \omega_2 f\left(x + \alpha h,\ y + h\beta f(x,y)\right) =$$

$$= \omega_1 f + \omega_2 \left[f(x,y) + \alpha h f_x + h\beta f f_y + O(h^2) \right]$$

$$= (\omega_1 + \omega_2) f + \omega_2 \alpha h f_x + \omega_2 h\beta f f_y + o(h^2)$$

f: $\omega_1 + \omega_2 = 1$

hf_x: $\frac{1}{2} = \omega_2 \alpha$

hff_y: $\frac{1}{2} = \omega_2 \beta$

---

3 ROVNICE PRE 4 NEZNÁME

DOBRE SA OSVEDČÍ POLOŽIŤ $\omega_1 := 0$

$\Rightarrow \quad \omega_2 = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$

$$\Phi = f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2} h f(x,y)\right)$$

10.04.2007 Tu
PETER ČERNO

EX: MA1042 NUM. MATEMATIKA

KONVERGENCIA JACOBIHO METÓDY PRE OSTRO DIAGONÁLNE DOMINANTNÉ MATICE

$$Ax = b$$

$$a_{ii} x_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)}$$

$$B_{ij} = - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} (1 - \delta_{ij})$$

$$(ODD) : |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

OTÁZKA $\rho(B) < 1$?

$$Bx = \lambda x \Rightarrow \|Bx\| = |\lambda| \, \|x\|$$

$$\Rightarrow \|B\| \geq |\lambda|$$

$$\|B\|_\infty := \max_i \sum_j \text{RIADKOVÉ SČÍTAŤ} =$$

$$= \max_i \sum_j |B_{ij}| = \max_i \sum_j \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} (1 - \delta_{ij})$$

Z ODD $\sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\rho(B) < 1}}$

17.04.2007 FIN
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

VÝPOČET VLASTNÝCH ČÍSIEL MATÍC

MOCNINNÁ METÓDA (SKÚŠA SA NA SÚBORKÁCH!)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, A JE DIAGONALIZOVATEĽNÁ

$\det(A-\lambda I)$ .. CHARAKT. POLYNÓM

PROBLÉM: HĽADÁME DOMINANTNÉ VL. ČÍSLO λ_1

$(|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|)$

TJ. PREDPOKLADÁME, ŽE $\exists$ REG. MATICA X TAKÁ, ŽE

$A = X\Lambda X^{-1}$, Λ JE DIAG. MATICA

$AX = \Lambda X$ TJ. $X = \left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$

TJ. $A\vec{x}_i = \lambda \vec{x}_i$

BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE $\|\vec{x}_i\| = 1 \quad \forall i$

ALGORITMUS:

ZVOLÍME VEKTOR $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, $\|q^{(0)}\| = 1$
$(\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ EUKLIDOVSKÁ NORMA)

KONŠTRUUJEME POSTUPNOSŤ VEKTOROV $q^{(k)}$

$$q^{(k)} := \frac{Aq^{(k-1)}}{\|Aq^{(k-1)}\|} = \dots = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|}$$

KEĎŽE A JE DIAG., VL. VEKTORY SÚ LIN. NEZ. A TVORIA BÁZU $\mathbb{C}^n$

$\Rightarrow q^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

BUDEME UVAŽOVAT TAKÉ $q^{(0)}$, ŽE $a_1 \neq 0$.

$q^{(k)T} A q^{(k)}$ = ČÍSLO, KT. ZÁVISÍ NA k.

↓

KONVERGUJE KU λ_1

$\left(Ax_i = \lambda x_i \Rightarrow A^k x_i = \lambda^k x_i\right)$

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k x_i}{\|\cdot\cdot\|} =$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i\right)}{\|\cdot\cdot\|} =$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + y^{(k)}\right)}{|\alpha_1 \lambda_1^k| \, \|x_1 + y^{(k)}\|} \quad \text{KDE} \quad y^{(k)} = \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k x_i$$

$$\|y^{(k)}\| \leq \sum_{i=2}^n \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right| \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k \|x\| \leq \left(\sum_{i=2}^n \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right|\right) \underbrace{\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^k}_{<1}$$

$$\|y^{(k)}\| \leq C \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

SMĚR $q^{(k)}$ SE BLÍŽÍ KU SMĚRU VEKT. x_1

$$q^{(k)H} A q^{(k)} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \cdot \frac{\left(x_1^H + y^{(k)H}\right)}{\|x_1^H + y^{(k)H}\|} \cdot \frac{\alpha_1 \lambda_1^k}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \frac{\left(\lambda_1 x_1 + A y^{(k)}\right)}{\|x_1 + y^{(k)}\|} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + \left(x_1^H A y^{(k)}\right) + \left(y^{(k)H} \lambda_1 x_1\right) + \left(y^{(k)H} A y^{(k)}\right)}{\|x_1^H + \left(y^{(k)H}\right)\| \cdot \|x_1 + \left(y^{(k)}\right)\|} \to \lambda_1$$

