Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Lineární algebra I
BONUS

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: Mgr. Milan Hladík, Ph.D.
E-mail: Milan.Hladik@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/`

Garant: doc. RNDr. Jiří Sgall, DrSc.
E-mail: sgall@kam.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~sgall/`

Garant: prof. RNDr. Jiří Matoušek, DrSc.
E-mail: matousek@kam.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~matousek/`

Anotace: Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).

Sylabus:

1. Základní maticové operace, inverzní matice, Gaussova eliminace, odstupňovaný tvar matice, řešení soustav lineárních rovnic.

2. Vektorové prostory: základní pojmy, báze, dimenze, lineární zobrazení.

3. Aplikace lineární algebry.

1/3

02.02.2006 Th
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

VETA: NECH A, B, C SÚ MATICE, α SKALÁR.

1) KEĎ JE $(AB)C$ DEF., POTOM JE AJ $A(BC)$ DEF. A PLATÍ $(AB)C = A(BC)$
2) KEĎ JE $A(B+C)$ DEF., POTOM JE AJ $AB+AC$ DEF. A $A(B+C) = AB+AC$
3) KEĎ JE $(A+B)C$ DEF., POTOM JE AJ $AC+BC$ DEF. A $(A+B)C = AC+BC$
4) KEĎ JE AB DEF., POTOM $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5) KEĎ JE A TYPU $m \times n$, POTOM $I_m A = A I_n = A$.

DÔKAZ: 1) KEĎ JE $(AB)C$ DEF., POTOM AB JE TYPU $m \times p$ A C TYPU $p \times r$
AB JE TYPU $m \times p \Rightarrow A$ JE TYPU $m \times n$ A B TYPU $n \times p$.
$\Rightarrow$ SUČIN BC JE DEF. A JE TYPU $n \times r \Rightarrow A(BC)$ JE DEF. $m \times r$.
STAČÍ OVERIŤ, ŽE $\forall i,j \ (i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,r\})$
JE $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left[\sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} B_{\ell k}\right] C_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} \cdot \left[\sum_{k=1}^{p} B_{\ell k} C_{kj}\right] = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} \cdot (BC)_{\ell j} = [A(BC)]_{ij}.$$

2) A JE TYPU $m \times p$, B, C TYPU $p \times n$.
$\forall i,j \ i \in \{1,\dots,m\} \ j \in \{1,\dots,n\}$ JE

$$[A(B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} (B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} (B_{kj} + C_{kj}) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} A_{ik} C_{kj}\right) = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = [AB + AC]_{ij}.$$

3) PODOBNE
4) ĽAHKÁ
5) A JE TYPU $m \times n$
$\forall i,j \ (i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}$

$$[I_m A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (I_m)_{ik} A_{kj} = (I_m)_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

$$[A I_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot (I_n)_{kj} = A_{ij} \cdot (I_n)_{jj} = A_{ij} \quad \square$$

KEĎ JE AB DEF., POTOM JE AJ B^TA^T DEF. A PLATÍ $(AB)^T = B^TA^T$.

AB DEF. $\Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n} \Rightarrow B^T \in \mathbb{R}^{n\times p}$ $A^T \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$\Rightarrow B^TA^T$ JE DEF., TYPU $n\times m$.

$\forall i,j \quad i \in \{1,\dots,m\} \quad j \in \{1,\dots,n\}$

$$[(AB)^T]_{ji} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{jk}(A^T)_{ki} = (B^TA^T)_{ji} \quad \square$$

DEFINUJEME $e_j = I_{\cdot j}$

ZREJME $A_{\cdot j} = Ae_j$, $A_{i\cdot} = e_i^T A$

NECH $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^m$. POTOM:

1) $(AB)_{\cdot j} = A \cdot B_{\cdot j} \quad j=1,\dots,n$
2) $(AB)_{i\cdot} = A_{i\cdot} B \quad i=1,\dots,m$
3) $Ax = \sum_{j=1}^{p} x_j A_{\cdot j}$
4) $y^TA = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\cdot}$

1) $(AB)_{\cdot j} = (AB)e_j = A(Be_j) = AB_{\cdot j}$
2) $(AB)_{i\cdot} = e_i^T(AB) = (e_i^TA)B = A_{i\cdot}B$
3) $Ax = A(x_1e_1 + \dots + x_pe_p) = \sum_{j=1}^{p} x_j A_{\cdot j}$
4) $y^TA = (y_1e_1^T + \dots + y_me_m^T)A = \sum_{i=1}^{m} y_i A_{i\cdot}$ $\square$

MATICA A JE REGULÁRNA $\Leftrightarrow A \in \mathbb{R}^{n\times n} \wedge A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

VETA: PRE MATICU $\tilde{A}$, KT. VZNIKLA Z $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ NASLEDOVNÝM

1) $A_{i\cdot} := \alpha A_{i\cdot} \quad \alpha \neq 0$
2) $A_{j\cdot} := A_{j\cdot} + \alpha A_{i\cdot} \quad i \neq j$
3) $A_{i\cdot} \leftrightarrow A_{j\cdot} \quad i \neq j$

$I + bc^T$

PLATÍ: 1) $\tilde{A} = A + (\alpha-1)e_ie_i^TA = (I + (\alpha-1)e_ie_i^T)A$
2) $\tilde{A} = A + \alpha e_je_i^TA = (I + \alpha e_je_i^T)A$
3) ?

1) $\begin{pmatrix} A_{1\cdot} \\ A_{2\cdot} \\ \vdots \\ A_{i\cdot} \\ \vdots \\ A_{m\cdot} \end{pmatrix} + (\alpha-1)\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{i\cdot} \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A + (\alpha-1)$  e_i^TA

02.02.2006
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

KEĎ JE $I+bc^T$ SINGULÁRNA

$\Rightarrow \exists x \neq 0 : (I+bc^T)x = 0$

$x + (bc^T)x = 0$

$b(c^T x) = -x$

$c^T b(c^T x) = -c^T x \quad , \; c^T x \neq 0$

$\Rightarrow c^T b = -1$

$c^T x = 0 \Rightarrow x = -b(c^T x) = 0$ SPOR.

$e_i^T(\lambda - 1)e_i = \lambda - 1 \neq -1$

$e_i^T \lambda e_j = 0 \neq -1$

$\Rightarrow \hat{A}$ JE REGULÁRNA.

VETA: KEĎ MATICA $(A\ b)$ VZNIKNE Z $(A\ \hat{b})$ VYKONANÍM ELEM. ÚPRAVY 1) ALEBO 2), POTOM SÚSTAVY $Ax=b$ A $\hat{A}x=\hat{b}$ MAJÚ ROVNAKÚ MNOŽINU RIEŠENÍ.

DÔKAZ:

2) NECH A VZNIKNE Z $\hat{A}$ TAKTO $\hat{A}_{j\cdot} := \hat{A}_{j\cdot} + \lambda \hat{A}_{i\cdot}$, $i \neq j$

AK $\hat{A}x = \hat{b}$, POTOM D. $A = (I + \lambda e_j e_i^T)\hat{A}$

$Ax = (I+\lambda e_j e_i^T)\hat{A}x =$

$= (I+\lambda e_j e_i^T)\hat{b} =$ [illegible] b A NAOPAK

KEĎ $Ax=b$ D. $(I+\lambda e_j e_i^T)\hat{A}x = (I+\lambda e_j e_i^T)\hat{b} \Rightarrow \hat{A}x = \hat{b}$

POZNÁMKA: $(A\ b) = Q(\hat{A}\ \hat{b}) \Leftrightarrow A = Q\hat{A} \wedge b = Q\hat{b}$.

GAUSSOVA ELIMINÁCIA

GAUSS-JORDANOVA ELIMINÁCIA $A := (\hat{A}\ \hat{b})$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\hat{b} \in \mathbb{R}^m$

$j(0) \leftarrow 0$

i-TÝ KROK ALGORITMU: $(i = 1, \dots, m)$

NÁJDI PRVÝ "NENULOVÝ STĹPEC" S INDEXOM $j_0 > j(i-1)$

A POLOŽ $j(i) := j_0$.

POKIAĽ TAKÝ STĹPEC NEEXISTUJE, UKONČI ALGORITMUS

POD POJMOM "NENULOVÝ STĹPEC" ROZUMIEME STĹPEC, PRE KTORÝ $\exists$ ASPOŇ JEDEN PRVOK $A_{ij_0} \neq 0$ $i \geq i$!!

VYMEŇ RIADKY i A i_0.

POLOŽ $A_{i\cdot} := \frac{1}{A_{ij_0}} A_{i\cdot}$

GAUSSOVA ELIM:

PRE $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ $k \neq i$ VYKONAJ $A_{k\cdot} := A_{k\cdot} - A_{kj_0} \cdot A_{i\cdot}$

GAUSS-JORDAN: — II — $k \neq i$ — II —

POLOŽ $i \leftarrow i+1$

KEĎ JE $i > m$, UKONČI ALGORITMUS.

GAUSSOVA (GAUSS-JORDANOVA) ELIMINÁCIA

PRE SÚSTAVU $\hat{A}x = \hat{b}$, KDE $\boxed{\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}}$, $\hat{b} \in \mathbb{R}^n$ $A := (\hat{A}\ \hat{b})$

i-TÝ KROK $(i = 1, \dots, n)$

1) NÁJDI $k \geq i$: $A_{ki} \neq 0$. KEĎ TAKÉ k NEEXISTUJE, UKONČI ALG.
2) VYMEŇ RIADKY $A_{i\cdot}$ A $A_{k\cdot}$.
3) POLOŽ $A_{i\cdot} \leftarrow \frac{1}{A_{ii}} A_{i\cdot}$
4) PRE $\forall k > i$ $(k \neq i)$ POLOŽ $A_{k\cdot} \leftarrow A_{k\cdot} - A_{ki} \cdot A_{i\cdot}$
5) KEĎ JE $i < n$, POLOŽ $i \leftarrow i+1$ A SKOČ NA 1. INAK SKOČ NA 6.
6) $\forall i = n, n-1, \dots, 1$ POLOŽ $x_i \leftarrow b_i - \sum_{k=i+1}^{n} A_{ik} \cdot x_k$. (SPÄTNÁ SUBST.)

VETA: KEĎ SA ALG. ZASTAVÍ V KROKU 6), POTOM MÁ SÚSTAVA $\hat{A}x = \hat{b}$ PRÁVE 1 RIEŠENIE A $\hat{A}$ JE REGULÁRNA.

VETA: KEĎ SA ALG. ZASTAVÍ V KROKU 1), POTOM MÁ SÚSTAVA $\hat{A}x = \hat{b}$ BUĎ 0 ALEBO ∞ VEĽA RIEŠ., $\hat{A}$ JE SINGULÁRNA.

VETA: KEĎ JE $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ REGULÁRNA, POTOM PRE $\forall \hat{b} \in \mathbb{R}^n$ $\exists x \in \mathbb{R}^n$: $\hat{A}x = \hat{b}$.

DÔSLEDOK: GAUSS. ELIM. SA NEMÔŽE ZASTAVIŤ V KROKU 1).

02.02.2006 Th
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

VETA: KU KAŽDEJ REG. MATICI $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\exists!\, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ A NAOPAK.

DÔKAZ.
$\Rightarrow$) A JE REG. $\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}\ \exists! x_i \in \mathbb{R}^n : Ax_i = e_i$.
POLOŽÍME $B := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. POTOM $AB = I_n$. (B JE DEF. JEDNOZN.)
~~$A = (AB)A = A(BA) = A \cdot I_n \Rightarrow BA = I_n$~~
$A(BA - I_n) = (AB)A - A = 0 \Rightarrow BA - I_n = 0$ □

NECH $AX = I$, POTOM $A(X - B) = AX - AB = 0 \Rightarrow X = B$.

$\Leftarrow$) NECH $\exists B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $AB = BA = I$
$Ax = 0 \Rightarrow BAx = x = 0 \rightsquigarrow A$ JE REG.

VETA: KEĎ PRE $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE $AB = I_n$,
POTOM $AB = BA = I_n$ A A, B SÚ REG.

