Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Lineární algebra II

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: Mgr. Milan Hladík, Ph.D.
E-mail: Milan.Hladik@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/`

Garant: doc. RNDr. Jiří Fiala, Ph.D.
E-mail: fiala@kam.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~fiala/`

Anotace: Pokračování předmětu Lineární algebra I - speciální matice, determinanty, vlastní čísla, aplikace lineární algebry.

Sylabus:

1. Prostory se skalárním součinem.
2. Ortogonální (resp. unitární) matice.
3. Determinanty.
4. Pozitivně (semi)definitní matice.
5. Vlastní čísla, zvl. symetrických matic.
6. Aplikace lineární algebry.

22.02.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

GRAM-SCHMIDTOV ORTOGN. POSTUP

MÁME VEKT. PRIESTOR V NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKAL. SČÍTANÍM S BÁZOU $(x_1, \dots, x_n)$. DEFINUJEME

$$y_k := x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle y_k | z_i \rangle z_i \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

$$z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k .$$

POTOM $(z_1, \dots, z_n)$ JE ORTONORMÁLNA BÁZA V.

DÔKAZ. DOKÁŽEME INDUKCIOU, ŽE: $z_1, \dots, z_k$ SÚ DOBRE DEF., $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k) = \mathcal{L}(z_1, \dots, z_k)$, $z_1, \dots, z_k$ SÚ JEDN., NAVZÁJOM KOLMÉ.

$k=1$, POTOM $y_1 = x_1$, $z_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1$, TVRDENIE ZREJME PLATÍ

PREDPOKLADÁME, ŽE TOTO TVRDENIE PLATÍ PRE $k-1$.

POTOM $y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle y_k | z_i \rangle z_i \neq 0$, PRETOŽE

KEĎ $y_k = 0$, POTOM $x_k \in \mathcal{L}(z_1, \dots, z_{k-1}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_{k-1})$, ČO JE SPOR S TÝM, ŽE $x_1, \dots, x_k$ SÚ LN.

$\Rightarrow z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ JE DOBRE DEF., JEDNOTKOVÝ VEKTOR

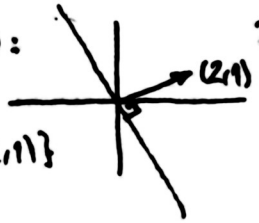
$\vdots$ ĎALŠÍ POSTUP JE ZREJMÝ :-) □

VETA: W JE PODPRIESTOR V (KON. GEN.), POTOM ĽUBOVOĽNÚ ORTONORM. BÁZU W MOŽNO ROZŠÍRIŤ NA ORTON. BÁZU V.

DÔKAZ: POMOCOU STEINITZOVEJ VETY A GRAM-SCHMIDTOVHO ALG.

DEF.: NECH W JE PODMNOŽINA VEKT. PP V NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKAL. S. POTOM $W^\perp := \{x \in V, \forall y \in W \; x \perp y\}$.

PRÍKLAD:



$W = \{(2,1)\}$



VETA: NECH W JE MNOŽINA VEKTOROV Z VP V NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKAL. SÚČINOM (KONEČNE GEN.). POTOM $W^\perp$ JE PODPRIESTOR V.

VETA: NECH W JE PODPRIESTOR VP V NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKAL. SÚČ. $z_1, \dots, z_m$ JE ORTON. BÁZA W, $z_1, \dots, z_n$ JE ORTON. BÁZA V. ($m \le n$) POTOM $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE ORTON. BÁZA $W^\perp$.

DÔSLEDOK: a) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$

b) $(W^\perp)^\perp = W$.

c) $W \cap W^\perp = \{0\}$

DÔKAZ: ZREJME $z_{m+1}, \dots, z_n \in W^\perp$, $\mathcal{L}(z_{m+1}, \dots, z_n) \subseteq W^\perp$.

NECH $x = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \in W^\perp$.

POTOM $\langle x \mid z_k \rangle = 0$ PRE $k = 1, \dots, m$ (PRETOŽE $z_1, \dots, z_m \in W$)

TJ. $\langle \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \mid z_k \rangle = \alpha_k = 0$

$\Rightarrow x = \alpha_{m+1} z_{m+1} + \dots + \alpha_n z_n \Rightarrow x \in \mathcal{L}(z_{m+1}, \dots, z_n)$,

D. $W^\perp \subseteq \mathcal{L}(z_{m+1}, \dots, z_n)$. □

👁: $U \subseteq V \Rightarrow V^\perp \subseteq U^\perp$

$\ker A = (\mathcal{R}(A))^\perp$

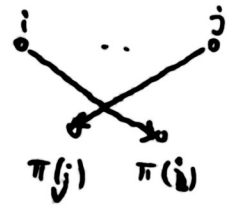
DEF: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\mathbb{C}^{n \times n}$) SA NAZÝVA ORTONORMÁLNA $\Leftrightarrow$ $AA^T = I_n$ $A^T A = I_n$

DEF: PERMUTÁCIA π JE BIJEKCIA $X \to X$

S_n JE MN. V PERM. π PRE $X = \{1, \dots, n\}$.

$|S_n| = n!$

DVOJICA (i, j) PRE $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $i < j$ JE INVERZIA PERMUTÁCIE π $\Leftrightarrow$ $\pi(i) > \pi(j)$.



$I(\pi)$ = MNOŽINA V INVERZIÍ PERM. π

ZNAMIENKO PERM. π JE $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{|I(\pi)|}$

VETA: $\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$

22.02.2006 Ut
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

DEF.: NECH $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\mathbb{C}^{n\times n})$ POPR. $T^{n\times n}$.

POTOM DETERMINANT A JE

$$\det A = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \cdot \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)} \in T$$

PRÍKLAD: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

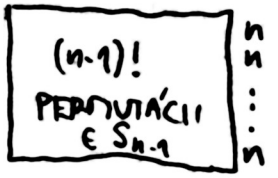
π $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

01.03.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

TRANSPOZÍCIA π JE PERM.: $\pi(i_0)=j_0 \Rightarrow \pi(j_0)=i_0$ $\pi(i)=i$ $\forall i \neq i_0, j_0$ $(i_0 \neq j_0,\ i_0 < j_0)$
ZNAMIENKO TRANSPOZÍCIE JE RÁVNÉ -1.

KAŽDÁ PERMUTÁCIA JE ZLOŽENIE TRANSPOZÍCIÍ.
DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA n)
$n=2$... ZREJME $(2,1)$ $(1,2)=(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix})\cdot(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix})$
NECH TVRDENIE PLATÍ PRE $n-1$. DOKÁŽEME JEHO PLATNOSŤ PRE n.



NECH $\pi \in S_n$. KEĎ $\pi(n)=n \Rightarrow \pi$ JE URČITÉ ZLOŽENIE NEJAKÝCH TRANSPOZÍCIÍ.
KEĎ $\pi(n)=k\neq n$ UVÁŽME TRANSPOZÍCIU t TAKÚ, ŽE $\pi\circ t(n)=n$. POTOM $\pi\circ t$ VIEME ZAPÍSAŤ AKO ZLOŽENIE TRANSPOZÍCIÍ A $(\pi\circ t)\circ t=\pi$, ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ. □

$$\det A \overset{\text{def}}{:=} \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

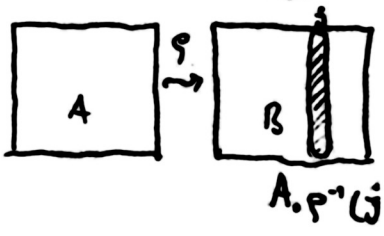
VETA: $\det A = \det A^T$
DÔKAZ:
$$\det A = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\pi(i)} =$$
$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} A^T_{\pi(i),i} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} A^T_{i,\pi^{-1}(i)} =$$
$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) A^T_{i,\pi^{-1}(i)} = \sum_{\pi^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) A^T_{i,\pi^{-1}(i)} = \det(A^T).\ \square$$

VETA: KEĎ PREUSPORIADAME STĹPCE (RESP. RIADKY) MATICE A POMOCOU PERMUTÁCIE ϱ NA MATICU B, POTOM

$$\det B = \operatorname{sgn} \varrho \cdot \det A .$$

DÔKAZ. $\det B = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \prod_{i=1}^{n} A_{i,\, \varrho^{-1}\circ\pi(i)} =$

$$= \operatorname{sgn} \varrho^{-1} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \varrho^{-1}\circ\pi \prod_{i=1}^{n} A_{i,\, \varrho^{-1}\circ\pi(i)} = \operatorname{sgn} \varrho \cdot \det A \quad \square$$



PRE RIADKY STAČÍ UVAŽOVAŤ $\det A^T$

DÔSLEDOK: PREHODENÍM 2 RIADKOV (RESP. STĹPCOV) SA MENÍ ZNAMIENKO DETERMINANTU

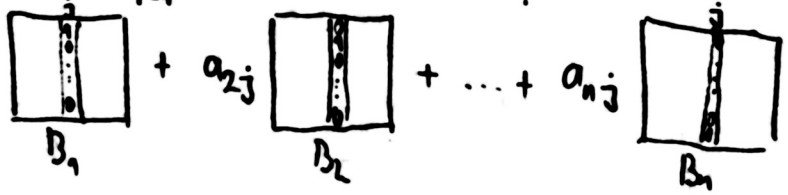
DÔSLEDOK: MATICA S DVOMA ROVNAKÝMI RIADKAMI MÁ 0 DETERMINANT

ZNAČENIE: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ BUDEME ZNAČIŤ $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ MATICU, KT. DOSTANEME Z A VYNECHANÍM i-TEHO RIADKU A j-TEHO STĹPCA.

$(A)_{i,j} = a_{i,j}$ JE PRVOK MAT. A.

VETA: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ PRE DANÉ $j \in \{1, \dots, n\}$

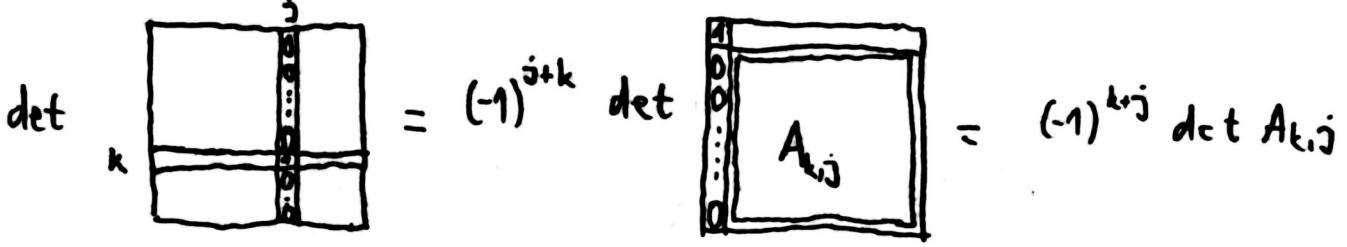
$$A = a_{1j} \; B_1 + a_{2j} \; B_2 + \dots + a_{nj} \; B_n$$



ZREJME

$$\det A = a_{1j} \det B_1 + \dots + a_{nj} \det B_n$$

UVAŽUJME B_k



$$\Rightarrow \det B_k = (-1)^{k+j} \det A_{kj}$$

$\square$

01.03.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA: NECH B VZNIKNE Z A VYNÁSOBENÍM i-TEHO RIADKU ČÍSLOM t. POTOM $\det B = t \cdot \det A$.

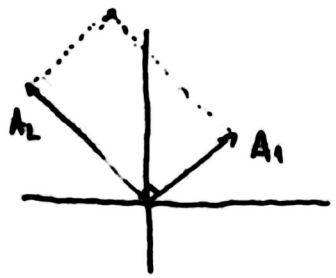
VETA: NECH B VZNIKNE Z A PRIPOČÍTANÍM i-TEHO RIADKA K j-TEMU $(i \neq j)$. POTOM $\det B = \det A$.

(PODOBNE PRE STĹPCE)

DÔSLEDOK: DET. MATICE A JE NENULOVÝ $\Leftrightarrow$ A JE REGULÁRNA.

GEOM. INTERPRETÁCIA DETERMINANTU $\det A$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

NECH RIADKY MATICE A SÚ NA SEBA KOLMÉ (ŠTAND. SKAL. SÚČIN) A ŽIADEN RIADOK NIE JE NULOVÝ



OBJEM ROVNOBEŽNOSTENU VRČENÉHO VEKT. $A_{1.}, \dots, A_{n.}$ JE $\|A_{1.}\| \dots \|A_{n.}\|$

UVAŽUJME $A \cdot A^T$. $AA^T = \begin{pmatrix} \|A_{1.}\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|A_{n.}\|^2 \end{pmatrix}$

$\det(A \cdot A^T) = (\text{OBJEM ROVN...})^2$

08.03.2006 Ke
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

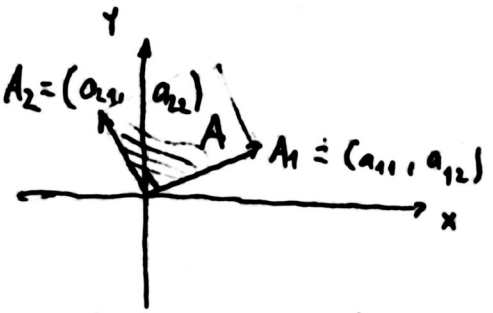
VETA O NÁSOBENÍ DETERMINANTU: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
DÔKAZ: KEĎ A JE SING., POTOM TVRDENIE PLATÍ
NECH A JE REGULÁRNA.
POTOM $A = Q_1 \dots Q_l$
Q_i JE MATICA EL. ÚPRAVY

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \dots E_l \cdot B) = *$$

KEĎ JE E_1 MATICA ÚPRAVY NÁSOBENIA RIADKU REÁL. ČÍSLOM t
POTOM $* = t \cdot \det(E_2 \dots E_l \cdot B) = \det E_1 \cdot \det(E_2 \dots E_l \cdot B)$
PODOBNE PRE MATICU ÚPRAVY PRIČÍTANIA j-TEHO RIADKU K i-TEMU

$$\Rightarrow * = \det E_1 \dots \det E_l \cdot \det B.$$

ALE PRE $B = I$ JE $\det(E_1 \dots E_l) = \det E_1 \dots \det E_l = \det A$ □

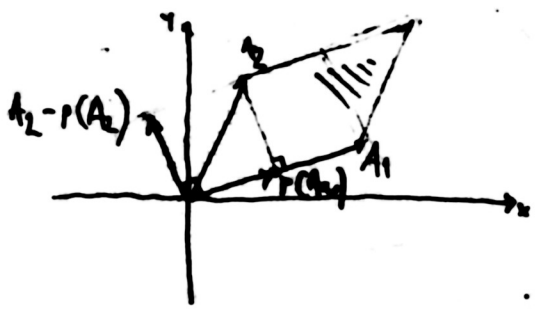


OBSAH OBDĹŽNIKA A JE ZREJME
$\|A_1\| \cdot \|A_2\|$

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ NECH RIADKY MATICE A SÚ NA SEBA KOLMÉ

$\Rightarrow$ ZREJME $\det(AA^T) = \prod_{i=1}^{n} \|A_i\|^2 = (\mathrm{Vol}(A))^2$
$\det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$

$\Rightarrow \mathrm{Vol}(A) = |\det A|$ Vol A JE OBJEM



$p(A_2) = \langle A_2 | A_1^0 \rangle A_1^0$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 - p(A_2) \end{pmatrix}$

ZREJME $\det A = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 - p(A_2) \end{pmatrix}$

ZREJME $\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(A') = |\det A'| = |\det A|$

VO VŠEOBECNOSTI $\mathrm{Vol}(A) = |\det A|$.

UVAŽUJME LIN. ZOBRAZENIE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $f(x) = Ax$ (A → MATICA LIN. ZOBRAZENIA)

ZREJME $f(e_i) = A_{\cdot i}$. ⇒ f TRANSFORMUJE KOCKU NA NEJAKÝ ROVNOBEŽNOSTEN

$Vol(I_n) = 1$, $Vol(A) = |\det A|$

VETA (O INVERZNEJ MATICI): PRE REG. MATICU A PLATÍ

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}{\det A}$$

DÔKAZ. OZNAČME B MATICU, $B_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

$$(B.A)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} A_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A_{ji} \, A_{jk} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} & & i & & \\ & & a_{1k} & & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{nk} & & \\ & & i & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{cases} \det A & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow B.A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n$$

$$\Rightarrow \frac{B}{\det A} \cdot A = I_n = A^{-1} A \quad \square$$

VETA (CRAMEROVO PRAVIDLO): KEĎ JE A REG. MATICA, POTOM JEDINÉ RIEŠENIE $Ax = b$ JE

$$x_i = \frac{\det A_{i \leftarrow b}}{\det A}$$, KDE $A_{i \leftarrow b}$ JE MATICA, KT. VZNIKLA

Z MATICE A NAHRADENÍM i-TEHO STĹPCA VEKTOROM b.

DÔKAZ: VIEME, ŽE $x = A^{-1} . b$

$$\Rightarrow x_{i_0} = (A^{-1} b)_{i_0} = \sum_{k=1}^{n} (A^{-1})_{i_0 k} \, b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{i_0+k} \cdot \det(A_{k i_0}) \, b_k}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} & & i_0 & & \\ & & b_1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & b_n & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ A \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\square$

08.03.2006 Mc
PETER ČERNO

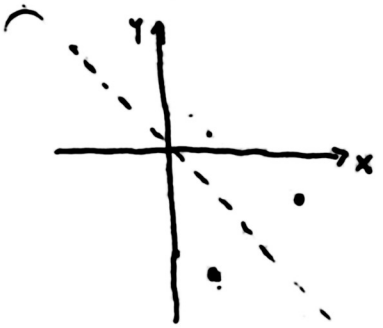
LINEÁRNA ALGEBRA II

UVAŽUJME VP V NAD T, LIN. ZOBR. $f: V \to V$.
? KTORÉ VEKTORY SA ZOBRAZIA (SKRÚTIA) NA SEBA $f(x)=x$

DEF.: $\lambda \in T$ JE VLASTNÉ ČÍSLO ZOBR. f, KEĎ $\exists\, x \neq 0$ TAK, ŽE $f(x) = \lambda \cdot x$.

