Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# Matematické struktury

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

**Garant**: prof. RNDr. Aleš Pultr, DrSc.
**E-mail**: Ales.Pultr@mff.cuni.cz

**Anotace**: Struktury, s nimiž se studenti již setkali (relace, algebraické struktury, struktury spojitosti); specifické vlastnosti, srovnání. Různé konstrukce (podobjekty, ekvivalence a kongruence, součiny, sumy a pod.) a jejich společné rysy. Zvláštní pozornost bude věnována částečným uspořádáním, a to jak obecným záležitostem, tak i aspektům speciálního významu pro informatiku. Některá základní fakta teorie kategorií.

**Sylabus**:

1. Úvod. Různé struktury, s nimiž se studenti setkali. Srovnání, poznámky o zvláštnostech. Kombinace struktur.

2. Relace. Relace, algebra relací, některé obecné konstrukce. Homomorfismy.

3. Částečné uspořádání (obecné záležitosti). Částečně uspořádané množiny a monotonní zobrazení. Reprezentace částečně uspořádaných množin. Suprema a infima. Galoisova adjunkce.

4. Částečné uspořádání (některé speciální případy). Požadavky na existenci speciálních suprem a infim. DCPO, svazy, úplné svazy. Věty o pevných bodech, příklady užití. Distributivní svazy, Heytingovy algebry, Booleovy algebry. Spojité svazy.

5. Algebraické operace a algebry. Homomorfismy algeber, různé obecné konstrukce (poznámky o univerzální algebře). Variety algeber.

6. Poznámky o struktuře prostorů. Metrické prostory, topologie. Speciální topologie teoretické informatiky.

7. Některé další typy struktur. Několik příkladů struktur "ze života", které se nedají bezprostředně zahrnout do předchozího: multigrafy, automaty a pod.

8. Společné vlastnosti některých konstrukcí. Produkty, sumy, ekvalizátory, atd. Úvodní poznámky k teorii kategorií.

29.05.2008 Th.
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

3.6.2: NECH $q_i : X \to X_i$ $(i \in J)$ JE SÚSTAVA ZOBRAZENÍ TAKÁ, ŽE PRE KAŽDÚ SÚSTAVU $f_i : Y \to X_i$ EXISTUJE PRÁVE JEDNO $f : Y \to X$ : $\forall i \in J$: $q_i \circ f = f_i$, POTOM EXISTUJE BIJEKCIA $q : X \to \prod_{i \in J} X_i$ TAKÁ, ŽE $\forall i \in J$: $p_i \circ q = q_i$.

ZREJME $\exists q : X \to \prod_{i \in J} X_i$ : $\forall i \in J$: $p_i \circ q = q_i$.

NA DRUHEJ STRANE PRE SÚSTAVU PROJEKCIÍ $p_j : \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ EXISTUJE PRÁVE JEDNO $p : \prod_{i \in J} X_i \to X$ : $\forall i \in J$: $q_i \circ p = p_i$.

$\Rightarrow \forall i \in J$: $q_i \circ p \circ q = q_i$, $p_i \circ q \circ p = p_i$ $\Rightarrow$ $p \circ q = id_X$, $q \circ p = id_{\prod_{i \in J} X_i}$.

a) TOTIŽ $p \circ q \neq id_X \Rightarrow \exists x \in X$: $x' = p \circ q(x) \neq x$
ALE PRE $\forall i \in J$: $q_i(x') = q_i(x) \Rightarrow q(x') = q(x) = u \in \prod_{i \in J} X_i$
$\Rightarrow p(u)$ NEVIEME DEFINOVAŤ 2 SPÔSOBMI (BUĎ AKO $x$, ALEBO $x'$).

b) AK $q \circ p \neq id_{\prod}$ $\Rightarrow \exists (x_i)_{i \in J}$ $(x_{i \in J})_{i \in J} = q \circ p((x_i)_{i \in J}) \neq (x_i)_{i \in J}$
$\Rightarrow \exists j \in J$ $x_j \neq x_j \Rightarrow p_j \circ q \circ p((x_i)_{i \in J}) \neq p_j((x_i)_{i \in J})$ ↯. □

Z AXIÓMU VÝBERU PLYNIE:

ZERMELOVA LEMA: KAŽDÚ MNOŽINU MOŽNO DOBRE USPORIADAŤ

ZORNOVO LEMA: BUĎ $(X, \leq)$ ČIASTOČNE USPORIADANÁ MNOŽINA TAKÁ, ŽE PRE KAŽDÚ $Y \subseteq X$ LINEÁRNE USPORIADANÚ RELÁCIOU $\leq$ EXISTUJE HORNÁ MEDZA, POTOM KU KAŽDÉMU $x \in X$ EXISTUJE MAXIMÁLNY $y \in X$ TAKÝ, ŽE $x \leq y$.

PRINCÍP MAXIMALITY: BUĎ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ TAKÁ, ŽE PRE KAŽDÝ RETAZEC $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ $\exists A \in \mathcal{A}$: $\bigcup \mathcal{C} \subseteq A$, POTOM KU KAŽDÉMU $A \in \mathcal{A}$ EXISTUJE MAXIMÁLNE (VZHĽADOM K $\subseteq$) $B \in \mathcal{A}$: $A \subseteq B$.

$R \subseteq X^m$, $S \subseteq Y^m$, $f : (X, R) \to (Y, S)$ JE HOMOMORFIZMUS
$\Leftrightarrow \forall \xi \in R$: $f \circ \xi \in S$.

TYP $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$, RELAČNÁ ŠTRUKTÚRA $R = (R_t)_{t \in T}$ NA $X$
$(R_t \subseteq X^{\Delta_t})$

## PODOBJEKTY

NECH $(X,R) \in Rel(\Delta)$, $j: Y \subseteq X$. DEFINUJEME

$$R|Y = (R_{Y,t})_{t \in T}, \text{ KDE } R_{Y,t} = \{ f: A_t \to Y \mid j \cdot f \in R_t \}$$

$(Y, R|Y)$ JE PODOBJEKT OBJEKTU $(X,R)$ NESENÝ PODMNOŽINOU $Y$.

$R|Y$ JE NAJVÄČŠIA RELAČNÁ ŠTRUKTÚRA DANÉHO TYPU NA $Y$ T. Ž. $j: Y \subseteq X$ JE HOMOMORFIZMUS.

AK $f: (X,R) \to (Y,S)$ JE HOMOMORFIZMUS, POTOM PRE $j: X' \subseteq X$ JE $f|X' = f \circ j$ HOMOMORFIZMUS $(X', R|X') \to (Y,S)$.

AK $f: (X,R) \to (Y,S)$ JE HOMOMORFIZMUS, $j: Y' \subseteq Y$ A $f[X] \subseteq Y'$, POTOM $f'$ DEFINOVANÉ AKO $j \circ f' = f$ JE HOMOMORFIZMUS $(X,R) \to (Y', S|Y')$.

AK $j: X' \subseteq X$ JE HOMOMORFIZMUS $(X', R') \to (X,R)$ PRE NEJAKÝ RELAČNÝ SYSTÉM $R'$. POTOM KEĎŽE $j[X'] = X' \subseteq X$ JE (KEĎŽE $j \circ id_{X'} = j$) $id_{X'}$ HOMOMORFIZMUS $(X', R') \to (X', R|X') \Rightarrow R'_t \subseteq R'_{X',t}$ $\forall t$.

## PRODUKTY (SÚČINY)

$(X_i, R_i)$ $i \in J$ SÚBOR OBJEKTOV Z $Rel(\Delta)$, DEFINUJEME $\prod_{i \in J} (X_i, R_i) = (X, R)$

$X = \prod_{i \in J} X_i$, $R_t = \{ f: A_t \to X \mid \forall j \in J \ p_j \circ f \in R_{j,t} \}$

29.05.2008 Th
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

## KVOCIENTY (PODIELY)

$(X,R) \in Rel(\Delta)$, $q: X \to Y$ JE NA, POTOM $(Y,\bar{R})$ DEFINUJEME AKO $\bar{R}_t = \{q \circ \xi \mid \xi \in R_t\}$.

VETA: NECH $f: (X,R) \to (Z,S)$ JE HOMOMORFIZMUS TAKÝ, ŽE $q(x) = q(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.
POTOM EXISTUJE PRÁVE JEDEN HOMOMORFIZMUS $\bar{f}: (Y,\bar{R}) \to (Z,S)$ TAKÝ, ŽE $\bar{f} \circ q = f$.

PRE $y \in Y$ $\exists x \in X: q(x) = y$. DEFINUJME $\bar{f}(y) := f(x)$.
ZREJME NEZÁLEŽÍ NA TOM, KTORÉ $x$ VYBERIEME.
MÁME $\bar{f}: Y \to Z$ TAKÉ, ŽE $\bar{f} \circ q = f$.
NECH $\xi \in \bar{R}_t$ T.J. $\xi = q \circ \xi$ PRE NEJAKÉ $\xi \in R_t$.
POTOM $\bar{f} \circ \xi = \bar{f} \circ q \circ \xi = f \circ \xi \in S_t \Rightarrow \bar{f}$ JE HOMOMORFIZMUS.

## PROJEKTÍVNE VYTVÁRANIE ŠTRUKTÚR

DANÉ OBJEKTY $(X_i, R_i)$ $i \in J$ TYPU $\Delta$
A SÚSTAVA $r_i: X \to X_i$ TAKÁ, ŽE $(\forall i \in J: r_i \circ f = r_i \circ g) \Rightarrow f = g$
POTOM $(X, R')$, $R'_t = \{\xi: \Delta_t \to X \mid \forall i \in J: r_i \circ \xi \in R_{i,t}\}$
JE NAJVÄČŠÍ RELAČNÝ SYSTÉM NA $X$ T. Ž.
VŠETKY $r_i: (X,R') \to (X_i, R_i)$ SÚ HOMOMORFIZMY.

(PROJ): NECH $(Y,S) \in Rel(\Delta)$ A $f: Y \to X$ JE ZOBRAZENIE T.Ž. $\forall i \in J$ $f_i = r_i \circ f$ JE HOMOMORFIZMUS $(Y,S) \to (X_i, R_i)$, POTOM $f$ JE HOMOMORFIZMUS $(Y,S) \to (X,R')$
RELAČNÝ SYSTÉM $R'$ JE TVRDENÍM (PROJ) URČENÝ JEDNOZNAČNE

NECH $\xi \in S_t$ $\xi : A_t \to Y$. $\forall i \in J$ $f_i \circ \xi \in X_i$
TJ. $\forall i \in J$ $r_i \circ f \circ \xi \in X_i \Rightarrow f \circ \xi \in R'_t \Rightarrow f$ JE HOMOMORFIZMUS
NECH (PROJ) PLATÍ PRE ŠTRUKTÚRU $R''$ AJ $R''$.
VEZMIME SI $id_X = f$. $\forall i \in J$ JE $f_i = r_i \circ f = r_i \circ id_X = r_i$
JE HOMOMORFIZMUS $(X, R') \to (X_i, R_i)$.
PODĽA (PROJ) JE POTOM $f$ HOMOMORFIZMUS $(X, R') \to (X, R'')$
A KEĎŽE $f = id_X$, NUTNE $R'_t \subseteq R''_t$ $\forall t \in T \Rightarrow R' = R''$
!

## INJEKTÍVNE VYTVÁRANIE ŠTRUKTÚR

DANÉ OBJEKTY $(X_i, R_i)$ $i \in J$ TYPU $A$
A SÚSTAVA ZOBRAZENÍ $s_i : X_i \to X$ TAKÉ, ŽE
$(\forall i \in J : f \circ s_i = g \circ s_i) \Rightarrow f = g$.

POTOM $(X, R')$, $R'_t = \{ s_i \circ \xi \mid \xi \in R_{i,t}, i \in J \}$
JE NAJMENŠÍ RELAČNÝ SYSTÉM TAKÝ, ŽE
VŠETKY $s_i$ SÚ HOMOMORFIZMY. $(X_i, R_i) \to (X, R')$

(INJ): KEĎ JE $(Y, S) \in Rel(A)$ A $f : X \to Y$
JE ZOBRAZENIE TAKÉ, ŽE $\forall i \in J$: $f_i = f \circ s_i$
HOMOMORFIZMUS $(X_i, R_i) \to (Y, S)$, POTOM
$f$ JE HOMOMORFIZMUS $(X, R') \to (Y, S)$.
RELAČNÝ SYSTÉM $R'$ JE TVRDENÍM (INJ) URČENÝ JEDNOZN.

$\xi' \in R'_t$ TJ. $\xi' = s_i \circ \xi$ PRE NEJAKÉ $i \in J$ A $\xi \in R_{i,t}$
$\Rightarrow f_i \circ \xi = f \circ s_i \circ \xi = f \circ \xi' \in S$. □

30.05.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

$x$ JE HORNÁ (DOLNÁ) MEZ $M \Leftrightarrow M \subseteq {\downarrow}x$ $(M \subseteq {\uparrow}x)$

$\sup M$ = NAJMENŠIA HORNÁ ZÁVORA $M \subseteq {\downarrow}s$, $M \subseteq {\downarrow}x \Rightarrow s \leq x$.
$\inf M$ = NAJVÄČŠIA DOLNÁ ZÁVORA

$M \subseteq N \subseteq X$ $M$ NAHOR (DOLU) KOFINÁLNA S $N$...
$\forall n \in N\ \exists m \in M : m \geq n$ $(m \leq n)$

KEĎ JE $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ ISOTÓNNE $\Rightarrow$
$f[{\uparrow}x] \subseteq {\uparrow}f(x)$, $f[{\downarrow}x] \subseteq {\downarrow}f(x)$
$\Rightarrow M \subseteq {\downarrow}x \Rightarrow f[M] \subseteq f[{\downarrow}x] \subseteq {\downarrow}f(x) \Rightarrow f[M] \subseteq {\downarrow}f(\sup M)$
$\Rightarrow {\downarrow}\sup f[M] \subseteq {\downarrow}f(\sup M) \Rightarrow \sup f[M] \leq f(\sup M)$. □

VETA: USPORIADANÁ MNOŽINA JE ÚPLNÝ ZVÄZ $\Leftrightarrow$ KEĎ V NEJ MÁ KAŽDÁ PODMNOŽINA SUPRÉNUM (INFÍNUM).

MAJME MNOŽINU $M$. $N = \{x \mid M \subseteq {\uparrow}x\}$, $s = \sup N$.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $s = \inf M$..
PRE $m \in M$ JE $m \geq x$ PRE $\forall x \in N \Rightarrow m$ JE HORNÁ ZÁVORA $N$
TJ. $N \subseteq {\downarrow}m \Rightarrow s \leq m$. $\Rightarrow s$ JE DOLNÁ ZÁVORA $M$
TJ. $M \subseteq {\uparrow}s$. KEĎ $M \subseteq {\uparrow}x \Rightarrow x \in N \Rightarrow x \leq s$,
TJ. $s$ JE NAJVÄČŠIA DOLNÁ ZÁVORA $M$, TJ. $s = \inf M$.

PODMNOŽINU $D$ USPORIADANEJ MNOŽINY NAZÝVAME USMERNENOU $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ KONEČNÁ $K \subseteq D$ MÁ HORNÚ MEZ V $D$.
TJ. $D \neq \emptyset$ A $\forall x, y \in D\ \exists z \in D : x, y \leq z$.

HORNÝ POLOZVÄZ, KTORÝ MÁ SUPRÉNA VŠETKÝCH USMERNENÝCH PODMN., MÁ SUPRÉNA VŠETKÝCH $\neq \emptyset$ PODMN.

$M \neq \emptyset \Rightarrow \sup M = \sup \underbrace{\{\sup K \mid K \subseteq M \text{ KONEČNÁ}\}}_{\text{ZREJME USMER. MNOŽINA}}$

# DEDEKINDOVÉ-MACNEILLOVÉ ZÚPLNENIE

ROZŠÍRENIE ČIASTOČNE USPORIADANEJ MNOŽINY $X$ NA ÚPLNÝ ZVÄZ. TAK, ABY BOLI ZACHOVANÉ UŽ EXISTUJÚCE SUPRÉMA A INFÍMA.

DEFINUJEME: $lb(M) = \{x \mid M \subseteq \uparrow x\}$

$ub(M) = \{x \mid M \subseteq \downarrow x\}$

$\nu(M) = lb(ub(M))$.

LEMMA: (1) $M \subseteq N \Rightarrow lb(M) \supseteq lb(N),\ ub(M) \supseteq ub(N)$

(2) $M \subseteq \nu(M) = lb(ub(M)),\ M \subseteq ub(lb(M))$

(3) $M \subseteq N \Rightarrow \nu(M) \subseteq \nu(N)$

(4) $\nu(\nu(M)) = \nu(M)$.

(5) $lb(\uparrow a) = \downarrow a,\ ub(\downarrow a) = \uparrow a$

(1) $x \in lb(N) \Rightarrow N \subseteq \uparrow x \Rightarrow M \subseteq N \subseteq \uparrow x \Rightarrow x \in lb(M)$.

(2) $x \in M \Rightarrow \forall z \in ub(M) : x \leq z \Rightarrow ub(M) \subseteq \uparrow x \Rightarrow x \in lb(ub(M))$.

(3) $M \subseteq N \Rightarrow ub(M) \supseteq ub(N) \Rightarrow lb(ub(M)) \subseteq lb(ub(N))$.

(4) $M \subseteq ub(lb(M)) \Rightarrow lb(M) \supseteq lb(ub(lb(M)))$

$lb(M) \subseteq lb(ub(\boxed{lb(M)}))$.

$\Big\} \Rightarrow \nu(\nu(M)) = \nu(M)$

DEFINUJEME $DM N(X, \leq) = \{M \subseteq X \mid \nu(M) = M\}$

A VLOŽENIE $X \to DM N(X)$ AKO $x \mapsto \downarrow x$.

ZREJME $\nu(\downarrow x) = lb(ub(\downarrow x)) = lb(\uparrow x) = \downarrow x$.

$DM N(X, \leq)$ JE ÚPLNÝ ZVÄZ, KDE $\bigvee_{i \in J} M_i = \nu(\bigcup_{i \in J} M_i)$

ZOBRAZENIE $a \mapsto \downarrow a$ JE VLOŽENIE $(a \leq b \Leftrightarrow \downarrow a \leq \downarrow b)$ ZACHOVÁVAJÚCE SUPRÉMA AJ INFÍMA.

30.05.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $\forall i \in J\ M_i \subseteq M \Rightarrow \bigcup_{i\in J} M_i \subseteq M$
$\Rightarrow v(\bigcup_{i\in J} M_i) \subseteq v(M) = M$ PRE $M \subseteq DMN(X)$.
NA DRUHEJ STRANE $v(\bigcup_{i\in J} M_i) \in DMN(X)$
$M_i \subseteq \bigcup_{i\in J} M_i \Rightarrow M_i \subseteq v(M_i) \subseteq v(\bigcup_{i\in J} M_i)$.

ŠPECIÁLNE PRE $\emptyset$ JE ZREJME $v(\emptyset) = lb(X) = v(lb(X))$
$\Rightarrow lb(X) \in DMN(X)$ PRE $\forall M: v(M) = M$
JE $ub(M) \subseteq X \Rightarrow lb(X) \subseteq lb(ub(M)) = v(M) = M$.

~~NECH PRE $a,b \in X$ EXISTUJE $\sup\{a,b\} = s$.~~
~~CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $v(\downarrow a \cup \downarrow b) = \downarrow s$.~~
~~$a,b \le s \Rightarrow \downarrow a, \downarrow b \subseteq \downarrow s \Rightarrow v(\downarrow a \cup \downarrow b) \subseteq \downarrow s$.~~

NECH PRE $A \subseteq X$ EXISTUJE $\sup A = s$
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $v(\downarrow A) = \downarrow s$, KDE $\downarrow A = \bigcup_{a\in A} \downarrow a$
~~$\forall a \in A: \downarrow a \subseteq \downarrow s \Rightarrow \downarrow A \subseteq \downarrow s \Rightarrow v(\downarrow A) \subseteq v(\downarrow s) = \downarrow s$.~~
$v(\downarrow A) = lb(ub(\bigcup_{a\in A} \downarrow a)) = lb(\{x \mid \forall a \in A: x \ge a\}) =$
$= lb(\uparrow s) = \downarrow s$

NECH $\inf A = t$. POTOM $\downarrow t = \bigcap_{a\in A} \downarrow a \in DMN(X)$

LEMMA: PRE KAŽDÚ KONEČNÚ USP. MNOŽINU $X$ A DVA JEJ NEPORovnateľné PRVKY $a, b$ EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $\phi_{ab}: (X, <) \to (N, <)$ T. Ž. $\phi_{ab}(a) < \phi_{ab}(b)$.

LEMMA: KAŽDÚ KONEČNÚ USP. MNOŽINU MOŽNO VLOŽIŤ DO $(N, <)^k$ S KONEČNÝM $k$.

LEMMA: KAŽDÉ KONEČNÉ USPORIADANIE JE PRIENIK LINEÁRNYCH USPORIADANÍ.

# ADJUNKCIA (GALOISOVA KONEXIA)

ISOTÓNNE ZOBRAZENIA $f:(X,\leq)\to(Y,\leq)$,
$g:(Y,\leq)\to(X,\leq)$ SÚ ADJUNGOVANÉ
($f$ NACAVO, $g$ NAPRAVO) AK
$\forall x\in X\,\forall y\in Y: f(x)\leq y \Leftrightarrow x\leq g(y)$.

(a) VZÁJOMNE INVERZNÉ IZOMORFIZMY $g(y)\leq x' \Leftrightarrow y\leq f(x')$
$x\leq x' \Leftrightarrow f(x)\leq f(x')$ $\not\Rightarrow$ $x\leq g(y)\Leftrightarrow f(x)\leq y$,

(b) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ RASTÚCA $\Rightarrow$ $\bar{f}:\langle 1;+\infty)\to\langle 1,+\infty)$ RASTÚCA, $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$\lceil\phi(m)\rceil\leq n \Leftrightarrow \phi(m)\leq n \Leftrightarrow m\leq f(n)$ $\lceil\phi(\cdot)\rceil$ JE ĽAVÝ ADJ. K $f$
$n\leq \lfloor\phi(m)\rfloor \Leftrightarrow n\leq\phi(m)\Leftrightarrow f(n)\leq m$. $\lfloor\phi(\cdot)\rfloor$ JE PRAVÝ ADJ. K $f$

ISOTÓNNE $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ SÚ ADJUNGOVANÉ
$\Leftrightarrow$ $f\circ g\leq id$, $g\circ f\geq id$

ĽAVÉ ADJUNKTY ZACHOVÁVAJÚ SUPRÉMA (PRAVÉ INFÍMA)
$f$ JE ISOTÓNNE, $s=\sup M$ $\Rightarrow$ $M\subseteq{\downarrow}s\Rightarrow f[M]\subseteq{\downarrow}f(s)$. CHCEME
$f[M]\subseteq{\downarrow}f(s)$. AK $f[M]\subseteq{\downarrow}x$ $\forall m\in M: f(m)\leq x$, TJ. $m\leq g(x)$
$\Rightarrow M\subseteq{\downarrow}g(x)\Rightarrow s\leq g(x)\Rightarrow f(s)\leq x$. □

VETA: PRE ÚPLNÉ ZVÄZY $X,Y$ JE ISOTÓNNE $f:X\to Y$
ĽAVÝ (RESP. PRAVÝ) ADJUNKT $\Leftrightarrow$ ZACHOVÁVA SUP (inf).

DEFINUJME $g(y)=\sup\{x\mid f(x)\leq y\}$
$f(x)\leq y\Rightarrow x\leq g(y)$. NECH $x\leq g(y)=\sup\{z\mid f(z)\leq y\}$
$f\left(\sup\{z\mid f(z)\leq y\}\right)=\sup f[z\mid f(z)\leq y]\leq y$

30.05.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## TARSKÉHO - KNASTEROVA VETA O PEVNOM BODE:

KAŽDÉ ISOTÓNNE ZOBRAZENIE ÚPLNÉHO ZVÄZU DO SEBA MÁ PEVNÝ BOD.

$M = \{x \mid x \leq f(x)\}$, $s = \sup M$.

$x \in M \Rightarrow x \leq s \Rightarrow x \leq f(x) \leq f(s) \Rightarrow M \subseteq {\downarrow} f(s) \Rightarrow s \leq f(s)$

$\Rightarrow f(s) \leq f(f(s)) \Rightarrow f(s) \in M \Rightarrow f(s) \leq s$.

$s$ JE NAJVÄČŠÍ PEVNÝ BOD (PODOBNE ∃ NAJMENŠÍ P.B.)

## CANTOR - BERNSTEINOVA VETA

NECH $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ SÚ PROSTÉ ZOBRAZENIA.
POTOM EXISTUJE BIJEKCIA $h: X \to Y$ TAKÁ, ŽE
PRE $\forall x \in X$ JE BUĎ $h(x) = f(x)$ ALEBO $h(x) = g^{-1}(x)$.

$F: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ $\quad F(M) = X \setminus g[Y \setminus f[M]]$.

$M \subseteq N \Rightarrow f[M] \subseteq f[N] \Rightarrow Y \setminus f[N] \subseteq Y \setminus f[M] \Rightarrow$
$g[Y \setminus f[N]] \subseteq g[Y \setminus f[M]] \Rightarrow F[M] \subseteq F[N]$
$\Rightarrow F$ JE ISOTÓNNE $\Rightarrow \exists A \subseteq X : F(A) = A$, T.J.
$X \setminus A = g[Y \setminus f[A]] \Rightarrow g^{-1}[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$ $\quad (*)$

DEFINUJME $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{PRE } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{PRE } x \in X \setminus A \end{cases}$

$(*) \Rightarrow h$ JE PROSTÉ
NECH $y \in Y$. $y \in f[A] \Rightarrow \exists x \in A : f(x) = y = h(x)$
$y \notin f[A] \Rightarrow y \in Y \setminus f[A] \overset{(*)}{\Rightarrow} \exists x \in X \setminus A : g^{-1}(x) = y$.

# HRA DVOCH OSÔB S ÚPLNOU INFORMÁCIOU

$X$ množina stavov, $A, B \subseteq X \times X$ pravidlá pre prvého, druhého hráča. $x_0 \in X$ poč. stav

HRA: $x_0 A x_1 B x_2 A x_3 \ldots$

STRATÉGIA PRVÉHO (DRUHÉHO) HRÁČA: $S \subseteq A$ $(S \subseteq B)$

JE VÝHERNÁ: $xSy\ yBz \Rightarrow zS \neq \emptyset$

NEPREHRÁVAJÚCA PRE PRVÉHO: $x_0 S_I \neq \emptyset$

PRE DRUHÉHO $\forall x_1 \in X : x_0 A x_1 \Rightarrow x_1 S_{II} \neq 0$

VETA: Aspoň jeden hráč má neprehrávajúcu stratégiu.

PRE $P \subseteq X \times X$ DEFINUJME $r : \mathcal{P}(X \times X) \to \mathcal{P}(X \times X)$

AKO $r(P) = \{(x,y) \in X \times X \mid yP = \emptyset\}$

$r$ JE ANTITÓNNE, PRE $A, B \subseteq X \times X$ DEFINUJME

$\Phi_{AB} : \mathcal{P}(X \times X) \to \mathcal{P}(X \times X)$ AKO $\Phi_{AB}(M) = A \cap r(B \cap r(M))$.

ZREJME $\Phi_{AB}$ JE IZOTÓNNE ZOBRAZENIE A $(\mathcal{P}(X \times X), \subseteq)$ JE ÚPLNÝ ZVÄZ, TAKŽE PODĽA TARSKEHO - KNASTEROVEJ VETY $\exists$ PEVNÝ BOD.

NECH $S_{II} \subseteq X \times X$: $B \cap r(A \cap r(S_{II})) = S_{II}$

DEFINUJME $S_I = A \cap r(S_{II})$. POTOM $S_I$ JE PEVNÝ BOD $\Phi_{AB}$: $A \cap r(B \cap r(A \cap r S_{II})) = A \cap r(S_{II}) = S_I$.

$S_I$, RESP. $S_{II}$ JE VÝHERNÁ STRATÉGIA PRE 1., RESP. 2. HRÁČA

PRE $S_{II}$: NECH $x S_{II} y$, $yAz$. AK $z S_{II} = \emptyset$

POTOM $(y,z) \in A \cap r(S_{II})$

AVŠAK $(x,y) \in r(A \cap r(S_{II})) \Rightarrow y(A \cap r(S_{II})) = \emptyset$. ↯

31.05.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

ZVÄZ AKO ALGEBRA $\wedge, \vee$

(ÚV-EQ): $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

MODULÁRNY ZVÄZ

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

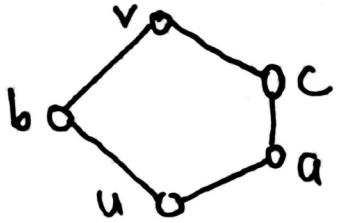
LEMMA: $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$ PRE $a \leq c$.

$a \leq a \vee b$, $a \leq c \Rightarrow a \leq (a \vee b) \wedge c$

$b \wedge c \leq b \leq a \vee b$, $b \wedge c \leq c \Rightarrow b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge c$ } $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

ZVÄZ L JE MODULÁRNY $\Leftrightarrow \forall a,b,c : a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.
$\Leftrightarrow$ L NEOBSAHUJE $C_5$ AKO PODZVÄZ.

$\Rightarrow$)




$a \leq c$, $a \vee (b \wedge c) = a \vee u = a$

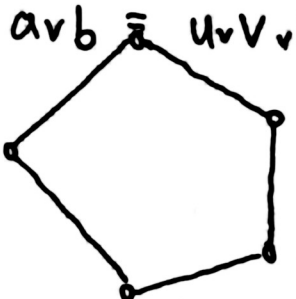
$(a \vee b) \wedge c = v \wedge c = c$

$\Leftarrow$) NECH $u, v, w \in L$, $u \leq w$. CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE
$u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge w$. PRE SPOR NECH $u \vee (v \wedge w) < (u \vee v) \wedge w$.

NAJSKÔR UKÁŽEME, ŽE $v$ JE NEPOROVNATEĽNÉ
S $u \vee (v \wedge w)$ AJ S $(u \vee v) \wedge w$.