$AB = I_n$ $\quad Bx = 0 \Rightarrow ABx = B \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \Rightarrow B$ JE REG.
$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}^{n\times n} : BC = CB = I$
$A = A \cdot I_n = A \cdot BC = AB \cdot C = C$

$AB = I_n \Rightarrow B^T A^T = I_n \Rightarrow A^T$ JE REG $\Rightarrow A$ JE REG. ?

VETA: A JE REG. $\Rightarrow A^T$ JE REG. $\exists A^{-1} : A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$
$\Rightarrow A^T (A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I_n$
$\Rightarrow A^T$ JE REG. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

VETA: $A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$
a) $AX = I_n \Rightarrow A$ JE REG. $X = A^{-1}$
b) $XA = I_n \Rightarrow A$ JE REG. $X = A^{-1}$

b) $XA = I_n \quad Ax = 0 \Rightarrow XAx = x = 0. \Rightarrow \exists A^{-1}$
$X = X A A^{-1} = A^{-1}$

a) $AX = I_n \Rightarrow X^T A^T = I_n \Rightarrow A^T$ JE REG. $\Rightarrow A$ JE REG. $\Rightarrow \exists A^{-1}$
$X = A^{-1} A X = A^{-1}$. □

VETA: NECH $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE REG. A $b, c \in \mathbb{R}^n$. POTOM:

1) $c^T A^{-1} b \neq -1 \Rightarrow (A+bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}$

2) $c^T A^{-1} b = -1 \Leftrightarrow A + bc^T$ JE SINGULÁRNA.

DÔKAZ. 1) $(A+bc^T)^{-1} \cdot (A+bc^T) =$

$$= \left[A^{-1} - \frac{1}{1+c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T A^{-1}\right](A+bc^T) =$$

$$= \left[I + A^{-1} b c^T - \frac{1}{1+c^T A^{-1} b} \cdot A^{-1} b \left(c^T + c^T A^{-1} b c^T\right)\right] =$$

$$= \left[I + A^{-1} b c^T - \frac{1}{1+c^T A^{-1} b} A^{-1} b c^T \left(1 + c^T A^{-1} b\right)\right] = I$$

2) $\exists? x \neq 0$:

$(A+bc^T)x = 0$

$Ax + bc^T x = 0$

$(-c^T x) b = +Ax$

$(-c^T x) A^{-1} b = x$

$c^T(-c^T x) A^{-1} b = c^T x$

$c^T x \neq 0$

$c^T A^{-1} b = -1$

$(A+bc^T) A^{-1} b = b + b(c^T A^{-1} b) = 0$, KDE $A^{-1} b \neq 0$

čo sme mali dokázať

DEFINÍCIA MATICE V ODSTUPŇOVANOM TVARE RREF (REDUCED ROW ECHELON FORM)

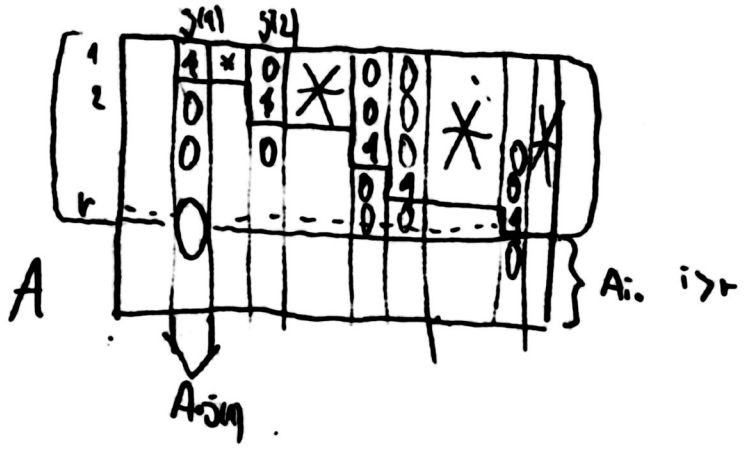
MATICA $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ SA NAZÝVA BLA-BLA-BLA $\Leftrightarrow$

$\exists r \in \mathbb{N}$ $0 \leq r \leq m$ A $1 \leq j(1) < j(2) < \ldots < j(r) \leq n$:

1) $A_{i1} = \ldots A_{i,j(i)-1} = 0$

2) $A_{\cdot j(1)} = e_1, \ldots, A_{\cdot j(r)} = e_r$

3) $A_{i\cdot} = 0^T$ PRE $i > r$.



02.02.2006 Tk
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

VETA: NECH $A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ SÚ MATICE V ODSTUPŇOVANOM TVARE A NECH $A = Q\cdot B$ PRE $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ Q JE REGULÁRNA. POTOM $A=B$.

DÔKAZ: INDUKCIA PODĽA POČTU STĹPCOV n.

$n=1$, POTOM JE BUĎ $B=(0,0,\dots,0)^T \Rightarrow A=QB=B$

ALEBO $B=(1,0,0,\dots,0)^T \Rightarrow A=QB\neq(0,0,\dots,0)^T$

$\Rightarrow$ NUTNE $A=(1,0,0,\dots,0)^T=B$.

PREDPOKLADÁME, ŽE TVRDENIE PLATÍ PRE $n-1$.

DOKÁŽEME JEHO PLATNOSŤ PRE n:

$B=(\hat{B}\ b)$ KDE $\hat{B}\in\mathbb{R}^{m\times n-1}$, $b\in\mathbb{R}^m$ A B JE V RREF TVARE.

KEĎ OZNAČÍME $A=(\hat{A}\ a)=Q\cdot B$, POTOM ZREJME

$\hat{A}=Q\hat{B} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$.

STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE $a=b$

NECH PRVÝCH r RIADKOV MATICE B JE NENULOVÝCH

1) KEĎ JE $b=e_{r+1}$, POTOM $a=Qb\neq 0 \Rightarrow a=e_{r+1}$

2) NECH $b_{r+1}=b_{r+2}=\dots=b_m=0$.

POTOM AJ $a_{r+1}=\dots=a_m=0$.

STAČÍ UŽ IBA DOKÁZAŤ, ŽE $a_1=b_1,\dots,a_r=b_r$.

NECH $B_{\cdot j(1)}=e_1,\dots,B_{\cdot j(r)}=e_r$. $1\le j(1)<\dots<j(r)<n$.

$A=QB=B \Rightarrow A_{\cdot j(k)}=(QB)_{\cdot j(k)}$

$e_k = QBe_k = Q\cdot e_k = Q_{\cdot k}$

$\Rightarrow Q_{\cdot 1}=e_1,\dots,Q_{\cdot r}=e_r$.

$\Rightarrow Qb=b$, PRETOŽE $(Qb)_{i\cdot}=e_i^T Q b=(0,0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots,0,??)\cdot\begin{pmatrix}\\ b\\ \\ \\ \end{pmatrix}$

□

VÝPOČET MATICE A^R, KEĎ JE DANÁ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1) $i_0, j_0 \leftarrow 1$
2) KEĎ PRE $\forall i,j$ $i \geq i_0, j \geq j_0$ JE $A_{ij} = 0$, POLOŽ $A^R \leftarrow A$ a HALT
3) INAK POLOŽ $j_0 \leftarrow \min\{j,\ j \geq j_0 : \exists i \geq i_0\ A_{ij} \neq 0\}$
4) NECH $i \geq i_0$ $A_{ij} \neq 0$. VYMEŇ RIADKY $A_{i_0.}$ a $A_{i.}$
5) POLOŽ $A_{i_0.} \leftarrow \frac{1}{A_{i_0 j_0}} A_{i_0.}$
6) PRE $\forall i \neq i_0$ POLOŽ $A_{i.} \leftarrow A_{i.} - A_{ij_0} \cdot A_{i_0.}$
7) $i_0 \leftarrow i_0 + 1$, $j_0 \leftarrow j_0 + 1$. KEĎ JE $i_0 \leq m$ a $j_0 \leq n \Rightarrow$ KROK 2), INAK HALT.

VETA: MATICA A^R JE V ODSTUPŇOVANOM TVARE A JE JEDNOZNAČNE URČENÁ MATICOU A.

DÔKAZ. NECH i_0 JE POSLEDNÁ HODNOTA i, S KTOROU SA VYKONÁ ELIMINÁCIA V KROKU 6). PRE KAŽDÉ $i \in \{1, \dots, i_0\}$ OZNAČME $j(i)$ HODNOTU VYPOČÍTANÚ V KROKU 3) PRE i. DÔKAZ INDUKCIOU VZHĽADOM NA $i \in \{1, \dots, i_0\}$, ŽE MATICA $A^{(i)}$ V KROKU i PO VYKONANÍ ELIMINÁCIE JE V ODSTUP. TVARE, KEĎ BERIEME DO ÚVAHY PRVÝCH $j(i)$ STĹPCOV.

$A^R = Q \cdot A$, NECH $A^{R'} = Q' A$ JE TIEŽ V ODST. TVARE

$A = Q^{-1} A^{R'} \Rightarrow A^R = Q Q^{-1} \cdot A^{R'} \Rightarrow A^R = A^{R'}$. ∎

02.02.2006
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF.: MATICA $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ MÁ
LIN. NEZÁVISLÉ STĹPCE $\Leftrightarrow$ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ PRE $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
LIN. NEZ. RIADKY $\Leftrightarrow$ A^T MÁ LIN. NEZÁVISLÉ STĹPCE.

VETA: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ MÁ:

a) LIN. NEZ. STĹPCE $\Leftrightarrow$ A^TA JE REG.
b) LIN. NEZ. RIADKY $\Leftrightarrow$ AA^T JE REG.

a) NECH $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
$A^TAx = \vec{0} \Rightarrow x^TA^TAx = x^T.\vec{0} \Rightarrow (Ax)^T(Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ ∎

b) $A^Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ $\Leftrightarrow$ $(A^T)^TA^T$ JE REG. ∎
$\forall x \in \mathbb{R}^m$

VETA: NECH $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ A A^R MÁ r NENULOVÝCH RIADKOV.
POTOM $A = B.C$, KDE $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$
B JE TVORENÁ VEKTORMI $A_{\cdot j(1)}, \dots, A_{\cdot j(r)}$
C JE PRVÝCH r RIADKOV MATICE A^R.
B MÁ LIN. NEZÁVISLÉ STĹPCE, C MÁ LIN. NEZÁVISLÉ RIADKY.

$A^R = QA \Rightarrow A = P.A^R$

$B_{\cdot k} = A_{\cdot j(k)} = P.A^R e_{j(k)} = P e_k = P_{\cdot k}$

$A_{\cdot j} = (PA^R)_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} P_{\cdot i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} P_{\cdot i}(A^R)_{ij} = \sum_{i=1}^{r} B_{\cdot i} \cdot C_{ij} = B \cdot C_{\cdot j} = (BC)_{\cdot j}$

03.02.2006 Fr
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

NECH $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $(A\,b)^R = (\hat{A}\,\hat{b})$.
POTOM SÚSTAVY $Ax=b$ A $\hat{A}x=\hat{b}$ MAJÚ ROVNAKÚ MNOŽINU RIEŠ. A PLATÍ:

1) $j(r)=n+1$, POTOM JE TÁTO MNOŽINA $=\emptyset$
2) $r=n$, $j(r)\le n$, POTOM $\exists!$ RIEŠENIE
3) $r<n$, $j(r)\le n$, ∞ VEĽA RIEŠENÍ, PRIČOM

$$x_{j(i)} = \hat{b}_i - \sum_{j \notin K} \hat{A}_{ij} \cdot x_j \quad , \text{KDE } K = \{j(1), \dots, j(r)\}$$

DÔKAZ: ZREJMÝ.