VLASTNÝ VEKTOR PRÍSLUŠNÝ VLASTNÉMU ČÍSLU λ JE KAŽDÝ NENULOVÝ VEKTOR $x \in V$: $f(x) = \lambda x$.

PRÍKLAD: $V = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (-y, -x)$



PLATÍ $\lambda = 1$, PRETOŽE
$f(-1,1) = 1 \cdot (-1,1)$

$\lambda = -1$, $f(1,1) = -1 \cdot (1,1)$

VETA: KEĎ JE v VLASTNÝ VEKTOR f, $t \in T$ $t \neq 0$, POTOM tv JE VLASTNÝ VEKTOR f.

DEF.: $A \in T^{n \times n}$ POTOM $\lambda \in T$ JE VLASTNÉ ČÍSLO MATICE A, KEĎ $\exists x \in T$ $x \neq 0$: $Ax = \lambda x$
x JE POTOM VLASTNÝ VEKTOR PRÍSLUŠNÝ λ.

PRÍKLAD: WEBOVÉ STRÁNKY
$A_{ij} = 1$ $\Leftrightarrow$ STRÁNKA j ODKAZUJE NA STRÁNKU i
INAK $A_{ij} = 0$

HĽADÁME VÁHY $x_1, \ldots, x_n$ TAK, ABY
$\forall i$ $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = A_{i\circ} \cdot x$

TJ. HĽADÁME x TAKÉ, ŽE $\lambda x = Ax$

VETA: NECH f JE LIN. ZOBR. A $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ SÚ NAVZÁJOM RÔZNE VL. ČÍSLA ZOBR. f. $x_1, \dots, x_k$ SÚ VL. VEKTORY PRÍSLUŠNÉ TÝM VL. ČÍSLAM. POTOM $x_1, \dots, x_k$ SÚ LN.

15.03.2006 Wk
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA: NECH f JE LIN. ZOBR. $f: V \to V$,
$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ SÚ NAVZÁJOM RÔZNE VL. ČÍSLA A
$u_1, \dots, u_k$ SÚ ZODPOVEDAJÚCE VEKTORY,
POTOM SÚ TIETO VEKTORY LIN. NEZÁVISLÉ.

DÔKAZ (MAT. INDUKCIA PODĽA k).
PRE $k=1$ JE $u_1 \neq 0 \Rightarrow$ LIN. NEZ.
NECH TVRDENIE PLATÍ PRE $k-1$.
UVAŽUJME $a_1, \dots, a_k$: $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$.

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i u_i = 0$$

$$\lambda_k \left(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (a_i \lambda_i - a_i \lambda_k) u_i = \sum_{i=1}^{k-1} (a_i \lambda_i - a_i \lambda_k) u_i = 0$$

$\Rightarrow a_i \lambda_i - a_i \lambda_k = 0$ PRE $i = 1, \dots, k-1$ $\quad (\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ ☹)

$\Rightarrow a_i = 0$ PRE $i = 1, \dots, k-1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = a_k u_k = 0 \Rightarrow a_k = 0$. □

DÔSLEDOK: MATICA $A \in T^{n \times n}$ MÁ NAJVIAC n RÔZNYCH VLASTNÝCH ČÍSIEL.

DEFINÍCIA: ŠTVORCOVÉ MATICE A A A' SÚ NAZÝVANÉ PODOBNÉ, KEĎ EXISTUJE REGULÁRNA MATICA R TAKÁ, ŽE $A' = R^{-1} A R$. $\quad (A = R A' R^{-1}) \Rightarrow$ SYMETRICKÁ VLASTNOSŤ

VETA: KEĎ SÚ A A A' PODOBNÉ MATICE (TJ. $A = R^{-1} A' R$)
A λ JE VL. ČÍSLO MAT. A, x JE PRÍSL. VL. VEKTOR,
POTOM λ JE VL. ČÍSLO MAT. A', $Y = Rx$ JE PRÍSL. VL. VEKTOR.

DÔKAZ. CHCEME UKÁZAŤ $A'Y = \lambda Y$. ZREJME $Y \neq 0$.

$$RAR^{-1} \cdot Rx = RAx = R \cdot (\lambda x) = \lambda (Rx) = \lambda y. \quad \square$$

DEFINÍCIA: MATICA A JE DIAGONIZOVATEĽNÁ, KEĎ JE PODOBNÁ NIEJAKEJ DIAGONÁLNEJ MATICI.

POZOROVANIE: KEĎ JE D DIAGONÁLNA MATICA.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

POTOM KAŽDÝ PRVOK NA DIAGONÁLE JE VLASTNÉ ČÍSLO.

VETA: KEĎ MÁ MATICA A n NAVZÁJOM RÔZNYCH VLASTNÝCH ČÍSIEL, POTOM JE DIAGONIZOVATEĽNÁ. (NEPLATÍ OPAČNE)

DÔKAZ: OZNAČME $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ VL. ČÍSLA MAT. A, $u_1, \dots, u_n$ PRÍSL. VL. VEKTORY (SÚ LN)

POLOŽME $R = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$$A \cdot R = (Au_1, \dots, Au_n) = (\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) =$$

$$= (u_1, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix} = R \cdot D$$

$\Rightarrow R^{-1} \cdot A \cdot R = D$ A A D SÚ SI PODOBNÉ. □

VETA: MATICA A JE DIAGONIZOVATEĽNÁ $\Leftrightarrow$ MÁ n LN VLASTNÝCH VEKTOROV.

$\Leftarrow$) VIĎ VYŠŠIE

$\Rightarrow$) EXISTUJE REG. MATICA R TAK, ŽE $R^{-1}AR = D$ JE DIAGONÁLNA MATICA, T.J. $AR = RD$.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$$

UVAŽUJME $R = (u_1, \dots, u_n)$

POTOM $(AR)_{\cdot j} = AR_{\cdot j} = A \cdot u_j$

$(RD)_{\cdot j} = R \cdot D_{\cdot j} = R \cdot (\lambda_j e_j) = \lambda_j R_{\cdot j} = \lambda_j u_j$

$\Rightarrow A u_j = \lambda_j u_j \Rightarrow u_1, \dots, u_n$ SÚ VL. VEKTORY

KEĎŽE R JE REG. $\Rightarrow$ SÚ LIN. NEZÁVISLÉ. □

POZOROVANIE: KEĎ JE A MATICA LIN. ZOBR. $f: V \to V$ VOČI BÁZI $\mathcal{B}$;
KEĎ JE A' MATICA LIN. ZOBR. f VOČI BÁZI $\mathcal{B}'$,
POTOM A A A' SÚ PODOBNÉ.

DÔKAZ: $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, $A' = [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

KDE $T = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ JE REG. A $[id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = T^{-1}$,

T.J. $A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$. □

15.03.2005
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: $\mathbb{R}^2$: $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$ $\mathcal{B}$ .. KANONICKÁ BÁZA



$\lambda_1 = 1 \quad \vec{a} = (1,0)^T$
$\lambda_2 = 2 \quad \vec{b} = (1,1)^T$

$\mathcal{B}' = \{(1,0)^T, (1,1)^T\}$ JE BÁZA

VLASTNÉ: $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

DÚ: SPOČÍTAŤ $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $[id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$

PRÍKLAD: $\mathbb{R}^2$ $f(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} x$

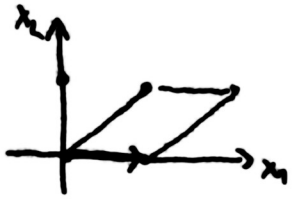
POZNÁMKA: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
$x \neq 0$ $x \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$$
$$\lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1 = 0$$
$$D = 4\cos^2\alpha - 4 \leq 0$$

$D = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

IBA PRE $\alpha = k\pi$ MÁ f VL. ČÍSLO, RESP. VL. VEKTOR.

PRÍKLAD: $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$



IBA JEDNO VL. ČÍSLO : $\lambda_1 = 1$, VL. VEKTOR $(1,0)^T$.

VÝPOČET MOCNIN MATICE:
DANÉ A A k, SPOČÍTAŤ A^k. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

KEĎ $A = R^{-1} D R$, POTOM

$A^n = (R^{-1} D R)^k = R^{-1} D R R^{-1} D R \dots R^{-1} D R = R^{-1} D^k R =$

$= R^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} R .$

DEFINÍCIA: NECH A JE ŠTVORCOVÁ MATICA NAD T.
CHARAKTERISTICKÝ MNOHOČLEN MATICE A JE
$P_A(t) = \det(A - tI)$.

VETA: ČÍSLO $\lambda \in T$ JE VL. ČÍSLO MATICE A
$\Leftrightarrow$ λ JE KOREŇ $P_A(t)$.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) KEĎ $\lambda \in T$ $Ax = \lambda x$ PRE NEJAKÉ $x \neq 0$

$\Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow A - \lambda I$ JE SING. $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

$\Leftarrow$) KEĎ $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow A - \lambda I$ JE SING. $\Rightarrow$

$\exists x \neq 0 : (A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x$. □

22.03.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: VP V VŠETKÝCH REÁLNYCH FUNKCIÍ NA $(0,1)$, KTORÉ MAJÚ DERIVÁCIE V RÁDOV.

UVAŽUJME $F: V \to V$: $F(f) = f'$ PRE $\forall f \in V$

AKÉ SÚ VLASTNÉ ČÍSLA F ?

POZOROVANIE: KAŽDÉ $\lambda \in \mathbb{R}$ JE VL. ČÍSLO F.

UVAŽUJME FUNKCIU $f(x) = e^{\lambda x}$ $\forall x \in (0,1)$

POTOM $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$ $\forall x \in (0,1)$

TJ. $\underline{\underline{F(f) = \lambda f}}$.

PRÍKLAD: UVAŽUJME VP V V POSTUPNOSTÍ $(a_n)_0^\infty$ $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \mathbb{N}_0$

PRIČOM $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ PRE $\forall i \geq 2$.

$\Rightarrow$ CELÁ POSTUPNOSŤ JE URČENÁ ČLENMI a_0, a_1.

UVAŽUJME LIN. ZOBR. $F: V \to V$

$F((a_0, a_1, \dots)) = (a_1, a_2, \dots)$

AKÉ SÚ VL. ČÍSLA F ?

$\Rightarrow$ HĽADÁME λ : $\lambda a_0 = a_1$, $\dots$, $\lambda a_{i-1} = a_i$ PRE $\forall i \in \mathbb{N}$.

$a_i = \lambda a_{i-1}$, TJ. $a_i = \lambda^i a_0$ PRE $\forall i \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow (a_0, a_1, \dots) = a_0 (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$

KDE $(1, \lambda, \dots) \in V$

MUSÍ BYŤ $\lambda^2 = \lambda + 1$, TJ. $\lambda = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

CHARAKTERISTICKÝ POLYNÓM MATICE A JE $p_A(t) = \det(A - t.I)$

PLATÍ λ JE VL. ČÍSLO $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$.

$\Rightarrow$ VL. ČÍSLA MATICE A SÚ 1 A -1.

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = -(1-t)t - 1 = t^2 - t - 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ SÚ VLASTNÉ ČÍSLA MATICE A.

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(t) = t^2 + 1$

$\Rightarrow$ A NEMÁ VLASTNÉ ČÍSLA NAD $\mathbb{R}$.

VETA: PODOBNÉ MATICE MAJÚ ROVNAKÉ CHARAKTERISTICKÉ POLYNÓMY.

DÔKAZ. UVAŽUJME $A \in T^{n \times n}$, $A' = RAR^{-1}$, KDE $R \in T^n$ JE REG.

$P_{A'}(t) = \det(A' - t.I) = \det(RAR^{-1} - t.I) =$

$= \det(RAR^{-1} - t.RR^{-1}) = \det(R(AR^{-1} - t.R^{-1})) =$

$= \det(R.(A - t.I)R^{-1}) = \det R . \det(A - t.I) . \det R^{-1} =$

$= \det(A - t.I)$ □

LIN. ZOBRAZENIE $f: V \to V$ $\Rightarrow$

VOČI BÁZE $\mathcal{B}$ MÁ MATICU A

$\mathcal{B}'$ MÁ MATICU A'

$\Rightarrow$ MATICE A A A' SÚ SI PODOBNÉ $\Rightarrow$

MAJÚ TAKÝ ISTÝ CHARAKTERISTICKÝ POLYNÓM.

$\Rightarrow$ MÁ ZMYSEL HOVORIŤ O CHARAKTERISTICKOM POLYNÓME LIN. ZOBRAZENIA f.

(UVAŽUJEME VEKT. PRIESTORY S KONEČNOU BÁZOU)

22.03.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA: PRE $\forall A,B \in T^{n\times n}$ PLATÍ $P_{AB} = P_{BA}$.

DÔKAZ: KEĎ JE JEDNA Z TÝCH MATÍC REGULÁRNA, POTOM TVRDENIE TRIVIÁLNE:

NAPR. KEĎ B JE REGULÁRNA, POTOM $B^{-1}BAB = AB$
$\Rightarrow$ BA A AB SÚ PODOBNÉ.

$$\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \Big| I,J,K,L,P,Q,R,S \in T^{m\times n}$$

$$= \begin{pmatrix} IP+JR, & IQ+JS \\ KP+LR, & KQ+LS \end{pmatrix}.$$

UVAŽUJME MATICU $\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} \in T^{2n\times 2n}$

PLATÍ $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}^{X}\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{R} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}^{Y}$

MATICA $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ JE REGULÁRNA.

$R^{-1}XR = Y \Rightarrow$ X A Y SÚ PODOBNÉ MATICE.

$$P_X(t) = \det\left[\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} AB - tI & 0 \\ B & -tI \end{pmatrix} =$$

$$= (-t)^n \det(AB - tI) \quad \text{(ROZVOJ PODĽA POSL. STĹPCA n-KRÁT)}$$

$$P_Y(t) = \det\begin{pmatrix} -tI & 0 \\ B & BA - tI \end{pmatrix} = (-t)^n \det(BA - tI)$$

PRIČOM $P_X(t) = P_Y(t)$ PRE $\forall t \in T$.

$\Rightarrow$ PRE $\forall t \neq 0$ JE $\det(AB - tI) = \det(BA - tI)$

PRE $t = 0$ JE $\det(AB) = \det(BA) = 0$.

$\Rightarrow$ PRE $\forall t \in T$ JE $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. □

ZÁKLADNÁ VETA ALGEBRY: KAŽDÝ MNOHOČLEN STUPŇA ASPOŇ 1 MÁ V OBORE $\mathbb{C}$ ASPOŇ 1 KOREŇ.

DÔSLEDOK: KAŽDÝ MNOHOČLEN $P(t)$ STUPŇA $n \geq 1$ NAD $\mathbb{C}$ MOŽNO ROZLOŽIŤ NA SÚČIN n LINEÁRNYCH ČINITEĽOV.

D. $P(t) = a_n (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

POZN. $P(t) = a_n (t-\lambda_1)^{e_1} \dots (t-\lambda_k)^{e_k}$, KDE $\sum_{i=1}^{k} e_i = n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ SÚ NAVZÁJOM RÔZNE

UVAŽUJME $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} \dots (\lambda_k - t)^{r_k} =$
$= (-1)^n (t-\lambda_1)^{r_1} \dots (t-\lambda_k)^{r_k}$.

r_i JE ALGEBRAICKÁ NÁSOBNOSŤ λ_i.

VETA: KEĎ PRE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\exists$ REG. MATICA $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$:
$RAR^{-1} = D$ JE DIAG. MATICA,
POTOM r_i HOVORÍ, KOĽKOKRÁT SA VYSKYTUJE λ_i NA DIAGONÁLE MATICE D.

KU KAŽDÉMU λ_i VIEME NÁJSŤ VL. VEKTOR v_i
PRESNEJŠIE: VIEME NÁJSŤ r_i LIN. NEZÁVISLÝCH VL. VEKTOROV K VL. ČÍSLU λ_i (VIAC NIE ??) DÚ

DÔLEŽITÉ KOEFICIENTY CHARAKT. POLYNÓMU
$p_A(t) = \det(A - t.I) = (-1)^n (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_n)$
$t=0 \Rightarrow \det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$$A - t.I = \begin{pmatrix} a_{11}-t, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-t, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 + \dots + \lambda_n = a_{11} + \dots + a_{nn}$.

01.04.2006 Št
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA (CAYLEY, HAMILTON): PRE KAŽDÚ ŠTVORCOVÚ MATICU $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(A \in \mathbb{C}^{n\times n})$ PLATÍ: $(-1)^n \cdot A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_0 I = O$, KDE c_i SÚ KOEF. CHARAKTERISTICKÉHO MNOHOČLENU $p_A(x) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$.

INÝMI SLOVAMI: KAŽDÁ MATICA JE KOREŇOM SVOJHO CHARAKT. POLYNÓMU.

DÔKAZ: PRE $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ JE $(A-\lambda I)\,\mathrm{adj}(A-\lambda I) = [\det(A-\lambda I)]\cdot I$.

