Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Lineární algebra I

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: Mgr. Milan Hladík, Ph.D.
E-mail: Milan.Hladik@mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/`

Garant: doc. RNDr. Jiří Sgall, DrSc.
E-mail: sgall@kam.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~sgall/`

Garant: prof. RNDr. Jiří Matoušek, DrSc.
E-mail: matousek@kam.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~matousek/`

Anotace: Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).

Sylabus:

1. Základní maticové operace, inverzní matice, Gaussova eliminace, odstupňovaný tvar matice, řešení soustav lineárních rovnic.

2. Vektorové prostory: základní pojmy, báze, dimenze, lineární zobrazení.

3. Aplikace lineární algebry.

N/Z

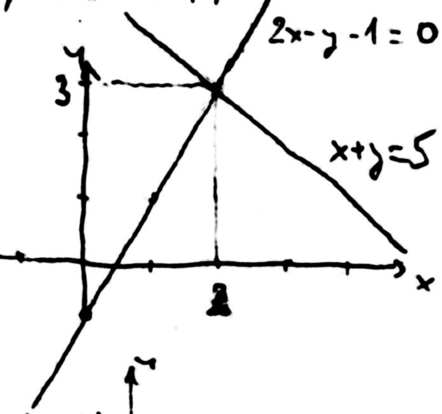
03.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA M1

PETER KOLMAN
kolman@kam.mff.cuni.cz

LIN. ROVNICE, MATICE, TELESÁ, VEKT. PRIESTOR, LIN. ZOBRAZENIA, SKALÁRNY SÚČIN

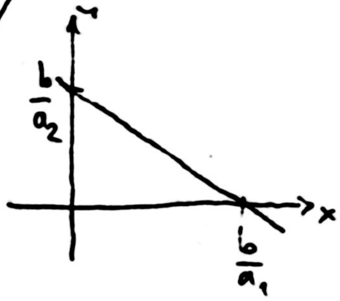
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \qquad x = 2,\ y = 3$$



$a_1 a_2 \neq 0$

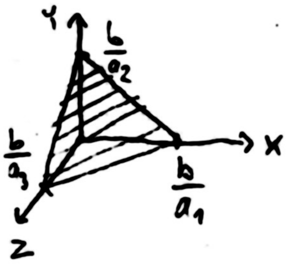
$a_1 x + a_2 y = b$

$$\frac{x}{\left(\frac{b}{a_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{b}{a_2}\right)} = 1$$

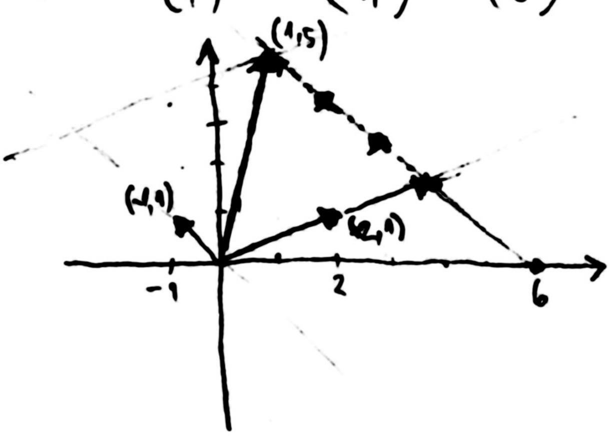


$a_1 a_2 a_3 \neq 0$

$a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$



$$x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$



Def.: SÚSTAVA m LIN. ROVNÍC O n NEZNÁMYCH:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \qquad\qquad \dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ KOEF. $b_i \in \mathbb{R}$ PRAVÁ STRANA x_j NEZNÁME

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, \dots, a_{2n} \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$ MAT. SÚSTAVY

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ VEKT. PRAVÝCH STRÁN

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ VEKT. NEZNÁMYCH $\quad \vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$

$A\vec{x} = \vec{b}$! NIE JE DEFINOVANÝ SÚČIN MATÍC :-((

ROZŠÍRENÁ MATICA SÚSTAVY $(A|\vec{b})$

RIEŠENIE $A\vec{x}=\vec{b}$ JE MN. $\forall\ \vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

GAUSSOVA ELIM. METÓDA

$$2x + y + z = 5$$
$$4x - 6y \quad = -2$$
$$-2x + 7y + 2z = 9$$

(2) $-8y - 2z = -12$

(3) $8y + 3z = 14$

$z = 2,\ y = 1,\ x = 1$

ELEMENTÁRNE RIADKOVÉ ÚPRAVY ROZŠÍRENEJ MATICE SÚSTAVY

a) NÁSOB. i-TEHO RIADKU ČÍSLOM $t \neq 0$ .. TU JE DÔKAZ ČAMKOJ
b) PRIČÍTANIE j-TEHO RIADKU K RIADKU i .. DÔKAZ ???
c) PREHODENIE RIADKOV .. FROMO

03.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA M1

DÔKAZ ELEM. ÚPRAV

R .. MN. RIEŠENÍ PÔVODNEJ SÚSTAVY
S .. MN. RIEŠENÍ NOVEJ SÚSTAVY

$R \xrightarrow[\text{OPERÁCIA}]{\text{ELEMENTÁRNA}} S$

CHCEME UKÁZAŤ $R=S$: $R \subseteq S \wedge S \subseteq R$

a)

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \Leftrightarrow & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\dots & & \dots \\
a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & \Leftrightarrow ? & ta_{i1}x_1 + \dots ta_{in}x_n = tb_i \\
\dots & & \dots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & \Leftrightarrow & a_{m1}x_1 + \dots ta_{mn}x_n = tb_m
\end{array}$$