DEF.: TELESO T JE MNOŽINA S BIN. OP. $+$ A $\cdot$, $0,1 \in T$

1) $x+y = y+x$
2) $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\exists 0 \in T: \; x+0=x$
4) $\forall x \exists y: \; x+y=0$. OZN. $y=(-x)$
5) $xy = yx$
6) $(xy)z = x(yz)$
7) $\exists 1 \in T: \; 1x = x$
8) $\forall x \neq 0 \; \exists y \quad xy=1$ OZN. $y=x^{-1}$
9) $x(y+z) = xy + xz$
10) $0 \neq 1$

JEDNOZNAČNOSŤ 0, 1, $-a$, a^{-1}, $0 \cdot a = 0$, $(-1)\cdot a = -a$,
$a+b=a+c \Rightarrow b=c$, $ab=ac \Rightarrow b=c \; (a \neq 0)$

$\exists \bar{0} \; \forall x \; x+\bar{0}=x \Rightarrow 0+\bar{0}=0$, $\forall x \; x+0=x \Rightarrow \bar{0}+0=\bar{0}$ $\Rightarrow 0=\bar{0}$

$\exists \bar{1} \; \forall x \; \bar{1}x=x \quad \bar{1}\cdot 1 = 1$, $\forall x \; 1x=x \quad 1\cdot\bar{1}=\bar{1}$ $\Rightarrow 1=\bar{1}$

$1+(-1) = 0$
$a+(-1)a = 0 \cdot a = 0$
$\Rightarrow (-1)a = (-a)$

NECH $a+b=0 \wedge a+\bar{b}=0$ $\quad b = b+(a+\bar{b}) = (a+b)+\bar{b} = \bar{b}$
NECH $a \cdot b = 1 \wedge a\bar{b}=1$ $\quad b = ba\bar{b} = \bar{b}$

$a \cdot (b+0) = ab + a\cdot 0 = ab \Rightarrow a\cdot 0 = 0$
$a(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0 = a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$

$\forall a,b \; \exists! \; x \quad a+x=b$

$a+(b+(-a)) = b \qquad a+x=b \quad a+\bar{x}=b \Rightarrow x = b+(-a) = \bar{x}$

DEF.: VP V NAD T JE MNOŽINA V SPOLU S BIN. OP. $+ \oplus : V\times V \to V$
A OP. $\cdot : T\times V \to V$

$\forall x,y \in V \quad x+y = y+x$
$\forall x,y,z \in V \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
$\exists 0 \in V \ \forall x \in V \quad x+0 = x$
$\forall x \exists y \in V \quad x+y = 0 \qquad y = (-x)$
$\forall x,y \in V \ \forall \alpha \in T \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
$\forall x \in V \ \forall \alpha,\beta \in T \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
$\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x$
$\forall x \ \forall \alpha,\beta \in T \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$!!!

VETA: $\mathbb{Z}_n$ JE TELESO $\Leftrightarrow$ n JE PRVOČÍSLO.
DOKAZ: $\Rightarrow$ $n = A\cdot B \quad A,B > 1$, POTOM $A\cdot B = 0 \quad A\neq 0, B\neq 0$
$\Rightarrow$ n NEMÔŽE BYŤ ZLOŽENÉ!
$\Leftarrow$ NECH $n = p$ JE PRVOČÍSLO $p \geq 2$
VŠETKY AXIÓMY TRIVIÁLNE PLATIA AŽ NA $\forall x \neq 0 \ \exists y \ xy = 1$.
UVAŽUJME $x \neq 0$, A POSTUPNOSŤ $1x, 2x, \dots, (p-1)x$.
ZREJME $ix \equiv jx \pmod p \Rightarrow p \mid (i-j)x \Rightarrow p \mid i-j \Rightarrow \underline{i=j}$
$\Rightarrow \{1x, 2x, \dots, (p-1)x\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ □

CHARAKTERISTIKA TELESA T JE TAKÉ $n \in \mathbb{N}_0$,
ŽE $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n} = 0$
KEĎ TAKÉ n NEEXISTUJE, POTOM KLADIEME $\mathrm{ch}\, T = 0$.

VETA $\mathrm{ch}(T) = 0$ V PRVOČÍSLO.
DOKAZ. NECH $n = A\cdot B, \quad A,B > 1$

$$\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{A} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{A} + \dots + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{A} = 0$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{B}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{A} \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{B} = 0$$

JEDNO Z TÝCHTO ČÍSEL JE NULOVÉ $\Rightarrow$ SPOR. □

$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$
$\Leftarrow$ ZREJME
$\Rightarrow$ NECH $a\cdot b = 0 \wedge a\neq 0 \wedge b \neq 0$.
$\Rightarrow \exists a^{-1} \Rightarrow a^{-1}\cdot(ab) = (a^{-1}a)b = b = 0$, SPOR.

03.02.2006 Fr
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

ZÁKL VLASTNOSTI VP:

1) $\exists!\, 0 \in V: \; x+0=x \quad \forall x \in V \qquad 0=\vec{0}$
2) $\forall x \; \exists!\, y \in V: \; x+y=\vec{0} \qquad y=(-1)x$
3) $\alpha.\vec{0}=\vec{0}$ VŽDY
4) $0x=\vec{0}$ $\forall x \in V$
5) $\alpha x=\vec{0} \Rightarrow \alpha=0 \;\vee\; x=\vec{0}$

---

1) $\exists 0 \; \forall v \in V \quad 0+v=v \qquad 0+\bar{0}=\bar{0}$
   $\exists \bar{0} \; \forall v \in V \quad \bar{0}+v=v \qquad \bar{0}+0=0$ $\Big\} \; \bar{0}=0$
4) MÁME $x \in V$ NECH $x+\bar{y}=0$ A $x+y=0$.
   $y=y+x+\bar{y}=\bar{y}$ $\qquad x+(-1)x=(1-1)x=0x \overset{?}{=} \vec{0}$
3) $\forall v \in V$ JE $v+\alpha\vec{0}=\alpha^{\alpha^{-1}}(\alpha^{-1}v+\vec{0})=v$ PRE $\alpha \neq 0$
4) $\forall v \in V$ JE $v+0\vec{x}$?! $\quad \exists y \; \alpha.0+y=0$ $\quad \alpha.0=\alpha.0+\alpha.0+y=0$ □

$\exists y: \; 0.x+y=0 \qquad 0x=0x+0x+y=(0+0)x+y=0x+y=0$ □

DEF. W JE PODPRIESTOR V AK
1) $0 \in W$
2) $\forall u,v \in W \quad u+v \in W$
3) $\forall \alpha \in T \; u \in V \quad \alpha u \in W$

DEF. SYSTÉM VEKTOROV (+ PRÁZDNY SYSTÉM)
DEF. LIN. KOMBINÁCIA $x_1, \dots, x_n$
DEF. LIN. OBAL $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$ (IBA PRE $n \geq 1$)
DEF.: $\mathcal{L}(\emptyset) := \{\vec{0}\}$

VETA: NECH $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_m)$ SÚ DVA SYS. VEKTOROV Z V.
$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathcal{L}(y_1, \dots, y_m) \Leftrightarrow \forall i \; x_i \in \mathcal{L}(y_1, \dots, y_m)$
$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}(y_1, \dots, y_m) \Leftrightarrow \forall i \; x_i \in \mathcal{L}(y_1, \dots, y_m)$
$\wedge \forall j \; y_j \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$

NECH $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $n > m$, POTOM A NEMÁ LIN. NEZ. STĹPCE

PRE $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE $(A^T)^R$ $r < n$ $(A^T)^R = Q A^T$

VEZMITE SI NAPR. $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n})^T$

POTOM $e_n^T (A^T)^R = 0^T$ TJ. $e_n^T Q A^T = 0^T$

$\Rightarrow A (e_n^T Q)^T = 0$ $A (Q^T e_n) = 0$, KDE $Q^T e_n \neq 0$

PRETOŽE Q JE REG. $\Rightarrow Q^T$ JE REG.

VETA: KEĎ JE $x_1, \dots, x_n$ LIN. ZÁVISLÝ SYSTÉM GENERÁTOROV V, POTOM $\exists k$: $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ JE SYST. GEN.

DÔKAZ: $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\alpha_k \neq 0$: $\sum \alpha_i x_i = 0$

$\Rightarrow x_k = \frac{1}{\alpha_k} \left(- \sum_{i \neq k} \alpha_i x_i \right)$

$y \in V \Rightarrow \exists \beta_1, \dots, \beta_n$: $y = \sum \beta_i x_i = \sum_{i \neq k} \beta_i x_i + \beta_k \cdot \left(\frac{1}{\alpha_k} \sum_{i \neq k} \alpha_i y_i \right) =$

$= \sum_{i \neq k} \left(\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i$ □

VETA (STEINITZOVA VETA O VÝMENE)

NECH $x_1, \dots, x_m$ JE SYST. GEN., $y_1, \dots, y_n$ JE LIN. NEZ.

POTOM:

1) $n \leq m$

2) EXISTUJÚ RÔZNE INDEXY $k_1, \dots, k_{m-n} \in \{1, \dots, m\}$:

$y_1, \dots, y_n, x_{k_1}, \dots, x_{k_{m-n}}$ JE SYS. GEN.

INDUKCIA PODĽA n

03.02.2006 Fr
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

DÔKAZ STEINITZOVEJ VETY:

$n=0$, POTOM PRÁZDNY SYSTÉM JE LIN. NEZ., $n \le m$
A HĽADANÉ INDEXY $k_1=1, k_2=2, \dots, k_m = m$.

NECH TVRDENIE PLATÍ PRE $n-1$. MÔŽME MAŤ $n \ge 1$ LIN. NEZ. VEKT. $y_1, \dots, y_n$

POTOM AJ $y_1, \dots, y_{n-1}$ SÚ LN $\Rightarrow n-1 \le m$,
$\exists \ell_1, \dots, \ell_{m-(n-1)} \in \{1, \dots, m\}$ RÔZNE:
$y_1, \dots, y_{n-1}, x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_{m-n+1}}$ JE SG

KEBY BOLO $n-1 = m$, POTOM BY $y_1, \dots, y_{n-1}$ BOLI SG $\Rightarrow$ SPOR.
$\Rightarrow n-1 < m \Rightarrow n \le m$.

NECH $y_n = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m-n+1} \beta_i x_{\ell_i}\right)$

KDE ASPOŇ JEDNO $\beta_k \neq 0$ (INAK BY $y_1, \dots, y_n$ NEBOLI LN)

$$\Rightarrow x_{\ell_k} = \frac{1}{\beta_k}\left[y_n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i\right) - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-n+1} \beta_i x_{\ell_i}\right)\right]$$

NECH $x = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{m-n+1} \delta_i x_{\ell_i}\right) \in$

$$\Rightarrow x = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i y_i\right) + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-n+1} \delta_i x_{\ell_i}\right) + \delta_k \cdot \frac{1}{\beta_k}\left[y_n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i\right) - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m-n+1} \beta_i x_{\ell_i}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ x JE LIN. KOMB. VEKTOROV

$y_1, \dots, y_n, x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_{k-1}}, x_{\ell_{k+1}}, \dots x_{\ell_{m-n+1}}$. □

VEKTOROVÉ PRIESTORY SO SKALÁRNYM SÚČINOM

VP NAD $\mathbb{R}$!!! (POPR. NAD $\mathbb{C}$)

VP NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SA NAZÝVA VP SO SKALÁRNYM SÚČINOM
$\Leftrightarrow \forall x,y \in V \quad \langle x|y\rangle \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

1) $\langle x|x\rangle \geq 0 \qquad \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad |\langle x|x\rangle| \geq 0$
2) $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$
3) $\langle \alpha x|z\rangle = \alpha\langle x|z\rangle$
4) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle \qquad (\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ PRE $\mathbb{C})$

$\langle x|y+z\rangle = \overline{\langle y+z|x\rangle} = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x|y\rangle$
$\langle 0|x\rangle = \langle x|0\rangle = 0$

NORMA: DEF. $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

DEF. $x \perp y \Leftrightarrow \langle x|y\rangle = 0$

PYTAGOROVA VETA: $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

D) $\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle$

VLASTNOSTI NORMY

CAUCHY-SCHWARZ: $\langle x|y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

DOKAZ. PRE $x \perp y$ PLATÍ.
NECH $\langle x|y\rangle \neq 0 \Rightarrow x, y \neq \vec{0}$.
$\exists \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha y - x \perp x$?