KAŽDÝ PRVOK MATICE $\mathrm{adj}(A-\lambda I)$ JE POLYNÓM V λ STUPŇA $\le n-1$, TAKŽE MÔŽEME PÍSAŤ $\mathrm{adj}(A-\lambda I) = \lambda^{n-1}B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0$ PRE ISTÉ MATICE $B_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $j = 0, \dots, n-1$.

$$\Rightarrow (A-\lambda I)(\lambda^{n-1}B_{n-1} + \dots + \lambda B_1 + B_0) = \left((-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0\right) I$$

$$-\lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \lambda(AB_1 - B_0) + AB_0 =$$
$$= \lambda^n (-1)^n I + \lambda^{n-1} c_{n-1} I + \dots + \lambda c_1 I + c_0 I.$$

$$\Rightarrow \quad -B_{n-1} = (-1)^n I$$
$$AB_j - B_{j-1} = c_j I \quad j = n-1, \dots, 1$$
$$AB_0 = c_0 I$$

$$\Rightarrow \quad -A^n B_{n-1} = (-1)^n A^n$$
$$A^{j+1}B_j - A^j B_{j-1} = c_j A^j \quad j = n-1, \dots, 1$$
$$AB_0 = c_0 I$$

$$\Rightarrow -A^n B_{n-1} + (A^n B_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2}) + \dots + (A^2 B_1 - AB_0) + AB_0 = O =$$
$$= (-1)^n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I. \quad \square$$

VETA: MATICA $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ JE DIAGONALIZOVATEĽNÁ $\Leftrightarrow$ PRE KAŽDÉ VLASTNÉ ČÍSLO λ_i S NÁSOBNOSŤOU r_i JE $\dim(\ker(A-\lambda_i I)) = r_i$.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) A MÁ n LIN. NEZÁVISLÝCH VL. VEKTOROV. K VL. ČÍSLU λ_i S NÁSOBNOSŤOU r_i MÁ MATICA $D-\lambda_i I$ r_i NÚL NA DIAGONÁLE, KDE $A = RDR^{-1}$.

$\mathrm{rank}(D-\lambda_i I) = n - r_i \Rightarrow \dim(\ker(D-\lambda_i I)) = r_i$.

$A-\lambda I = R(D-\lambda_i I)R^{-1} \Rightarrow \mathrm{rank}(A-\lambda_i I) = \mathrm{rank}(D-\lambda_i I)$.

$\Leftarrow$) K VLASTNÉMU ČÍSLU λ_i EXISTUJE r_i LIN. NEZÁVISLÝCH VLASTNÝCH VEKTOROV $v_{i1}, \dots, v_{ir_i}$. (VYPLÝVA Z $\dim(\ker(A-\lambda_i I)) = r_i$)

UVAŽUJME $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} v_{ij} = 0$.

OZNAČME $y_i = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} v_{ij}$ $\rightarrow$ VLASTNÝ VEKTOR K λ_i (AK $y_i \neq 0$)

T.J. $\sum_i y_i = 0$. PRETOŽE y_i SÚ LN., NEEXISTUJE $y_i \neq 0$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots k\}$ JE $y_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\}$ JE $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{ir_i} = 0$. ■

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ MÁ VL. ČÍSLA 1, 1. AK BY A BOLA PODOBNÁ DIAGONÁLNEJ MATICI $D = I$, BOLO BY $A = RIR^{-1} = I$, ČO JE SPOR.

VETA: KU KAŽDEJ MATICI $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ EXISTUJE MATICA J PODOBNÁ A NASLEDUJÚCEHO TVARU:

$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$ $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ TZV. JORDANOVA BUNKA

PLATÍ: VLASTNÉ ČÍSLO λ_i S NÁSOBNOSŤOU r_i JE NA HL. DIAGONÁLE r_i-KRÁT.

PRÍKLAD: $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

DÚ: VP VŠETKÝCH MNOHOČLENOV STUPŇA NAJVIAC 3 (KANON. BÁZA). UVAŽUJTE MATICU ZOBRAZENIA $F: p(x) \to p'(x)$.

DEFINÍCIA: PRE $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ JE $A^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ $(A^H)_{ji} = \overline{A}_{ij}$ $\begin{matrix} i=1\dots m \\ j=1\dots n \end{matrix}$.

SKALÁRNY SÚČIN: $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x$.

POZOROVANIE: $(A \cdot B)^H = B^H \cdot A^H$.

DEFINÍCIA: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE HERMITOVSKÁ $\Leftrightarrow A^H = A$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE UNITÁRNA $\Leftrightarrow A^H A = I$

PRÍKLAD: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ $P_B(t) = t(t-3)$, VL. Č. 0, 3, VL. VEKT. $(1+i, -1)^T$, $(1, 1-i)^T$

$R = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$ $R^H = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$ $RBR^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. VŠIMNÚŤ SI $R \cdot R^H$

05.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

ORTOGONÁLNA MATICA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
+ RIADKY STĹPCE MATICE TVORIA ORTONORMÁLNY SYSTÉM
+ $A^T = A^{-1}$
+ $A^T A = I$ PRE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE $A^H A = I$

ORTOGONÁLNE ZOBRAZENIE
U, V SÚ VEKT. PRIESTORY SO SKAL. SÚČINOM (NAD $\mathbb{C}$)
$f: U \to V$ LINEÁRNE ZOBRAZENIE
f SA NAZÝVA ORTOGONÁLNE LIN. ZOBRAZENIE, KEĎ PRE $\forall u, v \in U$: $\langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$.

POZOROVANIE : ORTOGON. ZOBRAZENIE ZACHOVÁVA NORMU :
$\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$.

POZNÁMKA : ZOBR., KT. ZACHOVÁVA VZDIALENOSTI SA NAZÝVA IZOMETRIA.

PLATÍ : EUKLIDOVSKÁ IZOMETRIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (S EUKL. NORMOU)
+ KEĎ FIXUJE POČIATOK, JE ORTOG. ZOBRAZENIE
+ VO VŠEOB. PRÍPADE JE ZLOŽENÍM ORTOG. ZOBRAZENIA A POSUNUTIA

VETA:
V JE VEKT. PRIESTOR SO SKAL. SÚČINOM NAD $\mathbb{R}$ (POPR. $\mathbb{C}$)
$f: V \to V$ JE LIN. ZOBRAZENIE, POTOM NASL. PODM. SÚ EKV.:
+ f JE ORTOGONÁLNE ZOBR.
+ $\exists B$ ORTON. BÁZA V : $[f]_B^B$ JE ORTOGONÁLNA MATICA
+ $\forall B$ —"—

POZOROVANIE : NECH B JE ORTON. BÁZA V SO SKAL. SÚČINOM NAD $\mathbb{R}$
$u, v \in V \Rightarrow [u]_B = (x_1, \dots, x_n)^T$, $[v]_B = (y_1, \dots, y_n)^T$. (NAD $\mathbb{C}$)
POTOM $\langle u | v \rangle = y^H x = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

DOKAZ: $\mathcal{B} = (z_1, \dots, z_n)$

$u = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n$

$v = y_1 z_1 + \dots + y_n z_n$

$\langle u | v \rangle = \langle x_1 z_1 + \dots + x_n z_n | y_1 z_1 + \dots + y_n z_n \rangle =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle z_i | z_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ □

DOKAZ VETY: ⇐) NECH $f: V \to V$ JE LIN. ZOBR.

$\mathcal{B}$ JE ORTONOR. BÁZA, $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ JE ORTOG.

CHCEME DOKÁZAT, ŽE f JE ORTOG..

$\langle f(u) | f(v) \rangle = [f(v)]_{\mathcal{B}}^{H} \cdot [f(u)]_{\mathcal{B}} =$

$= (A[v]_{\mathcal{B}})^H (A[u]_{\mathcal{B}}) =$

$= ([v]_{\mathcal{B}})^H A^H A ([u]_{\mathcal{B}}) =$

$= ([v]_{\mathcal{B}})^H ([u]_{\mathcal{B}}) = \langle u | v \rangle$. □

$[f(u)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A[u]_{\mathcal{B}}$

⇒) NECH $f: V \to V$ JE ORTOG. LIN. ZOBR.

NECH $\mathcal{B}$ JE ORTON. BÁZA, $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ ..

CHCEME DOKÁZAT, ŽE A JE ORTOGON.

$u, v \in V$, $x = [u]_{\mathcal{B}}$, $y = [v]_{\mathcal{B}}$, POTOM

$\langle f(u) | f(v) \rangle = y^H A^H A x$

$\langle u | v \rangle = y^H x$.

TJ. PRE $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$: $y^H A^H A x = y^H x$

CHCEME UKÁZAT, ŽE $A^H A = I$.

TRIK: $x = e_i$, $y = e_j$ ⇒ $e_j^H A^H A e_i = e_j^H e_i = e_j^T e_i$

TJ. $e_j^T A^H A e_i = (A^H A)_{j,i} = \delta_{i,j}$ □

05.04.2006 Wk
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

O DIAGONALIZÁCII

VETA: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A^T = A$, POTOM
A MÁ VŠETKY VLASTNÉ ČÍSLA REÁLNE
A JE DIAGONIZOVATEĽNÁ

SILNEJŠIA VETA: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A^T = A$, POTOM
$\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ORTOGON. MATICA TAKÁ, ŽE TAT^{-1} JE DIAG.

POZNÁMKA: KEĎ MÁ NIEJAKÉ LIN. ZOBR. f
MATICU $[f]_B^B$ SYMETRICKÚ VZHĽADOM K ORTONORM. BÁZE B,
POTOM f ZOBRAZÍ KRUŽNICU NA ELIPSU (ATĎ. VO VŠEOBEC. ROZM.)

(i) KEĎ $A^T = A$, POTOM V ŠT. ČÍSLA SÚ REÁLNE.
(ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ TAKÁ, ŽE V ŠT. ČÍSLA SÚ REÁLNE,
POTOM $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ORTOGONÁLNA: TAT^{-1}
JE HORNÁ Δ MATICA.

AKO Z TOHO PLYNIE VETA?
(i) A (ii) $\Rightarrow \exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ORTOG.: TAT^{-1} JE HORNÁ Δ MATICA.
ALE $(TAT^{-1})^T = TAT^{-1} \Rightarrow TAT^{-1}$ JE DIAGONÁLNA :).
$(TAT^{-1})^T = (T^{-1})^T A^T T^T = TAT^{-1}$ ✓ $(T^{-1} = T^T)$

DÔKAZ i): CHCEME DOK.: $A^T = A$ A λ JE ŠT. ČÍSLO A,
POTOM $\lambda = \bar{\lambda}$.
NECH $Av = \lambda v$.
TRIK: DVOMA SPÔSOBMI POČÍTAJME $v^H A v$.

$$v^H A v = v^H \lambda v = \lambda \cdot v^H v.$$
$$v^H A v = (A^H v)^H v = (Av)^H v = (\lambda v)^H v = \bar{\lambda} v^H v.$$
$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}.$$

ii) INDUKCIA PODĽA n:

PRE $n=1$ TVRDENIE PLATÍ

$n>1$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, V VL. ČÍSLA SÚ REÁLNE, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ JE V. ČÍSLO

K REÁLNEMU VL. ČÍSLU MUSÍ BYŤ REÁLNY VEKTOR $\Rightarrow$

NECH $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|v_1\| = 1$.

TRIK: v_1 DOPLNÍME (ĽUBOVOĽNE) NA ORTONORMÁLNU BÁZU V.P. $\mathbb{R}^n$.

$\left(v_1, w_2, w_3, \dots, w_n\right) =: S$, S JE ORTOGONÁLNA $\Rightarrow S^{-1} = S^T$

POZRIEME SA NA MATICU $S^{-1}AS = S^TAS$

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} \boxed{} \begin{pmatrix} v_1, w_2, \dots, w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? \dots ? \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} B \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \text{REÁL. VL.} \\ \text{ČÍSLA} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

12.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA: KAŽDÁ REÁLNA SYMETRICKÁ MATICA A MÁ V VŠ. ČÍSLA REÁLNE. NAVYŠE EXISTUJE ORTOGONÁLNA MATICA T : $T^{-1}AT$ JE DIAGONÁLNA.

VETA: KEĎ MÁ A VŠETKY VL. ČÍSLA REÁLNE, POTOM EXISTUJE ORTOGONÁLNA MATICA T : $T^{-1}AT$ JE HORNÁ Δ.

DÔKAZ: VEZMIME SI VL. ČÍSLO λ_1, VL. VEKTOR v_1, $\|v_1\| = 1$
VEKTOR v_1 DOPLNÍME VEKTORMI $w_2, \dots, w_n$
NA ORTONORMÁLNU BÁZU $\mathbb{R}^n$.

$$S := (v_1\ w_2\ \dots\ w_n)$$

POZRIME SA NA SÚČIN $S^{-1}AS$

$$AS = A \cdot (v_1\ w_2\ \dots\ w_n) = (Av_1\ Aw_2\ \dots\ Aw_n) =$$
$$= (\lambda_1 v_1\ Aw_2\ \dots\ Aw_n) \qquad S^{-1} = S^T$$

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

A_{n-1} MÁ VŠETKY VL. ČÍSLA REÁLNE

~~(!!) KEĎŽE $S^{-1}AS$ JE SYMETRICKÁ $\Rightarrow$ A_{n-1} JE SYMETRICKÁ (!!)~~

$\exists$ ORTOGONÁLNA M. $\tilde{T}$: $\tilde{T}^{-1}A_{n-1}\tilde{T}$ JE HORNÁ Δ.

POLOŽME $T := S \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{T} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

T JE ORTOGONÁLNA MATICA (ZREJME) $T^TT = 1_n$

POČÍTAJME $T^{-1}AT$.

$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 \\ 0 & \\ \vdots & \overline{T}^T \\ 0 & \end{bmatrix} S^{-1}AS \begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 \\ 0 & \\ \vdots & \overline{T} \\ 0 & \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 \\ 0 & \\ \vdots & \overline{T}^T \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & s \\ 0 & \\ \vdots & A_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0\dots0 \\ 0 & \\ \vdots & \overline{T} \\ 0 & \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & \\ 0 & \overline{T}^T A_{n-1} \overline{T} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$ □

POZITÍVNE DEFINITNÍ MATICE

DEFINÍCIA: KEĎ V JE VP NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKAL. SÚČINOM, POTOM LIN. ZOBRAZENIE $f: V \to V$ JE ORTOGONÁLNE, KEĎ ZACHOVÁVA SKAL. SÚČIN: $\forall u,v \in V: \langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle$.

VETA: BUĎ V VP KONEČNEJ DIMENZIE SO SK. SÚČINOM NAD $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ JE JEHO ORTONORMÁLNA BÁZA. POTOM $f: V \to V$ JE ORTOGONÁLNE $\Leftrightarrow$ $[f]_X^X$ JE ORTOGONÁLNA.

DÔKAZ 1: $\langle u | v \rangle = \left([v]_X\right)^H \cdot [u]_X$

DÔKAZ 2: $\forall u,v \in V: uAv = uBv \Leftrightarrow A = B$

DEFINÍCIA: SYMETRICKÁ REÁLNA MATICA A JE POZITÍVNE DEFINITNÁ, KEĎ
$\forall x \in \mathbb{R}^n \; x \neq 0 : x^T A x > 0$.

POZITÍVNE SEMIDEFINITNÁ, KEĎ
$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$.

VETA: PRE ŠTVORCOVÚ SYMETRICKÚ MATICU A SÚ NASLEDUJÚCE PODMIENKY EKVIVALENTNÉ:

1. A JE POZITÍVNE DEFINITNÁ
2. VŠ. ČÍSLA MATICE A SÚ KLADNÉ REÁLNE
3. a) EXISTUJE REGULÁRNA MATICA U : $A = U^T U$.
   b) EXISTUJE [illegible] POZ. DEF. M. U : $A = U^T U$
   c) EXISTUJE REG. HORNÁ Δ MATICA U: $A = U^T U$.

12.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

DOKAZ: 1. ⇒ 2.) VEZMITE SI VL. ČÍSLO λ A VL. VEKTOR x:

$Ax = \lambda x$.

UVAŽUJME $x^T A x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

2. ⇒ 3.a) MATICA A JE PODOBNÁ DIAG. MATICI D, KT. MÁ NA DIAGONÁLE VŠ ČÍSLA KLADNÉ.

$\exists$ REG. MATICA R: $R D R^{-1} = A$
ORTOGONÁLNA

UVAŽUJME MATICU $\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$

ZREJME $\sqrt{D} \cdot \sqrt{D} = D$.

$A = R \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}^T \cdot R^T$

POLOŽME $U = \sqrt{D}^T \cdot R^T$. POTOM $A = U^T U$.

(POZNÁMKA: KEĎ POLOŽÍME $U = R\sqrt{D}^T R^T$ POTOM TIEŽ
$U^T U = A$?!)

3.a) ⇒ 1.) $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x = x^T U^T U x = \|Ux\|^2 > 0$

3.b) $U := R\sqrt{D}^T R^T$, POTOM $U^T U = A$ (+ZREJME $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T U x > 0$)

U MÁ VŠETKY VL. ČÍSLA KLADNÉ $\equiv \sqrt{D} \Rightarrow$ 1.) ⇑

□ !

VETA: SYMETRICKÁ MATICA A SA DÁ ROZLOŽIŤ NA $A = LDL^T$, KDE L JE DOLNÁ Δ MATICA, D JE DIAGONÁLNA.

3.c) A JE SYMETRICKÁ, REGULÁRNA ⇒ $A = LDL^T$ (CVIČENIE)

L, D SÚ REGULÁRNE MATICE

POLOŽME $U := \sqrt{D} L^T$ (TREBA OVERIŤ, ŽE D MÁ NEZÁP. ČÍSLA)

$U^T U = A$, U JE REG. ⇒ A JE REG. A

ZREJME $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$: $x^T A x > 0$. □

POZNÁMKA: PODOBNÁ VETA PLATÍ PRE POZITÍVNE SEMIDEFINITNÉ MATICE:

2. .. NEZÁPORNÉ REÁL. ..

3a) VYNECHAŤ REČ.

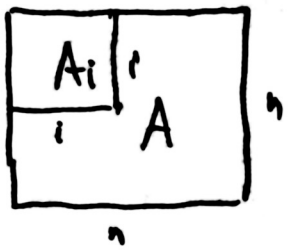
3b) ∃ POZ. SEMIDEF.

3c) VYNECHAŤ REČ.