$v \leq (u \vee v) \wedge w \Rightarrow v \leq w \Rightarrow v \wedge w = v \Rightarrow u \vee (v \wedge w) = u \vee v \geq (u \vee v) \wedge w$,

$u \vee (v \wedge w) \leq v \Rightarrow u \leq v \Rightarrow u \vee v = v \Rightarrow (u \vee v) \wedge w = v \wedge w \leq u \vee (v \wedge w)$




$v \vee ((u \vee v) \wedge w) \leq u \vee v$

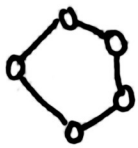
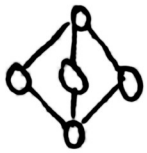
NA DRUHEJ STRANE
$u \vee v = b \vee a \leq b \vee c$

$v \wedge (u \vee (v \wedge w)) \geq v \wedge w$

NA DRUHEJ STRANE
$v \wedge w = b \wedge c \geq b \wedge a$

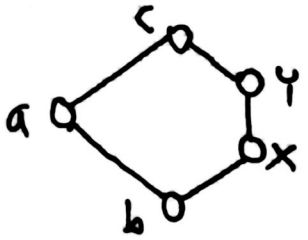
ZVÄZ JE DISTRIBUTÍVNY $\Leftrightarrow \forall a,b,c: a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
$\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

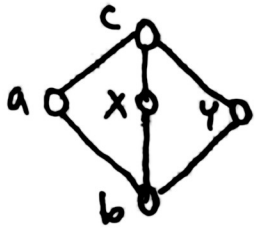
KAŽDÝ DISTRIBUTÍVNY ZVÄZ JE MODULÁRNY

ZVÄZ JE DISTRIBUTÍVNY $\Leftrightarrow$ NEOBSAHUJE  ANI 

ZVÄZ JE DISTRIBUTÍVNY $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ SÚSTAVA
$a\wedge x=b,\ a\vee x=c$ MÁ NAJVIAC JEDNO RIEŠENIE

$x=x\wedge(a\vee x)=x\wedge(a\vee y)=(x\wedge a)\vee(x\wedge y)=(y\wedge a)\vee(x\wedge y)=$
$=y\wedge(a\vee x)=y\wedge(a\vee y)=y.$




## IDEÁLY A FILTRY v DISTRIBUTÍVNYCH ZVÄZOCH

IDEÁL $J\subseteq L$ : $0\in J,\ a,b\in J\Rightarrow a\vee b\in J,\ a\in J, b\leq a\Rightarrow b\in J$
FILTER $F\subseteq L$ : $1\in F,\ a,b\in F\Rightarrow a\wedge b\in F,\ a\in F, b\geq a\Rightarrow b\in F$
VLASTNÝ IDEÁL (FILTER)
PRVOIDEÁL : $a\wedge b\in J\Rightarrow a\in J\vee b\in J$ + $J\neq L$ TJ. VLASTNÝ
PRVOFILTER : $a\vee b\in F\Rightarrow a\in F\vee b\in F$ + $F\neq L$
MAXIMÁLNY IDEÁL (FILTER)

PRVOFILTRY SÚ VO VZÁJOMNE JEDNOZNAČNOM VZŤAHU S HOMOMORFIZMAMI $h: L(\wedge,\vee,0,1)\to 2(\wedge,\vee,0,1)$,
KDE $2=\{0,1\}$.

$h_F: L\to 2 \qquad h_F(x)=\begin{cases}0 & x\notin F\\ 1 & x\in F\end{cases}$

31.05.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY – SKÚŠKA

LEMMA: NECH $J$ JE IDEÁL A $F$ JE FILTER V $L$ TAKÝ, ŽE $J \cap F = \emptyset$. POTOM EXISTUJE FILTER $\bar{F}$ MAXIMÁLNY VZHĽADOM KU PODMIENKE $\bar{F} \cap J = \emptyset$, TENTO FILTER JE PRVOFILTER.

NECH $\mathcal{F}$ JE NEJAKÁ JUSTÁVA FILTROV DISJUNKTNÝCH S $J$ OBSAHUJÚCA $F$ TAKÁ, ŽE $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ JE $F_1 \subseteq F_2$ ALEBO $F_2 \subseteq F_1$, $\bigcup \mathcal{F}$ JE ZREJME FILTER DISJUNKTNÝ S $J$

– $1 \in \bigcup \mathcal{F}$, $a, b \in \bigcup \mathcal{F} \Rightarrow \exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}: a \in F_1, b \in F_2$. BÚNO $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow a, b \in F_2 \Rightarrow a \wedge b \in F_2 \Rightarrow a \wedge b \in \bigcup \mathcal{F}$.
PODOBNE $b \geq a, a \in \bigcup \mathcal{F} \Rightarrow b \in \bigcup \mathcal{F}$.
$\Rightarrow$ ZO ZORNOVEJ LEMMY (V PODOBE PRINCÍPU MAXIMALITY) PLYNIE, ŽE K $F$ EXISTUJE MAXIMÁLNY FILTER $\bar{F}$, $\bar{F} \cap J = \emptyset$.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\bar{F}$ JE PRVOFILTER.
NECH $a, b \notin \bar{F}$, $a \vee b \in \bar{F}$. DEFINUJME

$$G = \{x \mid x \vee b \in \bar{F}\}.$$

ZREJME $G$ JE FILTER $\supseteq \bar{F}$, $a \in G$, $a \notin \bar{F} \Rightarrow G \supset \bar{F}$
– $\Rightarrow G \cap J \neq \emptyset \Rightarrow \exists c_1 \in G \cap J$. DEFINUJME

$$H = \{x \mid x \vee c_1 \in \bar{F}\}$$

OPÄŤ $H$ JE FILTER $\supseteq F$, $b \in H$, $b \notin \bar{F} \Rightarrow H \supset \bar{F}$
$\Rightarrow H \cap J \neq \emptyset \Rightarrow \exists c_2 \in H \cap J$, T.Ž. $c_1 \vee c_2 \in \bar{F}$
$c_1, c_2 \in J \Rightarrow c_1 \vee c_2 \in J \Rightarrow \bar{F} \cap J \neq \emptyset$ ↯.
$0 \notin F$, PRETOŽE $0 \in J$ A $\bar{F} \cap J = \emptyset$.

BIRKHOFFOVA VETA: NECH $J$ JE IDEÁL A $F$ FILTER V $L$, $J \cap F = \emptyset$. POTOM EXISTUJE PRVOIDEÁL $\bar{J} \supseteq J$ A PRVOFILTER $\bar{F} \supseteq F$: $\bar{J} \cap \bar{F} = \emptyset$.

02.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## PSEUDOKOMPLEMENT

NECH $L$ JE ZVÄZ S $0$.
$b$ JE PSEUDOKOMPLEMENT $a \Leftrightarrow$ $b$ JE NAJVÄČŠÍ PRVOK TAKÝ, ŽE $b \wedge a = 0$. OZN. $a^*$.

$$x \leq a^* \Leftrightarrow x \wedge a = 0.$$

PSEUDOKOMPLEMENTÁRNY ZVÄZ $0^* = 1$, $1^* = 0$

$a \mapsto a^*$ JE ANTITÓNNE ZOBRAZENIE

NECH $a \leq b$. $x \leq b^* \Leftrightarrow x \wedge b = 0 \Rightarrow x \wedge a = 0 \Leftrightarrow x \leq a^*$
$\Rightarrow b^* \leq a^*$.

LEMMA: 1) $a \leq a^{**}$
2) $a^{***} = a^*$
3) $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$
4) $(a \vee a^*)^* = 0$

1) $a^* \leq a^* \Rightarrow a^* \wedge a = 0 \Rightarrow a \leq a^{**}$.
2) $a \leq a^{**} \Rightarrow a^* \geq a^{***}$, $(a^*) \leq (a^*)^{**}$.
3) $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow b \leq a^* = a^{***} \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$
4) $x \leq (a \vee a^*)^* \Leftrightarrow x \wedge (a \vee a^*) = 0 \Leftrightarrow$
$x \wedge a = 0$ & $x \wedge a^* = 0$
[$\Rightarrow$) $x \wedge (a \vee a^*) \geq (x \wedge a) \vee (x \wedge a^*)$
$\Leftarrow$) $a \leq x^*$, $a^* \leq x^* \Rightarrow a \vee a^* \leq x^* \Rightarrow (a \vee a^*) \wedge x = 0$.]
$x \leq a^*$ & $x \leq a^{**} \Leftrightarrow x \leq a^* \wedge a^{**} = 0$

VETA: V PSEUDOKOMPLEMENTÁRNOM ZVÄZE PLATÍ
$(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$

$(a\wedge b)^{**} \le a^{**}\wedge b^{**}$

$a\wedge b \le a \Rightarrow (a\wedge b)^{**} \le a^{**}$
$a\wedge b \le b \Rightarrow (a\wedge b)^{**} \le b^{**}$
$\Big\} (a\wedge b)^{**} \le a^{**}\wedge b^{**}$

$x \le a^{**}\wedge b^{**} \Leftrightarrow x \le a^{**} \wedge x \le b^{**} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\wedge a^* = 0 \;\&\; x\wedge b^* = 0 \Leftrightarrow a^* \le x^* \;\&\; b^* \le x^* \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^*\vee b^* \le x^* \Leftrightarrow x\wedge(a^*\vee b^*) = 0$ ⊗

$a\wedge b \le (a\wedge b)^{**} \Leftrightarrow a\wedge b\wedge(a\wedge b)^{**} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^{**}\wedge b\wedge(a\wedge b)^{**} \Leftrightarrow a^{**}\wedge b^{**}\wedge(a\wedge b)^{**} \Leftrightarrow a^{**}\wedge b^{**} \le (a\wedge b)^{**}$

DE MORGANOVA FORMULA: NECH V PSEUDOKOMPLEMENTÁRNOM ZVÄZE $L$ EXISTUJE $\sup_{j\in J} a_j$. POTOM $(\sup_{j\in J} a_j)^* = \inf_{j\in J} a_j^*$.

$x \le (\sup_{j\in J} a_j)^* \Leftrightarrow x\wedge(\sup_{j\in J} a_j) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sup_{j\in J} a_j \le x^* \Leftrightarrow \forall j\in J: a_j \le x^* \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall j\in J: a_j\wedge x = 0 \Leftrightarrow \forall j\in J: x \le a_j^*$. □

UVAŽUJME $f: (L,\le) \to (L,\le)^{op}$, $f(x) = x^*$
$g: (L,\le)^{op} \to (L,\le)$, $g(y) = y^*$
} ZREJME SÚ IZOTÓNNE

$\boxed{f(x) \le y} \Leftrightarrow x^* \le y \Leftrightarrow x^*\wedge y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \le x \Leftrightarrow \boxed{x \le^{op} g(y)}$

$\Rightarrow f\circ g \le^{op} id$, $g\circ f \ge id \quad \equiv x^{**} \ge x$

PLATÍ $\sup f[\Pi] = f(\sup \Pi)$ D PRE $\Pi = \{a_j \mid j\in J\}$
DE $\inf_{j\in J} a_j^* = (\sup_{j\in J} a_j)^*$.

---

$(\forall x_i)\; h\wedge y = 0 \Leftrightarrow \forall(x_i\wedge y) = 0$

$x\wedge(\sup_{j\in J} a_j) = 0 \Leftrightarrow \forall j\in J\; a_j\wedge x = 0 \Leftrightarrow$
$\sup_{j\in J} a_j\wedge x = 0$.

02.06.2008
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA

b JE KOMPLEMENT a, AK $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$

V DISTRIBUTÍVNOM ZVÁZE MÁ KAŽDÝ PRVOK NAJVIAC 1 KOMPLEMENT A KAŽDÝ KOMPLEMENT JE PSEUDOKOMPLEMENT.

$b \wedge a = 0$, $b \vee a = 1$. NECH $x \wedge a = 0$

$\boxed{x = x \wedge (a \vee b)} = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge b \leq b$.

## HEYTINGOVA ALGEBRA

HEYTINGOVA OPERÁCIA $a \to b$ V ZVÁZE L JE

$a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c$

HEYTINGOVA ALGEBRA - ZVÁZ L S 0,1 A HEYT. OPERÁCIOU

NECH b JE PEVNÉ. DEFINUJME

$f(x) := x \wedge b$ , $g(y) = b \to y$

◁ $c_1 \leq c_2 \Rightarrow b \to c_1 \leq b \to c_2$

$a \leq b \to c_1 \Leftrightarrow a \wedge b \leq c_1 \leq c_2 \Rightarrow a \leq b \to c_2$

$b_1 \leq b_2 \Rightarrow b_1 \to c \geq b_2 \to c$

$a \leq b_2 \to c \Leftrightarrow a \wedge b_2 \leq c \Rightarrow a \wedge b_1 \leq c \Rightarrow a \leq b_1 \to c$.

ZREJME $f, g$ SÚ ISOTÓNNE, ADJUNGOVANÉ

$f(x) \leq y \Leftrightarrow x \wedge b \leq y \Leftrightarrow x \leq b \to y \Leftrightarrow x \leq g(y)$

KEĎŽE f JE JEDNOZNAČNE DEFINOVANÉ OPERÁCIOU $\wedge$, URČUJE TÍM HEYTINGOVU OPERÁCIU g

$f(x) = x \wedge b$ ZACHOVÁVA SUPRÉMA, TJ. PRE $\forall M \subseteq L$
$\sup f[M] = f(\sup M)$ AK EXISTUJE $\sup M$.

TJ. $\sup_{j \in J} (x_j \wedge b) = (\sup_{j \in J} x_j) \wedge b$

TJ. $\bigvee_{j \in J} (x_j \wedge b) = (\bigvee_{j \in J} x_j) \wedge b$ . $\Rightarrow$

**HEYTINGOVA ALG. JE VŽDY DISTRIBUTÍVNA**

$\Rightarrow$ ÚPLNÝ ZVÄZ S 0,1 PRIPÚŠŤA HEYTINGOVÚ OP.
$\Leftrightarrow$ KEĎ V NOM PLATÍ ZOSLABENÁ ROVNICA DISTRIBUTÍVITY

$g: y \mapsto b \to y$ JE PRAVÝ ADJUNKT $\Rightarrow$
$\inf g[M] = g(\inf M)$, TJ. $\inf_{j \in J} b \to y_j = b \to \inf_{j \in J} y_j$

ISOTÓNNE $f, g$ SÚ ADJUNGOVANÉ $\Leftrightarrow$
$f \circ g \leq id$ A $g \circ f \geq id$ TJ.

$a \wedge (a \to b) \leq b$
$b \to (a \wedge b) \geq a$

---

**HEYTINGOVA ALGEBRA JE PSEUDOKOMPLEMENTÁRNA.**

$a^* = a \to 0$.

$x \wedge a = 0 \Leftrightarrow x \leq a^*$

ZREJME $x \leq a \to 0 \Leftrightarrow x \wedge a = 0$

---

$a \wedge b \leq a \Rightarrow a \leq b \to a$, $a \to a = 1$

$1 \leq a \to b \Leftrightarrow a \leq b$

$a \leq 1 \to a$, $1 \to a \leq 1 \to a \Rightarrow 1 \to a \leq a$

$\Rightarrow 1 \to a = a$.

02.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA

$a \wedge (a \to b) \leq a, b \Rightarrow a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$

$b \leq a \to b \Rightarrow a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$

$\Rightarrow a \wedge (a \to b) = a \wedge b$

$\Rightarrow a \to b \leq a \to (a \wedge b)$

$b \geq a \wedge b \Rightarrow a \to b \geq a \to (a \wedge b)$

$\Rightarrow a \to b = a \to (a \wedge b)$

$a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow a \to (a \wedge b) = a \to (a \wedge c) \Rightarrow a \to b = a \to c$

$a \to b = a \to c \Rightarrow a \wedge (a \to b) = a \wedge (a \to c) \Rightarrow a \wedge b = a \wedge c$

## BOOLEOVA ALGEBRA

DISTRIBUTÍVNY ZVÄZ, KAŽDÝ PRVOK MÁ KOMPLEMENT $a \longmapsto a^c$

◁ V DISTR. ZVÄZE: Ak EXISTUJE NAJVIAC 1 KOMPLEMENT
KAŽDÝ KOMPLEMENT JE PSEUDOKOMPLEMENT

$x \wedge a = 0$, $x = x \wedge (a \vee a^c) = (x \wedge a) \vee (x \wedge a^c) = x \wedge a^c$

$\Rightarrow x \leq a^c$.

NA DRUHEJ STRANE $a^c \wedge a = 0$, TJ. $x \leq a^c \Rightarrow x \wedge a = 0$.

ZREJME $L$ JE BOOLEOVA ALGEBRA $\Leftrightarrow$
$L^{op}$ JE BOOLEOVA ALGEBRA.

BOOLEOVA ALGEBRA JE HEYTINGOVA.

PLATÍ $a \to b = a^c \vee b$

$a \wedge b \leq c \qquad a = a \wedge (b^c \vee b) = (a \wedge b^c) \vee (a \wedge b) \leq b^c \vee c$

$a \leq b^c \vee c \Rightarrow a \wedge b \leq (b^c \vee c) \wedge b = b \wedge c \leq c.$

V ÚPLNEJ BOOLEOVEJ ALGEBRE PLATÍ ZOSÍLENÁ DISTRIBUTIVITA:

$$\left(\bigvee_{j \in J} a_j\right) \wedge b = \bigvee_{j \in J} (a_j \wedge b)$$

ULTRAFILTRY: BUĎ $F$ VLASTNÝ FILTER V BOOLEOVEJ ALGEBRE. POTOM NASL. TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:

(1) $F$ JE MAXIMÁLNY FILTER

(2) $F$ JE PRVOFILTER

(3) $\forall a \in L : a \in F \vee a^c \in F.$

(1) $\Rightarrow$ (2) NECH $a \notin F$, $a \vee b \in F$. $G = \{x \mid x \vee b \in F\}$ JE FILTER $\supset F$. $\Rightarrow 0 \in G \Rightarrow b \in F$.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall a \in L \quad a \vee a^c = 1 \in F \Rightarrow a \in F \vee a^c \in F.$

(3) $\Rightarrow$ (1) AK $G \supset F$ JE FILTER $\Rightarrow a \in G \setminus F \Rightarrow a^c \in F$ $a \wedge a^c \in G \Rightarrow G = L.$

03.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

NECH $L$ JE HEYTINGOVA ALGEBRA.
OZNAČME $BL = \{a \in L \mid a = a^{**}\}$, $b(a) = a^{**}$.
POTOM $BL$ JE BOOLEOVA ALGEBRA.
KONEČNÉ INFÍMA V $BL$ SA ZHODUJÚ S KONEČNÝMI INFÍMAMI V $L$
PRE SUPRÉMA PLATÍ: $\sup_{BL} M = (\sup_L M)^{**}$ VŽDY KEĎ EXISTUJE $\sup_L M$.
$b$ ZACHOVÁVA KONEČNÉ INFÍMA A VŠETKY EXISTUJÚCE SUPRÉMA V $L$.
$b(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.

DÔKAZ: V HEYTINGOVEJ ALGEBRE JE $a^* := a \to 0$.
$a, b \in BL$ T.J. $a = a^{**}$, $b = b^{**}$, $a, b \geq a \wedge b \Rightarrow a^{**}, b^{**} \geq (a \wedge b)^{**}$
$a \wedge b = a^{**} \wedge b^{**} \geq (a \wedge b)^{**} \geq a \wedge b \Rightarrow$
$a \wedge b = (a \wedge b)^{**} \Rightarrow a \wedge b \in BL$

$a \vee b \leq a^{**} \vee b^{**} \leq (a \vee b)^{**} \Rightarrow a \vee b \in BL$
ZREJME $a^{**}, b^{**} \leq (a \vee b)^{**} \Rightarrow a^{**} \vee b^{**} \leq (a \vee b)^{**}$
$a \wedge x = 0 \Leftrightarrow x \leq a^* \leq a^{***} \Leftrightarrow a^{**} \wedge x \leq 0$

NECH $M \subseteq L$ MÁ SUPRÉMUM $\sup_L M = s$.
POTOM $s \leq s^{**} \Rightarrow s^{**} \in BL$ JE HORNÁ ZÁVORA $M$ V $BL$
NA DRUHEJ STRANE AK $x = x^{**}$ JE HORNÁ ZÁVORA $M$, T.J.
$\forall m \in M: m \leq x \Rightarrow s \leq x \Rightarrow s^{**} \leq x^{**} = x$
$\Rightarrow s^{**}$ JE NAJMENŠIA HORNÁ ZÁVORA $M$.
T.J. $\sup_{BL} M = (\sup_L M)^{**}$.

ŠPECIÁLNE PRE $a, b \in BL$: $a \vee_{BL} b = (a \vee b)^{**}$

MÁME $1 \leq 1^{**} \Rightarrow 1^{**} = 1 \in BL$, $0^* = 1$, $0^{**} = 1^* = 0 \in BL$.

PRE ZOBRAZENIE $b$ PONOM PLATÍ $b(0) = 0$, $b(1) = 1$,
$b(a \wedge b) = b(a) \wedge b(b) \quad \forall a, b \in L$

$a \wedge x = 0 \Leftrightarrow x \leq a^* = a^{***} \Leftrightarrow a^{**} \wedge x = 0$,

ZREJME $a^{**} \wedge b^{**} \geq (a \wedge b)^{**}$. NA DRUHEJ STRANE
$a \wedge b \wedge (a \wedge b)^* = 0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b^{**} \wedge (a \wedge b)^* \Leftarrow a^{**} \wedge b^{**} \leq (a \wedge b)^{**}$

$\Rightarrow$ $b$ ZACHOVÁVA KONEČNÉ INFÍMA.

PRE $b \in BL$ JE $a \leq b \Leftrightarrow a^{**} \leq b$

AK OZNAČÍME $\iota : BL \to L$ VLOŽENIE, POTOM
$\forall a \in L \; \forall b \in BL : b(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq \iota(b)$.

T.J. $b$ A $\iota$ SÚ ADJUNGOVANÉ ZOBRAZENIA.

$\Rightarrow$ $b$ AKO ĽAVÝ ADJUNKT ZACHOVÁVA VŠETKY EXISTUJÚCE SUPRÉMA.

ŠPECIÁLNE $\forall a, b \in L \quad b(a \vee b) = b(a) \vee b(b)$,
T.J. $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$.

$\Rightarrow$ $BL$ JE UZAVRETÁ AJ NA $\vee$.

VIDÍME TIEŽ, ŽE $b$ JE HOMOMORFIZMUS $L \to BL$,
ZLÚČITEĽNÝ S $\vee, \wedge, 0, 1$

$\Rightarrow$ DISTRIBUTÍVITA : $a, b, c \in BL \Rightarrow a = b(a), b = b(b), c = b(c)$

$(a \vee_{BL} b) \wedge_{BL} c = (b(a) \vee_{BL} b(b)) \wedge_{BL} b(c) =$
$= b\big((a \vee_L b) \wedge_L c\big) = b\big((a \wedge_L c) \vee_L (b \wedge_L c)\big) =$

HEYTINGOVA ALGEBRA JE VŽDY DISTRIBUT.

$= \ldots = (a \wedge_{BL} c) \vee_{BL} (b \wedge_{BL} c)$.

NAKONIEC KOMPLEMENTY : PRE $a \in BL$ :

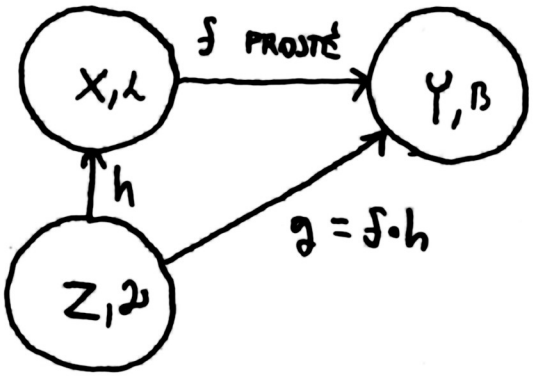
$a \vee_{BL} a^* = (a \vee_{BL} a^*)^{**} = 0^* = 1$

UZAVRETOSŤ NA $\vee_{BL}$ PRETOŽE $(a \vee a^*)^* = 0$

$\Rightarrow a^c = a^*$ PRE $a \in BL$. $\square$

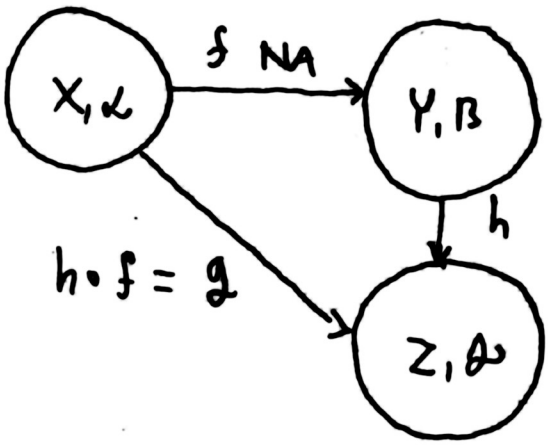
03.06.2008 Th
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA




f, g HOMOMORFIZMY
⇒ h JE HOMOMORFIZMUS

$$(f\circ h)(\alpha(\xi)) = \beta((f\circ h)\circ\xi) =$$
$$= f(\alpha(h\circ\xi))$$
$$\Rightarrow h(\alpha(\xi)) = \alpha(h\circ\xi)$$




f, g HOMOMORFIZMY
⇒ h JE HOMOMORFIZMUS

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE

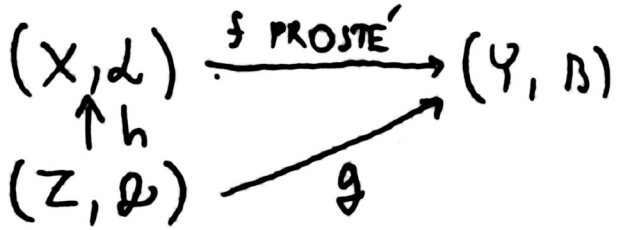
$$\omega(\underbrace{h\circ\xi}_{h\circ f\circ\rho}) = \qquad \rho = v\circ\xi$$
$$= \omega(g\circ\rho) = g(\alpha(\rho)) =$$
$$= h\circ f(\alpha(\rho)) = h(\beta(f\circ\rho)) =$$
$$= h(\beta(\xi))$$

ALEBO TIEŽ $\exists v: Y \to X$:

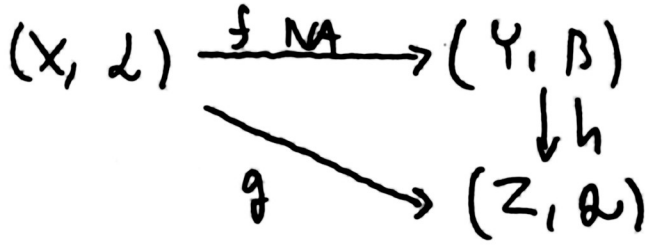
$f\circ v = id_Y$.

NECH $A=(X,\alpha)$, $B=(Y,\beta)$, $C=(Z,\varrho) \in Alg(\Delta)$

(1) AK $f: A \to B$ JE PROSTÝ HOMOMORFIZMUS, $g: C \to B$ JE HOMOMORFIZMUS, POTOM EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $h: C \to A$ PRÁVE VTEDY, KEĎ $g[Z] \subseteq f[X]$.

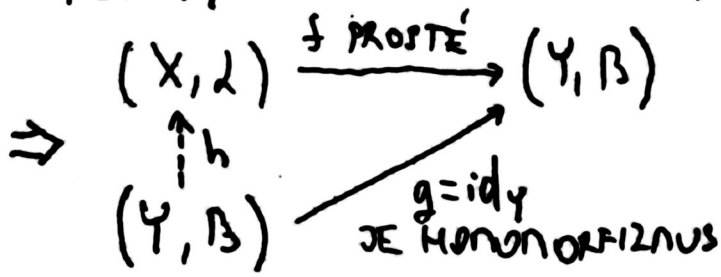



(2) AK $f: A \to B$ JE SURJEKTÍVNY HOMOMORFIZMUS, $g: A \to C$ JE HOMOMORFIZMUS, POTOM EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $h: B \to C$ PRÁVE VTEDY, KEĎ $f(x)=f(y) \Rightarrow g(x)=g(y)$, T. J. $\ker f \subseteq \ker g$




NECH $A=(X,\alpha)$, $B=(Y,\beta) \in Alg(\Delta)$, $f: A \to B$ JE BIJEKTÍVNY HOMOMORFIZMUS.

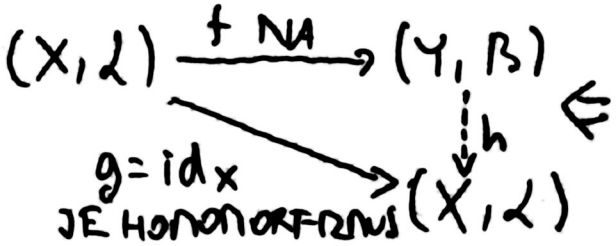
POTOM :




h JE HOM. : $f \circ h = id_Y \Rightarrow h = f^{-1}$

KEĎŽE $g[Y] = Y = f[X]$, f JE NA

POPR.




$g = h \circ f = id_X \Rightarrow h = f^{-1}$

$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y \Rightarrow g(x)=g(y)$.

04.06.2008 11:46
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $(X, \mathcal{A})$ $\mathcal{A} = (\alpha_t)_{t \in T}$ JE ALGEBRA TYPU $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$, TJ. $\alpha_t : X^{\Delta_t} \to X$.

NECH $Y \subseteq X$, $j : Y \subseteq X$ JE VLOŽENIE.

KEĎ JE $Y$ UZAVRETÁ NA VŠETKY OPERÁCIE $\alpha_t$, TJ. $\forall t \in T \; \forall \xi \in Y^{\Delta_t}$ JE $\alpha_t(j \circ \xi) \in Y$

POTOM ALGEBRU $(Y, \mathcal{A}|Y)$, KDE $(\alpha_t|Y)(\xi) = \alpha_t(j \circ \xi)$ PRE $\forall \xi \in Y^{\Delta_t}$ NAZÝVAME PODALGEBROU ALGEBRY $(X, \mathcal{A})$.

VLOŽENIE $j : (Y, \mathcal{A}|Y) \to (X, \mathcal{A})$ JE HOMOMORFIZMUS.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall t \in T \; \forall \xi \in Y^{\Delta_t}$ PLATÍ $j(\alpha_t|Y(\xi)) = \alpha_t(j \circ \xi)$

KEĎŽE $\alpha_t|Y(\xi) = \alpha_t(j \circ \xi) \in Y$,

NUTNE $j(\alpha_t(j \circ \xi)) = \alpha_t(j \circ \xi)$.

NAOPAK NECH $Y \subseteq X$, $j : Y \subseteq X$ JE HOMOMORFIZMUS ALGEBIER $(Y, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{A})$, POTOM $\mathcal{B} = \mathcal{A}|Y$.

PRE $\forall t \in T \; \forall \xi \in Y^{\Delta_t}$ PLATÍ $j(\beta_t(\xi)) = \alpha_t(j \circ \xi)$

AVŠAK $\beta_t(\xi) \in Y \Rightarrow j(\beta_t(\xi)) \in Y \Rightarrow \alpha_t(j \circ \xi) \in Y$

TO ZNAMENÁ, ŽE $\beta_t = \alpha_t|Y$.

$\Rightarrow$ NUTNE $\mathcal{B} = \mathcal{A}|Y$.

MAJME $A=(X,\alpha), B=(Y,\beta) \in Alg(A)$.
KEĎ JE $f: A \to B$ HOMOMORFIZMUS, POTOM
$f[X]$ JE PODALGEBRA ALGEBRY $B$.

ZREJME $f[X] \subseteq Y$.
ĎALEJ VIEME, ŽE: $\forall t \in T \; \forall \xi \in X^{\Delta t} : f(\alpha_t(\xi)) = \beta_t(f \circ \xi)$.
OZNAČME $j: f[X] \subseteq Y$ VLOŽENIE
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE
$\forall t \in T \; \forall \xi \in (f[X])^{\Delta t}$ JE $\beta_t(j \circ \xi) \in f[X]$
ZREJME $\exists \xi \in X^{\Delta t} : j \circ \xi = f \circ \xi$ PRE $\forall \xi \in (f[X])^{\Delta t}$
TJ. $\beta_t(f \circ \xi) = f(\alpha_t(\xi)) \in f[X]$.