$\langle \alpha y - x|x\rangle = \alpha\langle y|x\rangle - \langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\|x\|}{\langle y|x\rangle}$

$\|\alpha y\|^2 = \|\alpha y - x + x\|^2 = \|\alpha y - x\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2 \Rightarrow \|\alpha y\| \geq \|x\|$

$\frac{\|x\|^2}{|\langle y|x\rangle|^2} \cdot \|y\|^2 \geq \|x\|^2$ D

03.02.2006 Fr
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

CAUCHY - SCHWARZ : $\forall x,y \in V \quad \langle x|y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

DÔKAZ: $\langle x|y\rangle = 0 \Rightarrow$ PLATÍ

$\langle x|y\rangle \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$

$\exists \alpha \quad \alpha y - x \perp x$: $\langle \alpha y - x | x\rangle = \alpha\langle y|x\rangle - \langle x|x\rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha := \frac{\|x\|}{\langle y|x\rangle}$

$\|\alpha y\|^2 = \|\alpha y - x + x\|^2 = \|\alpha y - x\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$

$\Rightarrow \|\alpha y\| \geq \|x\|$

$\langle \alpha y | \alpha y\rangle = \alpha\langle y|\alpha y\rangle = \alpha \cdot \bar{\alpha}\langle y|y\rangle = \frac{\|x\|}{\langle y|x\rangle} \cdot \frac{\|x\|}{\overline{\langle y|x\rangle}} \cdot \|y\|^2 =$

$= \frac{\|x\|^2}{|\langle y|x\rangle|}\|y\| \geq \|x\|$ □

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 =$

$= \langle x+y | x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \langle x|y\rangle + \overline{\langle x|y\rangle} + \|y\|^2 =$

$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

$\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x|x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x|x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$ □

ORTONORMÁLNA BÁZA

1) VETA: KAŽDÝ ORTONORMÁLNY SYSTÉM JE LN

4) GRAM-SCHMIDTOV ORTOGONALIZAČNÝ PROCES

1) NECH $z_1, \dots, z_m$ JE ORTONI. SYST. VEKTOROV

D. $\|z_i\| = 1 \quad i \neq j \Rightarrow \langle z_i | z_j \rangle = 0$

NECH $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_m z_m = 0$

$\Rightarrow 0 = \langle \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_m z_m \mid z_k \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle z_i | z_k \rangle = \alpha_k$ PRE $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ D

GRAM-SCHMIDTOV ORTOGONALIZAČNÝ PROCES:

NECH $x_1, \dots, x_n$ SÚ LN. DEF:

$$y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j$$

$$z_k := \frac{1}{\|y_k\|} \cdot y_k .$$

POTOM z_k JE DOBRE DEF., $z_1, \dots, z_n$ JE ORTONORMÁLNY SYSTÉM VEKTOROV A $\mathcal{L}[z_1, \dots, z_n] = \mathcal{L}[x_1, \dots, x_n]$.

DÔKAZ: INDUKCIA PODĽA k.

PRE $k=1$ JE $y_1 = x_1 \neq 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{\|y_1\|} \cdot y_1$, ZREJME $\mathcal{L}(z_1) = \mathcal{L}(x_1)$.

PREDPOKLADÁME, ŽE TVRDENIE PLATÍ PRE $k-1 < m$

D. $z_1, \dots, z_{k-1}$ JE ORTONORM. SYSTÉM, $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$

DOKÁŽEME NAJSKÔR, ŽE $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j \neq 0$

KEBY BOLO $y_k = 0$, POTOM BY $x_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}) \Rightarrow x_k \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$

$\Rightarrow x_1, \dots, x_k$ BY NEBOLI LN, SPOR. $\Rightarrow$ NUTNE $y_k \neq 0$.

POLOŽÍME $z_k := \frac{1}{\|y_k\|} \cdot y_k$, ZREJME $\|z_k\| = 1$. PRE $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ JE

$$\langle z_k | z_i \rangle = \left\langle \frac{1}{\|y_k\|} y_k \mid z_i \right\rangle = \frac{1}{\|y_k\|} \cdot \left\langle x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j \mid z_i \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|y_k\|} \cdot \left[\langle x_k | z_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle \langle z_j | z_i \rangle \right] = \frac{1}{\|y_k\|} \left[\langle x_k | z_i \rangle - \langle x_k | z_i \rangle \right] = 0. \quad D$$

PLATÍ $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$, $x_k = \|y_k\| \cdot z_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j$

$\Rightarrow x_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_k) \Rightarrow \mathcal{L}(x_1, \dots, x_k) \subseteq \mathcal{L}(z_1, \dots, z_k)$

ĎALEJ $z_k = \frac{1}{\|y_k\|} \cdot y_k = \frac{1}{\|y_k\|} \cdot \left[x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j \right]$, PRIČOM $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$

$\Rightarrow z_k \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_k) \Rightarrow \mathcal{L}(z_1, \dots, z_k) \subseteq \mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)$, ČO BOLO TREBA DOK. D

03.02.2006 Fr
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

BESSELOVA NEROVNOSŤ $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |\langle x|z_i\rangle|^2$

PARSEVALOVA ROVNOSŤ $\|x\|^2 = \text{—}''\text{—} \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(z_1,\dots,z_m)$

FOURIEROV ROZVOJ $x = \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i \Leftarrow x \in \mathcal{L}(z_1,\dots,z_m)$

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \,\middle|\, x - \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \right\rangle =$$

$$= \langle x|x\rangle - \left\langle x \middle| \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \middle| x \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \middle| \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \right\rangle$$

$$= \langle x|x\rangle - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle \cdot \langle z_i|x\rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle \left\langle z_i \middle| \sum_{j=1}^{m}\langle x|z_j\rangle z_j \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle \left(\sum_{j=1}^{m}\langle x|z_j\rangle \langle z_i|z_j\rangle\right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle|^2 \geq 0$$

KEĎ JE $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle| \Rightarrow$ POTOM $x - \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i = 0$

$\Rightarrow x \in \mathcal{L}(z_1,\dots,z_m)$

$x \in \mathcal{L}(z_1,\dots,z_m) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i z_i$

NECH JE $\{1,\dots,m\}$. POTOM

$\langle x|z_j\rangle = \left\langle \sum \alpha_i z_i \middle| z_j \right\rangle = \sum \alpha_i \langle z_i|z_j\rangle = \alpha_i$

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{m}\langle x|z_i\rangle z_i = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m}|\langle x|z_i\rangle|^2$ D

04.02.2006 Sa
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF. LIN. ZOBRAZENIA: NECH V A W SÚ VP NAD T.
POVIE SA $f: V \to W$ SA NAZÝVA LIN. ZOBR. $\Leftrightarrow$
1) $\forall x,y \in V: f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in T: f(\alpha x) = \alpha f(x)$

VLASTNOSTI: 1) $f(0) = 0$
2) $f(V) \subseteq W$ $f(V)$ JE PODPRIESTOR W
3) $N(f) = \{x \in V, f(x) = 0\}$ JE PODPR. V
4) f JE PROSTÉ $\Leftrightarrow$ $N(f) = \{0\}$.

1) $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot f(\vec{x}) = \vec{0}$ ✓
2) $\vec{0} \in f(V)$, PRETOŽE $f(0) = \vec{0}$
$x, y \in f(V) \Rightarrow \exists u, v \in V: f(u) = x, \; f(v) = y \quad f(u+v) = f(u) + f(v) = x + y \in W$
$\alpha \in T, \; x \in f(V) \Rightarrow \exists u \in V: f(u) = x \Rightarrow f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha x \in f(V)$ ∎
3) $0 \in N(f)$
$x, y \in N(f) \Rightarrow f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 \Rightarrow x + y \in N(f)$
$\alpha \in T, \; x \in N(f) \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in N(f)$.
4) $\Rightarrow$ NECH f JE PROSTÉ. POVIE $\exists! x \in V: f(x) = 0 \quad x = 0 \Rightarrow N(f) = \{0\}$
$\Leftarrow$ NECH $N(f) = \{0\}$. $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ ∎

VETA: LIN. ZOBR. $f: V \to W$ JE JEDNOZNAČNE URČENÉ HODNOTAMI V BÁZI.

DEF.: SÚRADNICE VEKT. V BÁZI B.

DEF.: IZOMORFIZMUS
$f: V \to W$ JE IZOM. $\Rightarrow$ POVIE $f^{-1}: W \to V$ JE IZOM
$f^{-1}(u+v) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x+y)) = x + y \quad \ldots$

DEF.: NECH $\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ JE BÁZA V A $\hat{\mathcal{B}}=(y_1,\dots,y_m)$ JE B. W A NECH $f: V\to W$ JE LIN. ZOBRAZENIE. POTOM $\forall j\in\{1,\dots,n\}$ MOŽNO $f(x_j)$ JEDNOZNAČNE ZAPÍSAŤ AKO

$f(x_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,y_i$ TJ. $[f(x_j)]_{\hat{\mathcal{B}}}=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$

MATICU $[f]_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}=(a_{ij})=\left[[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]\in\mathbb{R}^{m\times n}$

NAZÝVAME MATICOU LIN. ZOBR. f VZHĽADOM K BÁZAM $\mathcal{B}$ A $\hat{\mathcal{B}}$.

DEF.: VP LINEÁRNYCH ZOBRAZENÍ Z V DO W $\quad L(V,W)$

VETA: $L(V,W)$ JE IZOMORFNÝ S $\mathbb{R}^{\dim W\times\dim V}$

DOKAZ. NECH $\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ JE BÁZA V A $\hat{\mathcal{B}}=(y_1,\dots,y_m)$ JE BÁZA W.

DEFINUJME $\phi: L(V,W)\to\mathbb{R}^{m\times n}$ PREDPISOM

$\phi(f):=[f]_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}$. DOKÁŽTE, ŽE ϕ JE IZOMORFIZMUS.

1) $\forall f,g\in L(V,W)$ JE

$\phi(f+g)=[f+g]_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}=\left[[(f+g)(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[(f+g)(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]=$

$=\left[[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]+\left[[g(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[g(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]=$

$=\phi(f)+\phi(g)$

RODOBNE $\forall f\in L(V,W)$ A $\forall\alpha\in\mathbb{T}$ JE $\phi(\alpha f)=\alpha\phi(f)$.

$\Rightarrow\ \phi$ JE LIN. ZOBRAZENIE

2) NECH $\phi(f)=\phi(g)$ TJ.

$\left[[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]=\left[[g(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[g(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right]$

$\Rightarrow\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$ JE $[f(x_i)]_{\hat{\mathcal{B}}}=[g(x_i)]_{\hat{\mathcal{B}}}=(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{mi})^T$

TJ. $f(x_i)=g(x_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,y_j$ KDE

POTOM $\forall x\in V$ JE $x=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i$

$\Rightarrow f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i g(x_i)=g(x)$

$\Rightarrow f=g\ \Rightarrow\ \phi$ JE PROSTÉ ZOBR.

ESTE TREBA OVERIŤ SURJEKCIU. (ZREJME)

04.02.2006 Št
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

MÁME VEKTOROVÉ PRIESTORY V A W NAD TELESOM T
$\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ JE BÁZA V A $\mathcal{C}=(y_1,\dots,y_m)$ JE BÁZA W
NÁJDITE BÁZU $L(V,W)$.

EXISTUJE IZOMORFIZMUS $\Phi: L(V,W) \to \mathbb{R}^{m\times n}$
$\Phi(f) := [f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \left[[f(x_1)]_{\mathcal{C}},\dots,[f(x_n)]_{\mathcal{C}}\right]$

UVAŽUJME MATICE $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, KT. MAJÚ VŠADE NULY AŽ NA PRVOK (i,j), KTORÝ JE JEDNOTKOVÝ.