DÔKAZ (CVIČENIE)

VETA: SYM. MATICA A JE POZ. DEFINITNÁ $\Leftrightarrow$ $\det(A_i) > 0$ PRE $i = 1, \dots, n$, KDE

$A_i =$



DÔKAZ. $\Rightarrow$)

IDEA: CHCEME UKÁZAŤ, ŽE A_i JE POZITÍVNE DEF.

TJ. $\forall\, y \in \mathbb{R}^i,\ y \neq 0 : y^T A_i y > 0$

- UVAŽUJME $y \in \mathbb{R}^i$, $y \neq 0$, POLOŽME

$x = (y^T, 0, 0, \dots, 0)^T$

POTOM ZREJME $x^T A x = y^T A_i y > 0$. □

$\Leftarrow$) BEZ DÔKAZU.

12.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

POZOROVANIE: KEĎ JE A POZ. DEFINITNÁ MATICA $\in \mathbb{R}^{n\times n}$.
POTOM $\forall x,y \in \mathbb{R}^n : \langle x|y\rangle = x^T A y$ DEFINUJE
SKALÁRNY SÚČIN NAD $\mathbb{R}^n$.
JE NUTNÉ OVERIŤ DEFINÍCIE. (ZREJME)

VETA: KAŽDÝ SKALÁRNY SÚČIN NAD $\mathbb{R}^n$ JE MOŽNÉ
DEFINOVAŤ AKO $\langle x|y\rangle = x^T A y$ PRE NEJAKÚ
POZITÍVNE DEFINITNÚ MATICU $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$e_i^T A e_j = A_{ij}$ PRE $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow$ DEFINUJEME A AKO $A_{ij} := \langle e_i | e_j \rangle$.

STAČÍ OVERIŤ VL. SKAL. SÚČINU BLA, BLA, BLA ... (CVIČENIE)

19.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

VETA: SYMETRICKÁ REÁLNA MATICA $A = \begin{pmatrix} \alpha & \vec{a}^T \\ \vec{a} & \tilde{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
JE POZITÍVNE DEFINITNÁ $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$
A ZÁROVEŇ MATICA $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ JE POZITÍVNE DEFINITNÁ.

DÔKAZ: $\Leftarrow$) MÁME $\alpha > 0$ A $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ JE POZ. DEF.
UVAŽUJME $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ $x_1 \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$x^T A x = (x_1 \; \tilde{x}^T) \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \; \tilde{x}^T) \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1 + a^T \tilde{x} \\ a x_1 + \tilde{A} \tilde{x} \end{pmatrix} = \alpha x_1^2 + x_1 a^T \tilde{x} + x_1 \tilde{x}^T a + \tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} =$$

$$= \left(\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} - \frac{\tilde{x}^T a \, a^T \tilde{x}}{\alpha} \right) + \frac{\tilde{x}^T a \, a^T \tilde{x}}{\alpha} + \alpha x_1^2 + x_1 a^T \tilde{x} + x_1 \tilde{x}^T a =$$

$$= \tilde{x}^T \left(\tilde{A} - \frac{a a^T}{\alpha} \right) \tilde{x} + \left\| \sqrt{\alpha} x_1 + \frac{\tilde{x}^T a}{\sqrt{\alpha}} \right\|^2 \geq 0$$

PRIČOM ROVNOSŤ NASTÁVA $\Leftrightarrow$ $x = 0$.

$\Rightarrow$) ZVOLÍME $x = e_1$. POTOM $e_1^T A e_1 = \alpha > 0$.
$0 \neq \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, CHCEME UKÁZAŤ, ŽE $\tilde{x}^T \left(A - \frac{1}{\alpha} a a^T \right) \tilde{x} > 0$
ZVOLÍME $x_1 := - \frac{a^T \tilde{x}}{\alpha}$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$

$$x^T A x = (x_1 \; \tilde{x}) \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} =$$

$$= \tilde{x}^T \left(\tilde{A} - \frac{a a^T}{\alpha} \right) \tilde{x} + \left(\sqrt{\alpha} x_1 + \frac{\tilde{x}^T a}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 =$$

$$= \tilde{x}^T \left(\tilde{A} - \frac{a a^T}{\alpha} \right) \tilde{x} + \left(\sqrt{\alpha} \cdot \frac{-a^T \tilde{x}}{\alpha} + \frac{\tilde{x}^T a}{\sqrt{\alpha}} \right)^2 =$$

$$= \tilde{x}^T \left(\tilde{A} - \frac{a a^T}{\alpha} \right) \tilde{x} > 0 . \quad \square$$

CHOLESKÉHO ROZKLAD: A JE POZ. DEF. $\Leftrightarrow$ $\exists!$ DOLNÁ Δ MATICA L S KLADNÝMI ČÍSLAMI NA DIAG.: $A = L \cdot L^T$.



$= D.S$ DIAG. HORNÁ Δ MATICA S 1 DIAGONÁLOU

ELEM. ÚPRAVY: IBA ODČÍTAŤ NÁSOBKY VYŠŠÍCH RIADKOV

$A = E.T = E.D.S$

POLOŽÍME $U^T = \sqrt{D}.S$, POTOM $U.U^T = S^T \sqrt{D}^T \sqrt{D} S = S^T D S$

DÁ SA DOKÁZAŤ, ŽE $E = S^T \Rightarrow U.U^T = A$.

KVADRATICKÉ FORMY

DEF.: KVADRATICKÁ FORMA NA $\mathbb{R}^n$ JE KAŽDÁ FCIA.
$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TVARU $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

PRÍKLAD: PRE $n=2$ $g(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 13 x_1 x_2 + 2 x_2^2$

MATICA KVADRATICKEJ FORMY g JE MATICA $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
$B_{ii} = a_{ii}$, $B_{ij} = B_{ji} = \frac{a_{\min(i,j),\max(i,j)}}{2}$.

B JE SYMETRICKÁ MATICA.

PRÍKLAD: $B = \begin{pmatrix} 5 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & 2 \end{pmatrix}$

PLATÍ $g(x) = x^T B x \quad x \in \mathbb{R}^n$.

DEF.: NECH V JE VP NAD T A $f: V \times V \to T$. JE ZOBRAZENIE SPĹŇAJÚCE:
$\forall \alpha \in T \; \forall u, v \in V: f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v)$
$\forall u, v, w \in V: f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
$\forall \alpha \in T \; \forall u, v \in V: f(u, \alpha v) = \alpha f(u, v)$
$\forall u, v, w \in V: f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$

f SA NAZÝVA BILINEÁRNA FORMA NA V.

PRÍKLAD: $V = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(x, y) := x^T A y$

ZOBRAZENIE $g: V \to T$ SA NAZÝVA KVADRATICKÁ FORMA NA V, KEĎ $\exists$ BILINEÁRNA FORMA $f: V \times V \to T$: $\forall u \in V: g(u) = f(u, u)$.

19.04.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

DEF.: NECH V JE VP KONEČNEJ DIMENZIE NAD TELESOM T A NECH $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ JE BÁZA V. POTOM MATICA B KVADRATICKEJ FORMY $g: V \to T$ JE DEFINOVANÁ VZHĽADOM NA BÁZU X AKO MATICA $B \in T^{n \times n}$

$$B_{ij} = \frac{f(x_i, x_j) + f(x_j, x_i)}{2}$$

KDE f JE BILINEÁRNA FORMA VYTVÁRAJÚCA g.

PRE $V = \mathbb{R}^n$, POTOM DOSTÁVAME PREDCH. DEFINÍCIU.

PRÍKLAD: $x = (x_1\ x_2)^T$ $f(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} y$ $V = \mathbb{R}^2$

$$g(x) = f(x, x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$$

ŠTANDARDNÁ BÁZA $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

POTOM $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$

POZOROVANIE: PRE VP V S BÁZOU $X = \{v_1, \dots, v_n\}$, VEKTOR $u \in V$ A KVADRATICKÚ FORMU $g(u) = f(u, u)$, KDE f JE BILIN. FORMA VYTVÁRAJÚCA g, PLATÍ:

$g(u) = [u]_X^T \cdot B \cdot [u]_X$, KDE B JE MATICA g VZHĽADOM NA BÁZU X.

DÔKAZ: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, PRE VHODNÉ α_i $(i = 1 \dots n)$.

$$g(u) = f(u, u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j f(v_i, v_j) =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_1, x_j) + f(x_j, x_1)}{2} \alpha_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_n, x_j) + f(x_j, x_n)}{2} \alpha_j \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_i, x_j) + f(x_j, x_i)}{2} \alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j f(x_i, x_j) \quad \square$$

LEMMA: NECH $g: V \to T$ JE KVADR. FORMA A B JE JEJ MATICA VOČI BÁZI X POTOM $B' = [id]_{YX}^T B [id]_{YX}$ JE MATICA KVADR. FORMY g VOČI BÁZI Y.

$$B'_{i,j} = \frac{f(y_i, y_j) + f(y_j, y_i)}{2}$$?

$\forall u \in V: g(u) = [u]_X^T B [u]_X$

$[u]_X = [id]_{YX} [u]_Y$

$\Rightarrow g(u) = [u]_Y^T \left([id]_{YX}^T B [id]_{YX} \right) [u]_X$ □

26.04.2006 Mc
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

LEMMA: NECH $g: V \to T$ JE KV. FORMA A NECH B_X JE JEJ MATICA VOČI BÁZE X. POTOM $[id]_{YX}^T \cdot B_X \cdot [id]_{YX} = B_Y$ JE MATICA KVADR. FORMY g VOČI BÁZE Y.

DÔKAZ: $[u]_X = [id]_{YX} [u]_Y$,

$$g(u) = [u]_X^T B_X [u]_X = ([id]_{YX} [u]_Y)^T B_X [id]_{YX} [u]_Y \quad \blacksquare$$

VETA: (SYLVESTROV ZÁKON ZOTRVAČNOSTI KVADR. FORIEM): PRE KAŽDÚ KVADR. FORMU $g: V \to T$. EXISTUJE BÁZA X VOČI KTOREJ MÁ g MATICU DIAGONÁLNU POZOSTÁVAJÚCU Z $0, +1, -1$. NAVIAC POČET $+1$ A -1 JE PRE KAŽDÚ TAKÚ BÁZU ROVNAKÝ.

POZN.: V REČI MATIC: PRE KAŽDÚ SYM. MATICU B EXISTUJE REG. MATICA S: $S^T B S$ JE DIAGONÁLNA ...

DÔKAZ: NECH Y JE ĽUBOVOĽNÁ BÁZA.
OZNAČME B' MATICU KVADR. FORMY g VOČI BÁZE Y.
B' JE REÁLNA, SYMETRICKÁ $\Rightarrow \exists$ ORTOGONÁLNA MATICA T : $D = T \cdot B' \cdot T^T$ JE DIAGONÁLNA

POLOŽME $D = U \cdot D_0 \cdot U$, KDE $(D_0)_{ii} = \operatorname{sgn}(D_{ii})$

KLADIEME $U_{ii} = \sqrt{|D_{ii}|}$ PRE $D_{ii} \neq 0$
$= 1$ PRE $D_{ii} = 0$.

$B' = T^T D T = T^T U^T D_0 U T$

T JE REGULÁRNA A U JE REG.

$\Rightarrow D_0 = C^T B' C$, KDE $C = (UT)^{-1}$.

ROVNAKÝ POČET NÚL: VYPLÝVA Z TOHO, ŽE $B_Y = [id]_{YX}^T B_X [id]_{YX}$ MÁ ROVNAKÚ HODNOSŤ AKO B_X.

ROVNAKÝ POČET 1: BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE MATICE B MAJÚ NA ZAČIATKU $+1$, POTOM -1, POTOM 0.
PRE SPOR, NECH $\exists$ BÁZA $X = \{v_1, \dots, v_n\}$: $B_X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ } r

A BÁZA $\mathcal{Y} = (w_1, \dots, w_n)$: $B_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $\}s$ $\quad s < p$.

UVAŽUJME $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_p)$ A $\mathcal{L}(w_{s+1}, \dots, w_n)$.
p VEKT. n-s VEKT. $\Rightarrow p + n - s > n$

$$\Rightarrow \exists\, u \neq 0 : \quad u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \sum_{j=s+1}^{n} \beta_j v_j \qquad \alpha_i, \beta_j \in T.$$

$$g(u) = [u]_{\mathcal{X}}^T \cdot B_{\mathcal{X}} [u]_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 > 0$$

$$= [u]_{\mathcal{Y}}^T B_{\mathcal{Y}} [u]_{\mathcal{Y}} = -\sum_{j=s+1}^{r} \beta_j^2 \leq 0 \quad \text{KDE } (B_{\mathcal{Y}})_{jj} = -1$$
PRÁVE PRE $j = s+1 \dots r$.

ČO JE SPOR. □

ROZMYSLIEŤ: PRE POZITÍVNE DEFINITNÉ MATICE KV. FORMY.
PRÍKLAD: $\mathbb{R}^2$
AŽ NA LIN. TRANSFORMÁCIU JE VŽDY $g(x) = \begin{matrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} x_1^2 + \begin{matrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} x_2^2$

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

DO NOT USE BRUTE FORCE WHEN FIGHTING WITH EXPONENTIAL
NIE JE DÔLEŽITÉ VYHRAŤ, ALE BYŤ PRVÝ.

DEFINÍCIA: VŠEOBECNÁ ÚLOHA LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA: MAXIMALIZOVAŤ $c^T x$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$
CEZ VŠETKY VEKTORY x, KT. SPĹŇAJÚ $Ax \leq b$
KDE A JE DANÁ MATICA TYPU $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$
$c^T x$ JE ÚČELOVÁ FUN., $Ax \leq b$ SÚ OBMEDZUJÚCE PODMIENKY

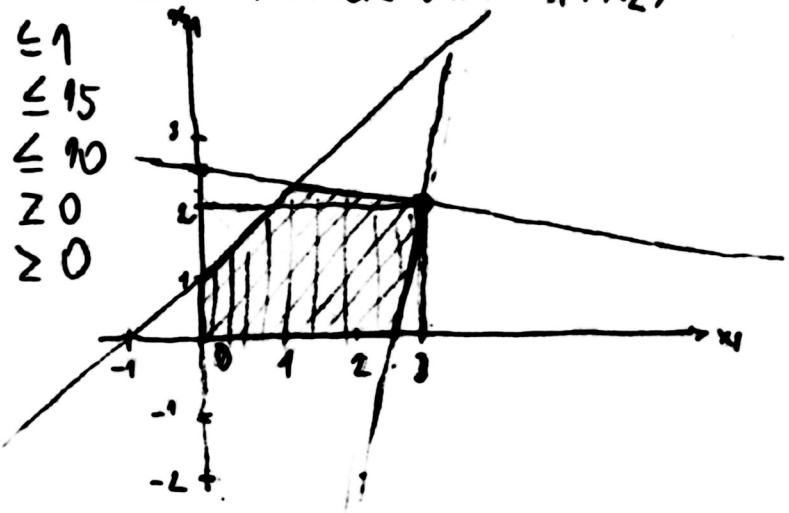
KAŽDÝ VEKTOR $x \in \mathbb{R}^n$: $Ax \leq b$ SA NAZÝVA PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE
OPTIMÁLNE RIEŠENIE: KAŽDÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE $x^* \in \mathbb{R}^n$:
$c^T x^*$ JE MINIMÁLNE, T.J. PRE $\forall$ PRÍPUSTNÉ $x \in \mathbb{R}^n$: $c^T x^* \leq c^T x$.

26.04.2006 Ut
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: CHCEME MAXIMALIZOVAŤ x_1+x_2, PRIČOM

$$\begin{aligned} -x_1+x_2 &\le 1 \\ x_1+6x_2 &\le 15 \\ 4x_1-x_2 &\le 10 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

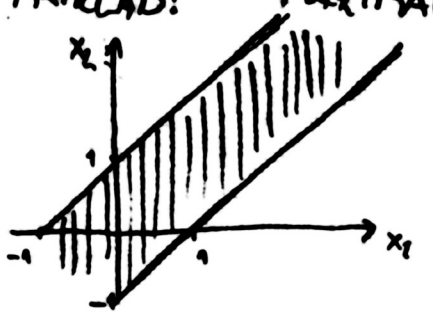


OPTIMÁLNE RIEŠENIE: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ČO SA MÔŽE STAŤ: ÚLOHA NEMÁ ŽIADNE RIEŠENIE

MÁ RIEŠENIE PRÍPUSTNÉ, ALE NIE OPTIMÁLNE

PRÍKLAD: MAXIMALIZOVAŤ x_1+x_2



EXISTUJE PRÁVE 1 PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE / OPTIMÁLNE RIEŠENIE

EXISTUJE ∞ VEĽA PRÍPUSTN. RIEŠ. / OPTIM. RIEŠ.

03.05.2006 Ivk
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

MAXIMALIZOVAŤ $c^T x$, $Ax \leq b$

PRÍKLAD: $\max \sum_{i=1}^{n} x_i$

$x_i + x_j \leq 1 \quad 1 \leq i < j \leq n$

a) $x_i \geq 0 \ \forall i \qquad \max = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

b) $x_i \in \mathbb{N}_0$. ZREJME MÔŽE BYŤ NAJVIAC 1 JEDNOTKA $\Rightarrow \max = 1$

SIMPLEXOVÁ METÓDA - PRÍPRAVA

DEF.: ROVNICOVÝ TVAR ÚLOHY LP

$\max c^T x$ ZA PODMIENOK $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

PRÍKLAD: $\max x_1 + x_2 + x_3$

TAK, ŽE $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$



PREDPOKLADY: 1) $Ax = b$ MÁ NEJAKÉ RIEŠENIE
2) RIADKY MATICE A SÚ LIN. NEZÁVISLÉ

ZNAČENIE: $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

A_B = PODMATICA MATICE A, KT. JE TVORENÁ STĹPCAMI S INDEXAMI $j \in B$.

x_B = VEKTOR, KT. VZNIKNE Z VEKTORU x TAK, ŽE PONECHÁME IBA INDEXY $j \in B$.

PRÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 10 & 1 & 83 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \{2, 4\}$

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $c = (2, 4, 1, 8, 6, 3)^T$, $c_B = (4, 8)^T$

DEF.: VEKTOR $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ JE <u>BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE</u>
ÚLOHY $\max c^T x$ ZA PODMIENKY $Ax = b, x \geq 0$, KEĎ

1) $\bar{x}$ JE PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE
2) NAVIAC $\exists B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ TAK, ŽE
A_B JE REGULÁRNA A $\bar{x}$ MÁ VŠETKY ZLOŽKY $j \notin B$ ROVNÉ 0.

x_j, $j \in B$ SÚ BÁZICKÉ PREMENNÉ,
OSTATNÉ SÚ NEBÁZICKÉ = VOĽNÉ

LEMMA 1: PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x JE BÁZICKÉ $\Leftrightarrow$
STĹPCE ZODPOVEDAJÚCE KLADNÝM PREMENNÝM SÚ LN.

DÔKAZ: $\Rightarrow$) ZREJMÉ

$\Leftarrow$) MAM $x \in \mathbb{R}^n$, $K = \{ i \in \{1, \ldots, n\}, x_i > 0 \}$

a) $|K| = m$ $\Rightarrow$ $A_K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ JE ZREJME REGULÁRNA

b) $|K| < m$ KEĎŽE $\operatorname{rank} A = m$ A NUTNE $\dim(\mathcal{G}(A)) = m$

$\Rightarrow$ STĹPCE $A_{\cdot 1}, \ldots, A_{\cdot n}$ TVORIA SYSTÉM GENERÁTOROV PRIESTORU $\mathbb{R}^m$

STĹPCE MATICE A_K SÚ LIN. NEZÁVISLÉ

$\Rightarrow$ PODĽA STEINITZOVEJ VETY MOŽNO STĹPCE MATICE A_K DOPLNIŤ NA BÁZU.

LEMMA 2: PRE KAŽDÚ MNOŽINU $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, PRE KTORÚ JE A_B REGULÁRNA, EXISTUJE <u>NAJVIAC</u> JEDNO PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE $x \in \mathbb{R}^n$: $\forall j \notin B : x_j = 0$.
(MNOŽINA B JEDNOZNAČNE URČUJE PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE)

POZNÁMKA: K JEDNÉMU PRÍPUSTN. RIEŠENIU MOŽNO NÁJSŤ VIAC MNOŽÍN $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ TAKÝCH, ŽE A_B JE REG.

DÔKAZ: NECH x JE PRÍPUSTNÉ BÁZ. RIEŠENIE PRE MNOŽINU B.
OZNAČME SI $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$.
ZREJME $Ax = b$. $\Rightarrow$ $A_B x_B + A_N x_N = b$, $x_N = (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$
TJ. $A_B x_B = b$ $\Rightarrow$ $x_B = A_B^{-1} b$ TJ. x_B JE JEDNOZN. URČENÉ. $\square$

02.05.2006 Ma
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

DEF.: $B \subseteq \{1,\dots,n\}$, $|B| = m$ JE BÁZA $\Leftrightarrow$ A_B JE REGULÁRNA.
B JE PRÍPUSTNÁ BÁZA, KEĎ RIEŠENIE x_B $A_B x_B = b$ JE NEZÁPORNÉ, TJ. $A_B^{-1} b \geq 0$.

VETA: AK KEĎ MÁ ÚLOHA LP V ROVNICOVOM TVARE ASPOŇ JEDNO PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE A ÚČELOVÁ FCIA. NA MNOŽINE PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ JE OHRANIČENÁ, POTOM EXISTUJE OPTIMÁLNE RIEŠENIE.

2) KEĎ MÁ ÚLOHA LP OPTIMÁLNE RIEŠENIE, POTOM AJ NIEKTORÉ Z PRÍPUSTNÝCH BÁZICKÝCH RIEŠENÍ JE OPTIMÁLNE.

DÔKAZ: UKÁŽEME, ŽE: KEĎ JE ÚČELOVÁ FCIA ZHORA OHRAN. NA MNOŽINE PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ, POTOM PRE KAŽDÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x_0 EXISTUJE PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE $\tilde{x}$: $c^T \tilde{x} \geq c^T x_0$

UVAŽME $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $Ax_0 = b$, $x_0 \geq 0$.

ZO VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH $x \in \mathbb{R}^n$: $c^T x \geq c^T x_0$
VYBERIEME $\tilde{x}$ S NAJMENŠÍM POČTOM NULOVÝCH PRVKOV.
OZNAČME $K = \{ j \in \{1,\dots,n\},\ \tilde{x}_j > 0 \}$

V IDEÁLNOM PRÍPADE SÚ STĹPCE MATICE A_K LIN. NEZÁVISLÉ
$\Rightarrow$ PODĽA LEMMY 1 JE $\tilde{x}$ PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠ.

NECH STĹPCE A_K SÚ LIN. ZÁVISLÉ
ZREJME $\exists\, w_K \in \mathbb{R}^{|K|}$, $w_K \neq 0$: $A_K w_K = 0$.
a) $c^T w > 0$ A PRE $\forall j \in K$: $w_j \geq 0$
b) $c^T w \geq 0$ A $\exists\, j \in K$: $w_j < 0$.

a) UVAŽME, PRE ĽUBOVOĽNÉ PRÍP. RIEŠ. $x \in \mathbb{R}^n$.
POTOM $x + tw$ JE PRÍP. RIEŠ. A $c^T(x+tw) > c^T x$, ČO JE SPOR.

b) $\exists j \in K$: $w_j < 0$. UVAŽME $x(t) = \tilde{x} + t.w$ $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$
PRE MALÉ t JE $x(t)$ PRÍPUSTNÉ. VHODNOU VOĽBOU t MOŽNO ZÍSKAŤ $x(t)$ PRÍPUSTNÉ S VIAC NULAMI AKO $\tilde{x}$.

PRÍKLAD:

$$\max\ x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

$x = (0,0,1,3,2)^T$, $B = \{3,4,5\}$

$x_3 = 1 + x_1 - x_2$

$x_4 = 3 - x_1$

$x_5 = 2 - x_2$

ZÁKLAD SIMPLEXOVEJ TABUĽKY

$z = x_1 + x_2$

BÁZICKÉ PREMENNÉ — NEBÁZICKÉ PREM.

PRE NAŠE x JE $z = 0$

POKÚSIME SA ZVÄČŠIŤ x_2 (DOVTEDY $x_1 = 0$)
A ZÁROVEŇ ZACHOVAŤ PRÍPUSTNOSŤ x

$0 \leq x_3 = 1 + x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 \leq 1$
$0 \leq x_5 = 2 - x_2 \Rightarrow x_2 \leq 2$
$\Rightarrow$ x_2 ZVÄČŠÍME o 1

POLOŽÍME $x_2 := 1 \Rightarrow x = (0,1,0,3,1)^T$

DOSTÁVAME PRÍPUSTNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE

DOKONČIŤ ZA DÚ

10.05.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

$\max\ x_1 + x_2$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_4 = 3$
$x_2 + x_5 = 2$

$x_i \geq 0 \quad i \in \{1,2,3,4,5\}$

ZAČÍNAME S $x = (0,0,1,3,2)^T$

$\Rightarrow$ VÝSL. OPT. RIEŠENIE $x = (3,2,2,0,0)^T$

NAKONIEC MÔŽE SIMPL. TABUĽKA

$x_1 = 3 - x_4$
$x_2 = 2 - x_5$
$x_3 = 2 - x_4 + x_5$

$z = 5 - x_4 - x_5$

LE NEMÔŽEME ZLEPŠIŤ z

ÚLOHA: $\max c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$

DEF. SIMPLEXOVÁ TABUĽKA $T(B)$ URČENÁ PRÍPUSTNOU BÁZOU B JE SÚSTAVA $m+1$ ROVNÍC PRE PREMENNÉ $x_1, \dots, x_n, z$, KTORÁ MÁ ROVNAKÚ MNOŽINU RIEŠENÍ AKO $Ax = b$, $c^T x = z$.

SÚSTAVA VYZERÁ TAKTO: $x_B = p + Q x_N$, $z = z_0 + r^T x_N$

B BÁZA INDEXOV $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

x_B .. VEKT. BÁZICKÝCH PREM.
x_N .. VEKT. NEBÁZICKÝCH PREM.
$p \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$.

LEMMA: PRE KAŽDÚ PRÍPUSTNÚ BÁZU EXISTUJE PRÁVE 1 SIMPLEXOVÁ TABUĽKA:

$$Q = -A_B^{-1} A_N, \quad p = A_B^{-1} b, \quad z_0 = c_B^T A_B^{-1} b, \quad r = c_N - (c_B^T A_B^{-1} A_N)^T.$$

DÔKAZ: $Ax = b$, $A_B x_B + A_N x_N = b$, $A_B x_B = b - A_N x_N$

$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \right) + c_N^T x_N =$$

$$= c_B^T A_B^{-1} b + \underline{\underline{\left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \right)}} x_N .$$

JEDNOZNAČNOSŤ:

NECH $x_B = p + Q x_N$, $x_B = p' + Q' x_N$ $\qquad x_B = A_B^{-1} b$

ZVOLÍME $x_N = (0, \dots, 0)^T$. $\Rightarrow$ $p = p'$

KEĎ SÚDENIE ZA x_N VOLÍME JEDNOTKOVÉ VEKTORY, MÁME $Q = Q'$.

LEMMA: (OPTIMALITA) KEĎ JE $T(B)$ SIMPLEXOVÁ TABUĽKA A $r \leq 0$, POTOM PRÍSLUŠNÉ BÁZICKÉ RIEŠENIE JE OPTIMÁLNE.

DÔKAZ: BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x K BÁZE B MÁ HODNOTU ÚČELOVEJ FCIE. $= z_0$.

PRE ĽUBOVOĽNÉ BÁZICKÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE $\bar{x}$ K BÁZI $\bar{B}$ JE $c^T \bar{x}_B = z_0 + r^T \bar{x}_N \leq z_0$.

PRECHOD OD BÁZY B (TABUĽKY $T(B)$) K BÁZE B' (TABUĽKE B').

VŽDY JEDNU PREMENNÚ Z B ODOBERIEME A 1 PRIDÁME

VÝBER VSTUPUJÚCEJ PREM. x_v - ĽUBOVOĽNÁ NEBÁZICKÁ PREM., KT. MÁ KLADNÝ KOEF. VO VEKTORE r (T. J. V POSL. RIADKU $T(B)$)

VYSTUPUJÚCA PREM. x_u - TAKÁ BÁZICKÁ PREM., ŽE JEJ ROVNICA V SIMPL. TABUĽKE $T(B)$

$0 \leq x_u = \dots$

OHRANIČUJE ZVÝŠENIE x_v NAJVIAC.

$$\left(Q[u,v] < 0 \;\wedge\; -\frac{P[u]}{Q[u,v]} = \min \left\{ -\frac{P[i]}{Q[i,v]} ,\; Q[i,v] < 0 \;\; i \in B \right\} \right.$$

10.05.2006 We
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

KEĎ JE $Q_{iv} \geq 0$ PRE $\forall i \in B$, POTOM JE ÚLOHA NEOHRANIČENÁ (x_v MOŽNO ĽUBOVOĽNE ZVÄČŠIŤ ...)

LEMMA: KEĎ JE B PRÍPUSTNÁ BÁZA, POTOM AJ B', KT. VZNIKNE ODOBRANÍM VSTUP. PREM. A PRIDANÍM VSTUP. PREM., JE BÁZA.

$A_{B'}$ JE REGULÁRNA $\Leftrightarrow$ $A_B^{-1} A_{B'}$ JE REGULÁRNA.



$$Q = -A_B^{-1} \cdot A_N$$

NOVÝ STĹPEC $A_{B'}$ JE JEDNÝM ZO STĹPCOV MATICE A_N.

$\Rightarrow$ „NOVÝ STĹPEC" $-A_B^{-1} A_{B'}$ JE STĹPCOM MATICE Q

11.06.2006 Št
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

DUALITA LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

PRÍKLAD: $\max\ 2x_1+3x_2$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+8x_2 \le 12 \\ 2x_1+x_2 \le 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6x_1+9x_2 \le 15 \\ 2x_1+3x_2 \le 5 \end{array} \quad \ldots \text{NEZÁP. UN. KOMB.}$$
$$3x_1+2x_2 \le 5$$

$x_1, x_2 \ge 0$

HĽADÁME $y_i \ge 0$: $y^TA \ge c$ a $\min y^Tb$.

DEF.: DUÁLNA ÚLOHA K $\max c^Tx$, $Ax \le b$, $x \ge 0$ (P) JE $\min y^Tb$, $y^TA \ge c^T$, $y \ge 0$ (D)

VETA (SLABÁ VETA O DUALITE): PRE KAŽDÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE x ÚLOHY (P) A KAŽDÉ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE y ÚLOHY (D) PLATÍ $c^Tx \le y^Tb$.

DÔKAZ: $c^Tx \le (y^TA)x = y^T(Ax) \le y^Tb$.

POZNÁMKA: KEĎ (P) NIE JE ZHORA OHRANIČENÁ, POTOM (D) NEMÁ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE.
KEĎ (D) NIE JE ZDOLA OHRAN. $\Rightarrow$ (P) NEMÁ PRÍPUST. RIEŠ.

VETA (SILNÁ VETA O DUALITE): AK MAJÚ OBIDVE ÚLOHY (P) AJ (D) PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE, POTOM MAJÚ AJ OPTIMÁLNE RIEŠENIE x^* A y^* A PLATÍ $c^Tx^* = y^{*T}b$.

DÔKAZ: RIEŠIME $\max c^Tx$, $Ax \le b$, $x \ge 0$ SIMPLEXOM
TAKŽE ZAVEDIEME $x' = (x'_{n+1}, \ldots, x'_{n+m})$
$\max c^Tx$, $(A\ I)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = b$, $x \ge 0$, $x' \ge 0$.

UVAŽME POST. TABUĽKU SIMPL. ALGORITMU:

$$\bar{x}_B = p + Q\bar{x}_N \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$
$$z = z_0 + \alpha^T \bar{x}_N$$

NECH $\alpha_i \leq 0$ PRE $\forall i$.

STAČÍ NÁJSŤ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE y ÚLOHY (D) TAK. $b^T y = z_0$.
POLOŽÍME $\alpha_i = 0$ PRE $\forall i \in B$. POTOM $z = z_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i x_i'$.
ZOBERME $y = (-\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \dots, -\alpha_{n+m})^T$

$$z = c^T x = z_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i x_i' = z_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i x_{i+n}') =$$
$$= z_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i) \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)}_{x_{i+n}' \text{ z } (A\ I)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = b} =$$
$$= \boxed{z_0 - \sum_{i=1}^{m} y_i b_i} + \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j + \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}\right) x_j$$

ABSOLÚTNY ČLEN $= 0 \Rightarrow z_0 = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = y^T b$.

ZOSTÁVA OVERIŤ, ŽE y JE PRÍPUSTNÉ PRE (D).
TJ. $y^T A \geq c^T$

$$\forall j = 1, \dots, n: \quad c_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}$$
$$c^T = \alpha^T + y^T A$$

$\alpha_j \leq 0 \Rightarrow c^T \leq y^T A$. D

23.02.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

NÁJDITE ORTONORMÁLNU BÁZU $R(A)$

$y_1 = x_1 \quad z_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 = (4,1,4,1) - \left(2+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \left(1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$

$z_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$y_3 = x_3 - \langle x_3 | z_1 \rangle z_1 - \langle x_3 | z_2 \rangle z_2 = (1,2,3,4) -$

$- \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) =$

$= (1,2,3,4) - \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) =$

$= (1,2,3,4) - (-2,3,2,3) = (-1,-1,1,1)$

$z_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$a^T = (2,2,1,5)$

SPOČÍTAJTE PROJEKCIU a DO $R(A)$

$$P(a) = \sum_{i=1}^{3} \langle a, z_i \rangle z_i = (1,3,2,4)^T$$

$\text{Ker } A = (R(A))^{\perp}$

$a - P(a) = (1,-1,-1,1)^T \Rightarrow z_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

$z = (1,2,3,4)$

$x = (4,1,4,1)$

$y = (1,1,1,1)$

VZDIALENOSŤ z OD ROVINY DANEJ VEKT. X, Y

ZREJME $= \|v_3\| = 2$ (NIE MISTE)

$P(z) = (-1,-1,1,1)$

PERMUTÁCIE

$(1,3,5,\dots,2n-1,\ 2,4,6,\dots,2n)$

POČET INVERZIÍ $= \frac{1}{2}(n-1)n$

MATICA $A \in T^{7\times 7}$. URČI ZNAMIENKO PRI $a_{52}\ a_{35}\ a_{73}\ a_{17}\ a_{21}\ a_{26}\ a_{64}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$6+5+4+1 = 16 \Rightarrow$ ZNAMIENKO JE $+1$

$$\begin{array}{r} -28\,523 \\ +13\,547 \\ \hline -149\,7600 \\ \quad\ 1 \end{array}$$

$13\,547 \cdot 28523 - 28423 \cdot 13647$

$= 13\,547 \cdot 28523 - (28523-100)\cdot(13\,547+100) =$

$= (13\,547 \cdot 28523) - (13\,547 \cdot 28523) + 100\cdot(13\,547 - 28\,523) + 10\,000 =$

$= -1\,487\,600$

DÚ:

ORTONORMÁLNA BÁZA $\mathcal{R}(A)$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

+ ORTON. BÁZU $\ker A$

01.02.2006 We
PETER ČERNO

DÚ: LINEÁRNA ALGEBRA II

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

NÁJDI ORTONORMÁLNU BÁZU $R(A)$ A $\ker A$.