AK JE $f$ PROSTÉ, POTOM, KEĎŽE $f[X]$ JE ALGEBRA
RESTRIKCIA $f$ NA $f': X \to f[X]$ JE
HOMOMORFIZMUS, A ZÁROVEŇ BIJEKCIA
$\Rightarrow$ JE TO IZOMORFIZMUS.

PRIENIK ĽUBOVOĽNÉHO SYSTÉMU PODALGEBIER TYPU $\tau$ JE PODALGEBRA.
NECH $(Y_i, \alpha^i)$ $i \in J$ SÚ PODALGEBRY ALGEBRY $(X, \alpha)$.
OZNAČME $Y = \bigcap_{i \in J} Y_i$, $j_i: Y_i \subseteq X$ VLOŽENIE,
$k_i: Y \subseteq Y_i$, $j: Y \subseteq X$.
PLATÍ $\forall i \in J \; \forall t \in T \; \forall \xi \in Y_i^{\Delta t} : \alpha^i_t(\xi) = \alpha_t(j_i \circ \xi) \in Y_i$
TJ. $j_i \circ \alpha^i_t(\xi) = \alpha_t(j_i \circ \xi)$
NECH $t \in T$, $\xi \in Y^{\Delta t}$ POTOM $\forall i \in J : k_i \circ \xi \in Y_i^{\Delta t}$
$\alpha_t(j_i \circ k_i \circ \xi) = \alpha_t(j \circ \xi) \in Y_i \Rightarrow \alpha_t(j \circ \xi) \in Y$
TO ZNAMENÁ, ŽE $Y$ JE PODALGEBRA $X$.

04.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $f, g : A \to B$ SÚ HOMOMORFIZMY.
POTOM $Z = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ JE PODALGEBRA ALG. $A$.

NECH $t \in T$, $\xi \in Z^{A_t}$, OZNAČME $j : Z \subseteq A$ VLOŽENIE.

$f(\alpha_t(j \cdot \xi)) = \beta_t(f \cdot j \cdot \xi)$ VIEME, ŽE $f \cdot j = g \cdot j$
$= \beta_t(g \cdot j \cdot \xi) = g(\alpha_t(j \cdot \xi)) \Rightarrow \alpha_t(j \cdot \xi) \in Z.$

MAJME OBJEKTY $(X_i, S^i) \in Rel(\Delta)$ $i \in J$
KDE PRE $i \in J$ $t \in T$ JE $S^i \subseteq X_i^{A_t}$
OZNAČME $p_j : \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ PROJEKCIE PRE $\forall j \in J$
$p_j((x_i)_{i \in J}) = x_j$.

POTOM $\prod_{i \in J}(X_i, S^i) = (Y, S)$, JE OBJEKT TYPU $\Delta$, KDE
$Y = \prod_{i \in J} X_i$, $\forall t \in T : S_t = \{\xi \in Y^{A_t} \mid \forall i \in J : p_i \cdot \xi \in S^i_t\}$

PRE ALGEBRY $A_i = (X_i, \alpha^i) \in Alg(\Delta)$ JE
$A = \prod_{i \in J}(X_i, \alpha^i) = (Y, \alpha)$, KDE $Y = \prod_{i \in J} X_i$ A
$\forall t \in T \forall \xi \in Y^{A_t} : \alpha_t(\xi) = (\alpha^i_t(p_i \cdot \xi))_{i \in J}$

NECH $A=(X,\mathcal{A})$ JE ALGEBRA TYPU $\Delta$.
EKVIVALENCIA $E$ NA $X$ JE KONGRUENCIA NA $A$
$\Leftrightarrow$ $\forall t\in T\ \forall \xi,\zeta\in X^{\Delta_t}$:
$\forall d\in\Delta_t\ \xi(d)\,E\,\zeta(d) \Rightarrow \mathcal{A}_t(\xi)\,E\,\mathcal{A}_t(\zeta)$.

$\Leftrightarrow$ $E$ JE PODALGEBRA $A\times A$.

$(E,\beta)$ JE PODALGEBRA $A\times A$ $\Leftrightarrow$
$E\subseteq X\times X$ A PRE $\beta_t:(X\times X)^{\Delta_t}\to(X\times X)$
DEFINOVANOU AKO $\beta_t(\eta)=\left(\mathcal{A}_t(p_1\circ\eta),\mathcal{A}_t(p_2\circ\eta)\right)$
PLATÍ $\forall\sigma\in E^{\Delta_t}$: $\beta_t(j\circ\sigma)\in E$, KDE $j: E\subseteq X\times X$ INKL.
$\sigma=(\xi,\rho)\in E^{\Delta_t}\Leftrightarrow \forall d\in\Delta_t:\ \xi(d)\,E\,\rho(d)$ $\forall\xi,\rho\in X^{\Delta_t}$
NA DRUHEJ STRANE $p_1\circ j\circ\sigma=\xi$, $p_2\circ j\circ\sigma=\rho$
TAKŽE $\beta_t(j\circ\sigma)=(\mathcal{A}_t(\xi),\mathcal{A}_t(\rho))$.

PRE FINITÁRNE TYPY

$$\forall\,\sigma=((x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n))\in E^n$$
$$\beta(\sigma)=\left(\mathcal{A}(x_1,\dots,x_n),\mathcal{A}(y_1,\dots,y_n)\right)\in E$$

FAKTOROVÁ ALGEBRA: NECH $A=(X,\mathcal{A})\in Alg(\Delta)$
A $E\subseteq X\times X$ JE KONGRUENCIA NA $A$.
POTOM PRE $q: X\to X/E$, $q(x)=xE$
DEFINUJME $A/E=(X/E,\bar{\mathcal{A}})$ AKO
$\forall t\in T$ $\bar{\mathcal{A}}_t:(X/E)^{\Delta_t}\to(X/E)$
PRE $\xi\in(X/E)^{\Delta_t}$ $\exists\sigma\in X^{\Delta_t}:\ \xi=q\circ\sigma$. $\bar{\mathcal{A}}_t(\xi)\overset{def.}{:=}q(\mathcal{A}_t(\sigma))$.

05.06.2008 Th
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

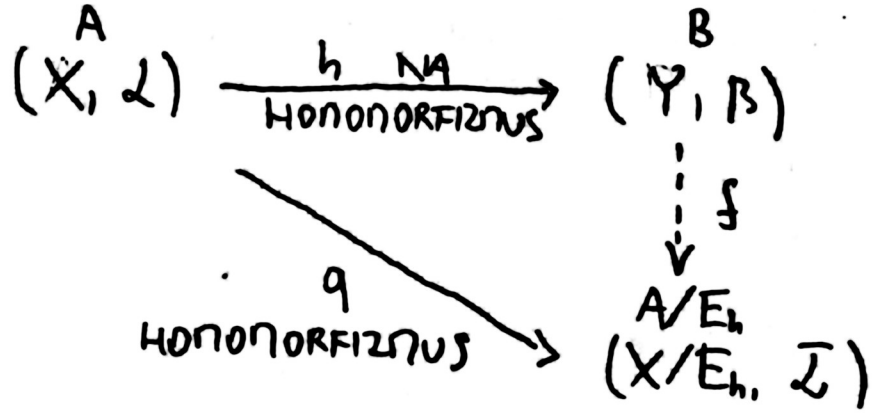
NECH $A=(X,\mathcal{L})$, $B=(Y,\mathcal{B})\in Alg(\Delta)$,
$h: A\to B$ JE HOMOMORFIZMUS.
POTOM $E_h=\{(x,y)\in X\times X \mid h(x)=h(y)\}$
JE KONGRUENCIA NA $A$.

ZREJME $E_h$ JE EKVIVALENCIA.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall t\in T\ \forall \xi,\varrho\in X^{\Delta t}$
AK $\forall d\in\Delta_t\ \xi(d)E_h\varrho(d)$
[TJ. PRE $\sigma:\Delta_t\to X\times X$ DEF. AKO $\sigma=(\xi,\varrho)$ EXISTUJE
RESTRIKCIA $\varphi:\Delta_t\to E_h$ T. Ž. $\sigma=j\circ\varphi$ PRE ZOB. $j:E_h\subseteq X\times X$]
POTOM $\mathcal{L}_t(\xi)\,E\,\mathcal{L}_t(\varrho)$

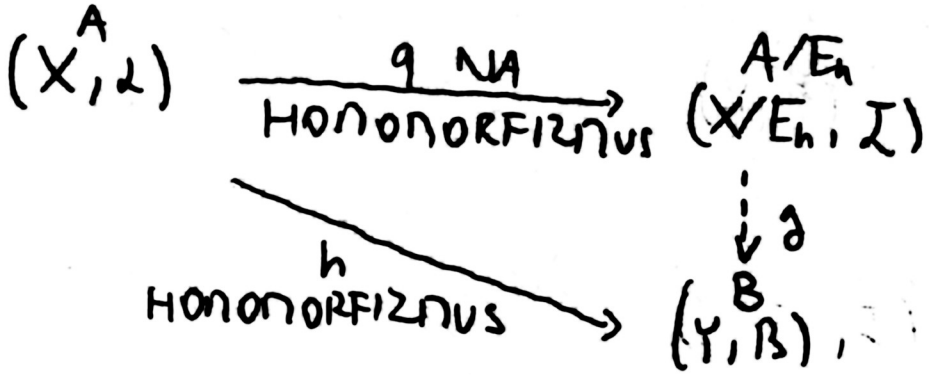
$\xi(d)E_h\varrho(d)\Leftrightarrow h(\xi(d))=h(\varrho(d))$
$\Leftrightarrow h\circ\xi=h\circ\varrho\Rightarrow B_t(h\circ\xi)=B_t(h\circ\varrho)$
$\Rightarrow h(\mathcal{L}_t(\xi))=h(\mathcal{L}_t(\varrho))\Rightarrow \mathcal{L}_t(\xi)E\,\mathcal{L}_t(\varrho)$. □

NECH $h$ JE HOMOMORFIZMUS $A$ NA $B$.
POTOM EXISTUJE IZOMORFIZMUS $f: B\to A/E_h$ TAKÝ,
ŽE $f\circ h=q$.
VEDIE, ŽE $E_h=\{(x,y)\in X\times X\mid h(x)=h(y)\}$ JE KONGR.
$q: A\to A/E_h$ JE DEF. AKO $q(x)=xE_h=$
$=\{y\in X\mid xE_hy\}=\{y\in X\mid h(x)=h(y)\}$.

$q(x)=q(y)\Rightarrow$ } $xE_hy$ { $\Rightarrow h(x)=h(y)$.
$h(x)=h(y)\Rightarrow$ } { $\Rightarrow q(x)=q(y)$.




KEDŽE $h(x)=h(y) \Rightarrow q(x)=q(y)$
EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $f: B \to A/E_h$
TAKÝ, ŽE $q = f \cdot h$




KEDŽE $q(x)=q(y) \Rightarrow h(x)=h(y)$
EXISTUJE HOM. $g: A/E_h \to B$
TAKÝ, ŽE $h = g \cdot q$

$q = f \cdot g \cdot q \Rightarrow f \cdot g = id_{A/E_h}$ PRETOŽE $q$ JE NA
$h = g \cdot f \cdot h \Rightarrow g \cdot f = id_B$ PRETOŽE $h$ JE NA

$\Rightarrow$ $f$ JE IZOMORFIZMUS.

05.06.2008Th
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $\mathcal{A}$ JE NETRIVIÁLNA PODTRIEDA TRIEDY ALGEBIER $Alg(\Delta)$. NECH $M$ JE MNOŽINA.

VOĽNÁ ALGEBRA NAD $M$ VZHĽADOM K $\mathcal{A}$ JE ALGEBRA $F(M) \in \mathcal{A}$ SPOLU SO ZOBRAZENÍM $\phi_M : M \to F(M)$ TAKÝM, ŽE PRE KAŽDÚ ALGEBRU $A \in \mathcal{A}$ A KAŽDÉ ZOBRAZENIE $\xi : M \to A$ EXISTUJE PRÁVE JEDEN HOMOMORFIZMUS $h : F(M) \to A$ TAKÝ, ŽE $h \cdot \phi_M = \xi$.

NECH $\phi_M : M \to F(M)$ A $\phi_N : N \to F(N)$ SÚ VOĽNÉ ALGEBRY VZHĽADOM K $\mathcal{A}$.
POTOM PRE $\forall \xi : M \to N$ EXISTUJE PRÁVE JEDEN HOMOMORFIZMUS $F(\xi) : F(M) \to F(N)$ TAKÝ, ŽE $F(\xi) \cdot \phi_M = \phi_N \cdot \xi$

PRE VOĽNÚ ALGEBRU $\phi_M : M \to F(M)$ VZHĽADOM K $\mathcal{A}$ JE $F(id_M) = id_{F(M)}$, PRETOŽE
$id_{F(M)}$ JE HOMOMORFIZMUS $F(M) \to F(M)$ TAKÝ, ŽE $id_{F(M)} \cdot \phi_M = \phi_M \cdot id_M$.

PRE VOĽNÉ ALGEBRY $\phi_M : M \to F(M)$, $\phi_N : N \to F(N)$, $\phi_K : K \to F(K)$ NECH $\xi : M \to N$, $\eta : N \to K$, $F(\xi) : F(M) \to F(N)$, $F(\eta) : F(N) \to F(K)$ SÚ HOMOMORFIZMY TAKÉ, ŽE $F(\xi) \cdot \phi_M = \phi_N \cdot \xi$, $F(\eta) \cdot \phi_N = \phi_K \cdot \eta$. POTOM $F(\eta) \cdot F(\xi) \cdot \phi_M = \phi_K \cdot \eta \cdot \xi$.

KEĎ JE $\mathcal{A}$ NETRIVIÁLNA TRIEDA ALGEBIER,
JE $\phi_M : M \to F(M)$ VŽDY PROSTÉ.

NECH $A \in \mathcal{A}$ MÁ ASPOŇ DVA PRVKY $x \neq y$.
PREDPOKLADAJME, ŽE $\phi_M$ NIE JE PROSTÉ, TJ.
PRE NEJAKÉ $m_1 \neq m_2$ JE $\phi_M(m_1) = \phi_M(m_2)$.
ZVOĽME $f : M \to A$ TAK, ŽE $f(m_1) = x$, $f(m_2) = y$.
PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJE HOMOMORFIZMUS
$h : F(M) \to A$ TAKÝ ŽE $h \circ \phi_M = f$.
AVŠAK $x = f(m_1) = h(\phi_M(m_1)) = h(\phi_M(m_2)) = f(m_2) = y$. ↯

MNOŽINA $\phi_M[M]$ GENERUJE ALGEBRU $F(M)$.

NECH $k : M \to Gen(\phi_M[M])$ JE ZLOŽENIE $m \mapsto \phi_M(m)$
A $j : Gen(\phi_M[M]) \subseteq F(M)$ JE ZLOŽENIE,
KTORÉ JE ZÁROVEŇ HOMOMORFIZMUS,
PRETOŽE $Gen(\phi_M[M])$ JE PODALGEBRA ALGEBRY $F(M)$.

KEĎŽE $\phi_M : M \to F(M)$ JE VOĽNÁ ALGEBRA
EXISTUJE PRE $k : M \to Gen(\phi_M[M])$ HOMOMORFIZMUS
$h : F(M) \to Gen(\phi_M[M])$. TAKÝ, ŽE $h \circ \phi_M = k$.

$\Rightarrow j \circ h \circ \phi_M = j \circ k \Rightarrow j \circ h = id_{F(M)}$,
PRETOŽE $j \circ h$ AJ $id_{F(M)}$ SÚ HOMOMORFIZMY $F(M) \to F(M)$,
TAKŽE ROVNOSŤ VYPLÝVA Z JEDNOZNAČNOSTI.
$\Rightarrow j$ JE NA.

06.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $\Delta = (n_t)_{t \in T}$ JE FINITÁRNY TYP A $\mathcal{A} \subseteq Alg(\Delta)$ JE NETRIVIÁLNA TRIEDA ALGEBIER UZAVRETÁ NA PODALGEBRY, PRODUKTY A IZOMORFIZMY. POTOM KU KAŽDEJ MNOŽINE $M$ EXISTUJE VOĽNÁ ALGEBRA $\phi_M : M \to F(\Gamma)$ $F(\Gamma) \in \mathcal{A}$.

NECH $R$ JE MNOŽINA ALGEBIER TAKÝCH, ŽE PRE KAŽDÚ ALGEBRU $A \in \mathcal{A}$ S GENERUJÚCOU MNOŽINOU S MOHUTNOSŤOU $\leq |\Gamma|$ EXISTUJE V $R$ ALGEBRA IZOMORFNÁ S $A$.

OZNAČME $U = \{u \mid u : M \to B_u$ ZOBRAZENIE, $B_u \in R\}$

$p_v : \Pi_{u \in U} B_u \to B_v$,

$\psi : M \to \Pi_{u \in U} B_u$ : $\forall u \in U : p_u \circ \psi = u$.

KEĎŽE $\mathcal{A}$ JE NETRIVIÁLNA $\forall x, y \in M \; x \neq y$
EXISTUJE $u \in U : u(x) \neq u(y)$.

$\Rightarrow$ $\psi$ JE PROSTÉ ZOBRAZENIE.

POLOŽME $\phi : M \to F(\Gamma) = Gen(\psi[\Gamma])$
$\phi(m) = \psi(m)$. TJ. PRE VLOŽENIE
$\iota : Gen(\psi[\Gamma]) \to \Pi_{u \in U} B_u$

$\iota \circ \phi = \psi$.

DOKÁŽEME, ŽE $\phi$ JE VOĽNÁ ALGEBRA NAD $\Gamma$ VZHĽADOM K $\mathcal{A}$

UVAŽUJME ĽUBOVOĽNÚ $A \in \mathcal{A}$ A $f: M \to A$.

ROZLOŽME $f$ NA $f = j \cdot g$

$$M \xrightarrow{g} \underbrace{Gen(f[\Pi])}_{B} \xrightarrow{j} A$$

KDE VLOŽENIE $j: Gen(f[\Pi]) \subseteq A$ JE HOMOMORFIZMUS.

PODĽA DEFINÍCIE $R$ EXISTUJE $B' \in R$ TAKÁ, ŽE EXISTUJE IZOMORFIZMUS $\varepsilon: B \to B'$.

UVAŽUJME $u = \varepsilon \cdot g$ A $h = j \circ \varepsilon^{-1} \circ p_u \circ \iota : F(\Pi) \to A$
HOMOMORFIZMUS

$$h \cdot \phi = j \cdot \varepsilon^{-1} \cdot p_u \cdot \iota \cdot \phi = j \cdot g = f$$

AK BY PRE NEJAKÉ $h': F(\Pi) \to A$ BOLO $h' \cdot \phi = f$
HOMOMORFIZMUS

ŽIADALI BY SA $h$ A $h'$ NA MNOŽINE $\phi[M] = \psi[M]$

$\Rightarrow h = h'$, PRETOŽE $\psi[\Pi]$ GENERUJE $F(\Pi)$.

07.06.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $\Delta = (n_t)_{t \in T}$ JE FINITÁRNY TYP,
UVAŽUJME MNOŽINU SYMBOLOV $\sigma_t$ PRE $\forall t \in T$ A $\lambda$.

DEFINUJME TERMY $w$ A ICH STUPNE $|w|$ :

$\lambda$ JE TERM, $|\lambda| = 1$

KEĎ SÚ $w_1, \dots, w_{n_t}$ TERMY, POTOM
$w = \sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}$ JE TERM $|w| = \sum_{i=1}^{n_t} |w_i|$

PRE $n_t = 0$ JE $\sigma_t$ TERM, $|\sigma_t| = 0$.

NECH JE $M$ ĽUBOVOĽNÁ DANÁ MNOŽINA

VOĽNÉ VÝRAZY (VOĽNÉ $M$-VÝRAZY) SÚ
VÝRAZY TVARU $w[x_1, \dots, x_n]$, KDE $w$ JE TERM $n = |w|$ A $x_1, \dots, x_n \in M$.

DEFINUJME ALGEBRU $F(M)$ TYPU $\Delta$ NA MNOŽINE
VŠETKÝCH VOĽNÝCH $M$-VÝRAZOCH
PRE $\forall t \in T$ JE PRE OPERÁCIU $\omega_t$ :

$$\omega_t\left(w_1[x_1^1 \dots], \dots, w_{n_t}[x_1^{n_t} \dots]\right) = \sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}\left[x_1^1 \dots x_1^2 \dots \dots x_1^{n_t} \dots\right]$$

A DEFINUJME $\phi_M : M \to F(M)$ AKO $m \mapsto \lambda[m]$.

NECH $A = (X, \mathcal{L})$ JE ĽUBOVOĽNÁ ALGEBRA TYPU $\Delta$.

DEFINUJME INTERPRETÁCIU TERMU $w$ AKO $\overline{w}$

$\overline{\lambda} = id_X$

$\overline{\sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}} = \mathcal{L}_t \cdot \left(\overline{w_1} \times \dots \times \overline{w_{n_t}}\right)$

PRE $n_t = 0$ JE $\overline{\sigma_t} = \mathcal{L}_t$

NECH $f: M \to A$ JE ĽUBOVOĽNÉ ZOBRAZENIE

DEFINUJME $h: F(\Gamma) \to A$ AKO

$$h(w[x_1 \dots x_n]) = \overline{w}(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

DOKÁŽEME, ŽE $h$ JE HOMOMORFIZMUS:

$$h(\omega_t(w_1[x_1^1 \dots], \dots, w_{n_t}[x_1^{n_t} \dots])) =$$
$$= h(\sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}[x_1^1 \dots \dots x_1^{n_t} \dots]) =$$
$$= \overline{\sigma_t \cdot w_1 \dots w_{n_t}}(f(x_1^1), \dots, \dots, f(x_1^{n_t}), \dots) =$$
$$= \alpha_t \circ (\overline{w}_1 \times \dots \times \overline{w}_{n_t})(f(x_1^1), \dots, \dots, f(x_1^{n_t}), \dots) =$$
$$= \alpha_t(\overline{w}_1(f(x_1^1), \dots), \dots, \overline{w}_{n_t}(f(x_1^{n_t}), \dots)) =$$
$$= \alpha_t(h(w_1[x_1^1 \dots]), \dots, h(w_{n_t}[x_1^{n_t} \dots])).$$

MÁME $h(\lambda[x]) = id_x(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in M.$

TJ. $h \circ \phi_M = f$

VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\phi_h[\Gamma] = \{\lambda[x] \mid x \in M\}$ GENERUJE $F(\Gamma)$, JE $h$ URČENÝ JEDNOZNAČNE.

07.06.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NECH $\Delta = (n_t)_{t \in T}$ JE FINITÁRNY TYP A $\mathcal{A}$ JE TRIEDA ALGEBIER UZAVRETÁ NA IZOMORFIZMY.

DEFINUJME

$S\mathcal{A} = \{ B \in Alg(\Delta) \mid \exists$ PROSTÝ HOMOMORFIZMUS $j: B \to A \in \mathcal{A} \}$

1. AK JE $B = (Y, \mathcal{L}|Y)$ PODALGEBRA ALGEBRY $A = (X, \mathcal{L})$, JE $j: B \subseteq A$ HOMOMORFIZMUS.
2. AK JE $f: B \to A$ HOMOMORFIZMUS, JE $f[B]$ PODALGEBRA ALGEBRY $A$
3. AK JE $f: B \to A$ PROSTÝ HOMOMORFIZMUS, JE JEHO RESTRIKCIA $f': B \to f[B]$ IZOMORFIZMUS

$SS\mathcal{A} = S\mathcal{A}$

ZREJME $S\mathcal{A} \subseteq SS\mathcal{A}$

NECH $C \in SS\mathcal{A}$ TJ. EXISTUJE PROSTÝ HOMOMORFIZMUS $j: C \to B \in S\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ PR. HOM. $k: B \to A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow k \cdot j$ JE PROSTÝ HOMOMORFIZMUS $C \to A \Rightarrow C \in S\mathcal{A}$.

$H\mathcal{A} = \{ B \in Alg(\Delta) \mid \exists$ HOMOMORFIZMUS NA $h: A \to B, A \in \mathcal{A} \}$

NECH $A = (X, \mathcal{L}) \in Alg(\Delta)$, $E \subseteq X \times X$ JE KONGRUENCIA, $q: X \to X/E$, $q(x) = xE$.

1. $q$ JE HOMOMORFIZMUS $A$ NA $A/E$
2. KONGRUENCIE NA $A$ SÚ PRÁVE RELÁCIE $E_h = \{(x,y) \in X \times X \mid h(x) = h(y)\}$, $h: A \to B$ JE HOMOMOR.
3. AK $h: A \to B$ JE HOMOM. NA $\Rightarrow$ EXISTUJE IZOMORFIZMUS $f: B \to A/E_h$ : $f \circ h = q$.

$HH\mathcal{A} = H\mathcal{A}$

ZREJME $H\mathcal{A} \subseteq HH\mathcal{A}$

NECH $C \in HH\mathcal{A}$ TJ. $\exists B \in H\mathcal{A}$ A HOMOMORFIZMUS $h : B \to C$, KTORÝ JE NA

$\Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ A HOM. $k : A \to B$, KTORÝ JE NA

$\Rightarrow h \cdot k$ JE HOMOMORFIZMUS $A \to C$, KTORÝ JE NA.

$SH\mathcal{A} \subseteq HS\mathcal{A}$

LEMMA: BUĎ $h : A = (X, \lambda) \to B = (Y, B)$ HOMOMORFIZMUS NA,

$j : B' = (Y', B|_{Y'}) \to B$ VLOŽENIE PODALGEBRY

POTOM $A' = h^{-1}[B']$ JE PODALGEBRA ALGEBRY $A$

A RESTRIKCIA $h' : A' \to B'$ JE HOMOMORFIZMUS NA.

$C \in SH\mathcal{A} \Rightarrow \exists B \in H\mathcal{A}$ : $\exists$ PROSTÝ HOMOMORFIZMUS $h : C \to B$. $\exists A \in \mathcal{A}$ : $\exists$ HOMOMORFIZMUS $k : A \to B$, KTORÝ JE NA.

ZREJME RESTRIKCIA $h$ NA $h' : C \to h[C]$ JE IZOMORFIZMUS A $j : h[C] \to B$ JE VLOŽENIE PODALGEBRY $B' = h[C]$ DO $B$.

POTOM $A' = k^{-1}[B']$ JE PODALGEBRA ALGEBRY $A$

A RESTRIKCIA $k' : A' \to B'$ JE HOMOMORFIZMUS NA.

MÁME $A' \in S\mathcal{A}$, $B' \in HS\mathcal{A}$

A KEĎŽE $B' = h[C]$ JE IZOMORFNÉ S $C$,

NUTNE $C \in HS\mathcal{A}$.

$\square$

07.06.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## $PH\mathcal{A} \subseteq HP\mathcal{A}$

LEMMA: KEĎ SÚ $h_i : A_i \to B_i$, $i \in J$ HOMOMORFIZMY NA, JE HOMOMORFIZMUS $h : \Pi_{i\in J} A_i \to \Pi_{i\in J} B_i$, DANÝ PODMIENKOU $p_i^B \circ h = h_i \circ p_i^A$, OPÄŤ NA.

$\Rightarrow \Pi_{i\in J}(A_i/E_{h_i})$ JE IZOMORFNÝ S $(\Pi_{i\in J} A_i)/E_h$, KDE $h((x_i)_{i\in J}) = (h_i(x_i))_{i\in J}$.

$C \in PH\mathcal{A} \Rightarrow C = \Pi_{i\in J} B_i$, KDE $B_i \in H\mathcal{A}$ $\forall i \in J$

TJ. $\exists A_i \in \mathcal{A}$ A HOMOMORFIZMY $h_i : A_i \to B_i$, KT. SÚ NA.

$\Rightarrow h : \Pi_{i\in J} A_i \to \Pi_{i\in J} B_i$ JE NA, KDE $\Pi_{i\in J} A_i \in P\mathcal{A}$

$\Rightarrow \Pi_{i\in J} B_i \in HP\mathcal{A}$.

## $PS\mathcal{A} \subseteq SP\mathcal{A}$

LEMMA: SÚČIN PODALGEBIER JE PODALGEBRA SÚČINU. AK $j_i : B_i \to A_i$ SÚ VLOŽENIA PODALGEBIER $\Rightarrow$ HOMOM. $j : \Pi_{i\in J} B_i \to \Pi_{i\in J} A_i$ T. Ž. $p_i^A \circ j = j_i \circ p_i^B$, JE VLOŽENIE PODALG.

$C \in PS\mathcal{A} \Rightarrow C = \Pi_{i\in J} B_i$, KDE $B_i \in S\mathcal{A}$ $\forall i \in J$

TJ. $\exists A_i \in \mathcal{A}$ A PROSTÉ HOMOMORFIZMY $h_i : B_i \to A_i$

$\Rightarrow h : \Pi_{i\in J} B_i \to \Pi_{i\in J} A_i$ JE PROSTÝ HOMOMORFIZMUS

$\Pi_{i\in J} A_i \in P\mathcal{A} \Rightarrow \Pi_{i\in J} B_i \in SP\mathcal{A}$.

NECH $M$ JE MNOŽINA. A $E \subseteq F(M) \times F(M)$

$$M_M(E) = \{A \mid \forall \text{HOMOMORFIZMY } h: F(M) \to A \quad \forall (u,v) \in E : h(u) = h(v)\}$$

$$E_M(\mathcal{A}) = \{(u,v) \in F(M) \times F(M) \mid \forall \text{HOMOMORFIZMY } h : F(M) \to A \in \mathcal{A} : h(u) = h(v).\}$$

TRIEDY ALGEBIER $M_M(E)$ NAZÝVAME VARIETAMI ALGEBIER ALEBO PRIMITÍVNYMI TRIEDAMI ALGEBIER TYPU $\Delta$.

LEMMA: KAŽDÁ VARIETA ALGEBIER JE UZAVRENÁ NA PODALGEBRY, PRODUKTY A FAKTOROVÉ ALGEBRY

LEMMA: AK $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ NA PODALGEBRY, POTOM $E_M \mathcal{A}$ JE PRIENIK V KONGRUENCIÍ $\Theta$ TAKÝCH, ŽE $F(M)/\Theta$ JE V $\mathcal{A}$.
AK JE $\mathcal{A}$ ESTE UZAVRETÁ AJ NA PRODUKTY $\Rightarrow$
$F(M)/E_M(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$.

LEMMA: PRE ĽUBOVOĽNÚ MNOŽINU $M$ JE
$M_\Omega E_\Omega \mathcal{A} \subseteq M_M E_M \mathcal{A}$.

BIRKHOFFOVA VETA O VARIETÁCH: TRIEDA ALGEBIER $\mathcal{A} \subseteq Alg(\Delta)$ JE VARIETA $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ NA IZOMORFIZMY, PODALGEBRY, PRODUKTY A FAKTOROVÉ ALGEBRY.

11.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

LEMMA 1: KAŽDÁ VARIETA ALGEBIER JE UZAVRETÁ NA PODALGEBRY, PRODUKTY A FAKTOROVÉ ALGEBRY.