ZREJME $(E_{11},\dots,E_{mn})$ JE BÁZA $\mathbb{R}^{m\times n}$

OTÁZKA ZNIE, AKO BUDE VYZERAŤ $f_{ij}: V\to W$, $[f_{ij}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = E_{ij}$.
f_{ij} BUDE DEFINOVANÉ AKO

$f_{ij}(x_j) = 0$ PRE $\forall\, j \neq j_0$, $j\in\{1,\dots,n\}$
$f_{ij}(x_{j_0}) = y_i$

LIN. ZOBR.
MÁME ĽUBOVOĽNÉ $f: V\to W$
STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE $\exists \alpha_{ij}$ $i=1\dots m$, $j=1\dots n$ TAKÉ, ŽE
$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}$

POLOŽÍME $(\alpha_{ij}) := [f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

PRE $\forall x\in V$ JE $x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\right) =$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\cdot \sum_{k=1}^{n}\beta_k f_{ij}(x_k) =$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\cdot\beta_j f_{ij}(x_j) =$

$= \sum_{j=1}^{n}\beta_j \cdot \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} f_{ij}(x_j) =$

$= \sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j =$?

$= \sum_{j=1}^{n}\beta_j.$

$\Rightarrow f(x_j) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} y_i =$

$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} f_{ij}(x_j)$

$\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j\right) =$

$= \sum_{j=1}^{n}\beta_j \cdot \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} f_{ij}(x_j) =$

$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} \sum_{j=1}^{n}\beta_j f_{ij}(x_j) =$

$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} \sum_{j=1}^{n}\beta_j f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) =$

$= \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k\right)$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} f_{ij}(x)$ □ SG

VETA: NECH $\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ JE BÁZA V A $\hat{\mathcal{B}}=(y_1,\dots,y_m)$ JE BÁZA W VP NAD T.
NECH $f: V\to W$ JE LIN. ZOBR.
POTOM PRE $\forall x\in V$ JE $[f(x)]_{\hat{\mathcal{B}}} = [f]_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}\,[x]_{\mathcal{B}}$

DÔKAZ: NECH $[x]_{\mathcal{B}} = (\beta_1,\dots,\beta_n)^T$ TJ. $x=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$. POTOM

$$[[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}},\dots,[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}]\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} =$$

$$= \beta_1[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}}+\dots+\beta_n[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}.$$

TERAZ SI UŽ STAČÍ DÁ KOMINÚŤ, ŽE

$$(y_1,\dots,y_m)\cdot\left(\beta_1[f(x_1)]_{\hat{\mathcal{B}}}+\dots+\beta_n[f(x_n)]_{\hat{\mathcal{B}}}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,y^T\cdot[f(x_j)]_{\hat{\mathcal{B}}} = \sum_{j=1}^{n}\beta_j f(x_j) = f\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j\right) = f(x)$$

KDE $y^T=(y_1,\dots,y_m)$ JE [redacted] BÁZA $\hat{\mathcal{B}}$

VETA: NECH VP U,V,W NAD T MAJÚ BÁZY $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}''$.
[redacted] NECH $f: U\to V$, $g: V\to W$ SÚ LIN. ZOBR.
POTOM $[g\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}\cdot[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

DÔKAZ: $\forall x\in U$ JE $[(g\circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [g\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}\cdot[x]_{\mathcal{B}}$.

$$[g(f(x))]_{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}\cdot[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}\cdot[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\cdot[x]_{\mathcal{B}}\cdot\square$$

VETA: KEĎ JE $f: V\to W$ IZOMORFIZMUS, POTOM AJ $f^{-1}: W\to V$ IZOMORFIZMUS A PLATÍ $[f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

DÔKAZ: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ TJ. $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}} = [0]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow [x]_{\mathcal{B}}=[0]_{\mathcal{B}}$
$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ JE REGULÁRNA $\Rightarrow \exists\,[f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

f^{-1} JE IZOM. (UŽ VIEME) $f^{-1}\circ f = id_V \Rightarrow [f^{-1}\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = E_{\dim V}$

$[f^{-1}\circ f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\cdot[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = E_{\dim V} \Rightarrow [f^{-1}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ ∎

04.02.2006 Sq
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

MATICA PRECHODU:

MAJME VP V NAD T A DVE BÁZY $\mathcal{B}, \hat{\mathcal{B}}$.
POTOM $[id_V]_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}}$ NAZÝVAME MATICOU PRECHODU Z BÁZY $\mathcal{B}$ DO $\hat{\mathcal{B}}$. PLATÍ

$\forall x \in V$ JE $[x]_{\mathcal{B}} = [id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[x]_{\mathcal{B}}$

PRÍKLAD: $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\hat{\mathcal{B}} = (v_1, \dots, v_n)$

PRETOŽE $[id_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [id_V]^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [v_1, \dots, v_n]^{-1}$

A $[x]_{\mathcal{B}} = x$

$\Rightarrow [x]_{\mathcal{B}'} = (v_1, \dots, v_n)^{-1} x$.

VEKT. PRIESTOR SO SKAL. SÚČINOM NAZÝVAME VP V NAD $\mathbb{C}$ SPOLU S OP. NAVOZENIA $\langle x|y\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$:

1) $\langle x|x\rangle \geq 0$ ROVNAJÚ SA $\Leftrightarrow x = 0$
2) $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$
3) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle$
4) $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$

$\Rightarrow \langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$
$\langle x|\alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x|y\rangle$
$\langle 0|x\rangle = \langle x|0\rangle = 0$

DEF.: NECH W_1 A W_2 SÚ VEKT. PODPRIESTORY KONEČNE GEN. PRIESTORU V NAD T.

$W_1+W_2 := \{x_1+x_2,\ x_1\in W_1\ x_2\in W_2\}$ JE VEKT. PODPR. V.

DOKAZ: 1) $0\in W_1+W_2$

2) $\forall x,y\in W_1+W_2 \quad x+y\in W_1+W_2$ (ZREJME)

3) $\forall x\in W_1+W_2$ $\alpha\in T \quad \alpha x\in W_1+W_2$ —II—

PLATÍ: $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$

DOKAZ.: OZNAČME $z_1,\dots,z_p$ BÁZU $W_1\cap W_2$ $(p\geq 0)$

PODĽA STEINITZOVEJ VETY MÔŽEME TÚTO BÁZU DOPLNIŤ NA BÁZU W_1 RESP. W_2:

$z_1,\dots,z_p, x_1,\dots,x_n$. $\dim W_1 = n+p$

$z_1,\dots,z_p, y_1,\dots,y_m$. $\dim W_2 = m+p$

DOKÁŽEME, ŽE $z_1,z_2,\dots,z_p, x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_m$ JE BÁZA W_1+W_2

ZREJME JE TO SG.

NECH $\alpha_1 z_1+\dots+\alpha_p z_p + \beta_1 x_1+\dots+\beta_n x_n + \gamma_1 y_1+\dots+\gamma_m y_m = 0$.

$\Rightarrow \underbrace{\sum \alpha_i z_i + \sum \beta_i x_i}_{\in W_1} = \underbrace{-\sum \gamma_i y_i}_{\in W_2} \in W_1\cap W_2$

$\Rightarrow \exists \delta_i : \sum \delta_i z_i = -\sum \gamma_i y_i$

$\Rightarrow \sum \delta_i z_i + \sum \gamma_i y_i = 0 \Rightarrow \delta_i = \gamma_i = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i = 0$ □

$\dim(W_1+W_2) = p+n+m = (p+n)+(p+m)-p$. □

04.02.2006 Sa
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF.: NORMA $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

$\|x\| \geq 0 \qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$.

PRÍKLAD NORMY: $\|x\| := \langle x|x\rangle$.

CAUCHY-SCHWARZ: $\forall x,y \in V$ JE $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

DÔKAZ: $\langle x|y\rangle = 0$, POTOM HOTOVÉ.

$\langle x|y\rangle \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0 \quad \exists \alpha : \langle \alpha y - x | x \rangle = 0$.

$\alpha\langle y|x\rangle - \|x\|^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\|x\|^2}{\langle y|x\rangle}}$

$\|\alpha y\| = \sqrt{\langle \alpha y | \alpha y\rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha} \langle y|y\rangle} = |\alpha| \cdot \|y\| =$

$= \frac{\|x\|^2}{|\langle y|x\rangle|} \cdot \|y\| \geq \|x\| \Rightarrow \|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x|y\rangle|$. □

$\|\alpha y\|^2 = \|\alpha y - x + x\|^2 = \|\alpha y - x\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$

PYTHAGORAS: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x|y\rangle = 0$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

DÔKAZ: $\langle x+y | x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle$ □

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

DÔKAZ: $\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \overline{\langle x|y\rangle} + \langle y|y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x|y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x|y\rangle| \leq$

$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ □

SYSTÉM $z_1, \dots, z_n$ SA NAZÝVA ORTONORMÁLNY

$\Leftrightarrow \forall i \neq j \ \langle z_i | z_j \rangle = 0 \quad \forall i \ \|z_i\| = 1$

$\Rightarrow$ LN:

$\sum \alpha_i z_i = 0 \quad \forall k \ \langle 0 | z_k \rangle = \langle \sum \alpha_i z_i | z_k \rangle = \alpha_k = 0$ □

GRAM-SCHMIDTOV ORTOGONALIZAČNÝ PROCES:

NECH $x_1, \dots, x_n$ SÚ LN

PRE $k = 1, \dots, n$ POLOŽ

$y_k \leftarrow x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j$

$z_k \leftarrow \frac{1}{\|y_k\|} y_k$

POTOM $z_1, \dots, z_n$ JE ORTON. SYS., $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)$

DÔKAZ: INDUKCIOU PRE k.

$k=1$: $y_1 \in \bullet x_1 \Rightarrow y_1 \neq 0 \quad \mathcal{L}(z_1) = \mathcal{L}(x_1)$ ZREJME

NECH PLATÍ PRE $k-1$. POTOM

$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j = 0 \Rightarrow x_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$ ✗

$\langle y_k | z_i \rangle = \langle x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle z_j | z_i \rangle =$

$= \langle x_k | z_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | z_j \rangle \langle z_j | z_i \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle z_k | z_i \rangle = \frac{1}{\|y_k\|} \langle y_k | z_i \rangle = 0.$

$x_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}, x_k) \subseteq \mathcal{L}(z_1, \dots, z_k)$

$z_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}, x_k) \subseteq \mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)$ ✓

04.02.2006 Sa
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

BESSELOVA NEROVNOSŤ: $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x|z_i\rangle|^2$

PARSEVALOVA ROVNOSŤ: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x|z_i\rangle| \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_n)$

FOURIEROV ROZVOJ: $x \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_n) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|z_i\rangle z_i$

DÔKAZ: $\left\langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle z_i \,\middle|\, x - \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle z_i \right\rangle =$

$= \langle x|x\rangle - \langle x| \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle z_i\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle z_i \,\middle|\, x\right\rangle +$

$+ \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle z_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n}\langle x|z_j\rangle z_j \right\rangle =$

$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{\langle x|z_i\rangle}\langle x|z_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle\langle z_i|x\rangle +$

$+ \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle \left\langle z_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n}\langle x|z_j\rangle z_j\right\rangle =$

$= \|x\|^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n}|\langle x|z_i\rangle|^2 +$

$+ \sum_{i=1}^{n}\langle x|z_i\rangle \cdot \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle x|z_j\rangle}\cdot\langle z_i|z_j\rangle =$

$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\langle x|z_i\rangle|^2 \geq 0.$

$x \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_n) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i$

$\langle x|z_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i \,\middle|\, z_k\right\rangle = \alpha_k$ □

DEF.: ORTOGONÁLNYM DOPLNKOM PODPRIESTORU W VP V NAZÝVAME $W^\perp := \{x \in V, \langle x|y\rangle$ PRE $\forall y \in W\}$

VETA: $W^\perp$ JE PODPRIESTOR V.

DÔKAZ: $0 \in W^\perp$

$x, y \in W^\perp \Rightarrow \forall z \in W$ JE $\langle x|z\rangle = \langle y|z\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle = 0$

$x \in W^\perp$ ZĽT $\Rightarrow \forall z \ \langle x|z\rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha x|z\rangle = \alpha\langle x|z\rangle = 0.$

VLASTNOSTI ORTOGONÁLNEHO DOPLNKU

1) KEĎ JE $z_1, \dots, z_n$ ORTONORMÁLNA BÁZA W A $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ JE JEJ ROZŠÍRENIE NA ORTONORMÁLNU BÁZU V, POTOM $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE ORTONORMÁLNA BÁZA $W^\perp$
2) $(W^\perp)^\perp = W$
3) $V = W \oplus W^\perp$
4) $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$

DÔKAZ: $W^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in W \ \langle x|y\rangle = 0\}$

1) $x \in W^\perp \Rightarrow x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$

ZREJME $z_{m+1}, \dots, z_n \in W^\perp$

PRETOŽE $\forall x = \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i z_i \in W^\perp$ JE $\langle x|z_k\rangle = 0$ PRE $\forall k \in \{m+1, \dots, n\}$

$\langle x|z_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i | z_k \rangle = \alpha_k = 0$ PRE $\forall k \in \{1, \dots, m\}$

$\Rightarrow$ $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE BÁZA $W^\perp$.