OZNAČME $x_1 = (0,3,4,0)^T$, $x_2 = (0,0,5,0)^T$, $x_3 = (2,1,0,2)^T$.

$y_1 = x_1$, $z_1 = \frac{1}{\|y_1\|} \cdot y_1 = \frac{1}{5} \cdot x_1 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$

$y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 = (0,0,5,0)^T - 4 \cdot (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T = (0, -\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 0)^T$

$\|y_2\| = \sqrt{\frac{12^2 + 9^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot (4^2+3^2)}{5^2}} = 3 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{\|y_2\|} y_2 = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T$

$y_3 = x_3 - \langle x_3 | z_1 \rangle z_1 - \langle x_3 | z_2 \rangle z_2 = (2,1,0,2)^T - \frac{3}{5} \cdot (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T + \frac{4}{5} \cdot (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T =$

$= (2, 0, 0, 2)$, $\|y_3\| = \sqrt{\quad} = 2\sqrt{2} \Rightarrow z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1,0,0,1)^T$

$\ker(A) = (R(A))^\perp$

RIEŠIME $Ax = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim \ker A = 4 - \dim R(A) = 1$

NAPR. $x = (-1,0,0,1)^T$ VYHOVUJE

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1,0,0,1)^T$

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE

z_1, z_2, z_3, z_4 TVORÍ ORTONORMÁLNU BÁZU $\mathbb{R}^4$.

BÁZA $R(A)$ BÁZA $\ker A$

02.03.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEARNA ALGEBRA II

$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) NÁJSŤ ORTON. BÁZU $\mathcal{G}(D)$ B_1
b) URČIŤ PROJEKCIU $b = (2,2,1,5)^T$ DO $\mathcal{G}(D)$
c) NÁJSŤ $(\mathcal{G}(D))^\perp$ ORTON. BÁZU B_2

a) $y_1 = x_1 \quad z_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{1}{5}(2,4,2,1)^T$

$y_2 = x_2 - \langle x_2|z_1\rangle z_1 = (-1,-2,-2,-1)^T + 3\cdot\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)^T =$

$= \left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^T = z_2$

$y_3 = x_3 - \langle x_3|z_1\rangle z_1 - \langle x_3|z_2\rangle z_2 = (1,2,4,2)^T -$

$- 4\cdot\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)^T + 3\cdot\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^T =$

$= (0,0,0,0)^T$

$y_4 = x_4 - \langle x_4|z_1\rangle z_1 - \langle x_4|z_2\rangle z_2 = (1,2,3,4)^T -$

$- 4\cdot\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)^T + 3\cdot\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^T =$

$= (0,0,-1,2)^T \Rightarrow z_4 = \frac{\sqrt{5}}{5}(0,0,-1,2)^T$

b) $P(b) = \langle b|z_1\rangle z_1 + \langle b|z_2\rangle z_2 + \langle b|z_4\rangle z_4 =$

$= \frac{10}{5}\cdot\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)^T + \left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{4}{5},-\frac{2}{5}\right)^T + \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}\right)\left(0,0,-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^T =$

$= \left(\frac{6}{5},\frac{12}{5},1,5\right)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

RIEŠTE $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 10 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 13 \\ 1 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 13 \\ 1 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 8 & 1 \\ 0 & -10 & 3 & 11 \\ 0 & -5 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -10 & 3 & 11 \\ 0 & -5 & 4 & 8 \end{array}\right)$$ ...

$x_1 = (2,4,2,1)^T$, $x_2 = (1,2,-4,-2)^T$, $x_3 = (0,0,-1,2)^T$

$y_1 = x_1$; $z_1 = \frac{1}{5}(2,4,2,1)^T$

$y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 = (1,2,-4,-2)^T - 0 \cdot z_1 = (1,2,-4,-2)^T$;

$z_2 = \frac{1}{5}(1,2,-4,-2)^T$

$y_3 = x_3 - \langle x_3 | z_1 \rangle z_1 - \langle x_3 | z_2 \rangle z_2 = (0,0,-1,2)^T - 0 z_1 - 0 z_2 = (0,0,-1,2)^T$

$z_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (0,0,-1,2)^T$

$$P(b) = \frac{10}{5}\left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}\right)^T \cdot - \frac{10}{5}\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{4}{5}, -\tfrac{2}{5}\right)^T + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^T =$$

$$= \frac{1}{5}(4, 8, 13, 9)^T$$

$$[P(b)]_B = \left(\frac{8+32+26+9}{5}, \frac{4+\frac{44}{5}-52-18}{5}, \frac{-13+18}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= (15, -10, \sqrt{5})$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$1 \to 6 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1$

$\pi^6 = id$

$100 \bmod 6 = 4$

$\Rightarrow \pi^{100} = \pi^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

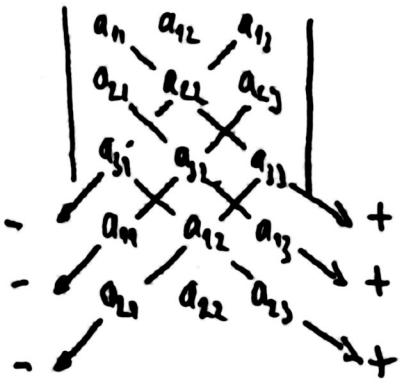
DÚ:

POČET INVERZIÍ: $\pi = (3,6,9,\dots,3n, 2,5,8,\dots,3n-1, 1,4,7,\dots,3n-2)$

LOMOV HLAVOLAM

09.03.2006TH
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

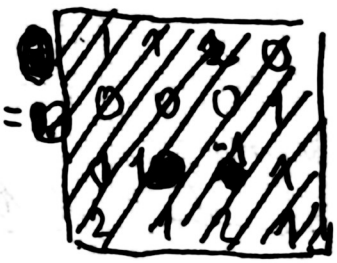


SARRUSOVÉ PRAVIDLO
PRE MATICE 3x3

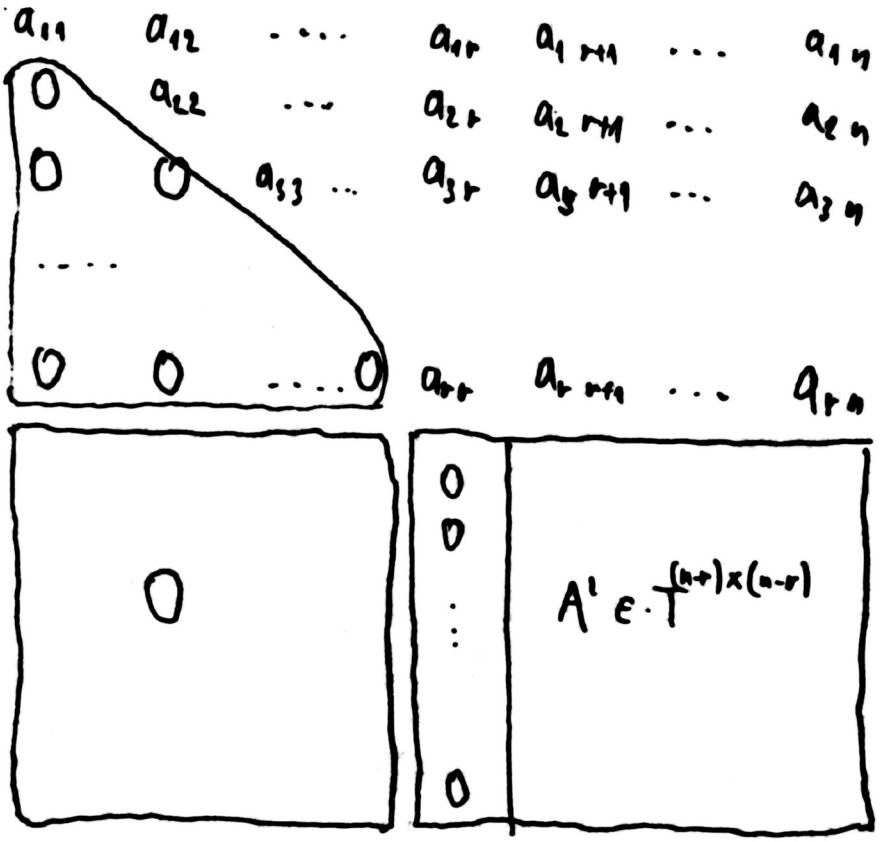
$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-4 \cdot 6 + 3 \cdot 9) = 24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$



$$= \begin{vmatrix} & \cdots & \\ & & \end{vmatrix} = -15$$



$$= \left[\prod_{i=1}^{r} a_{ii}\right] \det A'$$

PRÍKLAD: SPOČÍTAJTE OBJEM ROVNOBEŽNOSTENU URČENÉHO VEKTORMI $a = (3,1,1)^T$, $b = (2,3,2)^T$, $c = (2,1,1)^T$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 2 - 6 - 2 - 6 = \underline{\underline{1}}$$

09.03.2006 Th
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA II

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \dots & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 \\ a_1 & a_2+x \end{vmatrix} = (a_1+x)(a_2+x) - a_1 a_2 = x^2 + (a_1+a_2)x$$

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2+x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix} = (a_1+x)\left[x^2 + (a_2+a_3)x\right] - a_1\cdot\left[\overbrace{a_2(a_3+x) - a_2 a_3}^{a_2 x}\right] +$$
$$+ a_1\left[\underbrace{a_2 a_3 - a_3(a_2+x)}_{-a_3 x}\right] =$$
$$= x^3 + (a_2+a_3)x^2 + a_1 x^2 + a_1(a_2+a_3)x - a_1 a_2 x - a_1 a_3 x$$
$$= x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2$$

$$x^n + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) x^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & -x \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & \sum a_i + x \end{vmatrix}$$

16.03.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEARNA ALGEBRA II

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}, -a_{12}, \dots, (-1)^{1+n} a_{1n} \\ -a_{21}, a_{22}, \dots, (-1)^{2+n} a_{2n} \\ \dots \\ (-1)^{n+1} a_{n1}, \dots, (-1)^{n+n} a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} -a_{11}, a_{12}, \dots \\ a_{21}, -a_{22}, \dots \\ (-1)^{n+1} a_{n1}, \dots \quad -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod_{i=1}^{n} (-1)^{i+\pi(i)} a_{i\pi(i)} = \det A \qquad \sum_{i=1}^{n} (i+\pi(i)) = \text{even}\,(n+1)$$

$$\det A'' = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod_{i=1}^{n} (-1)^{i+\pi(i)+1} a_{i\pi(i)} = (-1)^n \det A \qquad \sum_{i=1}^{n} (i+\pi(i)+1) = n(n+1) + n$$

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$ VANDERMONDOVÁ MATICA

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-a_1)(1-a_0)$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\det V_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & a_1^2-a_0a_1 & \dots & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ & \dots & & & \\ 1 & a_n-a_0 & a_n^2-a_0a_n & \dots & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1-a_0)\dots(a_n-a_0) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & & & \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1-a_0)\dots(a_n-a_0) \cdot (a_2-a_1)\dots(a_n-a_1) \dots \dots (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n \geq i > j \geq 0} (a_i - a_j)$$

$$=$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

ZREJME

$$\Rightarrow \quad V_{n+1}(x_0, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

TJ.



$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left[V_{n+1}(x_0, \dots, x_n) \right]^{-1} \begin{pmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

PRÍKLAD: URČITE VL. ČÍSLA A DET. MATICE $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det A = ad - bc$

$Ax = \lambda x \quad x \neq 0$

$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$ $\qquad (A - \lambda I)x = 0$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a+d \\ \lambda_1 \lambda_2 &= ad - bc \end{aligned}}$$

$(x - t_1)(x - t_2) =$

$= x^2 + (-t_1 - t_2)x + t_1 t_2$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & \dots & y \\ y & x & \dots & y \\ \dots & & & \\ y & y & \dots & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-y & 0 & \dots & y-x \\ 0 & x-y & 0 \dots & y-x \\ \dots & & & \\ y & y & \dots & x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-y & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ y & y & \dots & x+(n-1)y \end{pmatrix} =$$

$$= (x-y)^{n-1} \cdot (x + (n-1)y)$$

16.03.2006 10TH
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

MATICA A, VL. ČÍSLO λ, VL. ČÍSLO (VEKTOR) x.

NÁJDITE VL. ČÍSLO A VL. VEKTOR MATICE $A - \lambda I$

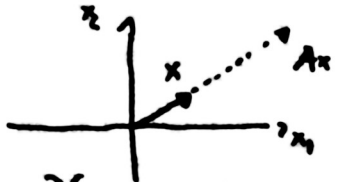
$Ax = \lambda x \quad x \neq 0 \qquad (A-\lambda I)x = 0$

HĽADÁME x', λ' : $(A-\lambda I)x' = \lambda' x'$

$(A-\lambda I)x = Ax - \lambda I x = \lambda x - \lambda x = (\lambda - \lambda)x \Rightarrow \lambda' = \lambda - \lambda, \; x' = x$

PRÍKLAD: REGULÁRNA MATICA A, VL. ČÍSLO $\lambda \neq 0$, VL. VEKTOR $x \neq 0$
NÁJDI VL. VEKTOR A VL ČÍSLO A^{-1}

$Ax = \lambda x \Rightarrow x = A^{-1}\lambda x \qquad A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$



PRÍKLAD: PREDP., ŽE A MÁ n RÔZNYCH VL. ČÍSIEL $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
DOKÁŽTE, ŽE $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

λ_i JE VL. ČÍSLO $A \Leftrightarrow A - \lambda_i I$ JE SING. $\Leftrightarrow \det(A - \lambda_i I) = 0$
UVAŽUJME POLYNÓM $P(t) = \det(A - tI)$
POTOM P MÁ KORENE $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$A - tI = \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

ZREJME $\det(A - tI) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t) = P(t)$
$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod_{i=1}^{n} \; ?$

$P(0) = \boxed{\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n}$. □

KOEF. PRI $(-t)^{n-1}$ ... $\boxed{\lambda_1 t \ldots + \lambda_n = a_{11} t \ldots + a_{nn}}$

Z DEF. $\det$ MÁ K $(-t)^{n-1}$ PRISPIEVA IBA $\pi = id$.

23.03.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNÁ ALGEBRA II

v $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

NAJDITE VLASTNÉ ČÍSLA A PRÍSLUŠNÉ VL. VEKTORY

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = (2-t)(-3-t) - 36 = t^2 + t - 42 = (t-6)(t+7)$

$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 6$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -7$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ NAD $\mathbb{C}$ $P_B(t) = -t\cdot(2-t) + 2 = t^2 - 2t + 2$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i\sqrt{1} = 1 \pm i$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1+i & 1 & 0 \\ -2 & 2-1-i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} (-1-i)(1+i) & -1+i & \\ -2 & 1-i & \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}$

$2x_1 = (1-i)x_2$ $u_1 = (x_1, x_2)^T = (1-i, 2)^T$ $\lambda_1 = 1+i$

$\begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 2\cdot(1+i) \end{pmatrix}$ $(-1+i)x_1 = x_2$ $u_2 = (x_1, x_2)^T = (1, +1-i)^T$ $\lambda_2 = 1-i$

SPOČÍTAJTE A^{100} PRE $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ NAD $\mathbb{R}$

$P_A(t) = (4-t)(2-t) - 3 = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$

$\Rightarrow R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$A \quad R \quad A \cdot R$

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D$

$R^{-1} \quad A R$

$Ax = \lambda x = \lambda I x$
$Ax - \lambda I x = 0$
$(A - \lambda I)x = 0$

$A^n = (R.D\,R^{-1})^n = R.D^n R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A\,(\overbrace{u_1, \dots, u_n}^{R}) = (\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) = R\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ✓

VLASTNÉ VEKTORY V DIAGONÁLNEJ MATICI D SÚ JEDNOTKOVÉ VEKTORY $e_1, \dots, e_n$

UVAŽUJME v VL. VEKTOR D, $\quad A = RDR^{-1}$

POTOM $A.(Rv) = R.Dv = R.\lambda v = \lambda(Rv)$

$\Rightarrow Rv$ JE VL. VEKTOR A.

23.03.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA

NÁJDITE MATICU A 2×2 S VL. ČÍSLAMI $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$, A PRÍSL. VL. VEKTORMI $u_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$R=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc}3&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\3&2&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&-1&1&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2\\0&-1&1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1\cdot&-2\\0&1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$A=RDR^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-4&12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5&18\\-3&10\end{pmatrix}$$

NÁJDI $\forall$ MATICE PODOBNÉ MATICI I

$$R.I.R^{-1}=RR^{-1}=I$$

$\Rightarrow$ IBA MATICA I.

NÁJDI VL. ČÍSLA MATICE: DÚ

$$\begin{pmatrix}3&2&0&1&-2\\0&2&0&0&0\\2&0&1&0&3\\0&5&0&1&0\\4&9&0&7&-3\end{pmatrix}$$

VL. ČÍSLA A VL. VEKTORY MATICE $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

K MATICI $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NÁJDITE PODOBNÚ DIAGONÁLNU.

NÁJDITE 2 REÁL. MATICE A, B TAKÉ, ŽE $P_A = P_B$ A NIE SÚ PODOBNÉ.