UVAŽUJME MNOŽINU $M$ A $E \subseteq F(n) \times F(n)$.
$\mathcal{A} = \mathcal{M}_M(E)$. NECH $A \in \mathcal{A}$, $(u,v) \in E$,
AK $j: B \to A$ JE PROSTÝ HOMOMORFIZMUS
A $h: F(n) \to B$ JE ĽUBOVOĽNÝ HOMOMORFIZMUS,
POTOM $j \cdot h$ JE HOMOMORFIZMUS $F(n) \to A$, TAKŽE
$j \cdot h(u) = j \cdot h(v) \Rightarrow h(u) = h(v)$.

AK $q: A \to B$ JE HOMOMORFIZMUS NA $A$ $h: F(n) \to B$
JE ĽUBOVOĽNÝ HOMOMORFIZMUS,
UVAŽUJME HOMOMORFIZMUS $f: F(n) \to A$ TAKÝ, ŽE
$q \cdot f = h$. POTOM $f(u) = f(v) \Rightarrow q \cdot f(u) = q \cdot f(v)$, $h(u) = h(v)$.

DOKÁŽEME, ŽE TAKÝ HOMOMORFIZMUS $f$ EXISTUJE.
KEĎŽE $q$ JE NA, EXISTUJE $r: B \to A$ : $q \cdot r = id_B$.
UVAŽUJME HOMOMORFIZMUS $f: F(n) \to A$ URČENÝ
PODMIENKOU $f \cdot \phi_n = r \cdot h \cdot \phi_n$.
ZREJME $q \cdot f \cdot \phi_n = q \cdot r \cdot h \cdot \phi_M = h \cdot \phi_n \Rightarrow$
Z JEDNOZNAČNOSTI $q \cdot f = h$.

NECH $A_i \in \mathcal{A}, i \in J$, $h: F(n) \to \prod_{i \in J} A_i$ JE HOMOMORFIZMUS.
$P_i \cdot h$ SÚ HOMOMORFIZMY $F(n) \to A_i \Rightarrow$
$\forall i \in J$ $P_i \cdot h(u) = P_i \cdot h(v) \Rightarrow h(u) = h(v)$.

LEMMA 2: AK JE $\mathcal{A}$ UZAVRETÁ NA PODALGEBRY, POTOM $E_m\mathcal{A}$ JE PRIENIK V KONGRUENCIÍ $\Theta$ TAKÝCH, ŽE $F(n)/\Theta$ JE V $\mathcal{A}$:

$(u,v) \in E_m\mathcal{A} \Leftrightarrow$ V HOMOMORFIZMY $h: F(n) \to A \in \mathcal{A}$ JE $h(u) = h(v)$, TJ. $(u,v) \in E_h$.

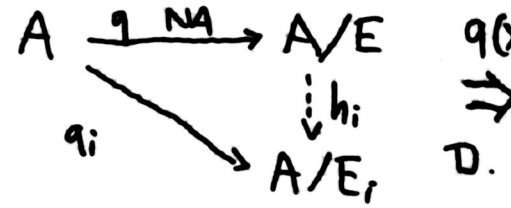
KEDŽE PRE RESTRIKCIU $h$ NA $g: F(n) \to h[F(n)] \subseteq A$ $\curvearrowright \in \mathcal{A}$ PLATÍ $E_h = E_g$ STAČÍ UVAŽOVAŤ IBA HOMOMORFIZMY, KTORÉ SÚ NA, TJ.

$E_m\mathcal{A} = \{(u,v) \in F(n) \times F(n) \mid$ V HOMOMORFIZMY $h: F(n) \to A \in \mathcal{A}$, KTORÉ SÚ NA, JE $(u,v) \in E_h\}$

1. $A$ JE IZOMORFNÉ S $F(n)/E_h$
2. A NAOPAK PRE KAŽDÚ KONGRUENCIU $\Theta$ TAKÚ, ŽE $F(n)/\Theta$ JE V $\mathcal{A}$, JE $q: F(n) \to F(n)/\Theta$ $q(x) = x\Theta$ HOMOMORFIZMUS NA

AK JE $\mathcal{A}$ UZAVRETÁ NA PRODUKTY, POTOM $F(n)/E_m\mathcal{A}$ JE IZOMORFNÁ S PODALGEBROU PRODUKTU $\prod F(n)/\Theta \in \mathcal{A}$

NECH $A \in Alg(\Delta)$, $E_i$ SÚ KONGRUENCIE NA $A$, $i \in J$, $E = \bigcap_{i \in J} E_i$. POTOM $A/E$ JE IZOMORFNÁ S PODALGEBROU SÚČINU $\prod_{i \in J} A/E_i$.




$q(x) = q(y) \Leftrightarrow xE = yE \Leftrightarrow xEy$
$\Rightarrow xE_i y \Leftrightarrow q_i(x) = q_i(y)$
TJ. EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $h_i: A/E \to A/E_i$
TAKÉ, ŽE $q_i = h_i \circ q$ TJ. $h_i(xE) = xE_i$,
NECH $h: A/E \to \prod_{i \in J} A/E_i$ JE DEF. AKO $p_i \circ h = h_i, \forall i \in J$
POTOM $h$ JE ZREJME HOMOMORFIZMUS
$h(xE) = h(yE) \Rightarrow \forall i \in J\ h_i(xE) = h_i(yE)$, TJ. $xE_i = yE_i$,
TJ. $xEy \Rightarrow xE = yE$, TJ. $h$ JE PROSTÝ.

11.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA

LEMMA 3: PRE ĽUBOVOĽNÚ MNOŽINU $M$ JE $M_\Omega E_\Omega A \subseteq M_n E_n A$.

NECH $(u,v) \in E_n A$, $u,v \in F(M)$ $\Rightarrow$ EXISTUJE KONEČNÁ MNOŽINA $K \subseteq M$ TAKÁ, ŽE $u,v \in F(K)$ ZVOLÍME KONEČNÚ $K_0 \subseteq \Omega$ A ZOBRAZENIA $j: K_0 \to M$, $\bar{j}: M \to K_0$ TAKÉ, ŽE ICH RESTRIKCIE NA $K_0, K$ SÚ VZÁJOMNE INVERZNÉ A UVAŽUJME $f = F(j): F(\Omega) \to F(M)$, $\bar{f} = F(\bar{j}) = F(M) \to F(\Omega)$, HOMOMORFIZMY PRISLÚCHAJÚCE K $j, \bar{j}$, TJ.

$$f \circ \phi_\Omega = \phi_M \circ j, \quad \bar{f} \circ \phi_M = \phi_\Omega \circ \bar{j}.$$

(ZREJME $\circ \mapsto F(\circ)$ APLIKOVANÉ NA RESTRIKCIE ZOBRAZENÍ $j, \bar{j}$ DÁVA RESTRIKCIE ZOBRAZENÍ $f, \bar{f}$ NA MNOŽINY $F(K_0), F(K)$ )

POLOŽME $u_0 = \bar{f}(u)$, $v_0 = \bar{f}(v)$, TJ. $u = f(u_0)$, $v = f(v_0)$

DOKÁŽEME, ŽE $(u_0, v_0) \in E_\Omega A$ TJ. ŽE PRE VŠETKY HOMOMORFIZMY $h: F(\Omega) \to A \in \mathcal{A}$ JE $h(u_0) = h(v_0)$

$h \circ \bar{f}$ JE HOMOMORFIZMUS $F(M) \to A$ $\Rightarrow$

$h \circ \bar{f}(u) = h \circ \bar{f}(v)$, TJ. $h(u_0) = h(v_0)$.

NECH $A \in M_\Omega E_\Omega A$, $h: F(M) \to A$ JE HOMOMORFIZMUS, $(u,v) \in E_n A$. DOKÁŽEME, ŽE $h(u) = h(v)$.

PODĽA VYŠŠIE UVEDENÉHO, MÁME $(u_0, v_0) \in E_\Omega A$, $f, \bar{f}$.

PRE HOMOMORFIZMUS $h \circ f: F(\Omega) \to A$ JE

$h \circ f(u_0) = h \circ f(v_0)$ TJ. $h \circ f \circ \bar{f}(u) = h \circ f \circ \bar{f}(v)$.

$\Rightarrow$ NUTNE $A \in M_n E_n A$.

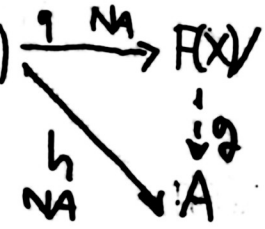
BIRKHOFFOVA VETA O VARIETÁCH: $\mathcal{A} \subseteq Alg(\Delta) = \mathcal{M}_\Omega(E)$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ NA IZOMORFIZMY, PODALGEBRY, FAKTOROVÉ ALGEBRY A PRODUKTY.

$\Rightarrow$) z LEMMY 1.

$\Leftarrow$) NECH PRE $\mathcal{A} \subseteq Alg(\Delta)$ JE $\mathcal{A} = H\mathcal{A}, S\mathcal{A}, P\mathcal{A}$.
DOKÁŽEME, ŽE $\mathcal{A} = \mathcal{M}_\Omega E$, KDE $E = E_\Omega \mathcal{A}$.
TRIVIÁLNE PLATÍ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_\Omega E_\Omega \mathcal{A}$.
DOKÁŽEME, ŽE $\mathcal{M}_\Omega E_\Omega \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. NECH TEDA $A \in \mathcal{M}_\Omega E_\Omega \mathcal{A}$.
$A = (X, \kappa)$, ZREJME EXISTUJE HOMOMORFIZMUS
$h: F(X) \to A$, KTORÝ JE NA.
STAČÍ POLOŽIŤ PODMIENKU $h \circ \phi_X = id_X$.
Z LEMMY 3 ($\mathcal{M}_\Omega E_\Omega \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_X E_X \mathcal{A}$) DOSTÁVAME,
ŽE $A \in \mathcal{M}_X E_X \mathcal{A}$.

Z LEMMY 2 (KEĎŽE $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ NA PODALGEBRY)
DOSTÁVAME $E_X \mathcal{A} \subseteq E_h$.

PRIČOM $q(x) = x E_X \mathcal{A}$




$u E_X \mathcal{A} = v E_X \mathcal{A} \Leftrightarrow u (E_X \mathcal{A}) v \Rightarrow u E_h v \Leftrightarrow h(u) = h(v)$
$\Rightarrow$ EXISTUJE HOMOMORFIZMUS $g: F(X)/E_X\mathcal{A} \to A$
TAKÝ, ŽE $h = g \circ q$.
PODĽA LEMMY 2 KEĎŽE $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ ESTE AJ NA PRODUKTY JE $F(X)/E_X\mathcal{A}$ IZOMORFNÝ S PODALGEBROU PRODUKTU $\prod F(X)/\Theta \in \mathcal{A}$, KDE $\Theta$ IDE CEZ VŠETKY KONGRUENCIE TAKÉ, ŽE $F(X)/\Theta \in \mathcal{A}$.

$h$ JE NA $\Rightarrow$ AJ $g$ MUSÍ BYŤ NA
A KEĎŽE $\mathcal{A}$ JE UZAVRETÁ NA FAKTOR ALGEBRY
A $F(X)/E_X\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, NUTNE $A \in \mathcal{A}$. ■

12.06.2008 Th
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

POLOGRUPA JE ALG. $(X;\cdot)$ TYPU (2) S ASOCIATÍVNOU BINÁRNOU OPERÁCIOU $\cdot$ : $\forall x,y,z: x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

MONOID JE ALG. $(X;\cdot,e)$ TYPU $(2,0)$ TAKÝ, ŽE $(X;\cdot)$ JE POLOGRUPA A : $\forall x: x\cdot e = e\cdot x = x$

KOMUTATÍVNY POLOGRUPA MONOID JE MONOID TAKÝ, ŽE $\forall x,y: x\cdot y = y\cdot x$

KAŽDÁ POLOGRUPA (MONOID) MÔŽE BYŤ REPREZENTOVANÁ POLOGRUPOU $\mathcal{G}(\cdot)$ (MONOIDOM $\mathcal{G}(\cdot, id_X)$) ZOBRAZENÍ $X\to X$.

MÁME MONOID $M=(X;\cdot,e)$ A VEZMEME ALGEBRU $A=(X;(f_s)_{s\in X})$, KDE $f_s$ SÚ UNÁRNE OPERÁCIE $X\to X$, $f_s(x)=x\cdot s$.

DOKÁŽTE, ŽE $M\cong End(A)$.

DEFINUJME $\lambda: X\to(X\to X)$ AKO

$\lambda(s): X\to X$, $\lambda(s): x\mapsto s\cdot x$

DOKÁŽTE, ŽE $\lambda$ JE IZOMORFIZMUS $M\to End(A)$.

2) $\lambda$ JE HOMOMORFIZMUS $M\to End(A)$

TJ. $\lambda(s\cdot t)=\lambda(s)\circ\lambda(t)$ :

$\lambda(s\cdot t)(x)=(s\cdot t)\cdot x = s\cdot(t\cdot x)=s\cdot(\lambda(t)(x))=$

$=\lambda(s)[\lambda(t)(x)]=(\lambda(s)\circ\lambda(t))(x)$.

$\lambda(e)=id_X$ :

$\lambda(e)(x)=e\cdot x = x = id_X(x)$

3) $s,t\in X$, $s\neq t \Rightarrow \lambda(s)\neq\lambda(t)$, TJ. $\lambda$ JE PROSTÉ

$\lambda(s)(e)=s\cdot e = s \neq t = t\cdot e = \lambda(t)(e)$

1) $\forall s\in X$ JE $\lambda(s)\in End(A)$, TJ. $\lambda(s)$ JE HOMOMORFIZMUS $A\to A$.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall t \in X\ \forall x \in X$:

$\lambda(s)(\rho_t(x)) = \rho_t(\lambda(s)(x))$

$\lambda(s)(\rho_t(x)) = \lambda(s)(x \cdot t) = s \cdot (x \cdot t) =$

$= (s \cdot x) \cdot t = (\lambda(s)(x)) \cdot t = \rho_t(\lambda(s)(x))$.

4) $\forall h \in End(A)\ \exists s \in X : h = \lambda(s)$, TJ. $\lambda$ JE NA.

$h(x) = h(e \cdot x) = h(\rho_x(e)) = \rho_x(h(e)) =$

$= h(e) \cdot x = \lambda(h(e))(x)$.

VIDÍME, ŽE $h : M \to End(A)$ JE HOMOMORFIZMUS, KTORÝ JE PROSTÝ A NA $\Rightarrow$ JE TO IZOMORFIZMUS.

GRUPA $G = (X; \cdot, ^{-1}, e)$ JE ALGEBRA TYPU $(2,1,0)$ TAKÁ, ŽE $(X; \cdot, e)$ JE MONOID A

$\forall x \in X : x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$.

ABELOVA GRUPA NAVYŠE $\forall x, y \in X : x \cdot y = y \cdot x$

DOKÁŽTE, ŽE PRE GRUPU $G = (X; \cdot, ^{-1}, e)$ PLATÍ, ŽE PRÍSLUŠNÁ ALGEBRA $A = (X; (\rho_t)_{t \in X})$ SPĹŇA $End(A) = Aut(A)$.

NECH $h : X \to X \in End(A)$,

TJ. $\forall t \in X\ \forall x \in X : h(\rho_t(x)) = \rho_t(h(x))$

DOKÁŽTE, ŽE $h$ JE PROSTÉ A NA.

$x, y \in X : x \neq y \Rightarrow x^{-1} \cdot y \neq e$

$h(y) = h(x \cdot (x^{-1} \cdot y)) = h(\rho_{x^{-1} \cdot y}(x)) = \rho_{x^{-1} \cdot y}(h(x)) =$

$= h(x) \cdot (x^{-1} \cdot y) \neq h(x)$.

NECH $y \in X$. $y = h(e) \cdot (h(e)^{-1} \cdot y) = \rho_{h(e)^{-1} \cdot y}(h(e)) =$

$= h(\rho_{h(e)^{-1} \cdot y}(e)) = h(h(e)^{-1} \cdot y)$.

12.06.2008 Th
Peter Černo

# NMAI064 Matematické štruktúry - skúška

Nech $G=(X;\cdot,^{-1},e_G)$, $H(Y,\cdot,^{-1},e_H)$ sú grupy a $h: X\to Y$ je zlučiteľné s $\cdot$, $^{-1}$, $e$. Potom $h$ je homomorfizmus $G\to H$.

$\forall x,y\in X: h(x\cdot y)=h(x)\cdot h(y)$.

Zlučiteľnosť s $e$: chceme dokázať $h(e_G)=e_H$.

$$\forall x\in X \quad h(x)=h(x\cdot e_G)=h(x)\cdot h(e_G)$$
$$=h(e_G\cdot x)=h(e_G)\cdot h(x)$$

Takže $h(e_G)$ je jednotkový prvok v $h[X]\subseteq H$ a ten je určený jednoznačne. $\Rightarrow h(e_G)=e_H$

Zlučiteľnosť s $^{-1}$: tj. $h(x^{-1})=(h(x))^{-1}$.

$$\left.\begin{aligned} h(x)\cdot h(x^{-1})&=h(e_G)=e_H\\ h(x^{-1})\cdot h(x)&=e_H\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(x^{-1})=(h(x))^{-1}$$

Pretože opäť je $h[X]$ inverzný prvok určený jednozn.

Podgrupa $N\subseteq G$ je normálna $\Leftrightarrow \forall a\in G: aN=Na$.

$\forall a,b\in G$ $aN, bN$ sú buď totožné, alebo disjunktné

Ak existuje $x,y\in N: ax=by$, potom $a=byx^{-1}$ takže $\forall z\in N$ je $az=b(yx^{-1}z)\in bN$

$\Rightarrow aN\subseteq bN$. Podobne $bN\subseteq aN$

Definujme $G/N=\{aN, a\in G\}$ grupu:

$aN\cdot bN=abNN=abN$

$aN\cdot eN=aN$, $eN\,aN=aN$

$aN\,a^{-1}N=aa^{-1}NaN=eN$

**LEMMA**: PRE KAŽDÝ HOMOMORFIZMUS GRUP $h: G \to H$ JE $h^{-1}[e]$ NORMÁLNA PODGRUPA GRUPY $G$

$N = h^{-1}[e] = \{x \in G \mid h(x) = e\}$

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE 1. $N$ JE GRUPA, 2. $\forall a \in G: aN = Na$.

1. $x, y \in N \Rightarrow h(x) = h(y) = e \Rightarrow h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y) = e \Rightarrow x \cdot y \in N$
   $x \in N \Rightarrow h(x) = e$, $h(x \cdot x^{-1}) = h(x) \cdot h(x^{-1}) = h(e) = e$
   $\Rightarrow h(x^{-1}) = e \Rightarrow x^{-1} \in N$
   $e \in N$, PRETOŽE $h(e) = e$.
2. NECH $a \in G$. CHCEME UKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall x \in N \exists y \in N: ax = ya$
   $h(x) = e$, POLOŽÍME $y = axa^{-1}$. POTOM $h(y) = h(a) \cdot h(a^{-1}) = e$.
   [PODOBNE $\forall y \in N \exists x \in N: ax = ya$.]

**LEMMA**: KORESPONDENCIE $E \mapsto \{x \mid xEe\}$ A $N \mapsto \{(x, y) \mid xy^{-1} \in N\}$ POPISUJÚ VZÁJOMNE JEDNOZNAČNÝ VZŤAH MEDZI KONGRUENCIAMI A NORMÁLNYMI PODGRUPAMI $G$.

1) AK $E \subseteq X \times X$ JE KONGRUENCIA NA GRUPE $G = (X; \cdot, ^{-1}, e)$,
   TJ. $x_1 E y_1, x_2 E y_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \, E \, y_1 \cdot y_2$
   $x E y \Rightarrow x^{-1} E y^{-1}$
   POTOM $N = \{x \in X \mid xEe\}$ JE NORMÁLNA PODGRUPA GRUPY $G$.
   ZREJME $N$ JE PODGRUPA $G$.
   NECH $a \in X$, $x \in N$ TJ. $xEe$. HĽADÁME $y \in N: ax = ya$.
   POLOŽÍME $y = axa^{-1}$. $aEa$, $xEe \Rightarrow axEae$
   $a^{-1}Ea^{-1} \Rightarrow axa^{-1}Ee$, TJ. $y \in N$ A $ax = ya$.
   [PODOBNE NAOPAK]
2) AK $N \subseteq G$ JE NORMÁLNA PODGRUPA GRUPY $G$,
   TJ. $\forall a \in G: aN = Na$,
   POTOM $E = \{(x, y) \in X \times X \mid x \cdot y^{-1} \in N\}$ JE KONGRUENCIA

12.06.2008 Th
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

a) $E$ JE EKVIVALENCIA: $x \cdot x^{-1} = e \in N \Rightarrow xEx$

$xEy \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in N \Rightarrow (x \cdot y^{-1})^{-1} = y \cdot x^{-1} \in N \Rightarrow yEx$

$xEy \;\&\; yEz \Rightarrow x \cdot y^{-1}, y \cdot z^{-1} \in N \Rightarrow x \cdot y^{-1} \cdot y \cdot z^{-1} = x \cdot z^{-1} \in N.$

b) $E$ JE KONGRUENCIA:

$x_1 E y_1,\ x_2 E y_2,\quad x_1 \cdot y_1^{-1},\ x_2 \cdot y_2^{-1} \in N$

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $x_1 \cdot x_2 \cdot (y_1 \cdot y_2)^{-1} \in N$,

D. $x_1 \cdot x_2 \cdot y_2^{-1} \cdot y_1^{-1} \in N$

POZNÁMKA: $N$ JE NORMÁLNA PODGRUPA $G \Leftrightarrow$

$\forall x \in G\ \forall y \in N : x \cdot y \cdot x^{-1} \in N$

$\Rightarrow$) $\exists z \in N : x \cdot y = z \cdot x,\quad z = x \cdot y \cdot x^{-1}$

$\Leftarrow$) $x \cdot y = (x \cdot y \cdot x^{-1}) \cdot x$

$x_2 \cdot y_2^{-1} \in N \Rightarrow y_1 \cdot x_2 \cdot y_2^{-1} \cdot y_1^{-1} \in N$

$\Rightarrow (x_1 \cdot y_1^{-1}) \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2^{-1} \cdot y_1^{-1} = x_1 x_2 (y_1 y_2)^{-1} \in N.$

$xEy,\quad x y^{-1} \in N.$ CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $x^{-1} y \in N.$

$xy^{-1} \in N \Rightarrow yx^{-1} \in N \Rightarrow y^{-1} y x^{-1} y = x^{-1} y \in N.$

---

INÝ DÔKAZ: PRE GRUPU $G/N$ VIEDOL HOMOMORFIZMUS $h : G \to G/N,\ h(x) = xN.$

POTOM $E_h = \{(x,y) \in X \times X \mid h(x) = h(y)\}$ JE KONGRUENCIA.

$h(x) = h(y) \Leftrightarrow xN = yN \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in N$

[KOMUTATÍVNY]
OKRUH $R=(X;+,-,0,\cdot,1)$ JE ALGEBRA TYPU $(2,1,0,2,0)$, KDE:

1) $(X;+,-,0)$ JE ABELOVA GRUPA
2) $(X;\cdot,1)$ JE [KOMUTATÍVNY] MONOID
3) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

OBOR INTEGRITY: $xy=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

TELESO: $\forall x\neq 0\ \exists y : xy=1$

↳ UŽ NIE SÚ VARIETY

IDEÁL V OKRUHU $R$ JE $J\subseteq R$ TAKÁ, ŽE:

1) $J$ JE PODGRUPA GRUPY $(X;+,-,0)$
2) $x\in J,\ y\in R \Rightarrow xy\in J$

- VLASTNÝ IDEÁL $J\neq R$ (T.J. $1\notin J$)
MAXIMÁLNY IDEÁL
PRVOIDEÁL $J$: $xy\in J \Rightarrow x\in J \vee y\in J$.

LEMMA: VLASTNÉ IDEÁLY SÚ KOREŠPONDENCIAMI
$J \mapsto E=\{(x,y)\in X\times X \mid x-y\in J\}$
$E \mapsto J=\{x\in X \mid xE0\}$
VO VZÁJOMNE JEDNOZNAČNOM VZŤAHU S NETRIVIÁLNYMI KONGRUENCIAMI.

LEMMA: KAŽDÝ VLASTNÝ IDEÁL JE MOŽNÉ ROZŠÍRIŤ NA MAXIMÁLNY IDEÁL.
KAŽDÝ MAXIMÁLNY IDEÁL JE PRVOIDEÁL

LEMMA: $J$ JE MAXIMÁLNY IDEÁL $\Leftrightarrow$ $R/J$ JE TELESO
$J$ JE PRVOIDEÁL $\Leftrightarrow$ $R/J$ JE OBOR INTEGRITY.

13.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NA MNOŽINE $X$ JE DEFINOVANÁ TOPOLÓGIA POMOCOU OKOLÍ AK PLATÍ PRE KAŽDÉ $x \in X$ NEPRÁZDNU MNOŽINU $\mathcal{U}(x) \subseteq \exp X$ TAKÚ, ŽE:

(OK1) $\forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$
(OK2) $U, V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$
(OK3) $U \in \mathcal{U}(x),\ V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$
(OK4) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists W \in \mathcal{U}(x)\ W \subseteq U :$
$\forall y \in W : U \in \mathcal{U}(y)$

$\Rightarrow$ PLATÍ (OK4'): $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists W \in \mathcal{U}(x)\ W \subseteq U :$
$\forall y \in W : W \in \mathcal{U}(y)$

MÁME $U \in \mathcal{U}(x)$. DEFINUJME $W = \{y \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$
JEDNAK $x \in W$, PRETOŽE $U \in \mathcal{U}(x)$
A $y \in W$ T.J. $U \in \mathcal{U}(y) \overset{(OK1)}{\Rightarrow} y \in U$ TAKŽE $W \subseteq U$.

NECH $y \in W$, T.J. $U \in \mathcal{U}(y)$. PODĽA (OK4) $\exists V \in \mathcal{U}(y)\ V \subseteq U :$
$\forall z \in V : U \in \mathcal{U}(z)$. NUTNE $V \subseteq W$, TAKŽE $W \in \mathcal{U}(y)$.
A TO PLATÍ PRE $\forall y \in W$.

TOPOLÓGIA POMOCOU OTVORENÝCH MNOŽÍN JE $\tau \subseteq \exp(X)$ TAKÁ, ŽE:

(OT1) $\emptyset, X \in \tau$
(OT2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$
(OT3) $U_i \in \tau\ \forall i \in J \Rightarrow \bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$

KEĎ MÁME NA $X$ TOPOLÓGIU POMOCOU OKOLÍ, DEFINUJEME $\tau \subseteq \exp X$ AKO

$$\tau = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U : U \in \mathcal{U}(x)\} \quad (*)$$

KEĎ MÁME NA $X$ TOPOLÓGIU POMOCOU OT. MNOŽÍN, DEFINUJEME $\mathcal{U}(x) \subseteq \exp X \quad \forall x \in X$ AKO:

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X \mid \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U\} \quad (**)$$

DOKÁŽEME, ŽE $\tau$ DEFINOVANÁ POMOCOU $(*)$ JE TOPOLÓGIA OTV. MNOŽÍN

(OT1) ZREJME $\emptyset \in \tau$. (OK1)
$X \subseteq X$ A PRE ĽUBOVOĽNÉ $x \in X$ VEZMEME $U \in \mathcal{U}(x)$.
KEĎŽE $U \subseteq X$, NUTNE PODĽA (OK3) $X \in \mathcal{U}(x)$. $\Rightarrow X \in \tau$

(OT2) MAJME $U, V \in \tau$, TJ. $\forall x \in U : U \in \mathcal{U}(x)$, $\forall y \in V : V \in \mathcal{U}(y)$.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $U \cap V \in \tau$.
$x \in U \cap V$. KEĎŽE $U \in \mathcal{U}(x)$ AJ $V \in \mathcal{U}(x)$
NUTNE PODĽA (OK2) $U \cap V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(OT3) MÁME $U_i \in \tau \; \forall i \in J$ A CHCEME DOKÁZAŤ,
ŽE $\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$, TJ. PRE $\forall x \in \bigcup_{i \in J} U_i$ JE $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{U}(x)$.
AK $x \in \bigcup_{i \in J} U_i \Rightarrow \exists j \in J : x \in U_j \Rightarrow$
KEĎŽE $U_j \in \tau$ NUTNE $U_j \in \mathcal{U}(x)$
A VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq U_j$,
NUTNE TIEŽ PODĽA (OK3) $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{U}(x)$.

13.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

DOKÁŽTE, ŽE $\mathcal{U}(x)$ DEFINOVANÉ POMOCOU (**) JE TOPOLÓGIA OKOLÍ.

1. $\mathcal{U}(x) \subseteq \exp X$ JE NEPRÁZDNE:
PRE ĽUBOVOĽNÉ $x \in X$ JE (OT1) $X \in \tau \Rightarrow$ NUTNE $X \in \mathcal{U}(x)$.

(OK1) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U \Rightarrow x \in U$.

(OK2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V_1, V_2 \in \tau : x \in V_1 \subseteq U_1,\ x \in V_2 \subseteq U_2$.
$\Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \tau$ PODĽA (OT2), TJ. $x \in V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2$
$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

(OK3) $U \in \mathcal{U}(x)$ $V \supseteq U \Rightarrow \exists W \in \tau : x \in W \subseteq U \subseteq V$
$\Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$.

(OK4) MÁME $U \in \mathcal{U}(x)$, TJ. $\exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\exists W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$ TAKÉ, ŽE PRE $\forall y \in W : U \in \mathcal{U}(y)$

STAČÍ POLOŽIŤ $W := V$.
JEDNAK $V \in \mathcal{U}(x)$, PRETOŽE $V \in \tau$ A $x \in V \subseteq V$
JEDNAK $V \subseteq U$
A PRE $\forall y \in V$ JE $V \in \mathcal{U}(y)$ ($V \in \tau$ A $y \in V \subseteq V$)
$\Rightarrow$ KEĎŽE $U \supseteq V$ A PLATÍ (OK3), NUTNE $U \in \mathcal{U}(y)$.

MÁME MNOŽINU $X$ A NA NEJ DEFINOVANÚ TOPOLÓGIU POMOCOU OKOLÍ: $\mathcal{U}(x) \subseteq \exp X$, $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in X$.

DEFINUJTE NA $X$ TOPOLÓGIU OTVORENÝCH MNOŽÍN $\tau$ POMOCOU (*).

NA ZÁKLADE $\tau$ DEFINUJTE NA $X$ TOPOLÓGIU $\mathcal{U}'$ POMOCOU (**).

DOKÁŽEME, ŽE $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

NECH $x \in X$ A $U \in \mathcal{U}(x)$ SÚ ĽUBOVOĽNÉ, ALE PEVNÉ.

DOKÁŽEME, ŽE $U \in \mathcal{U}'(x)$.

$U \in \mathcal{U}'(x) \Leftrightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$. PODĽA (**)

$V \in \tau \Leftrightarrow \forall y \in V : V \in \mathcal{U}(y)$ PODĽA (*)

KEĎŽE V TOPOLÓGII $\mathcal{U}$ PLATÍ ZOSÍLENÝ (OK4') EXISTUJE MNOŽINA $W \in \mathcal{U}(x)$, $W \subseteq U$

$\forall y \in W : W \in \mathcal{U}(y)$.