2) ZREJME
3) $x \in W \cap W^\perp \Rightarrow \langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow W \cap W^\perp = \{0\}$
4) z 3)

ORTOGONÁLNA PROJEKCIA:

NECH W JE VEKT. PODP. KONEČNE GEN. VEKT. PRIESTORU V. POTOM PRE $\forall x \in V \ \exists! \ x_w \in W$ TAKÉ, ŽE $\|x - x_w\| = \min\{\|x - y\|, y \in W\}$.

DÔKAZ: POLOŽME $x_w := \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i$, KDE $z_1, \dots, z_m$ JE PEVNE ZVOLENÁ ORTONORMÁLNA BÁZA W. DOKÁŽEME, ŽE PRE $\forall y \in W$ JE $\|x - y\| \geq \|x - x_w\|$. $z_1, \dots, z_n$ JE ORTON. BÁZA V.

T.J. $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle y|z_i\rangle z_i\| \geq \|x - \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i\|$

PLATÍ $\langle x - x_w | x_w - y\rangle = 0$, PRETOŽE $x_w - y \in W$ A

$x - x_w = \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x|z_i\rangle z_i \in W^\perp$

$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \|x - x_w + x_w - y\|^2 = \|x - x_w\|^2 + \|x_w - y\|^2 \geq \|x - x_w\|^2$ PYTAGOROVA VETA

ROVNOSŤ $\Leftrightarrow$ $x_w = y$ $\square$

05.02.2006 Su
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF.: $f: U \to V$ JE LIN. ZOBRAZENIE $\Leftrightarrow$
1) $\forall x,y \in U : f(x+y) = f(x) + f(y)$
2) $\forall x \in U \ \forall \alpha \in T : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

NECH V JE KONEČNE GEN. VEKT. PRIESTOR A W JEHO PODPRIESTOR.
POTOM $f(x) := x_W$ JE LIN. ZOBR.:
DÔKAZ: OZNAČME $z_1, \dots, z_m$ ORTONORMÁLNU BÁZU W, $z_1, \dots, z_m$ V
POTOM $x_W = \sum_{i=1}^{k} \langle x | z_i \rangle z_i$. ZVYŠOK JE UŽ JASNÝ. □

$f(0) = 0$
$f(V)$ JE PODPRIESTOR V.
$N(f) = \{x \in V \ f(x) = 0\}$ JE POD. U

VETA: NECH V A W SÚ VEKT. PRIESTORY $(x_1, \dots, x_n)$ JE BÁZA V.
POTOM $\exists! f: V \to W : f(x_i) = y_i$ PRE DANÉ $y_1, \dots, y_m$
NECH f, g MAJÚ TÚTO VLASTNOSŤ. POTOM
$f(x) = \sum \alpha_i f(x_i) = g(x)$ □

DEF. NECH $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ JE BÁZA V, NECH $x \in V$
POTOM $\exists!$ VEKTOR $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$: $(x_1, \dots, x_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = x$
OZN. $[x]_{\mathcal{B}} = \alpha \in T^n$.

DEF.: NECH V A W SÚ VEKT. PRIESTORY
S BÁZAMI $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ A $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$.
NECH $f: V \to W$ JE LIN. ZOBRAZENIE.
POTOM $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} := \left[[f(x_1)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(x_n)]_{\mathcal{B}'} \right] \in T^{m \times n}$
NAZÝVAME MATICOU ZOBRAZENIA f VZHĽADOM
K BÁZAM $\mathcal{B}$ A $\mathcal{B}'$. $\in T^{m \times n}$

VETA: PRE $\forall x \in V$ JE $[f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [x]_{\mathcal{B}}$
DÔKAZ. NECH $x = (x_1, \dots, x_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$
POTOM $(y_1, \dots, y_m) \cdot \left[[f(x_1)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(x_n)]_{\mathcal{B}'} \right] (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T =$
$= [f(x_1), \dots, f(x_n)] (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = f(x)$ □

VETA: [redacted] f JE IZOMORFIZMUS $\Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ JE REG.

VETA: NECH $f: U \to V$, $g: V \to W$ SÚ LIN. ZOBR.
VP U, V, W MAJÚ BÁZY $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$.
POTOM $g \circ f : U \to W$ JE LIN. ZOBR., $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

DÔKAZ: ZREJME $g \circ f$ JE LIN. ZOBR.
$\forall x \in U$ JE $[(g \circ f)(x)]_{\mathcal{B}''} = [(g \circ f)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} [x]_{\mathcal{B}}$ (hxk)
NAVIAC $[g(f(x))]_{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f(x)]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [x]_{\mathcal{B}}$.
(hxm) (mxk)
$\Rightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

POZNÁMKA: NECH $A, B \in T^{m \times n}$ A $\forall x \in T^n$ JE $Ax = Bx$. POTOM $A = B$.
STAČÍ VOLIŤ $x = e_1, \dots, e_n$:-)

POZNÁMKA: NECH V JE VEKT. PRIESTOR S BÁZOU $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$
POTOM $f: V \to T^n$ $f(x) = [x]_{\mathcal{B}}$ JE IZOMORFIZMUS.
DÔKAZ. OZNAČME $b = (x_1, \dots, x_n)^T$.
PLATÍ $\forall x \in V$ JE $b^T f(x) = b^T [x]_{\mathcal{B}} = x$.
1) f JE DOBRE DEF. ZOBR., PRETOŽE KU KAŽDÉMU $x \in V$ $\exists!$ $[x]_{\mathcal{B}}$.
2) $x, y \in V$ $b^T f(x+y) = x+y = b^T f(x) + b^T f(y) = b^T (f(x) + f(y))$
$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$.
3) $\alpha \in T$, $x \in V$: $b^T f(\alpha x) = \alpha x = \alpha b^T f(x) = b^T (\alpha f(x))$
$\Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
4) $f(x) = f(y) \Rightarrow b^T f(x) = b^T f(y) \Rightarrow x = y$ INJEKCIA
5) NECH $\xi \in T^n$. POTOM $f(b^T \xi) = \xi$
PRETOŽE $b^T f(b^T \xi) = b^T \xi$. SURJEKCIA.

DÔKAZ: NECH $f: V \to W$ JE IZOMORFIZMUS $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ SÚ BÁZY V, W. $\Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ JE REG
$\Rightarrow$) $\exists f^{-1}: W \to V$ IZOMORF. $\Rightarrow \dim V = \dim W = n$ PRETOŽE $f(x_1), \dots, f(x_n)$ JE MÁ W.
$\forall x \in V$ JE $f^{-1} \circ f(x) = x$ $[f^{-1} \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [f^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_n$
$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ JE REG. A $[f^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = ([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$.
$\Leftarrow$) $\Rightarrow$ BOLO $\dim W = \dim V = n$. NEVIEM ZDÔVODNIŤ f^{-1}.

05.02.2006 Sk
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

MAJME VEKTOROVÉ PRIESTORY V A W S BÁZAMI
$\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ A $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$.
NECH $A \in T^{m \times n}$
POTOM $\exists f: V \to W$ LIN ZOBR. TAKÉ, ŽE $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = A$.

DÔKAZ: OZNAČME $b =$ [illegible] $\cdot (y_1, \dots, y_m)^T$
STAČÍ POLOŽIŤ $f(x) := b^T A [x]_{\mathcal{B}}$.
ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $[f(x)]_{\mathcal{B}'} = A [x]_{\mathcal{B}}$
$f(x_i) = b^T A [x_i]_{\mathcal{B}} = b^T A e_i = b^T A_{\cdot i}$ □

DEF.: MAJME VP V NAD T S BÁZAMI $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ A $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$.
POTOM MATICU $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ NAZÝVAME MATICOU PRECHODU
Z $\mathcal{B}$ DO $\mathcal{B}'$. KEĎŽE id JE IZOMORFIZMUS, MUSÍME JE $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$
REGULÁRNA MATICA.

PLATÍ $\forall x \in V$ JE $[x]_{\mathcal{B}'} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [x]_{\mathcal{B}}$

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left[[x_1]_{\mathcal{B}'}, \dots, [x_n]_{\mathcal{B}'} \right]$$

S VÝHODOU MOŽNO POUŽIŤ FAKT, ŽE $id^{-1} = id$ D.

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left([id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \right)^{-1} = \left[[y_1]_{\mathcal{B}}, \dots, [y_n]_{\mathcal{B}} \right]^{-1}.$$

MAJME $f: V \to W$ LINEÁRNE ZOBRAZENIE. NECH $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ JE BÁZA V
A $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$ JE BÁZA W.
ĎALEJ NECH $\hat{\mathcal{B}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ JE BÁZA V A $\hat{\mathcal{B}}' = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)$ JE BÁZA W.
KEĎ POZNÁME $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, ZOSTROJÍME $[f]_{\hat{\mathcal{B}}}^{\hat{\mathcal{B}}'}$.

ZREJME $f = id_W \circ f \circ id_V$

$$\Rightarrow [f]_{\hat{\mathcal{B}}}^{\hat{\mathcal{B}}'} = \underbrace{[id_W]_{\mathcal{B}'}^{\hat{\mathcal{B}}'}}_{m \times m} \cdot \underbrace{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}_{m \times n} \cdot \underbrace{[id_V]_{\hat{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}}_{n \times n}$$

KDE $[id_V]_{\hat{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}} = \left([id_V]_{\mathcal{B}}^{\hat{\mathcal{B}}} \right)^{-1} = \left(\left[[x_1]_{\hat{\mathcal{B}}}, \dots, [x_n]_{\hat{\mathcal{B}}} \right] \right)^{-1}$

$[id_W]_{\mathcal{B}'}^{\hat{\mathcal{B}}'} =$ [illegible] $\left[[y_1]_{\hat{\mathcal{B}}'}, \dots, [y_m]_{\hat{\mathcal{B}}'} \right]$

05.02.2006 Su
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA : SKÚŠKA

V PRIESTORE $\mathbb{Z}_5^4$ MÁME DANÉ BÁZY:

$A = ((1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$B = ((1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

$K = ((1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

NÁJDITE $[id]_{AK}$, $[id]_{KB}$, $[id]_{AB}$

$$[id]_{AK} = [[a_1]_K, [a_2]_K, [a_3]_K, [a_4]_K] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad [x]_K = [id]_A^K [x]_A$$

$$[id]_{KB} = [[e_1]_B, [e_2]_B, [e_3]_B, [e_4]_B] =$$

$$= ([id]_{BK})^{-1} = [[b_1]_K, [b_2]_K, [b_3]_K, [b_4]_K]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

PRÍKLAD: $(1\ 3\ 0\ 2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MAJME VP POLYNÓMOV STUPŇA NAJVIAC 4 NAD $\mathbb{R}$.