$\to 0$

17.04.2007 Th
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

GRADIENTNÉ METÓDY

PRE RIEŠENIE $Ax = b$

METÓDA NAJVÄČŠIEHO SPÁDU

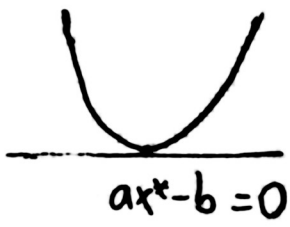
MYŠLIENKA: $n=1$ $ax = b$, $a > 0$

$ax - b$ JE DERIVÁCIA ISTEJ FUNKCIE $\varphi(x)$

$$\min_x \varphi(x) = \varphi(x^*)$$

$$0 = \varphi'(x^*)$$

NAPR. $\varphi(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$



PROBLÉM NÁJSŤ x^*: $ax^* = b$ JE EKVIV.

NÁJDENIU MINIMA $\varphi(x)$

PRE $n > 1$ JE $Ax = b$ A JE POZITÍVNE DEFINITNÁ

DEF. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax; x\rangle - \langle b; x\rangle$

$\varphi^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

MINIMUM FCIE. VIACERÝCH PREMENNÝCH

$$Ax^* = b \Leftrightarrow \min_x \phi(x) = \phi(x^*).$$

DÔKAZ:

$$\nabla \phi(x) = \frac{1}{2}(A^T + A)x - b$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) =$$

$$= \dots$$

BUDEME PREDPOKLADAT, ŽE A JE SYMETRICKÁ A POZ. DEF.

$$\Rightarrow \quad \nabla \phi(x) = Ax - b$$

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \nabla \phi(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\langle A(x - x^*), x - x^* \rangle$$

TOTO PLATÍ (STAČÍ DOSADIŤ)

JE TO VLASTNE TAYLOROV ROZVOJ ϕ V BODE x^*

HESSOVA MATICA JE A → SYMETRICKÁ, POZITÍVNE DEFINITNÁ

POZITÍVNA DEFINITNOSŤ A NÁM HOVORÍ, ŽE PRE $x \neq x^*$ DOSTÁVAME

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \text{NIEČO KLADNÉ}$$

17.04.2007Th
PETER ČERNO

MA1042 NUM. MATEMATIKA

ZVOLÍME $x^{(0)}$ ĽUBOVOĽNE, $d^{(0)}$ JE NEJAKÝ SMER

$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha d^{(0)}$

$d^{(0)}$ VOLÍME AKO SMER NAJVÄČŠIEHO SPÁDU

TJ. $d^{(0)} = -\nabla\phi(x^{(0)}) = b - Ax^{(0)} = r^{(0)}$ (REZIDUUM)

HĽADÁME MINIMUM V SMERE REZIDUA

CHCEME, ABY $\phi(x^{(1)}) < \phi(x^{(0)})$

TJ. $\phi(x_0^{(0)} + \alpha r^{(0)}) < \phi(x^{(0)})$

α VOLÍME TAK, ABY $\phi(x^{(1)}) = \min_{\alpha} \phi(x^{(0)} + \alpha r^{(0)})$

UVAŽUJME FCIU. $f(\alpha) = \phi(x^{(0)} + \alpha r^{(0)})$ $\quad R \to R$

$f'(\alpha_0) = 0$, TJ. $\langle \nabla\phi(x^{(0)} + \alpha_0 r^{(0)}); r^{(0)} \rangle = 0$

$\langle A(x^0 + \alpha_0 r^{(0)}) - b; r^{(0)} \rangle = 0$

$\langle -r_0; r_0 \rangle + \alpha_0 \langle Ar^{(0)}, r^{(0)} \rangle = 0$

$$\alpha_0 = \frac{\langle r^{(0)}, r^{(0)} \rangle}{\langle Ar^{(0)}; r^{(0)} \rangle}$$

KEĎ SME SA NETRAFILI, TJ. $r^{(0)} \neq 0$, POTOM $\langle Ar^{(0)}; r^{(0)} \rangle > 0$.

ALGORITMUS

ZVOLÍME $x^{(0)}$.

$$r^{(i)} = b - A x^{(i)}, \quad \alpha_i = \frac{\langle r^{(i)}, r^{(i)} \rangle}{\langle A r^{(i)}, r^{(i)} \rangle}$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha_i r^{(i)}$$

VETA: UVEDENÁ METÓDA KONVERGUJE VŽDY, ALE POMALY.

NÁPRAVA: INÁ VOĽBA SMERU - METÓDA ZDRUŽENÝCH GRADIENTOV.