VIDÍME, ŽE STAČÍ POLOŽIŤ $V := W$,

A DOSTÁVAME $U \in \mathcal{U}'(x)$.

NECH TERAZ $x \in X$ A $U \in \mathcal{U}'(x)$. DOKÁŽEME, ŽE $U \in \mathcal{U}(x)$.

$U \in \mathcal{U}'(x) \Rightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$. PODĽA (**)

$V \in \tau \Rightarrow \forall y \in V : V \in \mathcal{U}(y)$ PODĽA (*)

VZHĽADOM K TOMU, ŽE $x \in V$, NUTNE $V \in \mathcal{U}(x)$

A KEĎŽE $U \supseteq V$ JE PODĽA (OK3) $U \in \mathcal{U}(x)$.

VIDÍME, ŽE PRE $\forall x \in X : \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}'(x)$. □

MÁME MNOŽINU $X$ A NA NEJ DEFINOVANÚ TOPOLÓGIU $\tau$ POMOCOU OTVORENÝCH MNOŽÍN $\tau \subseteq \exp X$.

DEFINUJEME NA $X$ TOPOLÓGIU OKOLÍ $\mathcal{U}$ POMOCOU (**)

NA ZÁKLADE $\mathcal{U}$ DEFINUJEME NA $X$ TOPOLÓGIU OTVORENÝCH MNOŽÍN $\tau'$.

DOKÁŽEME, ŽE $\tau = \tau'$.

13.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

MAJME $U \in \tau$. DOKÁŽME, ŽE $U \in \tau'$.

$U \in \tau' \Leftrightarrow \forall x \in U : U \in \mathcal{U}(x)$ PODĽA $(*)$

$U \in \mathcal{U}(x) \Leftrightarrow \exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$ PODĽA $(**)$

ZVOĽME ĽUBOVOĽNE $x \in U$. KEĎŽE $U \in \tau$ A $x \in U \subseteq U$, NUTNE $U \in \mathcal{U}(x)$, TAKŽE $U \in \tau'$.

MAJME $U \in \tau'$. DOKÁŽME, ŽE $U \in \tau$.

$U \in \tau' \Rightarrow \forall x \in U : U \in \mathcal{U}(x)$ PODĽA $(*)$.

$\Rightarrow \exists V_x \in \tau : x \in V_x \subseteq U$ PODĽA $(**)$.

TJ. $\forall x \in U \ \exists V_x \in \tau : x \in V_x \subseteq U$.

ZREJME PODĽA $\boxed{(OT3)}$ $U = \bigcup_{x \in U} V_x \in \tau$.

VIDÍME, ŽE $\tau = \tau'$. □

KEĎ MÁME NA $X$ TOPOLÓGIU DEFINOVANÚ AKO SÚSTAVU OTVORENÝCH MNOŽÍN, POTOM $A \subseteq X$ JE UZAVRETÁ $\Leftrightarrow X \setminus A$ JE OTVORENÁ.

PRIENIK ĽUBOVOĽNÉHO SYSTÉMU UZAV. MN. JE UZAV. MN.

UZÁVER $\boxed{\bar{M} = \bigcap \{A \mid A \text{ JE UZAVRETÁ} \supseteq M\}}$
JE NAJMENŠIA UZAV. MN. OBSAHUJÚCA $M$

KEĎ MÁME NA $X$ TOPOLÓGIU DEFINOVANÚ POMOCOU OKOLÍ, POTOM

$$\bar{M} = \{x \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M \neq \emptyset\}$$

JE EKVIVALENTNÁ DEFINÍCIA UZÁVERU.

MÁME NA $X$ DANÚ TOPOLÓGIU OTVORENÝCH MNOŽÍN $\tau$ A DEFINUJEME TOPOLÓGIU OKOLÍ $\mathcal{U}$ POMOCOU (**)

NECH $M \subseteq X$, $\bar{M} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ JE UZAVRETÁ} \supseteq M\}$

AK $x \in \bar{M}$, DOKÁŽEME, ŽE PRE $\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M \neq \emptyset$.

NECH $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M = \emptyset$. ZREJME (PODĽA (**))
$\exists V \in \tau : x \in V \subseteq U$. POTOM TIEŽ $V \cap M = \emptyset$
$\Rightarrow M \subseteq X \setminus V$, PRIČOM $X \setminus V$ JE UZAVRETÁ MN.
$\Rightarrow \bar{M} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V \Rightarrow V \cap \bar{M} = \emptyset \Rightarrow x \notin V$, ČO JE SPOR.

AK $x \notin \bar{M}$, DOKÁŽEME, ŽE $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M = \emptyset$.

$\bar{M}$ JE UZAVRETÁ MNOŽINA $\Rightarrow U = X \setminus \bar{M}$ JE OTVORENÁ A $x \in U$. TO ALE ZNAMENÁ, ŽE $U \in \mathcal{U}(x)$
A KEĎŽE $M \subseteq \bar{M}$, NUTNE $U \cap M = \emptyset$.

KEĎ MÁME NA $X$ DEFINOVANÚ TOPOLÓGIU POMOCOU OKOLÍ $\mathcal{U}$ A PRE $M \subseteq X$ JE $\bar{M} = \{x \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M \neq \emptyset\}$ DEFINUJEME NA $X$ TOPOLÓGIU OTV. MNOŽÍN $\tau$ POMOCOU (*)

POLOŽME $\tilde{M} = \bigcap \{A \mid A \text{ JE UZAVRETÁ V } \tau, A \supseteq M\}$

KEĎ DEFINUJEME POMOCOU $\tau$ TOPOLÓGIU $\mathcal{U}'$ PODĽA (**), DOSTANEME $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. MÔŽETE SA UKÁZAŤ, ŽE $\tilde{M} = \bar{M}$.

13.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

MAJME NA $X$ TOPOLÓGIU OTVORENÝCH MNOŽÍN $\tau$ A PRE $M \subseteq X$ NECH JE $\overline{M} = \bigcap \{A \mid A \text{ UZAVRETÁ} \supseteq M\}$.

POTOM:

(UZ 1) $M \subseteq \overline{M}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $(\overline{X} = X)$.
(UZ 2) $M \subseteq N \Rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{N}$
(UZ 3) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
(UZ 4) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

OZNAČME $UZ(M) = \{A \mid A \text{ JE UZAVRETÁ} \supseteq M\}$, TJ. $\overline{M} = \bigcap UZ(M)$

(UZ 1): $\forall A \in UZ(M) : A \supseteq M \Rightarrow \bigcap UZ(M) \supseteq M$.

$\emptyset, X \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset$ AJ $X$ SÚ UZAVRETÉ,

KEĎŽE $\emptyset \supseteq \emptyset$, NUTNE $\emptyset \in UZ(\emptyset) \Rightarrow \bigcap UZ(\emptyset) = \emptyset$.

(UZ 2): $M \subseteq N$ PRETO $A \in UZ(N) \Rightarrow A \supseteq N \supseteq M \Rightarrow A \in UZ(M)$,

TJ. $UZ(M) \supseteq UZ(N) \Rightarrow \bigcap UZ(M) \subseteq \bigcap UZ(N)$.

(UZ 3): $M \subseteq M \cup N \Rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{M \cup N}$. PODOBNE $\overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$

$\Rightarrow \overline{M} \cup \overline{N} \subseteq \overline{M \cup N}$.

DOKÁŽTE, ŽE TIEŽ $\overline{M \cup N} \subseteq \overline{M} \cup \overline{N}$, TJ.

$\bigcap UZ(M \cup N) \subseteq \bigcap UZ(M) \cup \bigcap UZ(N)$

$\bigcap \mathcal{A} \cup \bigcap \mathcal{B} = \bigcap \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

$x \in \bigcap \mathcal{A} \cup \bigcap \mathcal{B} \Rightarrow$ BUĎ $x \in \bigcap \mathcal{A} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} : x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in \bigcap \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

$x \in \bigcap \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. AK EXISTUJE $A \in \mathcal{A}$ A $B \in \mathcal{B}$ TAKÉ, ŽE $x \notin A \wedge x \notin B$, POTOM $x \notin A \cup B$, ČO JE SPOR. PRETO $x \in \bigcap \mathcal{A}$ ALEBO $x \in \bigcap \mathcal{B}$, TJ. $x \in \bigcap \mathcal{A} \cup \bigcap \mathcal{B}$.

STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE:

$\{A \cup B \mid A \in UZ(M), B \in UZ(N)\} \subseteq UZ(M \cup N)$, ČO JE ZREJMÉ.

(UZ 4): VIEME, ŽE $M \subseteq \overline{M}$. DOKÁŽEME, ŽE $\overline{\overline{M}} \subseteq \overline{M}$, TJ. $\bigcap uz(\overline{M}) \subseteq \bigcap uz(M)$. K TOMU STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE $uz(M) \subseteq uz(\overline{M})$.

$A \in uz(M) \Rightarrow A \supseteq M \Rightarrow A = \overline{A} \supseteq \overline{M} \Rightarrow A \in uz(\overline{M})$. □

NA MNOŽINE $X$ MÁME ZOBRAZENIE $(M \mapsto \overline{M}) : \exp X \to \exp X$ SPĹŇAJÚCE (UZ1..4)

DEFINUJEME $\boxed{\tau = \{U \subseteq X \mid \overline{X \setminus U} = X \setminus U\}}$.

DOKÁŽEME, ŽE $\tau$ JE TOPOLÓGIA OTVORENÝCH MNOŽÍN NA $X$, A PLATÍ $\overline{M} = \bigcap \{A \mid X \setminus A \in \tau, A \supseteq M\}$.

(OT1): $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ : Z (UZ1) IHNEĎ DOSTÁVAME, ŽE:
PRE $U = \emptyset$ JE $\overline{X \setminus U} = \overline{X} = X = X \setminus U$
PRE $U = X$ JE $\overline{X \setminus U} = \overline{\emptyset} = \emptyset = X \setminus U$

(OT2): $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$ :
MÁME $\overline{X \setminus U} = X \setminus U$, $\overline{X \setminus V} = X \setminus V$
A CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\overline{X \setminus (U \cap V)} = X \setminus (U \cap V)$.
Z (UZ3) $X \setminus (U \cap V) = X \setminus U \cup X \setminus V = \overline{X \setminus U} \cup \overline{X \setminus V} =$
$= \overline{X \setminus U \cup X \setminus V} = \overline{X \setminus (U \cap V)}$.

(OT3): $U_i \in \tau$ $i \in J \Rightarrow \bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$.
MÁME $\overline{X \setminus U_i} = X \setminus U_i$ PRE $\forall i \in J$ A CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\overline{X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i} = X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i$.
(UZ2): MÁME $X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i \subseteq X \setminus U_j \Rightarrow \overline{X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i} \subseteq \overline{X \setminus U_j} = X \setminus U_j$
$\Rightarrow \overline{X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i} \subseteq \bigcap_{j \in J} X \setminus U_j = X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j$.
NA DRUHEJ STRANE $X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j \subseteq \overline{X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i}$. (UZ1)

13.06.2008 Fr
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

DOKÁŽTE EŠTE, ŽE PRE $\forall M \subseteq X$ PLATÍ:
$\bar{M} = \bigcap \{A \mid X \setminus A \in \tau \ A \supseteq M\}$.
NECH $A_i$, $i \in J$ SÚ VŠETKY MNOŽINY TAKÉ, ŽE
$X \setminus A_i \in \tau$ A $A_i \supseteq M$.
PODĽA (OT3) JE KEĎ OZNAČÍME $U_i = X \setminus A_i$
$\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$, TJ. $\overline{X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i} = X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i$
PRIČOM $X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i = X \setminus \bigcup_{i \in J}(X \setminus A_i) =$
$= X \setminus (X \setminus \bigcap_{i \in J} A_i) = \bigcap_{i \in J} A_i$, TAKŽE
$\overline{\bigcap_{i \in J} A_i} = \bigcap_{i \in J} A_i$.
KEĎŽE PRE $\forall i \in J$ $A_i \supseteq M \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \supseteq M$
$\Rightarrow \overline{\bigcap_{i \in J} A_i} = \bigcap_{i \in J} A_i \supseteq \bar{M}$.
DOKÁŽTE EŠTE, ŽE $\bigcap_{i \in J} A_i \subseteq \bar{M}$.
PLATÍ $\bar{M} \supseteq M$ A $X \setminus \bar{M} \in \tau$,
PRETOŽE $\overline{X \setminus (X \setminus \bar{M})} = \bar{\bar{M}} = \bar{M} = X \setminus (X \setminus \bar{M})$. (PODĽA (UZ4))
TO ZNAMENÁ ŽE V PRIENIKU $\bigcap_{i \in J} A_i$
SÚ VŠETKY $\bar{M} \Rightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \subseteq \bar{M}$. □

MÁME NA $X$ TOPOLÓGIU $\tau$ OTVORENÝCH MNOŽÍN
A DEFINUJEME PRE $M \subseteq X$ $\dot{M} = \bigcup \{A \mid A \text{ OTVORENÁ} \subseteq M\}$
$\dot{M}$ JE NAJVÄČŠIA OTVORENÁ PODMNOŽINA $M$ A PLATÍ
(VN1) $\dot{M} \subseteq M$, $\dot{X} = X$ $(\dot{\emptyset} = \emptyset)$
(VN2) $M \subseteq N \Rightarrow \dot{M} \subseteq \dot{N}$
(VN3) $(M \cap N)^{\cdot} = \dot{M} \cap \dot{N}$
(VN4) $\dot{\dot{M}} = \dot{M}$.

$\dot{M}$ JE VNÚTRO MNOŽINY $M$

**METRICKÝ PRIESTOR** : MÁME $(X, \rho)$

$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ JE METRIKA, TJ.

(M1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(M3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

DEFINUJME $\Omega(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$ PRE $\forall x \in X, \varepsilon > 0$

$\mathcal{U}(x) \overset{\text{def}}{:=} \{M \subseteq X \mid \exists \varepsilon > 0 : \Omega(x,\varepsilon) \subseteq M\}$

**DISKRÉTNY PRIESTOR** : $X$, $\tau = \exp X$. (DISKR. TOPOL.)

**INDISKRÉTNY PRIESTOR** : $X$, $\tau = \{\emptyset, X\}$

**KOFINÁLNA TOPOLÓGIA** : $X$, $\emptyset, X \in \tau$

A PRE $U \neq \emptyset, X$ $U \in \tau \Leftrightarrow X \setminus U$ JE KONEČNÁ

UZAVRETÉ SÚ PRÁVE KONEČNÉ MNOŽINY A $X$.

**ALEXANDROVA TOPOLÓGIA** : $(X, \leq)$ PREDUSPOR. MNOŽINA [KVAZIDISKRÉTNA]

$\tau = \{U \subseteq X \mid \uparrow U = U\}$ OTVORENÉ SÚ RAJTÚCE MNOŽ.

$\uparrow M = \{x \in X \mid \exists y \in M : x \geq y\} = \bigcup_{x \in M} \uparrow x$

NECH $\uparrow M = M$, TJ. $\forall y \in M \; x \geq y \Rightarrow x \in M$

DOKÁŽTE, ŽE $\downarrow(X \setminus \uparrow M) = X \setminus \uparrow M$. (PODOBNE $\uparrow(X \setminus \downarrow M) = X \setminus \downarrow M$)

$x \in \downarrow(X \setminus \uparrow M) \Rightarrow \exists y \in X \setminus \uparrow M : x \leq y$, TJ.

$\exists y \in X : (\neg \exists z \in M : y \geq z) \;\&\; x \leq y$

$\Rightarrow \neg \exists z \in M : x \geq z$, PRETOŽE

AK PRE NEJAKÉ $z \in M$ JE $x \geq z$,

POTOM $y \geq x \Rightarrow y \geq z$.

NUTNE TEDA $x \in X \setminus \uparrow M$, TJ. $\downarrow(X \setminus \uparrow M) \subseteq X \setminus \uparrow M$.

OPAČNÁ INKLÚZIA PLATÍ VŽDY.

14.06.2008 Sq
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY - SKÚŠKA

## BÁZA TOPOLÓGIE

MAJME NA $X$ TOPOLÓGIU $\tau$ OTVORENÝCH MNOŽÍN
BÁZA $\tau$ JE ĽUBOVOĽNÁ $\mathcal{B} \subseteq \tau$ TAKÁ, ŽE

$$\boxed{\forall U \in \tau \quad U = \bigcup \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}}$$

## SUBBÁZA TOPOLÓGIE

$\mathcal{S} \subseteq \tau$ TAKÁ, ŽE $\forall$ KONEČNÉ PRIENIKY $\mathcal{S}$ TVORIA BÁZU $\tau$.

LEMMA: KAŽDÁ $\mathcal{S} \subseteq \exp X$ JE SUBBÁZA NEJAKEJ TOP. $\tau$.

$$\boxed{\tau = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \{ \cap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ KONEČNÁ} \subseteq \mathcal{S} \} \right\}}$$

PRIČOM $\cap \emptyset = X$

(OT1) ZREJME $\emptyset, X \in \tau$

(OT2) MAJME $U, V \in \tau$, T.J. $U = \bigcup \mathcal{C}_1$, $V = \bigcup \mathcal{C}_2$, KDE

$\mathcal{C}_1 = \{ A_i \subseteq X \mid i \in J_1 \}$, $\mathcal{C}_2 = \{ B_i \subseteq X \mid i \in J_2 \}$

$$(\bigcup \mathcal{C}_1) \cap (\bigcup \mathcal{C}_2) = (\bigcup_{i \in J_1} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J_2} B_j) =$$
$$= \bigcup_{i \in J_1, j \in J_2} (A_i \cap B_j) .$$

ZREJME AK $A_i = \cap \mathcal{F}$, KDE $\mathcal{F}$ JE KONEČNÁ $\subseteq \mathcal{S}$
A $B_j = \cap \mathcal{F}'$, $\mathcal{F}'$ JE KONEČNÁ $\subseteq \mathcal{S}$,
POTOM $A_i \cap B_j = \cap \mathcal{F} \cap \cap \mathcal{F}' = \cap (\mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$

(OT3) $V_i = \bigcup \mathcal{C}_i \Rightarrow \bigcup_{i \in J} V_i = \bigcup_{i \in J} (\bigcup \mathcal{C}_i) = \bigcup (\bigcup_{i \in J} \mathcal{C}_i)$ .

# SPOJITOSŤ

ZOBRAZENIE $f : (X, \tau) \to (Y, \Theta)$ NAZÝVAME SPOJITÝM AK PRE $\forall x \in X$ PRE KAŽDÉ OKOLIE $V$ BODU $f(x)$ EXISTUJE OKOLIE $U$ BODU $x$ TAKÉ, ŽE $f[U] \subseteq V$.

VETA: NECH $f$ JE ZOBRAZENIE $(X, \tau) \to (Y, \Theta)$. POTOM NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:

(1) $f$ JE SPOJITÁ
(2) PRE KAŽDÚ OTVORENÚ $U \subseteq Y$ JE $f^{-1}[U]$ OTVORENÁ
(3) PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ $A \subseteq Y$ JE $f^{-1}[A]$ UZAVRETÁ
(4) PRE $\forall M \subseteq X$ : $f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$
(5) PRE $\forall M \subseteq Y$ : $\overline{f^{-1}[M]} \subseteq f^{-1}[\overline{M}]$

(1) $\Rightarrow$ (2) CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $f^{-1}[U]$ JE OTVORENÁ, TJ. $\forall x \in f^{-1}[U]$ JE $f^{-1}[U]$ OKOLÍM $x$.
NECH TEDA $x \in f^{-1}[U] \Rightarrow f(x) \in U$.
KEĎŽE $f$ JE SPOJITÁ, EXISTUJE $V$ OKOLIE $x$ TAKÉ, ŽE $f[V] \subseteq U \Rightarrow x \in V \subseteq f^{-1}[f[V]] \subseteq f^{-1}[U]$
$\Rightarrow f^{-1}[U]$ JE OKOLIE $x$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\forall A \subseteq Y$ : $f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$

(3) $\Rightarrow$ (4) $M \subseteq f^{-1}[f[M]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}]$
KEĎŽE $\overline{f[M]}$ JE UZAVRETÁ, NUTNE JE TIEŽ $f^{-1}[\overline{f[M]}]$
$\Rightarrow \overline{M} \subseteq f^{-1}[\overline{f[M]}] \Rightarrow f[\overline{M}] \subseteq \overline{f[M]}$

(4) $\Rightarrow$ (5) PLATÍ $f[\overline{f^{-1}[M]}] \subseteq \overline{f[f^{-1}[M]]}$
A KEĎŽE $f[f^{-1}[M]] \subseteq M$, NUTNE
$f[\overline{f^{-1}[M]}] \subseteq \overline{M} \Rightarrow \overline{f^{-1}[M]} \subseteq f^{-1}[f[\overline{f^{-1}[M]}]] \subseteq f^{-1}[\overline{M}]$.

14.06.2008 Sa
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

(5)⇒(1) VIEME, ŽE $\forall M \subseteq Y: \overline{f^{-1}[M]} \subseteq f^{-1}[\overline{M}]$
A CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall x \in X$ AK $V$ JE OKOLIE $f(x)$, POTOM EXISTUJE OKOLIE $U$ BODU $x$ T.Ž. $f[U] \subseteq V$.
MÁME TEDA $x \in X$ A $V$ OKOLIE $f(x)$
EXISTUJE OTVORENÁ $W$: $f(x) \in W \subseteq V$
$\Rightarrow Y \setminus W \supseteq Y \setminus V \Rightarrow Y \setminus W \supseteq \overline{Y \setminus V}$ ($Y \setminus W$ JE UZAVRETÁ)
TJ. $f(x) \notin \overline{Y \setminus V} \Rightarrow x \notin f^{-1}[\overline{Y \setminus V}]$
A KEĎŽE $f^{-1}[\overline{Y \setminus V}] \supseteq \overline{f^{-1}[Y \setminus V]}$,
NUTNE $x \notin \overline{f^{-1}[Y \setminus V]} \Rightarrow x \in X \setminus \overline{f^{-1}[Y \setminus V]} \rightarrow$ OTVORENÁ OKOLIE.
POLOŽME $U = f^{-1}[V] = X \setminus f^{-1}[Y \setminus V] \supseteq X \setminus \overline{f^{-1}[Y \setminus V]} \ni x$
$\Rightarrow U$ JE OKOLIE $x$ A $f[U] \subseteq f[f^{-1}[V]] \subseteq V$. □

## HOMEOMORFIZMUS

KEĎ KU SPOJITÉMU $f: (X, \tau) \to (Y, \Theta)$ EXISTUJE INVERZNÉ SPOJITÉ ZOBRAZENIE $g: (Y, \Theta) \to (X, \tau)$
HOVORÍME, ŽE $f$ JE HOMEOMORFIZMUS

LEMMA: SPOJITÁ BIJEKCIA $f: (X, \tau) \to (Y, \Theta)$ JE HOMEOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ KEĎ PLATÍ 1 Z NASLED.:
(1) $\forall$ OTVORENÚ $U \subseteq X$: $f[U]$ OTVORENÁ
(2) $\forall$ UZAVRETÚ $A \subseteq X$: $f[A]$ UZAVRETÁ
(3) $\forall M \subseteq X$: $f[\overline{M}] = \overline{f[M]}$

OZNAČME $g = f^{-1}$. V BODOCH (1), (2) JE $f = g^{-1}$.
AK PLATÍ (3), POTOM TIEŽ $g^{-1}[\overline{M}] \supseteq \overline{g^{-1}[M]} \Rightarrow g$ JE SPOJ.
AK $g$ JE HOMEOMORFIZMUS, POTOM OKREM ⊇ PLATÍ AJ:
$g[\overline{g^{-1}[M]}] \subseteq \overline{g[g^{-1}[M]}] \Rightarrow \overline{g^{-1}[M]} \subseteq g^{-1}[\overline{M}]$.

MAJME USPORIADANÉ MNOŽINY $(X, \leq), (Y, \leq)$

ALEXANDROVA TOPOLÓGIA:

NECH $\tau = \{U \subseteq X \mid U = \uparrow U\}$, $\Theta = \{V \subseteq Y \mid V = \uparrow V\}$.

DOKÁŽTE, ŽE $f: X \to Y$ JE SPOJITÉ $\Leftrightarrow$ JE MONOTÓNNE.

$\Rightarrow$) $x_1 \leq x_2$, POTOM $\uparrow f(x_1)$ JE OTVORENÁ

$\Rightarrow$ ZO SPOJITOSTI $f^{-1}[\uparrow f(x_1)]$ JE OTVORENÁ,

$f(x_1) \in \uparrow f(x_1) \Rightarrow x_1 \in f^{-1}[\uparrow f(x_1)]$

A KEĎŽE $x_2 \geq x_1$, DOSTÁVAME Z OTVORENOSTI

$x_2 \in f^{-1}[\uparrow f(x_1)] \Rightarrow f(x_2) \in \uparrow f(x_1) \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

$\Leftarrow$) CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $f^{-1}[\uparrow V]$ JE OTVORENÁ

NECH $x_1 \in f^{-1}[\uparrow V]$ A $x_2 \geq x_1$.

$\Rightarrow f(x_1) \in \uparrow V$, Z MONOTONICITY $f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_2) \in \uparrow V \Rightarrow x_2 \in f^{-1}[\uparrow V]$. □

SCOTTOVA TOPOLÓGIA:

$\tau = \{U \subseteq X \mid U = \uparrow U$ & AK $D$ JE USMERNENÁ A $\sup D \in U \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset\}$

PODOBNE $\Theta$

$f: X \to Y$ JE SPOJITÉ $\Leftrightarrow$ ZACHOVÁVA SUP USMERNENÝCH M.

TJ. $\forall D$ USMERNENÉ $\sup f[D] = f(\sup D)$.

15.06.2008 Su
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

⇒) PREDPOKLADAJME, ŽE $f$ JE SPOJITÉ A $D \subseteq X$ JE USMERNENÁ, TJ. KAŽDÁ KONEČNÁ $K \subseteq D$ MÁ HORNÚ MEDZ V $D$. NECH EXISTUJE $\sup D$.

PRE KAŽDÉ OKOLIE $V$ BODU $f(\sup D)$ EXISTUJE OKOLIE $U$ BODU $\sup D$ TAKÉ, ŽE $f[U] \subseteq V$ (ZO SPOJITOSTI)

AK JE $V$ OTVORENÁ $\Rightarrow U \subseteq f^{-1}[V]$

TJ. $\sup D \in f^{-1}[V]$ OTVORENÁ $\Rightarrow D \cap f^{-1}[V] \neq \emptyset$

$\Rightarrow f[D] \cap V \neq \emptyset$. ZVOĽME $d \in D$ TAK, ŽE $f(d) \in V$.

KEĎŽE $V$ JE RASTÚCA, NUTNE TIEŽ $\sup f[D] \in V$.

∎

PODPRIESTOR: $\mathcal{T}|Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ PRE $Y \subseteq X$

VLOŽENIE $j: (Y, \tau|Y) \to (X, \tau)$ JE SPOJITÉ,

PRETOŽE $j^{-1}[U] = U \cap Y$.

OBECNEJŠIE: AK JE $j: Y \to X$ PROSTÉ A $\Theta = \{j^{-1}[U] \mid U \in \tau\}$, HOVORÍME O $j$ AKO O VLOŽENÍ PODPRIESTORU.

SÚČIN: MÁME $(X_i, \tau_i)$ NA $\prod_{i \in J} X_i$ DEFINUJEME $\tau$ POMOCOU $\{p_j^{-1}[U] \mid j \in J, U \in \tau_j\}$ AKO SUBBÁZY

PODPRIESTORY A SÚČINY SÚ PROJEKTÍVNE VITOREVNÉ: VÍZNAČNÉ ZOBRAZENIA SÚ SPOJITÉ PRI DO NASTAVENÍ SYSTÉME OTVORENÝCH MNOŽÍN

## FAKTOROVÝ PRIESTOR (KVOCIENT):

MÁME $(X,\tau)$ A $q: X \to Y$ NA, DEFINUJEME NA $Y$

$$\boxed{\Theta = \{U \mid q^{-1}[U] \in \tau\}}$$

SUMA: MÁME $(X_i,\tau_i), i \in J$. NA $\coprod_{i\in J} X_i = \bigcup_{i\in J} X_i \times \{i\}$

DEFINUJEME BÁZU $\boxed{\{\iota_i[U] \mid i \in J,\ U \in \tau_i\}}$,

KDE $\iota_j: X_j \to \coprod_{i\in J} X_i \qquad x \mapsto (x,j)$

FAKTOROVÝ PRIESTOR A SUMA SÚ INJEKTÍVNE VYTVORENÉ VÍZNAČNÉ ZOBRAZENIA SÚ SPOJITÉ PRI DO NAJVÄČŠOM SYSTÉME OTV. MNOŽÍN

**$T_0$** $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓM $T_0$ $\Leftrightarrow$

$\forall x,y \in X\ x \neq y\ \exists U \in \tau : x \notin U \ni y \vee x \in U \not\ni y.$

$\Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$) NECH $(X,\tau)$ SPĹŇA $T_0$, $x,y \in X$ $x \neq y$.

VEZMIME OKOLIE $U$ A NECH NAPR. $x \notin U \ni y$,

TJ. $x \in X \setminus U$, $y \notin X \setminus U$ $X \setminus U$ JE UZAVRETÁ.

POTOM $y \notin \overline{\{x\}} \Rightarrow \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

$\Leftarrow$) MÁME $x \neq y$. VIEME, ŽE

$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. PRE SPOR NECH $y \notin X \setminus \overline{\{x\}} \wedge x \notin X \setminus \overline{\{y\}}$,

TJ. $y \in \overline{\{x\}} \wedge x \in \overline{\{y\}}$, TJ.

$\{y\} \subseteq \overline{\{x\}} \wedge \{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$

$\Rightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}} \wedge \overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \Rightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. ↯ □

15.06.2008 Su
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

**$T_1$** $(X,\tau)$ SPĹŇA $T_1 \Leftrightarrow$

$\forall x,y \in X\ x \neq y\ \exists U \in \tau : x \notin U \ni y$

$\Leftrightarrow$ KAŽDÁ KONEČNÁ MNOŽINA JE UZAVRETÁ.

$\Rightarrow$) DOKÁŽTE, ŽE $\overline{\{x\}} = \{x\}$. ZREJME $x \in \overline{\{x\}}$. NECH $y \neq x$. $\exists U \in \tau : x \notin U \ni y$, TJ. $\{x\} \subseteq X \setminus U \not\ni y$, KDE $X \setminus U$ JE UZAVRETÁ $\Rightarrow y \notin \overline{\{x\}}$.

TVRDENIE PLYNIE Z $\overline{\{x_1,\dots,x_n\}} = \overline{\{x_1\}} \cup \dots \cup \overline{\{x_n\}}$.

$\Leftarrow$) NECH $\overline{\{x\}} = \{x\}$ PRE $\forall x \in X$.

$x \neq y \Rightarrow \overline{\{x\}} = \{x\} \not\ni y \Rightarrow x \notin X \setminus \overline{\{x\}} \ni y$. □

**$T_2$** **HAUSDORFFOV** $(X,\tau)$ SPĹŇA $T_2 \Leftrightarrow$

$\forall x,y \in X\ x \neq y\ \exists U,V \in \tau : x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$.