BÁZA $A = (x^4+x^3,\ x^3+x^2,\ x^2+x,\ x+1,\ x^4+1)$

$K = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$

1. URČTE $[f_1]_A$ KEĎ $f_1(x) = x^4 - 1$.

$$\begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x^4+x^3) - (x^3+x^2) + (x^2+x) - (x+1) = \underline{\underline{x^4 - 1}}$$

INÝ SPÔSOB RIEŠENIA: NÁJSŤ MATICU PRECHODU $[id]_K^A = ([id]_A^K)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

TJ. $\begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

05.02.2006 S4
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&1&-1\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&-1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1&0&0&0&1&-1\\ 0&0&1&0&1&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&1&-1&1&-1&1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}\\ 0&1&0&0&0&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}\\ 0&0&0&1&0&+\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&+\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [id]_k^{\wedge} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&+1&-1&+1&+1\\ +1&-1&+1&+1&-1\\ -1&+1&+1&-1&+1\\ +1&+1&-1&+1&-1\\ +1&-1&+1&-1&+1 \end{pmatrix}$$

PRÍKLAD $x^{\wedge}-1 \rightsquigarrow (-1,0,0,0,1)^T$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1&+1&-1&+1&+1\\ +1&-1&+1&+1&-1\\ -1&+1&+1&-1&+1\\ +1&+1&-1&+1&-1\\ +1&-1&+1&-1&+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\\-2\\2\\-2\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}$$

MÁTE URČIT $[D_x]_{AK}$, KDE $D_x(f) := f'$

NAJSKÔR URČÍTE $[D_x]_{KK}$ =

$$= [\,[D_x(x^0)]_K, \dots, [D_x(x^4)]_K\,] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ĎALEJ $[D_x]_{AK} = [D_x \circ id]_{AK} = [D_x]_{KK} \cdot [id]_{AK} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

05.02.2006 SU
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

$$\begin{pmatrix} 4&1&0&3&4&0&0\\ 4&3&1&0&2&3&1\\ 4&1&4&0&3&2&4\\ 2&4&1&4&4&3&1\\ 0&4&3&2&2&4&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&4&0&2&1&0&0\\ 0&2&1&2&3&3&1\\ 0&0&4&2&4&2&4\\ 0&1&1&0&2&3&1\\ 0&4&3&2&2&4&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&2&3&0&4&3\\ 0&1&2&1&4&4&3\\ 0&0&1&3&1&3&1\\ 0&0&3&4&3&4&3\\ 0&0&1&3&1&3&1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&4&2&0&0\\ 0&1&0&2&1&0&0\\ 0&0&1&3&1&3&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{BÁZA } U_1 = \left((1,0,0,4,2,0,0)^T, (0,1,0,2,1,0,0)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T\right)$$

HĽADÁME $\ker \begin{pmatrix} 1&3&1&2&3&1&2\\ 3&4&3&1&4&2&4\\ 2&1&4&0&4&0&2 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&3&1&2&3&1&2\\ 0&0&0&0&0&4&3\\ 0&0&2&1&3&2&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&3&1&2&3&1&2\\ 0&0&1&3&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&3&0&4&4&2&3\\ 0&0&1&3&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&3&0&4&4&0&4\\ 0&0&1&3&4&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{pmatrix}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 4x_5 - 4x_7 = 2x_2 + x_4 + x_5 + x_7\\ x_3 &= -3x_4 - 4x_5 - x_7 = 2x_4 + x_5 + 4x_7\\ x_6 &= -2x_7 = 3x_7 \end{aligned}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7$

DOSTÁVAME BÁZU $\left((2,1,0,0,0,0,0)^T, (1,0,2,1,0,0,0)^T, (1,0,1,0,1,0,0)^T, (1,0,4,0,0,3,1)^T\right)$

$$\begin{pmatrix} 2,1,0,0,0,0,0 \\ 1,0,2,1,0,0,0 \\ 1,0,1,0,1,0,0 \\ 1,0,4,0,0,3,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,3,0,0,0,0,0 \\ 0,2,2,1,0,0,0 \\ 0,2,1,0,1,0,0 \\ 0,2,4,0,0,3,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,0,2,1,0,0,0 \\ 0,1,1,3,0,0,0 \\ 0,0,1,1,4,0,0 \\ 0,0,2,4,0,3,1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1,0,0,4,2,0,0 \\ 0,1,0,2,1,0,0 \\ 0,0,1,1,4,0,0 \\ 0,0,0,1,1,4,3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,0,0,4,2,0,0 \\ 0,1,0,2,1,0,0 \\ 0,0,1,3,1,3,1 \\ 0,0,0,1,1,4,3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

IHNEĎ VIDIEŤ, ŽE U_1 JE PODPRIESTOR V_1

06.02.2006 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

$X = [(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,0)]$

$Y = [(2,-1,0), (1,0,-1), (0,-1,1)]$

SÚ 2 BÁZY VP $V = \mathbb{R}^3$ NAD $\mathbb{R}$

NECH $[f]_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

ZISTI, ČI f JE IZOMORFIZMUS. KEĎ ÁNO, POTOM URČI MATICU $[f^{-1}]_{KK}$ KDE $K = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$.

NAJDITE $[f^{-1}]_{YX} = ([f]_{XY})^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{10}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right)$$

SKÚŠKA: $\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -3 & 10 \\ -26 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow$ f JE IZOMORFIZMUS

$$[f^{-1}]_{KK} = [id_V]^K_X \cdot [f^{-1}]^X_Y \cdot [id_V]^Y_K$$

$$[id_V]^Y_K = ([id_V]^K_Y)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

SKÚŠKA: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$$[id_V]_X^K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[f^{-1}]_Y^X = \begin{pmatrix} -\frac{16}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{10}{13} \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

$$[id_V]_K^Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -3 & 10 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -18 & -3 & 11 \\ -31 & -5 & 21 \\ 16 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -18 & -3 & 11 \\ -31 & -5 & 21 \\ 16 & 3 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -26 & -34 & -43 \\ -47 & -63 & -42 \\ 23 & 30 & 20 \end{pmatrix} = [f^{-1}]_{KK}$$

NECH $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, AB JE REGULÁRNÍ

OZNAČME $x_i \in \mathbb{R}^n$: $ABx_i = Ae_i \quad i = 1, \dots, n$

NECH $X = (x_1, \dots, x_n)$. POTOM $ABX = A$

NECH $Ax = 0$. POTOM $ABX_x = 0 \Rightarrow X_x = 0$?

OZNAČME $y_i \in \mathbb{R}^n$ $y_i^T AB = e_i^T B \quad i = 1, \dots, n$

D. $(AB)^T y_i = B^T e_i$

NECH $Y = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix}$. POTOM $YAB = B$?

$n = \operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leq n$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$ □

06.02.2006 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

ZHRNUTIE: DEF. MATICE, OPERÁCIE S MATICAMI, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REG. $\Leftrightarrow$?
+ ELEMENTÁRNE RIADKOVÉ ÚPRAVY $\equiv Q(A\,b)$ NEMENIA
GAUSS-JORDANOVA ELIMINÁCIA: MNOŽINU RIEŠENÍ!

MAJME ŠTVORCOVÚ MATICU $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

PRE $k = 1, \dots, n$ VYKONAJ:

1) NÁJDI $i_0 \geq k$ TAKÉ, ŽE $A_{i_0 k} \neq 0$.
KEĎ TAKÉ i_0 NEEXISTUJE, UKONČI ALGORITMUS → MATICA A JE SINGULÁRNA
2) VYMEŇ RIADKY $A_{k\cdot}$ A $A_{i_0 \cdot}$, 3) $A_{k\cdot} := \frac{1}{A_{kk}} A_{k\cdot}$.
4) PRE $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq k$ VYKONAJ
$A_{i\cdot} := A_{i\cdot} - A_{ik} \cdot A_{k\cdot}$
5) KEĎ JE $k < n$, POLOŽ $k := k+1$ A CHOĎ NA KROK 1)
INAK UKONČI ALGORITMUS.

PLATÍ VETA: KEĎ ALGORITMUS SKONČÍ V KROKU 1), MATICA A JE SINGULÁRNA

A JE REGULÁRNA $\Leftrightarrow$ ALGORITMUS PREBEHNE DO KONCA.

$\Rightarrow$) VIĎ PREDCHÁDZAJÚCA VETA

$\Leftarrow$) ELEM. RIADKOVÉ ÚPRAVY NEMENIA MNOŽINU RIEŠENÍ (O JADRO MATICE)
$Ax = 0 \Rightarrow I_n x = 0$, $x = 0 \Rightarrow$ A JE REG. □

POZNÁMKA: $I_n + bc^T$ $b, c \in \mathbb{R}^n$ JE SINGULÁRNA $\Leftrightarrow c^T b = -1$

DÔKAZ: $\Rightarrow$) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$ $(I_n + bc^T)x = 0$

$x + bc^T x = 0$

$c^T b\, c^T x = -c^T x$ $\quad c^T x \neq 0$

$\Rightarrow c^T b = -1$

$\Leftarrow$) $c^T b = -1$, TOTIŽ $(I_n + bc^T)b = 0$, KDE $b \neq 0$. □

VETA: ELEM. RIADKOVÉ ÚPRAVY NEMENIA RIEŠ. SÚST.

$Ax = b \Rightarrow QAx = Qb$

$QAx = Qb \Rightarrow Q(Ax - b) = 0 \Rightarrow Ax = b$ □

VETA: NECH $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REG., POTOM $\forall b \in \mathbb{R}^n \; \exists! x \in \mathbb{R}^n : Ax = b$.

DÔKAZ. $Ax = b \Rightarrow QAx = Qb \quad x = Qb \quad (QA = I_n)$

VETA: NECH $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REGULÁRNA MATICA.
POTOM $\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

DÔKAZ: OZNAČME x_i $Ax_i = e_i$ $i = 1, \dots, n$
POTOM DEF.: $A^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$
$AA^{-1} = I_n$ (ZREJME)

$A(A^{-1}A - I_n) = (AA^{-1})A - A = 0 \Rightarrow A^{-1}A - I_n = 0$ □

$AA^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n$

$AB = AC = I_n \Rightarrow B = C$

$DA = CA = I_n \Rightarrow$
$\Rightarrow A^T B^T = A^T C^T = I_n \Rightarrow B^T = C^T$

VETA: NECH $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $AB = I_n$.
POTOM A AJ B SÚ REG.

a) $Bx = 0 \Rightarrow ABx = A.0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ B JE REG.

b) $AB = I_n \Rightarrow (B^T A^T) = I_n \Rightarrow A^T$ JE REGULÁRNA $\Rightarrow \exists (A^T)^{-1}$

$Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T = 0^T \Rightarrow x^T A^T (A^T)^{-1} = 0^T \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ A JE REG.
$\Rightarrow$ A JE REG. $\Rightarrow \exists A^{-1} \quad AA^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^T A^T = I_n \Rightarrow A^T$ JE REG.

SHERMAN - MORISOVA INVERZIA:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REG., $b, c \in \mathbb{R}^n$

POTOM $(A + bc^T)$ JE REG. $\Leftrightarrow c^T A^{-1} b \neq -1$
D. $A + bc^T$ JE SING. $\Leftrightarrow c^T A^{-1} b = -1$

$\exists x \neq 0 \quad (A + bc^T)x = 0$
$Ax + bc^T x = 0$
$x + A^{-1} b c^T x = 0$
$c^T A^{-1} b \, c^T x = -c^T x \quad c^T x \neq 0$
$c^T A^{-1} b = -1$

$c^T A^{-1} b = -1$
$\Rightarrow (A + bc^T) A^{-1} b =$
$= AA^{-1} b + b c^T A^{-1} b = 0$
KDE $A^{-1} b \neq 0$ □

VETA: KEĎ $c^T A^{-1} b \neq -1$, POTOM $(A + bc^T)^{-1} = \left(A^{-1} + \frac{1}{1 + c^T A^{-1} b} \cdot A^{-1} b c^T A^{-1}\right)$ ✓

06.02.2006 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF.: MATICU $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($T^{m\times n}$) NAZÝVAME V ODSTUPŇOVANOM TVARE (RREF) $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \le r \le m$ A INDEXY $1 \le j(1) < \dots < j(r) \le n$ TAK, ŽE:

1) $\forall i \in \{1,\dots,r\}$ JE $A_{i1} = A_{i2} = \dots = A_{i,j(i)-1} = 0$, $\boxed{A_{i,j(i)} = 1}$
2) —"— JE $A_{\cdot j(i)} = e_i$
3) $A_{r+1,\cdot} = A_{r+2,\cdot} = \dots = A_{m\cdot} = O^T$.