06.04.2006 TH
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

VLASTNÉ ČÍSLA $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 5$

$\text{track } H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 11 \Rightarrow \underline{\lambda_4 = 7}$

$$H - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 12 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \\ 15 & 2 & 13 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$v_{i+1} = \frac{9}{10} v_i + \frac{2}{5} m_i = \frac{7}{10} v_i + \frac{2}{10}(m_i + v_i)$$

$$m_{i+1} = \frac{4}{5} m_i + \frac{1}{10} v_i = \frac{7}{10} m_i = \frac{1}{10}(m_i + v_i)$$

$$\begin{pmatrix} v_{i+1} \\ m_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ m_i \end{pmatrix}$$

$$v_i \to \frac{\frac{1}{10} C}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{2}{3} C = \frac{2}{3}(m_i + v_i)$$

$$m_i \to \frac{\frac{1}{10} C}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{1}{3}(m_i + v_i)$$

$$a_{n+1} = C + q a_n$$

$$a_{n+1} + k = q(a_n + k)$$

$$a_{n+1} = q a_n + k(q-1)$$

$$\Rightarrow\ a_n \to -k = \frac{C}{1-q}$$

$$\begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = A^i \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = R D^i R^{-1} \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \frac{7}{10}$

$v_1 = (2, 1)^T \quad v_2 = (1, -1)^T$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 (1, -1)$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$A^i \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{7}{10}\right)^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3\left(\frac{7}{10}\right)^i & -\frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} v_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i v_0 + \frac{2}{3} w_0 - \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i w_0 \\ \frac{1}{3} v_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i v_0 + \frac{1}{3} w_0 + \frac{2}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^i w_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(w_0 + v_0) \\ \frac{1}{3}(w_0 + v_0) \end{pmatrix}$$

06.04.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

POZNÁMKA: STOCHASTICKÉ (MARKOVOVÉ) MATICE ≡ KAŽDÝ STĹPEC MÁ $\sum = 1$, VŠETKY $a_{ij} \geq 0$.

$A - I$ JE SINGULÁRNA (SÚČET RIADKOV = 0)
$\Rightarrow \lambda = 1$ JE VLASTNÉ ČÍSLO ✓

POZNÁMKA: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ NEKONVERGUJE.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

NÁJDITE JORDANOV NORMÁLNY TVAR A, B.
NÁJDITE MATICU A', B' $A = A' \cdot A'$, $B = B' \cdot B'$

$\det(A - \lambda I)$: $(-11-\lambda)(24-\lambda) + 300 = \lambda^2 - 13\lambda + 300 - 264 =$
$= \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4)$

$\lambda_1 = 9$, $v_1 = (3, 2)^T$
$\lambda_2 = 4$, $v_2 = (2, 1)^T$

$$\begin{pmatrix} -20 & 30 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 0 \\ 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$A = RDR^{-1}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{matrix} \qquad v_1 = (2, -1, 0)^T$$

$$(B - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} v_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.04.2006 We
PETER ČERNO

ÚLOHA - LINEÁRNA ALGEBRA II

NÁJDITE JORDANOV NORMÁLNY TVAR MATICE B,
NÁJDITE B': $B = B' \cdot B'$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & 5 \\ 2 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B-\lambda I) = -\lambda(-1-\lambda)(8-\lambda) + 1\cdot(-4)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 5 - (-2)(-1-\lambda)2 - 5\cdot(-4)\cdot(-\lambda) - (8-\lambda)\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= (\lambda+\lambda^2)(8-\lambda) + 8 + 20 - 4\cdot(1+\lambda) - 2\cdot(8-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 8\lambda + 8 - 12\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$

$$B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1$$

$$B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$$

$$B - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3$$

$$R := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = R^{-1} B R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B' = R \sqrt{D} R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} & -5+4\sqrt{2} & 7-4\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & -4+2\sqrt{2} & 6-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

01.04.2006 Sa
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: NÁJDITE ∞ VEĽA MATÍC S CHAR. POLYNÓMOM
$p(t) = (0-t)(1-t)(2-t)$

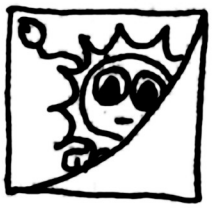
NAPR. $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{C}$.

PRÍKLAD: UKÁŽTE, ŽE KAŽDÁ MATICA $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ JE SÚČTOM 2 REGULÁRNYCH MATÍC.

$A = (A+D) + (-D)$, KDE $D = \begin{pmatrix} m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m \end{pmatrix} = mI$, $m = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|\right) + 1$

13.04.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II



PRÍKLAD: NÁJDITE VL. ČÍSLA MATICE

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad C - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & b \\ 0 & b & a-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{matrix}$$

$$\det(C-\lambda I) = (a-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - b^2(a-\lambda) - b^2(a-\lambda) =$$

$$= (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 2b^2\right] = \text{[illegible]} =$$

$$= (a-\lambda)\left[(\lambda-a)^2 - 2b^2\right] = (a-\lambda)(\lambda - a - \sqrt{2}b)(\lambda - a + \sqrt{2}b)$$

$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + \sqrt{2}b$, $\lambda_3 = a - \sqrt{2}b$

$$C - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}b & b & 0 \\ b & -\sqrt{2}b & b \\ 0 & b & -\sqrt{2}b \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} \sqrt{2}b & b & 0 \\ b & \sqrt{2}b & b \\ 0 & b & \sqrt{2}b \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$



$w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T \quad w_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \quad w_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

PLATÍ $C = R D R^T$, KDE $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+\sqrt{2}b & 0 \\ 0 & 0 & a-\sqrt{2}b \end{pmatrix}$

C JE POZITÍVNE DEFINITNÁ $\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, D.

$a > 0$, $a + \sqrt{2}b > 0$, $a - \sqrt{2}b > 0$

$$\boxed{a > \sqrt{2}|b| \geq 0}$$

$C = RDR^T = R\sqrt{D}\sqrt{D}R^T$

POLOŽÍME $U = \sqrt{D}^T R^T$, POTOM $C = U^T U$

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4+\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad R^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4+\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\sqrt{4}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4}}{2} \\ \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{4+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{4-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} = U$$

PŘÍKLAD: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ JE POZIT. DEF.? AK ÁNO, NÁJDITE ROZKLAD NA Δ

$A = L \cdot L^T$ ↳ DOLNÁ Δ

$$\det A - \lambda I = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) = (4-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = -(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$

ELEM. ÚPRAVY $E \cdot A = F$ (V SPRÁVNOM POŘADÍ) ↓ DOLNÁ Δ NA DIAG. SÚ 1, ↓ HORNÁ Δ

DÁ SA NAHLIADNUŤ, ŽE E^{-1} JE DOLNÁ Δ NA DIAG. SÚ 1

$\Rightarrow A = E^{-1} \cdot F$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i \text{-- } \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & j \\ & & \ddots & \\ & k & & 1 \end{pmatrix} A$$

K i-TEMU RIADKU PRIPOČÍTAJEME k-NÁSOBOK j-TEHO

CHCEME NÁJSŤ $A = L' D' L'^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = E^{-1} \cdot F = E^{-1} \cdot D' \cdot H$

KEDŽE $A^T = A \Rightarrow E^{-1} = H^T$

STAČÍ POLOŽIŤ $L = H^T \cdot \sqrt{D}$. $\Rightarrow L L^T = H^T \sqrt{D} \cdot \sqrt{D}^T H = H^T D' H = E^{-1} D' H = A$

13.04.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PLATÍ NASLEDUJÚCE ?

A JE POZ. DEF. $\Rightarrow A^{-1}$ JE POZ. DEF.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ $\quad x^T A x > 0$

NECH $\exists x_0 \neq 0$ $\quad x_0^T A^{-1} x_0 < 0$

NÁJDEME $x_1 \neq 0 : x_0 x_0^T = 1$

POTOM $x_0^T A^{-1} x_0 \, x_1^T A x_1 = x_0^T A^{-1} A x_1 = x_0^T x_1 = 1 > 0$, SPOR.

$A = R \cdot D \cdot R^{-1} \Rightarrow A^{-1} = R \cdot D^{-1} R^{-1}$

PRÍKLAD: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

SPOČÍTAJTE ROZKLAD NA $B = L \cdot L^T$, L JE DOLNÁ Δ.

PRÍKLAD: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ MÁ VL. ČÍSLA 0, 1, 2.
NÁJDITE VL. ČÍSLA $A(A-I)(A-2I)$.

A JE POZ. DEF.

$A = E^{-1} F = E^{-1} D H$ $\quad$ E^{-1} JE DOLNÁ Δ S 1 NA DIAG.
H JE HORNÁ Δ S 1 NA DIAG.
D JE DIAG. MATICA

$A^T = A$

POTOM $E^{-1} = H^T$.

$A^T = A \quad H^T D E^{-1T} = E^{-1} D H$

$E H^T D = D H E^T$

$E H^T = H E^T = I$. ☐



18.04.2006 TU
PETER ČERNO

ÚLOHA - LIN. ALGEBRA

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 11-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det C_{11} = (8-\lambda)(11-\lambda)(2-\lambda) + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot (11-\lambda) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (8-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$= \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 2 & 8-\lambda & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 11-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2 & 8-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & 11-\lambda \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - (11-\lambda) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (8-\lambda) \cdot 1 =$$

$$= 8 + 8 - 44 + 4\lambda - 8 + \lambda = 5\lambda - 36$$

$$(8-\lambda)(11-\lambda)(2-\lambda) + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$- 2 \cdot (11-\lambda) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (8-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$= (\lambda^2 - 19\lambda + 88)(2-\lambda) + 16 - 44 + 8 - 8 + \lambda - 32 + 16\lambda =$$

$$= (2\lambda^2 - 38\lambda + 176 - \lambda^3 + 19\lambda^2 - 88\lambda) - 68 + 21\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 105\lambda + 108$$

$$\begin{array}{rr} -38 & -126 \\ -88 & +21 \\ \hline -126 & -105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ -68 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 213 & 108 \\ -46 & -72 \\ \hline -167 & 36 \end{array}$$

$(1-\lambda)(-\lambda^3+21\lambda^2-105\lambda+108) =$

$= -\lambda^3+21\lambda^2-105\lambda+108+\lambda^4-21\lambda^3+105\lambda^2-108\lambda =$

$= \lambda^4-22\lambda^3+126\lambda^2-213\lambda+108$

$(2-\lambda)(5\lambda-36) = 10\lambda-72-5\lambda^2+36\lambda = -5\lambda^2+46\lambda-72$

$\det(B-\lambda I) = \lambda^4-22\lambda^3+121\lambda^2-167\lambda+36$ (???)

$$B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&8&4&2\\1&4&11&1\\0&2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&4&2&2\\0&2&10&1\\0&2&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&4&2&2\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E\cdot A=F$$

DOLNÁ Δ JE DIAG. 1

$$F=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&4&2&2\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&\frac12&\frac12\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

D' $\qquad$ H

$B = E^{-1}.F = E^{-1}.D'.H \qquad E^{-1}=H^T$

$L = H^T.\sqrt{D'}$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&\frac12&1&0\\0&\frac12&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\1&1&3&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$E^{-1}=H^T$

SKÚŠKA $\quad L.L^T =$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\1&1&3&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&2&1&1\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&8&4&2\\1&4&11&1\\0&2&1&2\end{pmatrix}$$

13.04.2006
PETER ČERNO

ÚLOHA - LIN. ALGEBRA

$v_1 \neq 0 \quad v_2 \neq 0 \quad v_3 \neq 0$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$

NAJDITE VL. ČÍSLA $A(A-I)(A-2I)$

$Av_1 = 0, \quad (A-I)v_2 = 0, \quad (A-2I)v_3 = 0$

$A(A-I)(A-2I)w = \lambda w$

$\sim (A(A-I)(A-2I) - \lambda I)w = 0$

$P_A(t) = -(t-0)(t-1)(t-2) = t(t-1)(t-2)$

$(A^2-A)(A-2I) - \lambda I = A^3 - 2A^2 - A^2 + 2A - \lambda I =$
$= A^3 - 3A^2 + 2A - \lambda I$

$(A^3 - 3A^2 + 2A)v_1 = 0 = \underline{\underline{0 \cdot v_1}}$

$\sim (A^3 - 3A^2 + 2A)v_2 = A^3 v_2 - 3A^2 v_2 + 2A v_2 =$
$= A^2 \cdot v_2 - 3A v_2 + 2A v_2 =$
$= Iv_2 - 3Iv_2 + 2Iv_2 = 0 = \underline{\underline{0 \cdot v_2}}$

$(A^3 - 3A^2 + 2A) \cdot v_3 = A^3 v_3 - 3A^2 v_3 + 2Av_3 =$
$= 8Iv_3 - 12Iv_3 + 4Iv_3 = \underline{\underline{0 \cdot v_3}}$

VÝSLEDOK: $A(A-I)(A-2I)$ MÁ 1 VL. ČÍSLO $\lambda = 0$
3 VL. VEKTORY: v_1, v_2, v_3.

20.04.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: MAJME VP = MATICE 2×2
A LIN. ZOBRAZENIE $f(A) = A^T$.
NÁJDITE VL. ČÍSLA A „VL. VEKTORY" f.

NAPR. $\lambda=1$ MÁ VL. VEKTORY $\forall$ SYMETRICKÉ MATICE $A \neq 0$
$\lambda=-1$ MÁ VL. VEKT. - NA DIAG $=0$, $A^T=-A$

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda a = a \\ \lambda b = c \\ \lambda c = b \\ \lambda d = d \end{matrix} \quad \begin{matrix} \lambda^2 c = c \\ \lambda^2 b = b \end{matrix} \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

PRÍKLAD: $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

D JE POZ. DEF. $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ JE POZ. DEF.

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ JE POZ. DEF.

KEĎŽE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ D JE POZ. DEF.

PRÍKLAD: UVAŽUJME VP $V = \mathbb{R}^4$ NAD $T = \mathbb{R}$.
JE DANÁ KVADR. FORMA $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$
KDE $u = (x, y, z, t)^T$

1. NÁJDITE MATICU g VZHĽADOM KANONICKEJ BÁZE (e_1, e_2, e_3, e_4),
TJ.: $g(u) = u^T B u$ KDE B JE SYMETRICKÁ

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. VZHĽADOM BÁZE $X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ $[id]_X^X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B' = [id]_X^{st^T} B [id]_X^X$

PRÍKLAD: BILINEÁRNA FORMA f NAD $V=\mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right) = aa' + 2bc' + cc' + 2cb' - ab' + bb' - ba'.$$

NÁJDITE MATICU KVADR. FORMY $g(x)=f(x,x)$ VOČI $\mathcal{K}$.

26.04.2006 We
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

ÚLOHA BILINEÁRNA FORMA f NAD $V=\mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right) = a_1b_1 + 2a_2b_3 + a_3b_3 + 2a_3b_2 - a_1b_2 + a_2b_2 - a_2b_1 =$$

$$= (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

27.04.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD: $V=\mathbb{R}^3$, $f(v,w) = v^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} w$

DEF. $g(v) = f(v,v)$

JE g KV. FORMA? ÁNO

NÁJDITE BÁZU X TAKÚ, ŽE MATICA B_X KV. FORMY g BUDE DIAGONÁLNA $(+1, -1, 0)$.

$$B_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{\mathcal{E}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (4-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1) =$$

$$= 12 - 16\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 12$$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3)$

$\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

PLATÍ $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R^T \cdot B_{\mathcal{E}} R$ TJ. $B_{\mathcal{E}} = RDR^T =$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= R \cdot U \cdot D_0 \cdot U^T R^T$$

$$C = U^T R^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$[g(u)]_{\mathcal{B}} = [U]^{T}_{\mathcal{B}} B [u]_{\mathcal{B}}$$

$$[u]_{\mathcal{B}} = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'}$$

$$\Rightarrow B' = [id]^{\mathcal{B}^T}_{\mathcal{B}'} B [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \quad \checkmark$$

$$B_{\mathcal{E}} = (RU) D_{\mathcal{B}} (RU)^T$$

$$\Rightarrow D_{\mathcal{B}} = (RU)^{-1} \cdot B_{\mathcal{E}} \cdot [(RU)^T]^{-1}$$

$$C = U^T R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\sqrt{6} & 0 & 0 & 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

POZNÁMKA: $C^{-1} = (U^T R^T)^{-1} = (R^T)^{-1} U^{-1} = R \cdot U^{-1}$

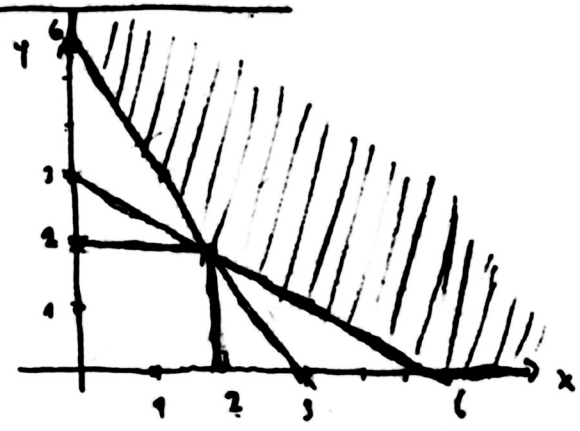
$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

27.04.2006 Tu
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD:

$$x + 2y \geq 6$$
$$2x + y \geq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



min $x+y$ $(x,y)^T = (2,2)^T$ $x+y = 2+2 = 4$

min $2x+y$ ÚSEČKA $(0,6), (2,2)$ $2x+y = 6$

min $3x+y$ $(x,y)^T = (0,6)$ $3x+y = 6$

min $x-y$ NEMÁ OPT. RIEŠENIE

PRÍKLAD:

	S1	S2	S3	PREDAJNÁ CENA KUSU
B1	0,2	0,15	0,3	300
B2	0,4	0,1	0,1	400
MAXIMÁLNE NA DEŇ	80	30	50	

CHCEME MAX. CENU VYROBENÉHO BETÓNU

$0{,}2\,b_1 + 0{,}4\,b_2 \leq 80$
$0{,}15\,b_1 + 0{,}1\,b_2 \leq 30$
$0{,}3\,b_1 + 0{,}1\,b_2 \leq 50$
$b_1 \geq 0 \quad b_2 \geq 0$

ÚČELOVÁ FCIA $300\,b_1 + 400\,b_2$ MAXIMUM

MINIMALIZÁCIA SPOTREBY SUROVÍN ?