AK $f,g : (X,\tau) \to (Y,\Theta)$ SÚ SPOJITÉ A $(Y,\Theta)$ JE HAUSDOR., POTOM $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ JE UZAVRETÁ.

DOKÁŽTE, ŽE $W = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ JE OTVORENÁ.

NECH $x \in W$. DOKÁŽTE, ŽE $W$ JE OKOLIE $x$.

MÁME $f(x) \neq g(x) \Rightarrow \exists U,V \in \Theta : f(x) \in U,\ g(x) \in V,\ U \cap V = \emptyset$.

$f,g$ SÚ SPOJITÉ $\Rightarrow f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] \in \tau$

A $x \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] \subseteq W \Rightarrow W$ JE OKOLIE $x$. □

**$T_2$ REGULARITA** $(X,\tau)$ SPĹŇA $T_3$ (JE REGULÁRNY) $\Leftrightarrow$

$\forall x\in X\ \forall A$ UZAVRETÁ $x\notin A\ \exists U,V\in\tau$:
$x\in U,\ A\subseteq V,\ U\cap V=\emptyset$

NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:

(1) $(X,\tau)$ JE REGULÁRNY

(2) $\forall x\in X$ $\forall$ OKOLIE $M$ $x$ $\exists$ UZAVRETÉ OK. $N$ $x$ : $N\subseteq M$.

(3) $\forall U\in\tau\quad U=\bigcup\{V\mid V\in\tau,\ \bar{V}\subseteq U\}$

(1)$\Rightarrow$(2): MAJME $x\in X$ A $M$ OKOLIE $x$. NECH $W\in\tau$:
$x\in W\subseteq M$. $x\notin A=X\setminus W$ $\Rightarrow$ PODĽA PREDPOKLADU
EXISTUJÚ $U,V\in\tau$: $x\in U$, $A\subseteq V$, $U\cap V=\emptyset$
TJ. $U\subseteq X\setminus V$ $\Rightarrow$ $\bar{U}\subseteq X\setminus V$, $X\setminus V\subseteq X\setminus A=W$
STAČÍ POLOŽIŤ $N=\bar{U}$. $x\in U\subseteq\bar{U}\subseteq W\subseteq M$ $\Rightarrow$ $N\subseteq M$
JE UZAVRETÉ OKOLIE $x$.

(2)$\Rightarrow$(3): MAJME $U\in\tau$. $\forall x\in U$ JE $U$ OKOLÍM $x$
$\Rightarrow$ $\exists$ UZAVRETÉ OKOLIE $N_x$ BODU $x$ $\wedge$ $N_x\subseteq U$, AJ K TOMUTO
OKOLIU EXISTUJE OTVORENÁ $V_x$: $x\in V_x\subseteq N_x\subseteq U$
$\Rightarrow$ $x\in\bar{V}_x\subseteq N_x\subseteq U$.
ZREJME $U\supseteq\bigcup\{V\mid V\in\tau,\bar{V}\subseteq U\}\supseteq\bigcup_{x\in U}V_x\supseteq U$.

(3)$\Rightarrow$(1): MAJME DANÝ BOD $x\in X$ A UZAVRETÚ $A\not\ni x$.
HĽADÁME DISJUNKTNÉ $U,V\in\tau$: $x\in U$, $V\supseteq A$.
PODĽA PREDPOKLADU $X\setminus A=\bigcup\{W\mid W\in\tau,\ \bar{W}\subseteq X\setminus A\}$
ZVOĽME TAKÉ $W$, KTORÉ OBSAHUJE $x$, TJ.
$W\in\tau$, $x\in W\subseteq\bar{W}\subseteq X\setminus A$ $\Rightarrow$ $A\subseteq X\setminus\bar{W}$
STAČÍ POLOŽIŤ $U=W$, $V=X\setminus\bar{W}$. ZREJME $U\cap V=\emptyset$. □

16.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## $T_{3\frac{1}{2}}$ ÚPLNÁ REGULARITA

$(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓM $T_{3\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $x \notin A$ UZAVRETÁ $\exists\, \phi: X \to \mathbb{I} = \langle 0,1\rangle$ SPOJITÉ TAKÉ, ŽE $\phi(x)=0$, $\phi[A] \subseteq \{1\}$.

NA $\mathbb{I}$ MÁME METRIKU $\rho(x,y)=|x-y|$
DOKÁŽEME, ŽE KAŽDÝ METRICKÝ PRIESTOR $\mathbb{I}$ JE REGULÁRNY
NECH $x \in \mathbb{I}$, $x \notin A \subseteq \mathbb{I}$ UZAVRETÁ, TJ. $\bar{A}=A$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y) \mid y \in A\} = 0$

KEĎŽE $\bar{A}=A$ NUTNE PRE $x \notin A$ JE $\rho(x,A) > 0$
ZVOĽME $\varepsilon := \frac{1}{3}\rho(x,A)$ A POLOŽME
$U := \Omega(x,\varepsilon)$ A $V := \bigcup_{x\in A} \Omega(x,\varepsilon)$
ZREJME $U, V$ SÚ OTVORENÉ A DISJUNKTNÉ,
$x \in U$, $A \subseteq V$. □

$D \subseteq \mathbb{I}$ JE HUSTÁ (TJ. $\bar{D}=\mathbb{I}$) $\Leftrightarrow \forall a,b \in \mathbb{I}\ a<b\ \exists d \in D : a<d<b$.

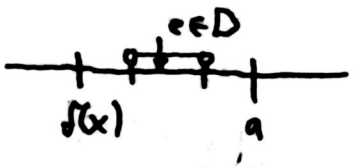
$\Rightarrow$) NECH PRE NEJAKÉ $a<b$ NEEXISTUJE $d \in D : a<d<b$.
ZVOĽME $U = \Omega\left(\frac{a+b}{2}, \frac{\rho(a,b)}{3}\right)$. ZREJME $U \cap D = \emptyset$
$\Rightarrow D \subseteq \mathbb{I} \setminus U \Rightarrow \bar{D} \subseteq \mathbb{I} \setminus U$, ČO JE SPOR. ↯

$\Leftarrow$) NECH $\exists x \in \mathbb{I} : x \notin \bar{D}$. KEĎŽE $\mathbb{I}$ JE REGULÁRNY,
EXISTUJÚ OTVORENÉ $U, V$ : $x \in U$, $\bar{D} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$
ZVOĽME $\varepsilon > 0$ : $\Omega(x,\varepsilon) \subseteq U$; POLOŽME $a = x-\varepsilon$, $b = x+\varepsilon$,
TJ. $\Omega(x,\varepsilon) = (a,b)$. ZREJME $\Omega(x,\varepsilon) \cap D = \emptyset$, ČO JE SPOR ↯

BUĎ $D \subseteq \mathbb{I} = \langle 0,1\rangle$ HUSTÁ, TJ. $\forall a,b \in \mathbb{I}\ a<b \exists d \in D : a<d<b$.
MAJME $(X,\tau)$ A OTVORENÉ $U_d \in \tau$ $\forall d \in D$.
NECH PRE $\forall d,e \in D$ $d<e$ JE $\overline{U_d} \subseteq U_e$.
POTOM $f : (X,\tau) \to \mathbb{I}$ $x \mapsto \inf\{d \in D \mid x \in U_d\}$
JE SPOJITÁ FUNKCIA.

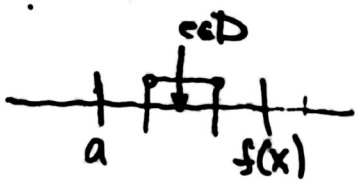
$\mathbb{I}$ MÁ SUBBÁZU $\{\{x \in \mathbb{I} \mid x<a\}, \{x \in \mathbb{I} \mid x>a\},\ a \in \mathbb{I}\}$
TAKŽE STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE KAŽDÁ
$f^{-1}[\langle 0,a)]$ AJ $f^{-1}[(a,1\rangle]$ JE OTVORENÁ V $X$.

$f(x)<a \Leftrightarrow \inf\{d \in D \mid x \in U_d\} < a \Leftrightarrow$




$\Leftrightarrow \exists e \in D : e<a : x \in U_e \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \bigcup\{U_e : e \in D, e<a\}$
TJ. $f^{-1}[\langle 0,a)] = \bigcup\{U_e \mid e \in D, e<a\} \in \tau$.

$f(x)>a \Leftrightarrow \inf\{d \in D \mid x \in U_d\} > a \Leftrightarrow$




$\Leftrightarrow \forall e \in D : e>a : x \notin \overline{U_e} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \notin \bigcap\{\overline{U_e} \mid e \in D, e>a\}$
$\Leftrightarrow x \in \mathbb{I} \setminus \bigcap\{\overline{U_e} \mid e \in D, e>a\}$
TJ. $f^{-1}[(a,1\rangle] = \mathbb{I} \setminus \bigcap\{\overline{U_e} \mid e \in D, e>a\} \in \tau$. □

**RELÁCIA $\ll$** PRE $U,V \in \tau$ PÍŠEME $U \ll V$
$\Leftrightarrow$ PRE NEJAKÚ HUSTÚ $D \subseteq \mathbb{I}$ EXISTUJÚ OTVORENÉ
$U_d \in \tau$ $\forall d \in D$ : $U = U_0$, $V = U_1$, $d<e \Rightarrow \overline{U_d} \subseteq U_e$.

$\ll$ JE NAJVÄČŠIA INTERPOLATÍVNA RELÁCIA
OBSIAHNUTÁ V $\prec = \{(U,V) \in \tau \times \tau \mid \overline{U} \subseteq V\}$.

16.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

NASLEDUJÚCE TVRDENIA SÚ EKVIVALENTNÉ:

(1) $(X,\tau)$ JE ÚPLNE REGULÁRNY

(2) PRE $\forall x \in X$ A KAŽDÚ OTVORENÚ $U \ni x$ EXISTUJE OTVORENÁ $V \ni x : V \prec\prec U$.

(3) $\forall U \in \tau : U = \bigcup \{V \mid V \in \tau,\ V \prec\prec U\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2): NECH $x \in U$ OTVORENÁ, TJ. $x \notin A = X \setminus U$. PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJE SPOJITÁ $\phi : (X,\tau) \to \mathbb{I}$ TAKÁ, ŽE $\phi(x) = 0$, $\phi[A] \subseteq \{1\}$.

POLOŽÍME $D = \mathbb{I}$ A PRE KAŽDÉ $d$: $\boxed{U_d = \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1+d}{2}\rangle)}$

KEĎŽE $\phi$ JE SPOJITÉ, SÚ AJ $U_d$ OTVORENÉ.

$d < e \Rightarrow \exists f \in D : d < f < e$

$U_d \subseteq U_f \Rightarrow \overline{U_d} \subseteq \overline{\phi^{-1}[\langle 0; \frac{1+f}{2})]} \overset{\text{zo spojitosti}}{\subseteq} \phi^{-1}[\overline{\langle 0; \frac{1+f}{2})}] =$

$= \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1+f}{2}\rangle] \subseteq \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1+e}{2})] = U_e$,

TJ. $\overline{U_d} \subseteq U_e$.

POLOŽÍME $V = U_0 = \phi^{-1}[\langle 0, \frac{1}{2})]$. $\phi(x) = 0 \Rightarrow x \in V$.

$\phi[A] \subseteq \{1\} \Rightarrow A \subseteq \phi^{-1}[\phi[A]] \subseteq \phi^{-1}[\{1\}]$,

TAKŽE $X \setminus \phi^{-1}[\{1\}] \subseteq X \setminus A = U$,

TJ. $\phi^{-1}[\mathbb{I} \setminus \{1\}] \subseteq U$, TJ.

$U_1 = \phi^{-1}[\langle 0; 1)] \subseteq U$.

KEĎ POLOŽÍME $U_1 := U$, NIČ NEPOKAZÍME, A HNEĎ VIDÍME, ŽE VEĎ $x \in V \prec\prec U$.

(2)⇒(3) VIEME, ŽE PRE KAŽDÚ OTVORENÚ $U \ni x$ EXISTUJE OTVORENÁ $V \ni x : V \ll U$.
CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE PRE $\forall U \in \tau : U = \bigcup \{V \mid V \in \tau, V \ll U\}$.
MAJME $U$ OTVORENÚ A PRE KAŽDÉ $x \in U$ NECH $V_x \in \tau$, $x \in V_x \ll U$. POTOM
$U \supseteq \bigcup \{V \mid V \in \tau, V \ll U\} \supseteq \bigcup_{x \in U} V_x \supseteq U$.

(3)⇒(1): MÁME $x \in X$ A UZAVRETÚ $A \not\ni x$.
CHCEME NÁJSŤ SPOJITÚ $\phi : X \to \mathbb{I}$ TAKÚ, ŽE $\phi(x) = 0$ A $\phi[A] \subseteq \{1\}$.
ZREJME $U = X \setminus A$ JE OTVORENÁ A OBSAHUJE $x$.
PODĽA PREDPOKLADU $U = \bigcup \{V \mid V \in \tau, V \ll U\}$.
NECH $W$ JE TAKÁ OTVORENÁ MNOŽINA, KTORÁ OBSAHUJE $x$ A ZÁROVEŇ $W \ll U$.
TO ZNAMENÁ, ŽE EXISTUJE $D \subseteq \mathbb{I}$ HUSTÁ A EXISTUJÚ A OTVORENÉ $U_d$ $\forall d \in D$ TAKÉ, ŽE
$U_0 = W$, $U_1 = U$, $\forall d, e \in D : d < e \Rightarrow \overline{U_d} \subseteq U_e$.
DEFINUJEME $\phi : X \to \mathbb{I}$ AKO
$\phi(z) = \inf \{d \in D : z \in U_d\}$.
AKO SME UŽ VYŠŠIE UKÁZALI, $\phi$ JE SPOJITÁ.
$x \in W = U_0 \Rightarrow \phi(x) = 0$.
ĎALEJ $\forall d \in D$ JE $U_d \subseteq U_1 = U$
$\Rightarrow \forall z \in A = X \setminus U$ JE $\{d \in D \mid z \in U_d\} = \emptyset$
$\Rightarrow \phi(z) = \inf \emptyset = 1$.
$\Rightarrow \phi[A] \subseteq \{1\}$. □

16.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

**$T_4$ NORMALITA** $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓM $T_4$ (JE NORM.)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ $A,B$ EXISTUJÚ DISJUNKTNÉ OTVORENÉ: $U,V\in\tau$ : $A\subseteq U$, $B\subseteq V$.

**URYSOHNOVA LEMA** : PRIESTOR $(X,\tau)$ JE NORMÁLNY

$\Leftrightarrow$ $\forall$ DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ $A,B$ EXISTUJE SPOJITÉ ZOBRAZENIE $\phi:(X,\tau)\to\mathbb{I}$ : $\phi[A]\subseteq\{0\}$, $\phi[B]\subseteq\{1\}$.

$\Rightarrow$) NECH $A,B$ SÚ DISJUNKTNÉ A UZAVRETÉ.
PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJÚ DISJUNKTNÉ OTVORENÉ $U,V\in\tau$: $A\subseteq U$, $B\subseteq V$

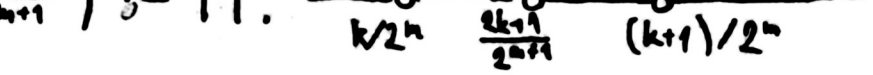
POLOŽME $U(0):=U$, $U(1):=X\setminus B$

OBE SÚ OTVORENÉ A $U\cap V=\emptyset \Rightarrow U\subseteq X\setminus V \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{U}\subseteq X\setminus V$ A $B\subseteq V \Rightarrow X\setminus V\subseteq X\setminus B$, TAKŽE $\overline{U}\subseteq X\setminus B$.

PREDPOKLADAJME, ŽE MÁME DEFINOVANÉ $U\left(\frac{k}{2^m}\right)$ PRE $0\le k\le 2^m$.

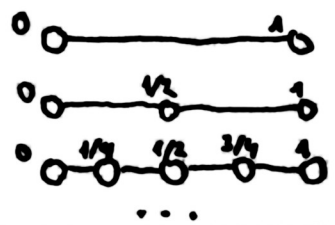
VEZMIME SI $0\le k<2^m$. KEĎŽE
$\overline{U\left(\frac{k}{2^m}\right)}\subseteq U\left(\frac{k+1}{2^m}\right)$, SÚ $\overline{U\left(\frac{k}{2^m}\right)}$ A $X\setminus U\left(\frac{k+1}{2^m}\right)$
UZAVRETÉ A DISJUNKTNÉ $\Rightarrow$ EXISTUJÚ OTVORENÉ $M,N\in\tau$:
$M\cap N=\emptyset$ A $\overline{U(k/2^m)}\subseteq M$, $X\setminus U((k+1)/2^m)\subseteq N$.

POLOŽME $U\left(\frac{2k+1}{2^{m+1}}\right):=M$.




$M\cap N=\emptyset \Rightarrow M\subseteq X\setminus N \Rightarrow \overline{M}\subseteq X\setminus N\subseteq U\left(\frac{k+1}{2^m}\right)$,

TAKŽE MÁME $\overline{U(k/2^m)}\subseteq M$ A $\overline{M}\subseteq U((k+1)/2^m)$.




TAKTO DEFINUJEME OTVORENÉ $U(d)$ PRE HUSTÚ $D=\left\{\frac{k}{2^m}\mid m\ge 0,\ 0\le k\le 2^m\right\}$

POLOŽME $\phi(x) := \inf\{d \mid d \in D,\ x \in U(d)\}$.

AKO SME UŽ RAZ UKÁZALI, TAKTO DEFINOVANÁ $\phi$ JE SPOJITÁ.

KEĎŽE $U(0) = U$, PRE $\forall x \in U$ JE $\phi(x) = 0$. POTOM $A \subseteq U$
$\Rightarrow \phi[A] \subseteq \{0\}$.

NA DRUHEJ STRANE $\forall d \in D: U(d) \subseteq U(1) = X \setminus B$,
TAKŽE PRE $\forall x \in B$ JE $\{d \mid d \in D,\ x \in U(d)\} = \emptyset$
$\Rightarrow \phi(x) = 1 \Rightarrow \phi[B] \subseteq \{1\}$.

$\Leftarrow$) MAJME DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ $A, B$.
PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJE SPOJITÉ $\phi: (X, \tau) \to \mathbb{I}$
TAKÉ, ŽE $\phi[A] \subseteq \{0\}$, $\phi[B] \subseteq \{1\}$.
POLOŽME $U = \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1}{2})]$, $V = \phi^{-1}[(\frac{1}{2}; 1\rangle]$
ZO SPOJITOSTI DOSTÁVAME, ŽE $U, V$ SÚ OTVORENÉ.
NAVYAC $x \in A \Rightarrow \phi(x) = 0 \Rightarrow x \in \phi^{-1}[\{0\}] \Rightarrow x \in \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1}{2})]$
TAKŽE $A \subseteq U$. PODOBNE $B \subseteq V$.
TO, ŽE $U, V$ SÚ DISJUNKTNÉ VYPLÝVA Z TOHO, ŽE
$\langle 0; \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}; 1\rangle = \emptyset$. □

KAŽDÝ METRIZOVATEĽNÝ PRIESTOR JE NORMÁLNY.
PRE DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ $A, B$ STAČÍ POLOŽIŤ

$$\phi(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}.$$

16.04.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## LEMMA O ODDELOVACÍCH AXIÓMOCH:

$T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_3 \& T_1 \Leftarrow T_{3\frac{1}{2}} \& T_1 \Leftarrow T_4 \& T_1$

$T_0 \Leftarrow T_1$:

$(X,\tau)$ SPĹŇA $T_1 \Leftrightarrow \forall x,y \in X\ x \neq y\ \exists$ OTVORENÁ $U \in \tau : x \notin U \ni y$

$\Rightarrow x \notin U \ni y \vee x \in U \not\ni y$, TJ. $(X,\tau)$ SPĹŇA AJ $T_0$

$T_0 \not\Leftarrow T_1$:

MÁME $(X,\leq)$ USPORIADANÚ A UVÁŽIME KVAZIDISKRÉTNU TOPOLÓGIU $\tau = \{U \subseteq X \mid U = \uparrow U\}$

PREDPOKLADÁME, ŽE $\tau$ NIE JE DISKRÉTNA TOPOLÓGIA, TJ. $\exists U \subseteq X : U \notin \tau$, TJ. $U \neq \uparrow U$.

KEĎŽE $\downarrow(X \setminus \uparrow M) = X \setminus \uparrow M$ A $\uparrow(X \setminus \downarrow M) = X \setminus \downarrow M$ UZAVRETÉ SÚ PRÁVE KLESAJÚCE $A$, TJ. $A = \downarrow A$,

A UZÁVER $\overline{M} = \downarrow M$.

ZREJME $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Leftrightarrow \downarrow x = \downarrow y \Rightarrow x = y$

PRETOŽE V USPORIADANEJ $(X,\leq)$ JE $x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$.

VIDÍME, ŽE $(X,\tau)$ SPĹŇA $T_0$.

NA DRUHEJ STRANE $U \neq \uparrow U \Rightarrow \exists x,y \in X\ x \neq y : x \leq y$

V OPAČNOM PRÍPADE BY $\leq = id_X$ A POTOM BY PRE $\forall U \subseteq X$ BOLO $U = \uparrow U = \downarrow U$.

VEZMIME SI $x \neq y$, $x \leq y$. POTOM $\overline{\{y\}} = \downarrow y \ni x$

$\Rightarrow \overline{\{y\}} \neq \{y\}$, TAKŽE $\tau$ NESPĹŇA $T_1$.

$T_1 \Leftarrow T_2$:

NECH PRE $\forall x,y \in X\ x \neq y$ EXISTUJÚ $U, V \in \tau$:
$U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$.

POTOM $x \notin V \ni y$, TAKŽE $(X, \tau)$ SPĹŇA AJ $T_1$.

$T_1 \not\Rightarrow T_2$:

NECH $X$ JE NEKONEČNÁ, UVAŽUJME NA $X$
KOFINÁLNU TOPOLÓGIU $\tau$, TJ. OTVORENÉ
MNOŽINY SÚ PRÁVE $\emptyset$ A DOPLNKY KONEČNÝCH
MNOŽÍN. UZAVRETÉ SÚ $X$ A VŠETKY KONEČNÉ MN.
$(X, \tau)$ ZREJME SPĹŇA $T_1$, PRETOŽE
$\forall x \in X : \overline{\{x\}} = \{x\}$.
NA DRUHEJ STRANE $(X, \tau)$ NESPĹŇA $T_2$.
NECH $x \neq y$ A $U, V \in \tau : x \in U, y \in V$.
ZREJME $U, V \neq \emptyset \Rightarrow U = X \setminus K$, $V = X \setminus L$,
KDE $K, L$ SÚ KONEČNÉ.
$\Rightarrow U \cap V = X \setminus K \cap X \setminus L = X \setminus (K \cup L) \neq \emptyset$.

$T_2 \Leftarrow T_3 \,\&\, T_1$:

MAJME $(X, \tau)$, KTORÉ SPĹŇA $T_1$,
TAKŽE PRE $\forall x \in X$ JE $\overline{\{x\}} = \{x\}$, TJ. $\{x\}$ JE UZAVRETÁ
A $T_3$, TJ. $\forall x \in X$ A UZAVRETÚ $A \not\ni x$ $\exists U, V \in \tau$:
$U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $A \subseteq V$.

PRE $x \neq y$, ZVOĽME $A = \{y\}$ AKO UZAVRETÚ.
HNEĎ DOSTÁVAME, ŽE $\exists U, V \in \tau : U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$,
TAKŽE $(X, \tau)$ SPĹŇA $T_2$.

16.06.2008 Mo
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

$T_3 \left(\& T_1\right) \Leftarrow T_{3\frac{1}{2}} \left(\& T_1\right)$ :

MAJME $x \in X$ A UZAVRETÚ $A \not\ni x$.
PODĽA PREDPOKLADU $\exists$ SPOJITÉ $\phi : (X,\tau) \to \mathbb{I}$ :
$\phi(x) = 0$, $\phi[A] \subseteq \{1\}$.
POLOŽME $U = \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1}{2})]$, $V = \phi^{-1}[(\frac{1}{2}; 1\rangle]$.
ZO SPOJITOSTI : $U, V$ SÚ OTVORENÉ
KEĎŽE $\langle 0; \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1\rangle = \emptyset$, NUTNE TIEŽ $U \cap V = \emptyset$
NAKONIEC $\phi(x) = 0 \Rightarrow x \in \phi^{-1}[\{0\}] \subseteq \phi^{-1}[\langle 0; \frac{1}{2})] = U$
$x \in A \Rightarrow \phi(x) = 1 \Rightarrow x \in \phi^{-1}[(\frac{1}{2}; 1\rangle] \Rightarrow A \subseteq \phi^{-1}[(\frac{1}{2}; 1\rangle] = V$.

$T_{3\frac{1}{2}} \& T_1 \Leftarrow T_4 \& T_1$ :

MAJME $x \in X$ A UZAVRETÚ $B \not\ni x$.
PODĽA $T_1$ JE $\overline{\{x\}} = \{x\}$, TAKŽE $A = \{x\}$ JE UZAVRETÁ.
$B \not\ni x \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
Z URYSOHNOVEJ LEMMY DOSTÁVAME
SPOJITÉ $\phi : (X,\tau) \to \mathbb{I}$ TAKÉ, ŽE $\phi[A] \subseteq \{0\}$, $\phi[B] \subseteq \{1\}$,
T.J. $\phi(x) = 0$, $\phi[B] \subseteq \{1\}$.
$\Rightarrow (X,\tau)$ SPĹŇA $T_{3\frac{1}{2}}$.

FAKTORIZÁCIA NEZACHOVÁVA ŽIADEN Z ODDELOVACÍCH AX.

UVAŽUJME $q : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ $q(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

NA $\{0,1\}$ MÁME TOPOLÓGIU $\Theta = \{U \mid q^{-1}[U] \in \tau\}$.

ZREJME $\emptyset, \{0,1\} \in \Theta$, ALE $\{0\}$, ANI $\{1\}$ NEPATRIA DO $\Theta$, PRETOŽE $q^{-1}[\{0\}]$, ANI $q^{-1}[\{1\}]$ NIE JE OTVORENÁ V $\mathbb{R}$.

V TOPOLÓGII $(\{0,1\}, \Theta)$ JE $\overline{\{0\}} = \overline{\{1\}} = \{0,1\}$, ALE $0 \neq 1$, TAKŽE NIE JE ZACHOVANÝ ANI AXIÓM $T_0$.

SUMA ZACHOVÁVA VŠETKY $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$.

NAPR. PRE $T_{3\frac{1}{2}}$ : NECH $(X_i, \tau_i)$ $i \in J$ SPĹŇAJÚ $T_{3\frac{1}{2}}$.

NA $X = \coprod_{i \in J} X_i = \bigcup_{i \in J} X_i \times \{i\}$ MÁME <u>BÁZU</u> $\tau$ DEFINOVANÚ AKO $\{\iota_j[U] \mid j \in J, U \in \tau_j\}$, KDE $\iota_j : X_j \to \coprod_{i \in J} X_i$, $\iota_j(x) = (x, j)$.

TJ. $U \in \tau \Leftrightarrow U = \bigcup_{i \in J} \iota_i[U_i]$, KDE $U_i \in \tau_i$ $\forall i \in J$.

TOTIŽ PRE SYSTÉM $V_k \in \tau_j$, $k \in K$ JE $\bigcup_{k \in K} \iota_j[V_k] = \iota_j[\bigcup_{k \in K} V_k] = \iota_j[V]$, KDE $V = \bigcup_{k \in K} V_k \in \tau_j$

PRETO STAČÍ INDEXOVAŤ CEZ $i \in J$.

MÁME BOD $x \in X$ A UZAVRETÚ $A \not\ni x$.

NECH $x = (y, j)$ PRE NEJAKÉ $j \in J$, $y \in X_j$

POLOŽÍME $A_i = \iota_i^{-1}[A]$.

ZREJME $A_i$ SÚ UZAVRETÉ V $(X_i, \tau_i)$,

PRETOŽE $X_i \setminus A_i = X_i \setminus \iota_i^{-1}[A] = \iota_i^{-1}[X \setminus A]$

A KEĎŽE $\iota_i$ JE SPOJITÉ, MUSÍ BYŤ $X_i \setminus A_i$ OTVORENÁ.

PODĽA PREDPOKLADU $\exists$ SPOJITÉ $\phi_j : X_j \to \mathbb{I}$ TAKÉ, ŽE $\phi_j(y) = 0$, $\phi_j[A_j] \subseteq \{1\}$.

STAČÍ DEF. $\phi : X \to \mathbb{I} : \phi((z,j)) = \phi_j(z)$ A V OSTATNÝCH $\phi((z,i)) = 1$. $(i \neq j)$

16.06.2008 M.
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

VETA: VLASTNOSTI $T_0, T_1, T_2, T_3$ A $T_{3\frac{1}{2}}$ SA ZACHOVÁVAJÚ V PODPRIESTOROCH A PRODUKTOCH.

$T_0$ SA ZACHOVÁVA V PODPRIESTOROCH:
MAJME $(X,\tau)$, KTORÝ SPĹŇA $T_0$ A $Y \subseteq X$.
PRIESTOR $(Y, \tau|Y)$ DEFINUJEME AKO
$\tau|Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ .. NAJMENŠIA TOPOLÓGIA
⌒ TAKÁ, ŽE VLOŽENIE $j: Y \subseteq X$ JE SPOJITÉ. $(j^{-1}[U] = U \cap Y)$
MAJME $x, y \in Y$ $x \neq y$. PODĽA PREDPOKLADU
$\exists U \in \tau : x \notin U \ni y \vee x \in U \not\ni y \Rightarrow$
$x \notin U \cap Y \ni y \vee x \in U \cap Y \not\ni y$, KDE $U \cap Y \in \tau|Y$.

$T_0$ SA ZACHOVÁVA V PRODUKTOCH:
NECH $(X_i, \tau_i), i \in J$ SPĹŇAJÚ $T_0$.
UVAŽUJME PRIESTOR $(X, \tau)$, $X = \prod_{i \in J} X_i$, A JEHO SUBBÁZU
$\{p_j^{-1}[U] \mid j \in J, U \in \tau_j\}$ .. NAJMENŠIA TOPOLÓGIA
⌒ TAKÁ, ŽE PROJEKCIE $p_j: \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ SÚ SPOJITÉ.
NECH $(x_i)_{i \in J} \neq (y_i)_{i \in J}$, T.J. $\exists j \in J : x_j \neq y_j$.
PODĽA PREDPOKLADU $\exists U_j \in \tau_j : x_j \notin U_j \ni y_j \vee x_j \in U_j \not\ni y_j$.
VEZMITE $U = p_j^{-1}[U_j] \in \tau$.
ZREJME $(x_i)_{i \in J} \notin U \ni (y_i)_{i \in J} \vee (x_i)_{i \in J} \in U \not\ni (y_i)_{i \in J}$.

PODOBNE $T_1$ AJ $T_2$.