ÚPRAVA MATICE $\hat{A} \in T^{m\times n}$ DO RREF TVARU POMOCOU GAUSS-JORDANOVEJ ELIMINÁCIE:

1) POLOŽ $i_0 := 1$, $j_0 := 1$, $A := \hat{A}$
2) KEĎ: $\exists i,j$ $i \ge i_0$, $j \ge j_0$: $A_{ij} \neq 0$, POTOM POLOŽ $j_0 := \min\{j,\ j \ge j_0\ \exists i \ge i_0\ A_{ij} \neq 0\}$. KEĎ TAKÉ i,j NEEXISTUJÚ, UKONČI ALGORITMUS.
3) NECH i JE ĽUBOVOĽNÉ $i \ge i_0$ TAKÉ, ŽE $A_{ij_0} \neq 0$.
4) VYMEŇ RIADKY $A_{i_0\cdot} \leftrightarrow A_{i\cdot}$
5) POLOŽ $A_{i_0\cdot} := \frac{1}{A_{i_0 j_0}} \cdot A_{i_0\cdot}$.
6) PRE $\forall i \neq i_0$ POLOŽ $A_{i\cdot} := A_{i\cdot} - A_{ij_0} \cdot A_{i_0\cdot}$.
7) KEĎ JE $i_0 < m \wedge j_0 < n$, POLOŽ $i_0 := i_0 + 1$, $j_0 := j_0 + 1$ A CHOĎ DO BODU 2 INAK UKONČI ALGORITMUS.

VETA: NECH $A, B \in T^{m\times n}$ SÚ MATICE V ODSTUPŇOVANOM TVARE A NECH $A = QB$, KDE $Q \in T^{m\times m}$ JE REGUL. MATICA. POTOM $A = B$. (INDUKCIA PODĽA n)

VETA (HODNOSTNÝ ROZKLAD): NECH $A \in T^{m \times n}$.
POTOM $A = B.C$ $B \in T^{m \times r}$, $C \in T^{r \times n}$,
B MÁ LIN. NEZ. STĹPCE, C MÁ LIN. NEZ. RIADKY.
STAČÍ ZVOLIŤ $B = (A_{\cdot j(1)}, \dots, A_{\cdot j(r)})$, $C = \begin{pmatrix} A^R_{i(1)\cdot} \\ \vdots \\ A^R_{i(r)\cdot} \end{pmatrix}$.

DOKAZ: NECH $A^R = Q.A \Rightarrow A = R.A^R$ $Q, R \in T^{m \times m}$ SÚ REG. MAT., $R = Q^{-1}$.
$A_{\cdot j(k)} = A e_{j(k)} = R.A^R e_{j(k)} = R e_k = R_{\cdot k}$

D. $B = (A_{\cdot j(1)}, \dots, A_{\cdot j(r)}) = (R_{\cdot 1}, \dots, R_{\cdot r}) \begin{pmatrix} A^R_{1\cdot} \\ \vdots \\ A^R_{r\cdot} \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} =$

DOKED $A = R.A^R = (R_{\cdot 1}, \dots, R_{\cdot r}, R_{\cdot r+1}, \dots, R_{\cdot m}) \cdot \begin{pmatrix} A^R_{1\cdot} \\ \vdots \\ A^R_{r\cdot} \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} =$

$= R_{\cdot 1} \cdot A^R_{1\cdot} + \dots + R_{\cdot r} \cdot A^R_{r\cdot} + R_{\cdot r+1} \cdot 0^T + \dots + R_{\cdot m} \cdot 0^T =$

$= (R_{\cdot 1}, \dots, R_{\cdot r}) \begin{pmatrix} A^R_{1\cdot} \\ \vdots \\ A^R_{r\cdot} \end{pmatrix} = B.C$ □

$(u_1, \dots, u_m) \cdot \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} = (u_1, \dots, u_m) \left[\begin{pmatrix} v_1^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0^T \\ 0^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} \right] = u_1 v_1^T + \dots u_m v_m^T$:)

06.02.2006 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA - SKÚŠKA

DEF.: TELESO JE MNOŽINA T SPOLU S BIN. OPERÁCIAMI $+, \cdot : T \times T \to T$ TAKÉ, ŽE:

1) $\forall a,b \in T: \quad a+b = b+a$
2) $\forall a,b,c \in T: \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
3) $\exists 0 \in T: \forall a \in T: \quad a+0 = a$
4) $\forall a \in T \exists b \in T: \quad a+b=0 \quad b=(-a)$
5) $\forall a,b \in T: \quad ab = ba \quad b = a^{-1}$
6) $\forall a,b,c \in T: \quad (ab)c = a(bc)$
7) $\exists 1 \in T \ \forall a \in T: \quad 1a = a$
8) $\forall a \in T \ a \neq 0 \ \exists b \in T: \quad ab = 1$
9) $\forall a,b,c \in T \quad a(b+c) = ab+ac$
10) $0 \neq 1$

$\exists b: \ a.0 + b = 0$
$a.0 = a.0 + a.0 + b =$
$= a(0+0) + b = 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

DEF.: VP V NAD T JE MNOŽINA SPOLU S BIN. OPERÁCIAMI $+: V \times V \to V, \ \cdot : T \times V \to V$ TAKÉ, ŽE:

1) $\forall u,v \in V: \quad u+v = v+u$
2) $\forall u,v,w \in V: \quad (u+v)+w = u+(v+w)$
3) $\exists 0 \in V: \forall u \in V: \quad u+0 = u$
4) $\forall u \in V \ \exists v \in V: \quad u+v = 0 \quad v = (-u)$
5) $\forall \alpha,\beta \in T \ \forall u \in V: \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
6) $\forall u \in V: \quad 1.u = u$
7) $\forall \alpha,\beta \in T \ \forall u,v \in V: \quad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u, \ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$0.\vec{u} = \alpha.\vec{0} = \vec{0}$
$(-1).u = (-u) \qquad u + (-1).u = [1+(-1)]u = 0u = \vec{0}$ □

DEF.: W JE VEKT. PODPRIESTOR $V \Leftrightarrow W \subseteq V$ A W JE VEKT. PRIESTOR

VETA: W JE VEKT. PODPRIESTOR $V \Leftrightarrow$

1) $0 \in W$
2) $\forall u,v \in W \quad u+v \in W$
3) $\forall \alpha \in T \ \forall u \in W \text{ JE } \alpha u \in W.$

DEF.: LIN. KOMB. $u_1, \dots, u_n \in V$ * V JE VP NAD T
JE VÝRAZ $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$.

NECH $U \subseteq V$, KDE V JE VP NAD T. POTOM
SPAN $U = \mathcal{L}(U)$ = PRIENIK $\forall$ VP W NAD T TAKÝCH, ŽE $U \subseteq W$.

VETA: $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \ \alpha_1, \dots \alpha_n \in T\}$
DEF.: LIN. (NE)ZÁVISLOSŤ, SYSTÉM GENERÁTOROV;
VETA: $\mathcal{L}(u_1, \dots, u_m) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow$
$\forall i \in \{1, \dots, m\}: \ u_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

VETA: (STEINITZOVA VETA): NECH $u_1, \dots, u_m$ JE LN SÝST. VEKT.,
$v_1, \dots, v_n$ JE SG VEKT. P. V NAD T. POTOM:
1) $m \leq n$
2) $\exists$ NAVZÁJOM RÔZNE INDEXY $k_1, \dots, k_{n-m} \in \{1, 2, \dots, n\}$:
$u_1, \dots, u_m, v_{k_1}, \dots, v_{k_{n-m}}$ JE SG VEKT. P. V.
DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA m).

DEF.: BÁZA VP. V NAD T JE LN SG.
$\dim V$ = POČET VEKT. BÁZY

DEF.: VP SO SKALÁRNYM SČÍNANÍM NAZÝVAME KAŽDÝ VP
V NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SPOLU S $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) TAK, ŽE:
1) $\forall x \in V: \ \langle x|x \rangle \geq 0 \quad \langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\forall x, y, z \in V: \ \langle x+y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$
3) $\forall \alpha \in T \ \forall x \in V: \ \langle \alpha x|y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4) $\forall x, y \in V: \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$

NORMA $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$:
1) $\forall x \in V \ \|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\forall x, y \in V \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3) $\forall \alpha \in T \ \forall x \in V: \ \|\alpha x\| = \alpha \|x\|$.

PRÍKLAD NORMY: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

06.02.2006 M6
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA – SKÚŠKA

VETA (CAUCHY-SCHWARZ): $\forall x,y \in V : |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ $\Rightarrow$ Δ-NER.

LP-NORMA $\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$
HÖLDEROVA NEROVNOSŤ

DEF.: SYS. V. $(v_1, \dots, v_n)$ VP V NAD $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ SA NAZÝVA ORTONORMÁLNA BÁZA $\Leftrightarrow$ 1) $\forall i: \|v_i\| = 1$ $\forall i \neq j \langle v_i|v_j\rangle = 0$

GRAM-SCHMIDTOV ORTOGONALIZAČNÝ PROCES
NECH $x_1, \dots, x_n$ JE BÁZA VP V NAD $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$
PRE $k = 1, \dots, n$ POLOŽ

$$y_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x|z_i\rangle z_i$$

$$z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k$$

VETA: KAŽDÚ MNOŽINU ORTON. VEKT. SA DÁ DOPLNIŤ NA ORTON. BÁZU.
NECH W JE VEKT. PODPR. VP V NAD $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. POTOM NECH $z_1, \dots, z_k$ JE ORTN. BÁZA W
BESSELOVA NEROVNOSŤ: $\forall x \in V$ JE $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle x|z_i\rangle|^2$
ROVNOSŤ $\Leftrightarrow$ $x \in W$.
PARSEVALOVA ROVNOSŤ: $\forall x \in W$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x|z_i\rangle|^2$
FOURIEROV ROZVOJ: $\forall x \in W$ JE $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|z_i\rangle z_i$.

DEF.: NECH W JE VEKT. PODPR. V NAD $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.
POTOM $W^\perp := \{u \in V : \forall v \in W \text{ JE } \langle u|v\rangle = 0\}$
ORTOGON. DOPLNOK W.
VETA: NECH $z_1, \dots, z_m$ JE ORTON. BÁZA W, $z_1, \dots, z_n$ V.
POTOM $W^\perp$ JE PODPR. V A PLATÍ, ŽE $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE BÁZA $W^\perp$

$$V = W \oplus W^\perp, \quad W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}, \quad (W^\perp)^\perp = W$$

DEF. ORTOGONÁLNA PROJEKCIA $V \to W$ $x \mapsto x_W$
JE $x_W \in W$: $\forall y \in W$ $\|x - x_W\| \leq \|x - y\|$
VETA: $x_W = \sum_{i=1}^{m} \langle x|z_i\rangle z_i$
$\Rightarrow$ ORT. PROJEKCIA JE LIN. ZOBR.
$\forall x \in V$ JE $x = x_W + x_{W^\perp}$.

NECH V A W SÚ VP NAD T

DEF.: $f: V \to W$ SA NAZÝVA LIN. ZOBR. Z V DO W $\Leftrightarrow$

1) $\forall u,v \in V: f(u+v) = f(u) + f(v)$
2) $\forall u \in V \; \forall \alpha \in T: f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$f(V)$ JE VEKT. PODP. W, $f(0)=0$

$\ker f = N(f) = \{x \in V : f(x) = 0\}$

f JE PROSTÉ $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$.

VETA: f JE JEDNOZNAČNE URČENÉ HODNOTAMI $f(x_i)$ BÁZY $V = x_1, \dots, x_n$

DEF.: BIJEKTÍVNE LIN. ZOBR. = IZOMORFIZMUS.

VETA: $\mathcal{B}$ JE BÁZA V, POTOM $f(x) = [x]_{\mathcal{B}}$ JE IZOMORF. $V \to T^{\dim V}$

DEF.: MATICA LIN. ZOBR. $f: V \to W$ $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_m)$
$\mathcal{B}$ JE BÁZA V, $\mathcal{B}'$ JE BÁZA W

JE $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left([f(x_1)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(x_n)]_{\mathcal{B}'} \right) \in T^{m \times n}$

MATICA PRECHODU

VETA: $\forall x \in V \quad [f(x)]_{\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [x]_{\mathcal{B}}$.