20.04.2006 Th
PETER ČERNO
4-37

EX: LINEARNA ALGEBRA — TEST A — (30)

1. UREČI DETERMINANT

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2. $$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ 8 & -11 & -8\\ -10 & 11 & 7\end{pmatrix}$$

JE A DIAGONIZOVATELNÁ? PROČ?

3. A, B SÚ POZ. DEF. JE A+B POZ. DEF.?

(1.) ~

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 4$$ ✓ 9

(2.) $$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}-1-\lambda & -1 & -2\\ 8 & -11-\lambda & -8\\ -10 & 11 & 7-\lambda\end{pmatrix}=$$ 19

$$= (-1-\lambda)(-11-\lambda)(7-\lambda) + 8\cdot 11\cdot(-2) + (-10)\cdot(-1)\cdot(-8) -$$
$$- (-2)\cdot(-11-\lambda)\cdot(-10) - (-8)\cdot 11\cdot(-1-\lambda) - (7-\lambda)(-1)\cdot 8 =$$
$$= (\lambda+1)(\lambda+11)(7-\lambda) - 176 - 80 + 20(\lambda+11) - 88\cdot(\lambda+1) + 8\cdot(7-\lambda) =$$
$$= (\lambda^2+12\lambda+11)(7-\lambda) - 256 + 20\lambda + 220 - 88\lambda - 88 + 56 - 8\lambda =$$
$$= -\lambda^3 - 12\lambda^2 - 11\lambda + 7\lambda^2 + 84\lambda + 77 - 36 - 32 - 68\lambda - 8\lambda =$$
$$= -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9$$

$\lambda_1 = 1$ JE KOREŇ: $-1-5-3+9=0$

$(\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda-9) : (\lambda-1) = -\lambda^2+6\lambda+9 \Rightarrow$

$-(\lambda^3-\lambda^2)$
$-6\lambda^2+3\lambda$
$-(6\lambda^2-6\lambda)$
$9\lambda-9$

$$-\lambda^3-5\lambda^2-3\lambda+9 = -(\lambda-1)(\lambda+3)^2 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_3=-3$$

73
−76
−3

K VLASTNÉMU ČÍSLU $\lambda_1 = 1$ VIEME NÁJSŤ VL. VEKTOR v_1.
TERAZ UŽ IBA STAČÍ NÁJSŤ 2 VL. VEKTORY K VL. ČÍSLU $\lambda_2 = -3$

TJ. OVERIŤ, ČI $\dim\left(\ker\left(A+3I\right)\right) = 2$

$$A+3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 8 & -3 & -8 \\ -10 & 11 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

VIDÍME, ŽE $\dim\left(\mathcal{O}(A+3I)\right) = 2 = \operatorname{rank}(A+3I)$ ⌒

$\Rightarrow \dim\left(\ker\left(A+3I\right)\right) = 1 \neq 2$

KEĎŽE $\dim\left(\ker\left(A-\lambda_2 I\right)\right) \neq$ NÁSOBNOSTI VL. ČÍSLA λ_2,

POTOM NUTNE A NIE JE DIAGONIZOVATEĽNÁ.

(3.) NECH A, B SÚ POZ. DEF., $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, TJ. $A^T = A$, $B^T = B$ A PRE $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$: $x^TAx > 0$, $x^TBx > 0$ 2

POTOM ZREJME $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$, ⌒
TJ. $A+B$ JE SYMETRICKÁ

A PRE $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$: $x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0$

$\Rightarrow$ $A+B$ JE POZ. DEFINITNÁ. □

04.05.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

PR: max $x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

1) HRUBÝ ODHAD POČTU BÁZ: $\binom{5}{3} = 10$.
2) PRESNÝ POČET BÁZ = 9
3) NÁJDITE ASPOŇ 1 PRÍPUSTNÚ BÁZU

$B = \{3, 4, 5\}$ $A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$ $x = (0, 0, 12, 5, 16)^T$

4) UVAŽTE $X = (0,4, 0,5, 0)^T$
JE TO PRÍPUSTNÉ BÁZ. RIEŠENIE ?
ÁNO, PRETOŽE $Ax = b$ A $A_{\{2,4\}}$ SÚ LN. NEZ. STĹPCE

5) KOĽKO EXISTUJE BÁZ B K VEKTORU x ? (T.J. $A_B x_B = b$)
EXISTUJÚ 3 BÁZY: $B_1 = \{1,2,4\}$
$B_2 = \{2,3,4\}$
$B_3 = \{2,4,5\}$

$x_1 - x_2 = 2$
$2x_1 + x_2 = 7$

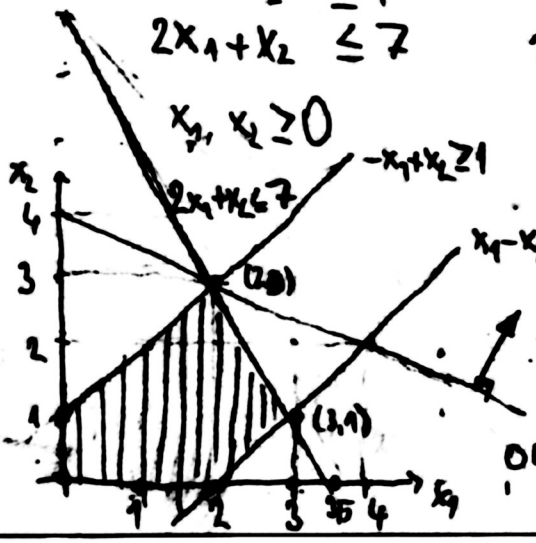
PRÍKLAD: max $x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$



OPT. = (2,3)

$B = \{3,4,5\}$
$x = (0, 0, 2, 1, 7)^T$

$B = \{3,4,5\}$

$x_3 = 2 - x_1 + x_2$ $\quad x_1 \leq 2$

$x_4 = 1 + x_1 - x_2$ $\quad x_1 \geq -1$

$x_5 = 7 - 2x_1 - x_2$ $\quad x_1 \leq 3{,}5$

$z = x_1 + 2x_2$

NOVÉ ZÁKL. ŘEŠENÍ $x = (2, 0, 0, 3, 3)$ $\quad B = [1,4,5]$

$x_1 = 2 - x_3 + x_2$ $\quad x_2 \geq -2$

$x_4 = 1 + 2 - x_3 + x_2 - x_2 = 3 - x_3$

$x_5 = 3 - 3x_2 + 2x_3$ $\quad x_2 \leq 1$

$z = 2 - x_3 + x_2 + 2x_2 = 2 + 3x_2 - x_3$ $\quad \Rightarrow x_2 := 1$

$B = [1,2,4]$

$x_1 = 3 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$ $\quad x_3 \leq 9$

$x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5$

$x_4 = 3 - x_3$ $\quad x_3 \leq 3$

$z = 5 + x_3 - x_5$

$x = (3, 1, 0, 3, 0)^T$ $\quad \Rightarrow x_3 := 3$

$B = \{1,2,3\}$

$x_1 = 2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$

$x_2 = 3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$

$x_3 = 3 - x_4$

$z = 8 - x_4 - x_5$ $\quad \Rightarrow$ UŽ NEMŮŽEME POKRAČOVAT

$x = (2, 3, 3, 0, 0)^T$

$\min y^T b \quad = \quad \max c^T x$

$y^T A \leq c \quad = \quad Ax \leq b$

$y \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$

11. 05. 2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

PRÍKLAD:

$\max x_1 + x_2$

$5x_1 + x_2 \leq t$

$x_1, x_2 \geq 0$

● NÁJDITE s, t TAK, ABY ÚLOHA MALA
a) PRÁVE 1 OPT. RIEŠENIE
b) ASPOŇ 2 OPT. RIEŠ.
c) NEBOLA OHRANIČENÁ
d) NEMALA RIEŠENIE

UVAŽUJME $t \geq 0$

$5x_1 + x_2 + x_3 = t$ $\quad B = \{3\}$

$x = (0, 0, t)$

$t < 0$ ...

$0 \leq x_3 = t - 5x_1 - x_2$

$z' = x_1 + x_2$

KEĎ JE $s < 0$, POTOM JE ÚLOHA NEOHRANIČENÁ

KEĎ JE $s = 0$, POTOM $x_2 \leq t$
x_1 MÔŽEME ZVOLIŤ ĽUBOVOĽNE
$\Rightarrow$ ÚLOHA JE NEOHRANIČENÁ

KEĎ JE $s > 0$, POTOM
$x_1 \leq \frac{t}{s}$, $x_2 \leq t$

$s \in (0,1) \Rightarrow$ POLOŽÍME $x_2 := t$ (1 OPT. RIEŠ.) $\quad x_2 = t - sx_1 - x_3$, $z = t + (1-s)x_1 - x_3$

$s = 1 \Rightarrow$ POLOŽÍME NAPR. $x_2 = t$ (∞ - VEĽA RIEŠ.) $\quad z = t - x_3$ ✓

$s \in (1, +\infty) \Rightarrow$ POLOŽÍME $x_1 := \frac{t}{s}$ (1 OPT. RIEŠ.) $\quad x_1 = \frac{t}{s} - \frac{x_2}{s} - \frac{x_3}{s}$

$z = \frac{t}{s} + \left(1 - \frac{1}{s}\right)x_2 - \frac{x_3}{s}$

$\max \; x_2$

$-x_1 + x_2 \leq 0$

$x_1 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\max \; x_2$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_4 = 2$

$x_1, \ldots, x_4 \geq 0$

$B = \{3,4\} \quad x = (0,0,0,2)^T$

$x_3 = x_1 - x_2 \qquad x_2 \leq 0$

$x_4 = 2 - x_1 \qquad x_1 \leq 2$

$z = \textcircled{x_2}$

$x_2 = 0 \qquad B = \{2,4\} \qquad x = (0,0,0,2)^T$

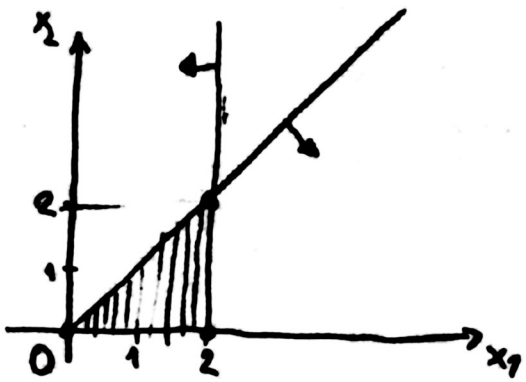
$0 \leq x_2 = x_1 - x_3 \qquad \cancel{x_3 \leq 0}$

$0 \leq x_4 = 2 - x_1 \qquad x_1 \leq 2$

$z = \textcircled{x_1} - x_3$

$x_1 = 2 \qquad B = \{1,2\}$

$x = (2,2,0,0)^T$



$x_1 = 2 - x_4$

$x_2 = x_1 - x_3 = 2 - x_3 - x_4$

$z = 2 - x_3 - x_4$

OPTYMALNE ROZWIĄZANIE JEST $(2,2,0,0)^T$

11.05.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LIN. ALGEBRA II

$\max\ x_1 + 2x_2$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$

$2x_2 + x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

HĽADANIE PRÍPUSTNÉHO BÁZICKÉHO RIEŠ. POMOCNEJ ÚLOHY

$\max\ -y_1 - y_2$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 4$

$2x_2 + x_3 + y_2 = 2$

$x_i \geq 0 \quad y_1, y_2 \geq 0$

$B = \{1,3\} \quad x = (2,0,2)^T$

$x_1 = 4 - 3x_2 - x_3 = 4 - 3x_2 - (2 - 2x_2) = 2 - x_2 \qquad x_2 \leq 2$

$x_3 = 2 - 2x_2 \qquad x_2 \leq 1$

$z = x_1 + 2x_2 = 2 + x_2$ $\qquad x_2 := 1$

$B = \{1,2\} \quad x = (1,1,0)^T$

$x_1 = 2 - x_2 = 2 - 1 + \frac{1}{2}x_3 = 1 + \frac{1}{2}x_3$

$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_3$

$z = 3 - \frac{1}{2}x_3$

OPTIMÁLNE RIEŠENIE JE: $x = (1,1,0)^T$

$\max\ -x_4 - x_5$

$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4$

$2x_2 + x_3 + x_5 = 2$

$x_i \geq 0$

$B = \{4,5\} \quad x = (0,0,0,4,2)^T$

$x_4 = 4 - x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad x_1 \leq 4$

$x_5 = 2 - 2x_2 - x_3$

$z = -x_4 - x_5 = -4 + x_1 + 3x_2 + x_3 - 2 + 2x_2 + x_3 = -6 + x_1 + 5x_2 + 2x_3$

$x_1 := 4$

$B = \{1,5\} \quad x = (4,0,0,0,2)^T$

(12)

$x_1 = 4 - 3x_2 - x_3 - x_4 \qquad x_3 \le 4$

$x_5 = 2 - 2x_2 - x_3 \qquad x_3 \le 2$

$z = -2 + 2x_2 + x_3 - x_4$

$x_3 = 2$

$B = \{1, 3\} \qquad x = (2, 0, 2, 0, 0)^T$

$x_1 = 4 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 4 - 3x_2 - x_4 - 2 + 2x_2 + x_5 = 2 - x_2 - x_4 + x_5$

$x_3 = 2 - 2x_2 - x_5$

$z = -2 + 2x_2 + 2 - 2x_2 - x_5 - x_4 = 0 - x_4 - x_5$

OPT. RIEŠENIE $x = (2, 0, 2, 0, 0)^T$

$\min -2x_1 + x_3$

$5x_1 + 3x_2 = 6$

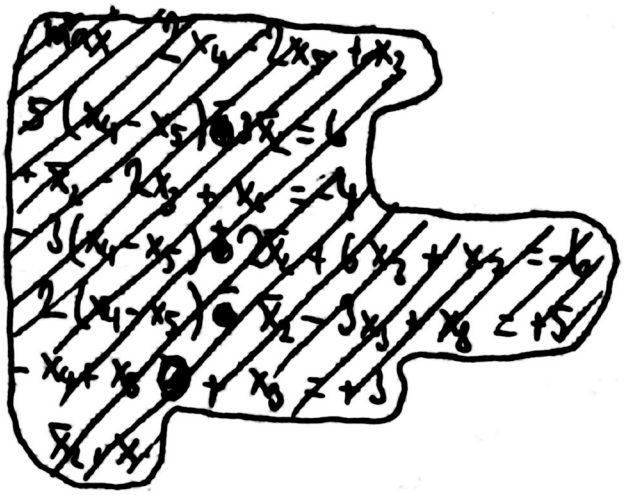
$-x_2 - 2x_3 \le -4$

$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \ge 6$

$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -5$

$x_2 \le 0$

$x_1 \ge -3$



$5x_1 + 3x_2 \le 6$

$-5x_1 - 3x_2 \le -6$

$-x_2 - 2x_3 \le -4$

$-3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \le -6$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 5$

$x_2 \le 0$

$-x_1 \le 3$

$x_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_4 \qquad \bar{x}_3, \bar{x}_4 \ge 0$

$x_2 = -\bar{x}_2 \qquad \bar{x}_2 \ge 0$

$x_1 + 3 = \bar{x}_1 \qquad x_1 = \bar{x}_1 - 3 \qquad \bar{x}_1 \ge 0$

$\max \; 2(\bar{x}_1 - 3) - (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) = 2\bar{x}_1 - \bar{x}_3 + \bar{x}_4 - 6$

25.05.2006 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA II

(P)

$$\max\ -6x_1 + 32x_2 - 9x_3$$
$$-2x_1 + 10x_2 - 3x_3 \le -6$$
$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(D) $-2y_1 + y_2 \ge -6$ $\quad \min\ -6y_1 + 4y_2$

$10y_1 - 7y_2 \ge 32$

$-3y_1 + 2y_2 \ge -9$

$y_1, y_2 \ge 0$

$\max\ 6y_1 - 4y_2$

$+2y_1 - y_2 \le 6$

$-10y_1 + 7y_2 \le -32$

$3y_1 - 2y_2 \le 9$

$y_1, y_2 \ge 0$

$\max\ 6y_1 - 4y_2$

$2y_1 - y_2 + y_3 = 6$

$-10y_1 + 7y_2 + y_4 = -32$

$3y_1 - 2y_2 + y_5 = 9$

$y_1, \dots, y_5 \ge 0$

$\max\ -y_6$

$2y_1 - y_2 + y_3 = 6$

$10y_1 - 7y_2 - y_4 + y_6 = 32$

$3y_1 - 2y_2 + y_5 = 9$

$y_1, \dots, y_6 \ge 0$

$B = \{3,5,6\}$ $\quad x = (0,0,6,0,9,32)^T$

$y_3 = 6 - 2y_1 + y_2$

$y_5 = 9 - 3y_1 + 2y_2$

$y_6 = 32 - 10y_1 + 7y_2 + y_4$

$z = -32 + 10y_1 - 7y_2 - y_4$

$y_1 \le 3$

$y_1 \le 3$

$y_1 \le 32$

$y_1 := 3 \quad y_1 = 3 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3$

$B = \{1,5,6\}$

$y_1 = 3 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3$

$y_5 = 9 - 3\left(3 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + 2y_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3$

$y_6 = 32 - 10\left(3 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3\right) + 7y_2 + y_4 = 2 - 5y_2 + 5y_3 + 7y_2 + y_4 = 2 + 2y_2 + 5y_3 + y_4$

$z = -2 - 2y_2 - 5y_3 - y_4$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq a_0$$

$$x \geq 0$$

VIETE, ŽE $c_j \geq 0$, $a_j \geq 0$, $a_0 \geq 0$ $j = 1 \dots n$

PRE KAŽDÉ $j \in \{1, \dots, n\}$ JE $B = \{j\}$ PRÍPUSTNÁ BÁZA

PRE DANÉ j JE

$$X = (0, 0, \dots, \frac{a_0}{a_j}, 0 \dots, 0)^T$$

$$Z = \frac{c_j}{a_j} a_0 .$$