REGULARITA $T_3$ (ÚPLNÁ REGULARITA $T_{3\frac{1}{2}}$)
SA ZACHOVÁVA V PODPRIESTOROCH:

NECH $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓM $T_3$ (RESP. $T_{3\frac{1}{2}}$), $Y \subseteq X$.
DOKÁŽTE, ŽE TIEŽ $(X,\tau|Y)$ SPĹŇA $T_3$ (RESP. $T_{3\frac{1}{2}}$).
NECH $x \in Y$, $x \notin A$ UZAVRETÁ V $(Y,\tau|Y)$.
$Y \setminus A \in \tau|Y \Rightarrow \exists W \in \tau : Y \setminus A = W \cap Y \Rightarrow A = Y \setminus (W \cap Y) =$
$= (X \setminus W) \cap Y$. POLOŽTE $B = X \setminus W$. MÁME $A = B \cap Y$.
B JE UZAVRETÁ V $(X,\tau)$ A ZREJME $x \notin B$.

REGULARITA: PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJÚ $U, V \in \tau$:
$U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $B \subseteq V$.
POTOM $U \cap Y, V \cap Y \in \tau|Y$, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$,
$x \in U \cap Y$, $A = B \cap Y \subseteq V \cap Y$.

ÚPLNÁ REGULARITA: PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJE
SPOJITÉ $\phi : (X,\tau) \to \mathbb{I} : \phi(x) = 0$, $\phi[B] \subseteq \{1\}$.
UVAŽUJME RESTRIKCIU $\phi|Y : Y \to \mathbb{I} : \phi_Y \circ j = \phi$,
KDE $j$ JE VLOŽENIE $Y \subseteq X$.
ZREJME $\phi|Y$ JE SPOJITÉ, PRETOŽE PRE KAŽDÚ
OTVORENÚ $I \subseteq \mathbb{I}$ JE $\phi|Y^{-1}[I] = \phi^{-1}[I] \cap Y$.
NAVIAC $\phi|Y(x) = \phi(x) = 0$ A $\phi|Y[A] = \phi[B \cap Y] \subseteq \{1\}$.

REGULARITA $T_3$ (ÚPLNÁ REGULARITA $T_{3\frac{1}{2}}$)
SA ZACHOVÁVA V PRODUKTOCH

NECH $(X_i, \tau_i)$ SPĹŇAJÚ $T_3$ (RESP. $T_{3\frac{1}{2}}$) $\forall i \in J$.
UVAŽUJME $(X,\tau)$, KDE $X = \prod_{i \in J} X_i$ A $\tau$
JE URČENÉ SUBBÁZOU $\{ p_j^{-1}[U] \mid j \in J,\ U \in \tau_j \}$.

16.06.2008 Po
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

NECH $x \in X$, $A \subseteq X$ JE UZAVRETÁ, $x \notin A$.
POTOM $U = X \setminus A$ JE OTVORENÁ, $x \in U$.
KEĎŽE $U$ JE ZJEDNOTENÍM NEJAKÝCH KONEČNÝCH PRIENIKOV PRVKOV V SUBBÁZE, ZVOĽME TAKÝ KONEČNÝ PRIENIK, KTORÝ OBSAHUJE $x$.
TJ. ZVOĽME INDEXY $i_1, \dots, i_n \in J$
A PRVKY $U_1, \dots, U_n$, $U_j \in \tau_{i_j}$ $\forall j \in [n]$
A $x \in W = \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}[U_j] \subseteq U$. $\Rightarrow x_{i_j} \in U_j$ $\forall j \in [n]$

REGULARITA: $\forall j \in [n]$ JE $(X_{i_j}, \tau_{i_j})$ REGULÁRNY,
$U_j \in \tau_{i_j}$, TAKŽE $U_j = \bigcup \{V \mid V \in \tau_{i_j}, \overline{V} \subseteq U_j\}$.
ZVOĽME PRETO $V_j \in \tau_{i_j}$ : $x_{i_j} \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j$.
POLOŽME $M := \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}[V_j]$, $N := X \setminus \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}[\overline{V_j}]$
KEĎŽE $x_{i_j} \in V_j$ $\forall j \in [n]$, NUTNE $x \in M$.
ĎALEJ NECH $y \in A$. POTOM $y \notin X \setminus A = U$
$\Rightarrow y \notin W$ A VZHĽADOM K TOMU, ŽE $\overline{V_j} \subseteq U_j$,
NUTNE $\bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}[\overline{V_j}] \subseteq W \Rightarrow y \in N$.
VIDÍME, ŽE $A \subseteq N$.
ZO SPOJITOSTI PROJEKCIÍ $p_{i_j}$ TAKTIEŽ DOSTÁVAME, ŽE $M, N$ SÚ OTVORENÉ,
A KONEČNE TIEŽ ZREJME PLATÍ, ŽE $M \cap N = \emptyset$.

ÚPLNÁ REGULARITA: PRE $\forall j \in [n]$ $(X_{ij}, \tau_j)$ SPĹŇA AXIÓM $T_{3\frac{1}{2}}$, $U_j \in \tau_{ij}$, $x_{ij} \in U_j$
$\Rightarrow$ $A_j = X_{ij} \setminus U_j$ JE UZAVRETÁ V $(X_{ij}, \tau_j)$ A NEOBSAHUJE $x_{ij}$.

PODĽA PREDPOKLADU EXISTUJE SPOJITÉ ZOBRAZENIE $\phi_j : (X_{ij}, \tau_j) \to \mathbb{I}$ TAKÉ, ŽE $\phi_j(x_{ij}) = 0$, $\phi_j[A_j] \subseteq \{1\}$.

DEFINUJME $\phi : X \to \mathbb{I}$ AKO
$\phi(y) = \max\{\phi_1(y_{i_1}), \dots, \phi_n(y_{i_n})\}$.

ZREJME $\phi(x) = 0$.
KEĎ $y \in A$, TJ. $y \notin W = \bigcap_{j=1}^{n} P_{ij}^{-1}[U_j]$ $\Rightarrow$
$\exists k \in [n]$: $y_{i_k} \notin U_k$ $\Rightarrow$ $y_{i_k} \in A_k$ $\Rightarrow$ $\phi_k(y_{i_k}) = 1$ $\Rightarrow$ $\phi(y) = 1$.
VIDÍME, ŽE TIEŽ $\phi[A] \subseteq \{1\}$.

DOKÁŽEME, ŽE $\phi$ JE SPOJITÉ:
$\phi(y) > a \Leftrightarrow \exists k \in [n] : \phi_k(y_{i_k}) > a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists k \in [n] : y_{i_k} \in \phi_k^{-1}[(a,1>] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists k \in [n] : y \in P_{i_k}^{-1}[\phi_k^{-1}[(a,1>]] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in \bigcup P_{i_k}^{-1}[\phi_k^{-1}[(a,1>]]$

$\phi(y) < a \Leftrightarrow \forall k \in [n] : \phi_k(y_{i_k}) < a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in \bigcap P_{i_k}^{-1}[\phi_k^{-1}[\langle 0; a)]]$.

□

17.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## TICHONOVA VETA O VLOŽENÍ: PRIESTOR $(X,\tau)$ JE ÚPLNE REGULÁRNY ($T_{3\frac{1}{2}}$) A $T_1$ $\Leftrightarrow$ JE HOMEOMORFNÝ S NEJAKÝM PODPRIESTOROM KOCKY $\mathbb{I}^M$ PRE DOSTATOČNE VEĽKÚ MNOŽINU $M$.

$\Leftarrow$) PRIESTOR $\mathbb{I}$ JE ZREJME ÚPLNE REGULÁRNY A $T_1$. KEĎŽE $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ SA ZACHOVÁVAJÚ V PODPRIESTOROCH A PRODUKTOCH, NUTNE KAŽDÝ PODPRIESTOR $(Y,\theta) \subseteq \mathbb{I}^M$ SPĹŇA AXIÓM $T_{3\frac{1}{2}}$ & $T_1$.
KEĎ JE $(X,\tau)$ HOMEOMORFNÝ S $(Y,\theta)$, POTOM ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓMY $T_{3\frac{1}{2}}$ & $T_1$.

$\Rightarrow$) PREDPOKLADAJME, ŽE $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓMY $T_{3\frac{1}{2}}$ & $T_1$.
UVAŽUJME MNOŽINU $\boxed{M = \{\phi : X \to \mathbb{I} \text{ JE SPOJITÉ}\}}$.
POTOM EXISTUJE PRÁVE JEDNO SPOJITÉ ZOBRAZENIE $\mu : X \to \mathbb{I}^M$ TAKÉ, ŽE $P_\phi \circ \mu = \phi$ PRE $\forall \phi \in M$.
$\mu(x) = (y_\phi)_{\phi \in M}$, KDE $y_\phi = \phi(x)$.

NECH $x, y \in X$, $x \neq y$. POTOM $T_1 \Rightarrow \{y\}$ JE UZAVRETÁ, A KEĎŽE $x \notin \{y\}$, $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow$ EXISTUJE SPOJITÉ $\phi : X \to \mathbb{I}$ TAKÉ, ŽE $\phi(x) = 0$, $\phi[\{y\}] \subseteq \{1\}$, T.J. $\phi(y) = 1$.
$\Rightarrow \mu(x) \neq \mu(y)$, PRETOŽE $P_\phi \circ \mu(x) = \phi(x) \neq \phi(y) = P_\phi \circ \mu(y)$.

VIDÍME, ŽE $\mu$ JE PROSTÉ ZOBRAZENIE $\Rightarrow$ JEHO RESTRIKCIA JE BIJEKCIA MEDZI PRIESTORMI $X$ A $\mu[X]$.

DOKÁŽME, ŽE INVERZNÉ ZOBRAZENIE $f : \mu[X] \to X$ JE TIEŽ SPOJITÉ, T.J. ŽE PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ $A$ V $X$ JE $f^{-1}[A] = \mu[A]$ UZAVRETÁ V $\mu[X]$.

OZNAČME $U = \mathcal{M}[X] \setminus \mathcal{M}[A]$. STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE PRE KAŽDÉ $y \in U$ JE $U$ OKOLÍE $y$ V $\mathcal{M}[X]$.

$y \in U = \mathcal{M}[X \setminus A] \Rightarrow \exists x \in X \setminus A : y = \mathcal{M}(x)$

KEĎŽE $(X, \tau)$ SPĹŇA $T_{3\frac{1}{2}}$, EXISTUJE SPOJITÉ $\phi : (X, \tau) \to \mathbb{I}$ TAKÉ, ŽE $\phi(x) = 0$, $\phi[A] \subseteq \{1\}$.

POLOŽME $W = P_\phi^{-1}[\langle 0; \frac{1}{2})]$.

ZO SPOJITOSTI PROJEKCIE $P_\phi : \mathbb{I}^\tau \to \mathbb{I}$ DOSTÁVAME, ŽE $W$ JE OTVORENÁ V $\mathbb{I}^\tau$.

VIDÍME, ŽE $y = \mathcal{M}(x) \in W$, PRETOŽE

$P_\phi(y) = P_\phi \circ \mathcal{M}(x) = \phi(x) = 0 \in \langle 0; \frac{1}{2})$.

NECH $\mathcal{M}(z) \in W$, T.J. $P_\phi \circ \mathcal{M}(z) = \phi(z) \in \langle 0; \frac{1}{2})$.

POTOM $\phi(z) \neq 1 \Rightarrow z \notin A \Rightarrow \mathcal{M}(z) \notin \mathcal{M}[A]$

$\Rightarrow \mathcal{M}(z) \in U$.

VIDÍME, ŽE $y \in \mathcal{M}[X] \cap W \subseteq U$, PRIČOM

$\mathcal{M}[X] \cap W$ JE OTVORENÁ V $\mathcal{M}[X]$

$\Rightarrow U$ JE OKOLÍE BODU $y$ V $\mathcal{M}[X]$.

TÝM PÁDOM JE $U$ OTVORENÁ $\Rightarrow$

$\mathcal{M}[A]$ JE UZAVRETÁ V $\mathcal{M}[X]$. $\square$

17.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## KOMPAKTNOSŤ

**POKRYTIE** TOP. PRIESTORU $(X,\tau)$ JE
$\mathcal{U}\subseteq\tau : \bigcup\mathcal{U}=X$.

**PODPOKRYTIE** $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U} : \bigcup\mathcal{V}=X$

POKRYTIE $Y\subseteq X$ JE $\mathcal{U}\subseteq\tau : \bigcup\mathcal{U}\supseteq Y$

$(X,\tau)$ JE **KOMPAKTNÝ** $\Leftrightarrow$
$\forall\,\mathcal{U}\subseteq\tau : \bigcup\mathcal{U}=X \;\exists$ KONEČNÉ $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U} : \bigcup\mathcal{V}=X$.
TJ. Z KAŽDÉHO POKRYTIA MOŽNO VYBRAŤ KONEČNÉ

**$Y\subseteq X$ JE KOMPAKTNÁ** $\Leftrightarrow$ $(Y,\tau|Y)$ JE KOMPAKTNÝ T. P.
$\Leftrightarrow$ Z KAŽDÉHO POKRYTIA $Y$ MOŽNO VYBRAŤ KONEČNÉ

$\Rightarrow$) $\mathcal{U}\subseteq\tau$, $\bigcup\mathcal{U}\supseteq Y$, POTOM $\mathcal{U}\cap Y=\{U\cap Y \mid U\in\mathcal{U}\}$
JE POKRYTIE TOP. PR. $(Y,\tau|Y) \Rightarrow \exists U_1,\dots,U_n\in\mathcal{U}$:
$\bigcup_{i=1}^n U_i\cap Y=Y \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n U_i\supseteq Y$.

$\Leftarrow$) $\mathcal{V}\subseteq\tau|Y : \bigcup\mathcal{V}=Y$, NECH $\mathcal{V}=\{V_i \mid i\in J\}$,
PRE $\forall i\in J$ JE $V_i=U_i\cap Y$ PRE NEJAKÉ $U_i\in\tau$.
$\bigcup_{i\in J} U_i\supseteq Y \Rightarrow \exists i_1,\dots,i_n\in J : \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}\supseteq Y$
$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}=\bigcup_{j=1}^n U_{i_j}\cap Y=Y$.

LEMMA: KAŽDÁ UZAVRETÁ MNOŽINA KOMPAKTNÉHO TOP. PR. $(X,\tau)$ JE KOMPAKTNÁ.

NECH $A \subseteq X$ JE UZAVRETÁ, $\mathcal{U} \subseteq \tau$ JE ĽUBOVOĽNÉ POKRYTIE $A$, POTOM $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ JE POKRYTIE
$\Rightarrow \exists$ KONEČNÉ PODPOKRYTIE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$
$\Rightarrow \mathcal{V} \setminus \{X \setminus A\}$ JE KONEČNÉ PODPOKRYTIE $A$. □

LEMMA: OBRAZ KOMPAKTNEJ PODMNOŽINY PRI SPOJITOM ZOBRAZENÍ JE KOMPAKTNÁ PODMNOŽINA.

NECH $f: (X,\tau) \to (Y,\Theta)$ JE SPOJITÉ, $A \subseteq X$ JE KOMPAKTNÁ. NECH $\mathcal{V} = \{V_j \in \Theta \mid j \in J\}$ JE ĽUBOVOĽNÉ POKRYTIE $f[A]$, TJ.
$\bigcup_{j \in J} V_j \supseteq f[A]$, $V_j \in \Theta \ \forall j \in J$.
POTOM $A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\bigcup_{j \in J} V_j] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[V_j]$
$\Rightarrow \mathcal{U} = \{f^{-1}[V_j] \mid j \in J\}$ JE POKRYTIE $A$ V $(X,\tau)$
$\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in J$: $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}[V_{i_j}] = f^{-1}[\bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}]$
$\Rightarrow f[A] \subseteq f[f^{-1}[\bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}]] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}$. □

## ALEXANDROVO LEMMA

NECH PRE NEJAKÚ SUBBÁZU $\mathcal{Y}$ TOPOLOGICKÉHO PRIESTORU $(X,\tau)$ PLATÍ, ŽE PRE KAŽDÉ POKRYTIE $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}$ VIEME VYBRAŤ KONEČNÉ PODPOKRYTIE, POTOM $(X,\tau)$ JE KOMPAKTNÝ.

17.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

POVIEME, ŽE POKRYTIE $\mathcal{U} \subseteq \tau$ JE VEĽKÉ, AK Z NEHO NEJDE VYBRAŤ KONEČNÉ PODPOKRYTIE.

**FAKT: EXISTUJE MAXIMÁLNE VEĽKÉ POKRYTIE $\mathcal{A}$,**
TJ. TAKÉ, ŽE PRE KAŽDÚ OTVORENÚ $U \notin \mathcal{A}$ UŽ NEJDE Z $\mathcal{A} \cup \{U\}$ VYBRAŤ KONEČNÉ PODPOKRYTIE.

MÁME $\mathcal{W}$ SYSTÉM VEĽKÝCH POKRYTÍ LINEÁRNE USPORIADANÝCH INKLÚZIOU $\subseteq$. POTOM $\bigcup \mathcal{W}$ JE VEĽKÉ POKRYTIE. AK BY SME NAŠLI KONEČNÉ PODPOKRYTIE $U_1, \dots, U_n \in \bigcup \mathcal{W}$, KDE $U_i \in \mathcal{U}_i \in \mathcal{W}$, POTOM $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_k$ PRE NAJVÄČŠIE $\mathcal{U}_k$ SPOMEDZI POKRYTÍ $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$, TJ. $\mathcal{U}_k$ NIE JE VEĽKÉ, ČO JE SPOR.

ZO ZORNOVEJ LEMY DOSTÁVAME EXISTENCIU MAXIMÁLNEHO VEĽKÉHO POKRYTIA $\mathcal{A}$.

POLOŽME $\mathcal{B} = \tau \setminus \mathcal{A}$.

**PLATÍ $U \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A} : U \cup U_1 \cup \dots \cup U_n = X$**

[$\Rightarrow$) $U \notin \mathcal{A}$, POTOM Z $\mathcal{A} \cup \{U\}$ MOŽNO VYBRAŤ KONEČNÉ (MAXIM. $\mathcal{A}$)
$\Leftarrow$) $U \notin \mathcal{A}$, PRETOŽE $\mathcal{A}$ JE VEĽKÉ POKRYTIE.]

**NECH $x \in X$.** $\bigcup \mathcal{A} \supseteq X \Rightarrow$ **$\exists U \in \mathcal{A} : x \in U$.**
KEĎŽE $\mathcal{Y}$ JE SUBBÁZA, $U$ JE NEJAKÉ ZJEDNOTENIE KONEČNÝCH PRIENIKOV MNOŽÍN Z $\mathcal{Y}$
$\Rightarrow \exists S_1, \dots, S_n \in \mathcal{Y} :$ **$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq U$.**

**ZREJME $\mathcal{B}$ JE UZAVRETÉ NA NADMNOŽINY A KONEČNÉ PRIENIKY.**

$U \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$, $V \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i = X \Rightarrow (U \cap V) \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i =$
$= \left(U \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i\right) \cap \left(V \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i\right) = X$.

AK $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{B} \Rightarrow S_1 \cap \dots \cap S_n \in \mathcal{B} \Rightarrow U \in \mathcal{B}$,
ČO JE SPOR S TÝM, ŽE $U \in \mathcal{A}$.
$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : S_i \in \mathcal{A}$.
KEĎŽE $x \in S_i$ A $x$ SME ZVOLILI ĽUBOVOĽNE,
MOŽNO $X$ POKRYŤ NIEKOĽKÝMI Z $\mathcal{A} \cap \mathcal{Y}$.
V TAKOM PRÍPADE ALE VIEME NÁJSŤ KONEČNÉ
PODPOKRYTIE $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$, ČO JE SPOR. $\lightning$
TO ZNAMENÁ, ŽE NEEXISTUJE ŽIADNE VEĽKÉ
POKRYTIE $\mathcal{A} \Rightarrow (X, \tau)$ JE KOMPAKTNÝ. □

## TICHONOVA VETA O SÚČINE

SÚČIN ĽUBOVOĽNÉHO SYSTÉMU KOMPAKTNÝCH MNOŽÍN
JE KOMPAKTNÝ.

NECH $(X_i, \tau_i)$ SÚ KOMPAKTNÉ TOPOLOGICKÉ PRIESTORY. $\forall i \in J$.
OZNAČME $(X, \tau)$ TOP. PRIESTOR $\prod_{i \in J} (X_i, \tau_i)$,
T. J. $X = \prod_{i \in J} X_i$, $\tau$ JE TOPOLÓGIA DEFINOVANÁ SUBBÁZOU
$\mathcal{Y} = \{ p_j^{-1}[U] \mid j \in J, U \in \tau_j \}$.

NECH $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}$ JE POKRYTIE $X$.
OZNAČME $\mathcal{U}_j = \{ U \in \tau_j \mid p_j^{-1}[U] \in \mathcal{U} \}$ PRE $\forall j \in J$.
DOKÁŽEME, ŽE $\exists k \in J : \bigcup \mathcal{U}_k \supseteq X_k$.

[NECH PRE $\forall i \in J \; \exists x_i \in X_i : x_i \notin \bigcup \mathcal{U}_i$.
$x = (x_i)_{i \in J} \in \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow \exists j \in J, U \in \tau_j : p_j^{-1}[U] \in \mathcal{U}$
A $x \in p_j^{-1}[U] \Rightarrow x_j \in U$, ČO JE SPOR,
PRETOŽE $U \in \mathcal{U}_j \Rightarrow x_j \in \bigcup \mathcal{U}_j$.]

NECH $\mathcal{V}$ JE KONEČNÉ PODPOKRYTIE $\mathcal{U}_k$.
POTOM $\{ p_k^{-1}[V] \mid V \in \mathcal{V} \}$ JE KONEČNÉ PODPOKR. $\mathcal{U}$. □

17.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

LEMMA: V HAUSDORFFOVOM PRIESTORE JE KAŽDÁ KOMPAKTNÁ PODMNOŽINA UZAVRETÁ.

NECH $(X,\tau)$ SPĹŇA AXIÓM $T_2$ A $A \subseteq X$ JE KOMPAKTNÁ.
NECH $x \in X \setminus A$. PRE KAŽDÉ $a \in A$, JE $x \neq a \Rightarrow$ EXISTUJÚ OTVORENÉ $U_a, V_a \in \tau$: $U_a \cap V_a = \emptyset$, $x \in U_a$, $a \in V_a$.
ZREJME $\bigcup_{a \in A} V_a \supseteq A \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in A : \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} \supseteq A$.
OZNAČME $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}$. $U$ JE ZREJME DISJUNKTNÉ S KAŽDÝM $V_{a_i} \Rightarrow U \cap A = \emptyset \Rightarrow x \in U \subseteq X \setminus A$.
ZREJME $U \in \tau$, TAKŽE $U$ JE OKOLIE $x$.
KEĎŽE $x$ SME VOLILI ĽUBOVOĽNE, JE $X \setminus A$ OTVORENÁ. □

LEMMA: NECH $f: (X,\tau) \to (Y,\theta)$ JE SPOJITÉ, $(X,\tau)$ JE KOMPAKTNÝ, $(Y,\theta)$ JE HAUSDORFFOV.

(1) PRE KAŽDÚ $A \subseteq X$ UZAVRETÚ JE $f[A]$ UZAVRETÁ.
V KOMPAKTNOM PRIESTORE $(X,\tau)$ JE KAŽDÁ UZAVRETÁ $A \subseteq X$ KOMPAKTNÁ $\Rightarrow$ $f[A]$ JE KOMPAKTNÁ (2O SPOJITOSTI)
V HAUSDORFFOVOM PRIESTORE JE ZAS KAŽDÁ KOMPAKTNÁ MNOŽINA UZAVRETÁ.

(2) AK JE $f$ PROSTÁ, JE TO ULOŽENIE PODPRIESTORU.
RESTRIKCIA ZOBRAZENIA $f$ NA $g: X \to f[X]$
JE HOMEOMORFIZMUS.

$f$ JE SPOJITÁ, TAKŽE PRE KAŽDÚ $V \in \Theta$ JE $f^{-1}[V] \in \tau$
ZREJME $f[X] \cap V$ JE OTVORENÁ V PODPRIESTORE $f[X] \subseteq Y$
A $f^{-1}[V] = X \cap f^{-1}[V] = f^{-1}[f[X]] \cap f^{-1}[V] =$
$= f^{-1}[f[X] \cap V] = g^{-1}[f[X] \cap V] \in \tau$
TAKŽE RESTRIKCIA $g$ JE TAKTIEŽ SPOJITÁ.
NA DRUHEJ STRANE $g$ JE BIJEKCIA A PODĽA (1)
JE PRE KAŽDÚ UZAVRETÚ $A \subseteq X$ $f[A]$ UZAVRETÁ V $Y$
$\Rightarrow$ $g[A] = f[A]$ JE UZAVRETÁ V $f[X]$.
$\Rightarrow$ $g^{-1}$ JE SPOJITÁ $\Rightarrow$ $g$ JE HOMEOMORFIZMUS.

PLATÍ $\tau = \{f^{-1}[U] \mid U \in \Theta\}$:
JEDNAK $U \in \Theta \Rightarrow f^{-1}[U] \in \tau$ ZO SPOJITOSTI $f$
JEDNAK $V \in \tau \Rightarrow V = g^{-1}[g[V]]$: ZO SPOJITOSTI $g^{-1}$
PLYNIE $g[V] \in \Theta|_{f[X]} \Rightarrow \exists U \in \Theta : g[V] = U \cap f[X]$
A ZREJME $f^{-1}[U] = f^{-1}[f[X] \cap U] = g^{-1}[g[V]] = V$
$\Rightarrow V \in \{f^{-1}[U] \mid U \in \Theta\}$. □

17.06.2008 Tu
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

(3) KEĎ JE $f$ NA, JE TO KVOCIENT.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\Theta = \{U \mid f^{-1}[U] \in \tau\}$:

AK $U \in \Theta$, POTOM ZO SPOJITOSTI $f$ JE $f^{-1}[U] \in \tau$.

MAJME $U \subseteq Y$ TAKÚ, ŽE $f^{-1}[U] \in \tau$.

POTOM $X \setminus f^{-1}[U]$ JE UZAVRETÁ $\Rightarrow$ PODĽA (1)
$f[X \setminus f^{-1}[U]]$ JE UZAVRETÁ

VKEDŽE $f$ JE NA, $X \setminus f^{-1}[U] = f^{-1}[Y \setminus U]$;

NUTNE $f[f^{-1}[Y \setminus U]] = Y \setminus U$.

(PRETOŽE PRE $\forall M \subseteq Y$ JE $f[f^{-1}[M]] = M$)

TO ZNAMENÁ, ŽE $Y \setminus U$ JE UZAVRETÁ $\Rightarrow U \in \Theta$.

(4) KEĎ JE $f$ BIJEKCIA, JE TO HOMEOMORFIZMUS.

PLYNIE Z (1).

LEMMA: KAŽDÝ HAUSDORFFOV KOMPAKTNÝ PRIESTOR JE NORMÁLNY.

NECH $(X, \tau)$ JE KOMPAKTNÝ A SPĹŇA AXIÓM $T_2$.

NECH $A, B$ SÚ DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ MNOŽINY.

ZREJME $A$ AJ $B$ SÚ KOMPAKTNÉ.

ZVOĽME $a \in A$. PODOBNE AKO VO VYŠŠIE UVEDENOM DOKAZE VIEME NÁJSŤ OTVORENÚ $U_a \ni a$ DISJUNKTNÚ S NEJAKÝM KONEČNÝM POKRYTÍM $V_a \supseteq B$.

$\Rightarrow$ PRE NEJAKÉ KONEČNÉ POKRYTIE $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} \supseteq A$
JE TOTO POKRYTIE DISJUNKTNÉ S $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \supseteq B$. □

$(X,\tau)$ JE <u>LOKÁLNE KOMPAKTNÝ</u>

AK PRE $\forall x \in X$ A $\forall$ OKOLIA $U \ni x$ EXISTUJE KOMPAKTNÉ OKOLIE $K$ : $x \in K \subseteq U$.

KAŽDÝ HAUSDORFFOV KOMPAKTNÝ PRIESTOR JE LOKÁLNE KOMPAKTNÝ.

KAŽDÝ $T_2$ KOMPAKTNÝ $(X,\tau)$ JE $T_4$ (VIĎ VYŠŠIE)
$T_2 \Rightarrow T_1$ A $T_4 \& T_1 \Rightarrow T_3 \& T_1$, TJ. $(X,\tau)$ JE REGULÁRNY.
NECH $U$ JE OKOLIE $x$. POTOM
Z REGULARITY $\Rightarrow \exists$ UZAVRETÉ OKOLIE $V$ BODU $x$, $x \in V \subseteq U$
A V KOMPAKTNOM PRIESTORE JE KAŽDÁ UZAVRETÁ MNOŽINA KOMPAKTNÁ, TJ.
$V$ JE KOMPAKTNÉ OKOLIE $x$.

## LINDELÖFOV PRIESTOR

$(X,\tau)$ JE LINDELÖFOV PRIESTOR $\Leftrightarrow$
Z KAŽDÉHO POKRYTIA MOŽNO VYBRAŤ NAJVIAC SPOČETNÉ PODPOKRYTIE.

17.06.2008 Ť4
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

**VETA:** KAŽDÝ REGULÁRNY LINDELÖFOV PRIESTOR JE NORMÁLNY.

NECH $(X,\tau)$ JE REGULÁRNY LINDELÖFOV PRIESTOR.
NECH $A, B$ SÚ DISJUNKTNÉ UZAVRETÉ MNOŽINY.
$X \setminus B$ JE OTVORENÁ MNOŽINA $\supseteq A$
PRE KAŽDÉ $x \in A$ ZVOĽME OTVORENÚ $U(x)$
TAKÚ, ŽE $x \in U(x) \subseteq \overline{U(x)} \subseteq X \setminus B$.
(TO JE MOŽNÉ VĎAKA REGULARITE)
$\bigcup_{x \in A} U(x) \supseteq A \Rightarrow$ (VZHĽADOM K TOMU, ŽE KAŽDÝ UZAVRETÝ PODPRIESTOR LINDELÖFOVHO PRIESTORU JE OPÄŤ LINDELÖFOV)
EXISTUJÚ OTVORENÉ $U_1, U_2, \ldots$
TAKÉ, ŽE $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq A$ A $\overline{U_i} \subseteq X \setminus B \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
MÔŽEME PREDPOKLADAŤ, ŽE $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$
(V OPAČNOM PRÍPADE STAČÍ ZVÁŽIŤ $U_1, U_1 \cup U_2, \ldots$)
PODOBNE NECH $V_1, V_2, \ldots$ SÚ OTVORENÉ, $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \supseteq B$ A $\overline{V_i} \subseteq X \setminus A$ PRE $\forall i \in \mathbb{N}$.

POLOŽÍME $U_i' = U_i \cap (X \setminus \overline{V_i})$, $V_i' = V_i \cap (X \setminus \overline{U_i})$
KEĎŽE $X \setminus \overline{V_i} \supseteq A, \Rightarrow U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i' \supseteq A$
A $X \setminus \overline{U_i} \supseteq B \Rightarrow V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i' \supseteq B$
ZREJME $U, V$ SÚ OTVORENÉ A DISJUNKTNÉ,
PRETOŽE $\forall i,j \in \mathbb{N} : U_i' \cap V_j' = \emptyset$
$i \leq j$, POTOM $U_i \cap (X \setminus \overline{U_j}) = \emptyset$
$i \geq j$, POTOM $V_j \cap (X \setminus \overline{V_i}) = \emptyset$. □

# SÚVISLOSŤ

**NEPRÁZDNY** $(X, \tau)$ JE **SÚVISLÝ** $\Leftrightarrow$
OKREM $\emptyset$ A $X$ NEOBSAHUJE ŽIADNE
ĎALŠIE OBOJETNÉ MNOŽINY $\Leftrightarrow$

$\neg\exists$ NEPRÁZDNE DISJUNKTNÉ OTVORENÉ
(RESP. UZAVRETÉ) $A, B$ : $X = A \cup B$.

$Y \subseteq X$ JE SÚVISLÁ $\Leftrightarrow$ $(Y, \tau|_Y)$ JE SÚVISLÝ.

18.06.2008 Kk
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## ZHRNUTIE

## KAPITOLA I

VETA: PRE KAŽDÚ SÚSTAVU ZOBRAZENÍ $f_i : Y \to X_i$ $i \in J$ $\exists$ PRÁVE JEDNO $f : Y \to \prod_{i \in J} X_i$ : $p_i \circ f = f_i$ $\forall i \in J$.

VETA: NECH $q_i : X \to X_i$, $i \in J$ JE SÚSTAVA ZOBRAZENÍ TAKÁ, ŽE PRE KAŽDÚ SÚSTAVU $f_i : Y \to X_i$, $i \in J$ EXISTUJE PRÁVE JEDNO $f : Y \to X$ : $q_i \circ f = f_i$ $\forall i \in J$, POTOM EXISTUJE BIJEKCIA $q : X \to \prod_{i \in J} X_i$ : $p_i \circ q = q_i$ $\forall i \in J$.

### TEÓRIA MNOŽÍN

CANTOR-BERNSTEINOVA VETA: $X \lesssim Y \;\&\; Y \lesssim X \Rightarrow X \approx Y$

DOBRÉ USPORIADANIE = LINEÁRNE USPORIADANÁ MN., KAŽDÁ PODMNOŽINA MÁ NAJMENŠÍ PRVOK

AXIÓM VÝBERU, ZERMELOVA VETA

$X$ JE TRANZITÍVNA $\Leftrightarrow$ $x \in X \Rightarrow x \subseteq X$.

ORD: $X \in \mathrm{Ord} \Leftrightarrow (X, \in)$ JE DOBRE USPORIADANÁ TRANZITÍVNA MNOŽINA,

VETA: 1. ORD JE VLASTNÁ TRANZITÍVNA TRIEDA
2. ORD JE JEDINÁ VLASTNÁ TRIEDA DOBRE USP. $\in$.
3. PRE KAŽDÚ DOBRE USPOR. $(X, \leq)$ EXISTUJE IZOMORFNÝ ORDINÁL $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

AC $\Rightarrow$ PRVKY KAŽDEJ MNOŽINY MOŽNO ZORADIŤ DO TRANSFINITNEJ POSTUPNOSTI $(x_\beta)_{\beta < \alpha}$ PRE NEJAKÉ $\alpha \in \mathrm{Ord}$

CARD : KARDINÁLNE ČÍSLO JE ORDINÁLNE ČÍSLO $\lambda$, KTORÉ NEMÁ ROVNAKÚ MOHUTNOSŤ SO ŽIADNYM ORD. $\beta < \lambda$.

AC $\Rightarrow$

VETA : 1. $\forall$ MNOŽINU $X$ $\exists\, \kappa \in \mathrm{CARD} : X \approx \kappa$ = MOHUTNOSŤ

2. PRVKY KAŽDEJ MNOŽINY MOŽNO ZORADIŤ DO TRANSFINITNEJ $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$.

AC $\Leftrightarrow$ ZORNOVO LEMA: BUĎ $(X, \leq)$ ČIASTOČNE USP. ON. TAKÁ, ŽE PRE KAŽDÚ $Y \subseteq X$, KTORÁ JE REL. $\leq$ USP. LINEÁR. EXISTUJE HORNÁ MEZ. POTOM PRE $\forall x \in X$ $\exists$ MAXIMÁLNE $y \in X$ TAKÉ, ŽE $x \leq y$.

AC $\Leftrightarrow$ PRINCÍP MAXIMALITY.

$R \subseteq X^n$, $S \subseteq Y^m$, $f$ JE HOMOMORFIZMUS $(X, R) \to (Y, S)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, \xi \in R : f \circ \xi \in S$.

IZOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $f$ JE BIJEKCIA A $\forall \xi \in X^n : \xi \in R \Leftrightarrow f \circ \xi \in S$.

TYP $\Delta = (\Delta_t)_{t \in T}$

RELAČNÁ ŠTRUKTÚRA $R = (R_t)_{t \in T}$ NA $X$ TYPU $\Delta$

OBJEKT $(X, R)$ TYPU $\Delta$ $\quad \in \mathrm{Rel}(\Delta)$

PODOBJEKT $\quad (X, R) \in \mathrm{Rel}(\Delta)$, $j : Y \subseteq X$

DEF. $(Y, R|_Y)$ AKO $R_{Y,t} = \{ \xi \in Y^m \mid j \circ \xi \in R_t \}$.

SÚČIN (PRODUKT) $\quad (X_i, R_i) \in \mathrm{Rel}(\Delta)$, $i \in I$

DEF. $(X, R)$, $X = \prod_{i \in I} X_i$,

$R_t = [\, \xi \in X^n \mid \forall i \in I : p_i \circ \xi \in R_{i,t} \,]$

KVOCIENT $\quad (X, R) \in \mathrm{Rel}(\Delta)$, $q : X \to Y$ JE NA, DEF. $(Y, \bar{R})$

$\bar{R}_t = \{ q \circ \xi \mid \xi \in R_t \}$.

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## PROJEKTÍVNE VYTVÁRANIE ŠTRUKTÚR

MÁME $(X_i, R_i) \in Rel(\Delta), i \in J$, MNOŽINU $X$ A SÚSTAVU ZOBRAZENÍ $r_i : X \to X_i$ TAKÚ, ŽE PRE $\forall f, g : Y \to X$ PLATÍ $(\forall i \in J : r_i \circ f = r_i \circ g) \Rightarrow f = g$.

POTOM NA $X$ DEFINUJEME $R$ AKO

$$R_t = \{ s \in X^n \mid \forall i \in J : r_i \circ s \in R_{i,t} \}$$

$R$ JE NAJVÄČŠIA RELAČNÁ ŠTRUKTÚRA TAKÁ, ŽE PRE $\forall i \in J$ SÚ $r_i : (X, R) \to (X_i, R_i)$ HOMOMORFIZMY.

(PROJ): NECH $f : Y \to X$ JE ZOBRAZENIE TAKÉ, ŽE PRE $\forall i \in J : r_i \circ f$ HOMOMORFIZMUS $(Y, S) \to (X_i, R_i)$.
POTOM $f$ JE HOMOMORFIZMUS $(Y, S) \to (X, R)$.
$R$ JE TVRDENÍM (PROJ) URČENÁ JEDNOZNAČNE.

## INJEKTÍVNE VYTVÁRANIE ŠTRUKTÚR

MÁME $(X_i, R_i) \in Rel(\Delta), i \in J$, MNOŽINU $X$ A SÚSTAVU ZOBR. $s_i : X_i \to X$ TAKÚ, ŽE PRE $\forall f, g : X \to Y$ $(\forall i \in J : f \circ s_i = g \circ s_i) \Rightarrow f = g$,
POTOM $R_t = \{ s_i \circ s \mid i \in J, s \in R_{i,t} \}$, $(X, R)$ JE NAJMENŠIA REL. ŠTRUKTÚRA, ŽE $\forall i \in J$ $s_i$ SÚ HOMOMORFIZMY.

(INJ): NECH $f : X \to Y$ JE ZOBRAZENIE TAKÉ, ŽE PRE $\forall i \in J$ JE $f \circ s_i$ HOMOMORFIZMUS $(X_i, R_i) \to (Y, S)$,
POTOM $f$ JE HOMOMORFIZMUS $(X, R) \to (Y, S)$.
$R$ JE TVRDENÍM (INJ) URČENÁ JEDNOZNAČNE.

# KAPITOLA II

PREDUSPORIADANIE, ČIASTOČNÉ USPORIADANIE, LINEÁRNE USPORIADANIE

ISOTÓNNE (MONOTÓNNE) $f: (X, \leq) \to (Y, \leq)$ :
$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
ANTITÓNNE $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

$f$ JE IZOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $f$ AJ $f^{-1}$ SÚ ISOTÓNNE

HORNÁ MEDZ $M$ : $M \subseteq \downarrow x$ , DOLNÁ MEDZ $M$: $M \subseteq \uparrow x$.
SUP $M$ .. NAJMENŠIA HORNÁ MEDZ, $\inf M$.. NAJV. DOLNÁ MEDZ.

$M \subseteq N$ HUSTE (HUSTE KOFINÁLNA)

PRE ISOTÓNNE $f: (X, \leq) \to (Y, \leq)$ JE
$f[\downarrow x] \subseteq \downarrow f(x)$, $f[\uparrow x] \subseteq \uparrow f(x)$

$\Rightarrow \sup f[M] \leq f(\sup M)$, $\inf f[M] \geq f(\inf M)$.
$M \subseteq \downarrow x \Rightarrow f[M] \subseteq f[\downarrow x] \subseteq \downarrow f(x)$, STAČÍ POLOŽIŤ $x = \sup M$

DOLNÝ (HORNÝ) POLOZVÄZ [S NULOU / JEDNOTKOU]
ZVÄZ [S NULOU / JEDNOTKOU]
ÚPLNÝ ZVÄZ

→ ŠPECIÁLNE TYPY USPORIADANÝCH MNOŽÍN $(X, \leq)$

VETA: $(X, \leq)$ JE ÚPLNÝ ZVÄZ $\Leftrightarrow$ KAŽDÁ PODMNOŽINA MÁ SUPRÉMUM.

USMERNENÁ PODMNOŽINA

VETA : HORNÝ POLOZVÄZ, KTORÝ MÁ SUPRÉMA $\forall$ USMERNENÝCH PODMNOŽÍN, MÁ SUPRÉMA VŠETKÝCH NEPRÁZDNYCH PODMNOŽÍN

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

## DEDEKINDOVO – MACNEILLEOVO ZÚPLNENIE

MAJME ČIAST. USP. NN. $(X, \leq)$.

DEFINUJME PRE $M \subseteq X$:

$lb(M) = \{x \in X \mid M \subseteq \uparrow x\}$

$ub(M) = \{x \in X \mid M \subseteq \downarrow x\}$

$\boxed{v(M) = lb(ub(M))}$

LEMMA: (1) $M \subseteq N \Rightarrow lb(M) \supseteq lb(N),\ ub(M) \supseteq ub(N)$

(2) $M \subseteq lb(ub(M)),\ N \subseteq ub(lb(N))$

(3) $lb(\uparrow x) = \downarrow x,\ ub(\downarrow x) = \uparrow x$

(4) $M \subseteq N \Rightarrow v(M) \subseteq v(N)$

(5) $vv(M) = v(M)$

DEFINUJME $\boxed{DMN(X, \leq) = \{M \subseteq X \mid v(M) = M\}}$

POTOM $(DMN(X), \subseteq)$ JE ÚPLNÝ ZVÄZ

$\boxed{\bigvee_{j \in J} M_j = v\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right)}$

$\boxed{x \mapsto \downarrow x}$ JE VLOŽENIE $(X, \leq) \to (DMN(X), \subseteq)$

D. $x \leq y \Leftrightarrow \downarrow x \subseteq \downarrow y$

ZACHOVÁVAJÚCE SUPRÉMA AJ INFIMA

D. AK PRE $M \subseteq X$ EXISTUJE $\sup M$, POTOM

$\sup \downarrow[M] = \downarrow(\sup M)$, D.

$v(\downarrow M) = v\left(\bigcup_{m \in M} \downarrow m\right) = \downarrow(\sup M)$

AK EXISTUJE $\inf M$, POTOM

$\inf \downarrow[M] = \downarrow(\inf M)$, D. $\bigcap_{m \in M} \downarrow m = \downarrow(\inf M)$.

# ADJUNKCIA (GALOISOVA KONEXIA)

ISOTÓNNE $f: (X, \leq) \to (Y, \leq)$, $g: (Y, \leq) \to (X, \leq)$
SÚ ADJUNGOVANÉ, $f$ NAĽAVO, $g$ NAPRAVO
$\Leftrightarrow \forall x \in X \; \forall y \in Y: f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$.

$f^{-1}[B] \subseteq A \Rightarrow X \setminus A \subseteq X \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus B] \Rightarrow$
$\Rightarrow f[X \setminus A] \subseteq f[f^{-1}[Y \setminus B]] \subseteq Y \setminus B \Rightarrow$
$\Rightarrow B \subseteq Y \setminus f[X \setminus A]$

$B \subseteq Y \setminus f[X \setminus A] \Rightarrow f[X \setminus A] \subseteq Y \setminus B \Rightarrow$
$\Rightarrow X \setminus A \subseteq f^{-1}[f[X \setminus A]] \subseteq f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B] \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}[B] \subseteq A$.

VETA: ISOTÓNNE $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ SÚ
ADJUNGOVANÉ $\Leftrightarrow f \cdot g \leq id$, $g \cdot f \geq id$.

VETA: ĽAVÉ GALOISOVE ADJUNKTY
ZACHOVÁVAJÚ SUPRÉMA, PRAVÉ INFÍMA.

VETA: NECH $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ SÚ ÚPLNÉ ZVÄZY.
POTOM ISOTÓNNE $f: (X, \leq) \to (Y, \leq)$ JE ĽAVÝ (PRAVÝ)
ADJUNKT $\Leftrightarrow$ $f$ ZACHOVÁVA SUPRÉMA (INFÍMA).

$$\boxed{g(y) = \sup \{x \mid f(x) \leq y\}}$$

18.06.2008 Kč
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY - SKÚŠKA

## BOURBAKIHO VETA O PEVNOM BODE:

NECH V $(X, \leq)$ EXISTUJE NAJMENŠÍ PRVOK $\perp$, NECH KAŽDÝ RETAZEC $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ MÁ SUPRÉMUM. NECH $f: X \to X$ ZACHOVÁVA SUPRÉMA TAKÝCHTO RETAZCOV. POTOM $f$ MÁ PEVNÝ BOD, EXISTUJE NAJMENŠÍ TAKÝ PEVNÝ BOD.

$\perp, x_1 = f(\perp), \dots x_{n+1} = f(x_n),$
ZREJME $\perp \leq x_1 \leq \dots$ SUPRÉMUM JE NAJMENŠÍ P. BOD.

## TARSKÉHO - KNASTEROVA VETA O PEVNOM BODE:

KAŽDÉ IZOTÓNNE ZOBRAZENIE ÚPLNÉHO ZVÁZU DO SEBA MÁ PEVNÝ BOD.

$M = \{x \mid x \leq f(x)\}, \quad s = \sup M.$

## CANTOR - BERNSTEINOVA VETA:

NECH $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ SÚ PROSTÉ. POTOM EXISTUJE BIJEKCIA $h: X \to Y$. $h$ MOŽNO NÁJSŤ TAKÉ, ŽE $\forall x \in X$ JE BUĎ $h(x) = f(x)$, ALEBO $h(x) = g^{-1}(x)$.

$F: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$
$F(M) = X \setminus g[Y \setminus f[M]]$

VETA: V HRE S ÚPLNOU INFORMÁCIOU MÁ ASPOŇ JEDEN HRÁČ NEPREHRÁVAJÚCU STRATÉGIU.

DEFINUJME $r : \mathcal{P}(X\times X) \to \mathcal{P}(X\times X)$ AKO

$$\boxed{r(M) = \{(x,y)\in X\times X \mid y \sqcap M = \emptyset\}}$$

$\Phi_{AB}(M) = A \cap r(B \cap r(M))$ JE IZOTÓNNE

NECH $S_{II} \subseteq X\times X$ : $S_{II} = B \cap r(A \cap r(S_{II}))$

$S_I := A \cap r(S_{II})$ JE PEVNÝ BOD $\Phi_{AB}$

$S_I$, $S_{II}$ SÚ VÝHRAVNÉ STR. 1., 2. HRÁČA.

## HLBOKO POD

V $(X, \leq)$ $x \ll y \Leftrightarrow$

PRE KAŽDÚ USMERNENÚ $D \subseteq X$

$y \leq \sup D \Rightarrow \exists d\in D : x \leq d$

V $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ JE $A \ll B \Leftrightarrow$ A JE KONEČNÁ PODMNOŽINA B.

$x \ll y \Rightarrow x \leq y$.

$x \leq x' \ll y' \leq y \Rightarrow x \ll y$.

$(X, \leq)$ JE **SPOJITÁ** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall x\in X : x = \bigvee\{y \mid y \ll x\}}$

AK PRE OTVORENÉ $U, V \in \tau$ $\exists$ KOMPAKTNÁ $K$: $U \subseteq K \subseteq V$, POTOM $U \ll V$. (ZVÄZ $(\tau, \subseteq)$)

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

V $(X, \leq)$ PÍŠEME $x \ll y \Leftrightarrow$ $\forall$ USMERNENÉ $D \subseteq X$ : $y \leq \bigvee D \Rightarrow \exists d \in D : x \leq d$.

V $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ $A \ll B \Leftrightarrow A$ JE KONEČNÁ $\subseteq B$.

PRE $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ JE $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$, $\inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$) ZREJME $\mathcal{D} = \{K \subseteq B \mid K$ JE KONEČNÁ$\}$ JE USMERNENÁ.

$A \ll B \Rightarrow$ KEĎŽE $B \subseteq \bigvee \mathcal{D} = B$

EXISTUJE $D \in \mathcal{D} : A \subseteq D \Rightarrow A$ JE KONEČNÁ.

$\Leftarrow$) NECH $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ JE USMERNENÁ A $B \subseteq \bigvee \mathcal{D}$

KEĎŽE $A \subseteq B$ PRE KAŽDÉ $a \in A$ $\exists D_a \in \mathcal{D} : a \in D_a$.

A JE KONEČNÁ, TAKŽE $\{D_a \mid a \in A\}$ MÁ HORNÚ MEDZ $W \in \mathcal{D}$, TJ. $\bigcup_{a \in A} D_a \subseteq W$

POTOM ALE TIEŽ $A \subseteq W$, TAKŽE $A \ll B$.

NECH $(X, \tau)$ JE METRICKÝ PRIESTOR.
UVAŽUJME ZVÄZ $(\tau, \subseteq)$.
NECH PRE $U, V \in \tau$ EXISTUJE KOMPAKTNÁ $K : U \subseteq K \subseteq V$.
POTOM $U \ll V$.

NECH $\mathcal{D} \subseteq \tau$ JE USMERNENÁ, $V \subseteq \bigvee \mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}$
POTOM $\exists D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D} : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

$\{D_1, \ldots, D_n\}$ MÁ HORNÚ MEDZ $W \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow U \subseteq W$, TAKŽE $U \ll V$.

LEMMA: $x \ll y \Rightarrow x \leq y$

$D = \{y\}$ JE USMERNENÁ A $\sup D = y$

$\Rightarrow \exists d \in D : x \leq d$. NUTNE $x \leq y$.

LEMMA: $x \leq x' \ll y' \leq y \Rightarrow x \ll y$.

$y \leq \bigvee D \Rightarrow y' \leq \bigvee D \Rightarrow \exists d \in D : x' \leq d \Rightarrow x \leq d$.

$(X, \leq)$ JE SPOJITÁ $\Leftrightarrow \forall x \in X : x = \bigvee \{y \mid y \ll x\}$.

NECH $(X, \tau)$ JE LOKÁLNE KOMPAKTNÝ TOPOLOGICKÝ PRIESTOR, D. PRE KAŽDÝ $x \in X$ A KAŽDÉ OKOLIE $U$ BODU $x$ EXISTUJE KOMPAKTNÉ PODOKOLIE $K$ BODU $x$ $(K \subseteq U)$.

POTOM $(\tau, \subseteq)$ JE SPOJITÝ.

$U \in \tau$, POTOM PRE $\forall x \in U$ JE $U$ OKOLIE $x$

$\Rightarrow \exists$ KOMPAKTNÉ PODOKOLIE $K_x$ BODU $x$

A K NEMU OTVORENÁ $V_x \in \tau : x \in V_x \subseteq K_x$.

D. $\forall x \in U$ MÁME $x \in V_x \subseteq K_x \subseteq U$, KDE $K_x$ JE KOMPAKTNÁ $\Rightarrow V_x \ll U$.

$\Rightarrow$ ĎALEJ: $\{V \mid V \ll U\}$ JE USMERNENÁ MNOŽINA

AK $V_1 \ll U$, $V_2 \ll U$, POTOM TIEŽ $V_1 \cup V_2 \ll U$

TOTIŽ AK $U \leq \bigvee \mathcal{D} \Rightarrow \exists D_1 \in \mathcal{D} : V_1 \subseteq D_1$

A TIEŽ $\exists D_2 \in \mathcal{D} : V_2 \subseteq D_2 \Rightarrow$ PRE HORNÚ TIEŽ $W \in \mathcal{D}$ MNOŽINY $\{D_1, D_2\}$ JE $V_1 \cup V_2 \subseteq W$.

$U \supseteq \bigvee \{V \mid V \ll U\} \supseteq \bigcup_{x \in U} V_x \supseteq U$. □

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

VETA: V SPOJITEJ USPORIADANEJ $(X, \leq)$ JE RELÁCIA $\ll$ INTERPOLATÍVNA.
NAVAC AK $a_1, a_2 \ll b$, EXISTUJE $c: a_1, a_2 \ll c \ll b$.

NECH $a \ll b$. PLATÍ $b = \bigvee \{x \mid x \ll b\}$,
PRIČOM TAKTIEŽ $x = \bigvee \{y \mid y \ll x\}$.

$\Rightarrow b = \bigvee \{\bigvee \{y \mid y \ll x\} \mid x \ll b\} =$
$= \bigvee \bigcup_{x \ll b} \{y \mid y \ll x\} =$
$= \bigvee \{y \mid \exists x: y \ll x \ll b\}.$

$a \ll b$ POTOM PRE $\mathcal{D} = \{y \mid \exists x: y \ll x \ll b\}$ JE $b \leq \bigvee \mathcal{D} \Rightarrow \exists c \in \mathcal{D}$ $a \leq c \ll x \ll b$.

ESTE MUSÍME ALE DOKÁZAŤ, ŽE $\{y \mid \exists x: y \ll x \ll b\}$ JE USMERNENÁ.
NECH $y_i \ll x_i \ll b$. $\{x \mid x \ll b\}$ JE USMERNENÁ
$\Rightarrow \exists x: x_1, x_2 \leq x \ll b$
$y_i \ll x_i \leq x \Rightarrow y_i \ll x$, TJ. $y_1, y_2 \ll x$ ~~$\ll b$~~
$\{y \mid y \ll x\}$ JE USMERNENÁ, TAKŽE
$\exists y: y_1, y_2 \leq y \ll x$ ~~$\ll b$~~ □

MÁME $a_1, a_2 \ll b \Rightarrow$ KEĎŽE $\{x \mid x \ll b\}$ JE USM. $\exists x$:
$a_1, a_2 \leq x \ll b$.
ZREJME $\exists c: x \ll c \ll b$
A $a_i \leq x \ll c \Rightarrow a_i \ll c \ll b$.

# KAPITOLA III

VETA: NECH JE NA MN. $X$ DANÁ OPERÁCIA $\wedge$ SPĹŇAJÚCA ($\wedge$-EQ). POTOM EXISTUJE PRÁVE JEDNO USP. $\leq$ TAKÉ, ŽE $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.
$(X, \leq)$ JE POLOZVÄZ S $1 \Leftrightarrow \exists 1 \in X$ SPĹŇAJÚCI (1-EQ).

PODOBNE PRE (V-EQ)

($\wedge$V-EQ) $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

ZVÄZ $L$ JE MODULÁRNY $\Leftrightarrow$
$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

VETA: $L$ JE MODULÁRNY $\Leftrightarrow$ NEOBSAHUJE $C_5$

ZVÄZ $L$ JE DISTRIBUTÍVNY $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
$\Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$\Rightarrow$ JE MODULÁRNY

VETA: MODULÁRNY ZVÄZ JE DISTRIBUTÍVNY $\Leftrightarrow$
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

VETA: ZVÄZ $L$ JE DISTRIBUTÍVNY $\Leftrightarrow$ NEOBSAHUJE $C_5$, ANI $D_3$.

$\Leftrightarrow$ SÚSTAVA $a \wedge x = b$, $a \vee x = c$ MÁ NAJVIAC 1 RIEŠENIE.

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMAI064 MATEMATICKÉ STRUKTÚRY – SKÚŠKA

## IDEÁLY A FILTRY V DISTRIBUTÍVNYCH ZVÄZOCH

NECH $L$ JE <u>DISTRIBUTÍVNY ZVÄZ</u> S <u>NULOU A JEDNOTKOU</u>.

$J \subseteq L$ JE IDEÁL $\Leftrightarrow$

$0 \in J$,
$a, b \in J \Rightarrow a \vee b \in J$
$a \in J \;\&\; b \leq a \Rightarrow b \in J$

$F \subseteq L$ JE FILTER $\Leftrightarrow$

$1 \in F$
$a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$
$a \in F \; b \geq a \Rightarrow b \in F$

IDEÁL (FILTER) JE <u>VLASTNÝ</u> $\Leftrightarrow \neq L$

<u>PRVOIDEÁL</u> $a \wedge b \in J \Rightarrow a \in J \vee b \in J$.
<u>PRVOFILTER</u> $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F \vee b \in F$. $\Leftrightarrow$ HOMOMORFIZMUS $h: (L, \wedge, \vee, 0, 1) \to (2, \wedge, \vee, 0, 1)$

<u>MAXIMÁLNY IDEÁL (FILTER)</u>

VETA: NECH $J$ JE IDEÁL A $F$ FILTER V $L$, $J \cap F = \emptyset$. POTOM EXISTUJE FILTER $\bar{F} \supseteq F$ MAXIMÁLNY VZHĽADOM K $\bar{F} \cap J = \emptyset$, A TENTO $\bar{F}$ JE PRVOFILTER.

BIRKHOFFOVA VETA: $J$ IDEÁL, $F$ FILTER, $J \cap F = \emptyset$. POTOM EXISTUJÚ PRVOIDEÁL $\bar{J} \supseteq J$, PRVOFILTER $\bar{F} \supseteq F$ : $\bar{J} \cap F = \emptyset$.

# PSEUDOKOMPLEMENT

NECH $L$ JE ZVÄZ S $0$.

PSEUDOKOMPLEMENT $a \in L$ JE NAJVÄČŠÍ $x$ : $x \wedge a = 0$.

JE URČENÝ FLOU : $\boxed{x \leq a^* \Leftrightarrow x \wedge a = 0}$

LEMMA : $0^* = 1$

LEMMA : $a \mapsto a^*$ JE ANTITÓNNE

LEMMA : (1) $a \leq a^{**}$

(2) $a^* = a^{***}$

(3) $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = 0$

(4) $(a \vee a^*)^* = 0$

(4) : $x \leq (a \vee a^*)^* \Leftrightarrow x \wedge (a \vee a^*) = 0$

$x \wedge (a \vee a^*) \geq (x \wedge a) \vee (x \wedge a^*)$

$\Rightarrow x \wedge a = 0 \;\&\; x \wedge a^* = 0 \Rightarrow x \leq a^*, a^{**}$

$\Rightarrow x \leq a^* \wedge a^{**} = 0.$

LEMMA : $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$.

$\leq$) ZREJME

$\geq$) $a \wedge b \leq (a \wedge b)^{**} \Leftrightarrow a \wedge b \wedge (a \wedge b)^{**}$ A POUŽITIE (3).

DE MORGAN : AK EXISTUJE $\sup_{j \in J} a_j$, POTOM $(\sup a_j)^* = \inf a_j^*$.

$x^* \leq^{op} y \Leftrightarrow x \leq y^*$ (GALOISOVA ADJUNKCIA)

18.06.2008 We
PETER ČERNO

# NMA1064 MATEMATICKÉ ŠTRUKTÚRY – SKÚŠKA

## KOMPLEMENT

b JE KOMPLEMENT a ⇔
$\boxed{a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1.}$ OZN.: $a^c$

LEMMA: V DISTRIBUTÍVNOM ZVÁZE JE KAŽDÝ KOMPLEMENT PSEUDOKOMPLEMENT.

$x \wedge a = 0 \Rightarrow \boxed{x = x \wedge (a \vee b)} = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge b \leq b.$
$x \leq b \Rightarrow x \wedge a \leq b \wedge a = 0.$

## HEYTINGOVÉ ALGEBRY

HEYTINGOVÁ OPERÁCIA $b \to c$
JE NAJVÄČŠÍ PRVOK TAKÝ, ŽE $(b \to c) \wedge b \leq c$, T.J.

$\boxed{a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c}$

ZVÁZ S 0, 1 A HEYTINGOVOU OPERÁCIOU JE HEYTINGOVA ALGEBRA

$x \wedge b \leq y \Leftrightarrow x \leq b \to y$ SÚ ZOTÚŽNE JE GALOISOVA ADJ.

$\Rightarrow (\sup M) \wedge b = \sup \{m \wedge b \mid m \in M\}$

$\Rightarrow$ HEYTINGOVA ALGEBRA JE VŽDY DISTRIBUTÍVNA.

\+ JE VŽDY PSEUDOKOMPLEMENTÁRNA: $a^* = a \to 0$

$a \wedge (a \to b) \leq b$

$a \leq b \to (a \wedge b)$

$a \to a = 1$

$1 \to a = a$

$\boxed{a \wedge (a \to b) = a \wedge b}$

$\Rightarrow a \to b \leq a \to (a \wedge b)$

$\boxed{a \to b = a \to (a \wedge b)}$

## BOOLEOVE ALGEBRY

BOOLEOVA ALGEBRA JE DISTRIBUTÍVNY KOMPLEMENTÁRNY ZVÄZ S 0 A 1.

VETA: BOOLEOVA ALGEBRA JE HEYTINGOVA. $\boxed{b \to c = b^c \vee c}$

DÔSLEDOK: $(\sup A) \wedge b = \sup \{a \wedge b \mid a \in A\}$

$h: a \mapsto a^c$ JE ANTITÓNNE, $h(h(a)) = a$

$\Rightarrow$ JE TO IZOMORFIZMUS $L \to L^{op}$

$\Rightarrow (\bigvee a_i)^c = \bigwedge a_i^c$, $(\bigwedge a_i)^c = \bigvee a_i^c$

VETA: F VLASTNÝ FILTER V BOOL. ALG. L. POTOM EKV.:

(1) F JE MAXIMÁLNY
(2) F JE PRVOFILTER
} ULTRAFILTRY

(3) $\forall a \in L : a \in F \vee a^c \in F$.

VETA: NECH L JE HEYTINGOVA ALGEBRA. POLOŽME

$\boxed{BL = \{a \in L \mid a = a^{**}\}, \quad b: L \to BL \quad b(a) := a^{**}.}$

POTOM BL JE BOOLEOVA ALGEBRA, KONEČNÉ INF V BL SA ZHODUJÚ S KONEČNÝMI INF V L,

$\sup_{BL} M = (\sup_L M)^{**}$, (* EXISTUJE $\sup_L M$)

ZOBRAZENIE b ZACHOVÁVA KONEČNÉ INFÍMA A VŠETKY EXISTUJÚCE SUPRÉMA.