$t \neq 0$

PÔVODNÁ — NOVÁ SÚSTAVA

ZREJME $a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow ta_{i1}x_1 + \dots + ta_{in}x_n = tb_i$ □

b)

$$\begin{array}{lcl}
\dots & & \dots \\
a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i & & (a_{i1}+a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in}+a_{jn})x_n = b_i+b_j \\
\dots & & \dots \\
a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j & & a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\
\dots & & \dots
\end{array}$$

PÔVODNÁ — NOVÁ SÚSTAVA

ZREJME
$$\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + \dots a_{jn}x_n = b_j \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (a_{i1}+a_{j1})x_1 + \dots (a_{in}+a_{jn})x_n = b_i + b_j \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{array}$$
□

c) ZREJMÉ ■

1/

10.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNI ALGEBRA I M1

VEKTOR x JE $(x_1, \dots, x_n)^T$, $x_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

MATICA A TYPU $m \times n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix},$$

GAUSSOVA ELIMINÁCIA
SPÄTNÁ SUBSTITÚCIA

DANÁ MATICA A $m \times n$:-))

1. PRE $i := 1 \dots n-1$

   HĽADAJ PRVÝ NENULOVÝ STĹPEC (T.J. NAJVIAC VĽAVO) $A_{\cdot j}$

   NENULOVÝ STĹPEC $A_{\cdot j}$ JE TAKÝ, ŽE $a_{kj} \neq 0$ $k \geq i$

   KEĎ TAKÝ STĹPEC NENÁJDEME $\Rightarrow$ KONIEC

   KEĎ $a_{ij} = 0$, POTOM PREHODÍME RIADKY i A k

   PO PREHODENÍ JE $a_{ij} \neq 0$

   PRE $l := i+1$ to m do

   $$A_{l\cdot} \mathrel{+}= -\frac{a_{lj}}{a_{ij}} A_{i\cdot}$$

MATICA A JE V ODSTUPŇOVANOM TVARE, KEĎ $\exists r$ $0 \leq r \leq m$

RIADKY $1, 2, \dots, r$ SÚ NENULOVÉ

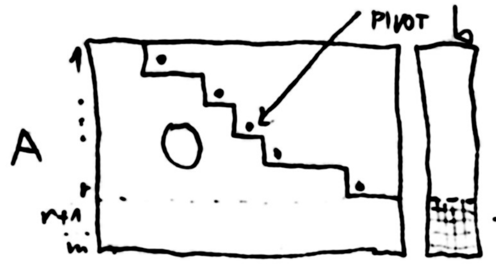
OZNAČME $j(i) = \min \{ j, a_{ij} \neq 0 \}$

PLATÍ $j(1) < j(2) < \dots < j(r)$

RIADKY $r+1, r+2, \dots, m$ SÚ NULOVÉ

PRVKY $a_{i\,j(i)}$ SÚ PIVOTY

UVAŽUJME MATICU (A|b)



→ TU MUSIA BYŤ 0 ABY $Ax=b$ MALO RIEŠENIE

PRE ROZŠÍRENÚ MAT. SÚSTAVY V ODSTUP. TVARE NAZVEME BÁZOVÉ PREMENNÉ TIE PREMENNÉ, KTORÉ ZODPOVEDAJÚ STĹPCOM S PIVOTMI. OSTATNÉ PREMENNÉ NAZVEME VOĽNÉ

SPÄTNÁ SUBSTITÚCIA → VETA:

KEĎ (A|b) JE ROZŠ. MATICA SÚSTAVY V ODSTUP. TVARE KDE STĹPEC PRAVÝCH STRÁN NEOBSAHUJE PIVOT.

POTOM PRE ĽUBOVOĽNÉ HODNOTY VOĽNÝCH PREMENNÝM $\exists!$ PRIRADENIE HODNÔT BÁZOVÝM PREMENNÝM TAK, ABY SME DOSTALI RIEŠENIE SÚSTAVY.

BÁZOVÉ PREMENNÉ SÚ $x_{j(1)}, \dots, x_{j(r)}$

POSTUP: Z r-TEJ ROVNICE DOSTANEME $x_{j(r)}$

→ DOSADÍME DO $r-1$-TEJ ROVNICE

17.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

KEĎ JE A ĽUBOVOĽNÁ MATICA A KEĎ JE E NEJAKÁ MATICA V ODSTUPŇOVANOM TVARE, KT. DOSTANEME Z A ELEM. ÚPRAVAMI, POTOM SÚ MIESTA PRE PIVOTY V E URČENÉ JEDNOZNAČNE.

DÔKAZ. (SPOROM)

NECH $\exists$ DVE MATICE E, E' V ODSTUP. TVARE ZÍSKANÉ Z MAT. A POMOCOU ELEM. ÚPRAV, PRIČOM NEMAJÚ PIVOTY NA ROVNAKÝCH MIESTACH

UVAŽME SÚSTAVU $Ax = 0$

$E \rightsquigarrow$ URČUJE VOĽNÉ A BÁZOVÉ PREMENNÉ

$E' \rightsquigarrow$ —"—

$\Rightarrow \exists$ INDEX k:

x_k JE VOĽNÁ PRE E, ALE BÁZOVÁ PRE E'

k JE NAJVÄČŠÍ TAKÝ INDEX, T.J.

PRE $\forall j > k$ JE CHARAKTER x_j PRE E A E' ROVNAKÝ

HODNOTA x_k JE PRE $E'x = 0$ JEDNOZNAČNE URČENÁ VOĽNÝMI PREM. x_j $j > k$ .. TIETO PREM. FIXUJEME

PRE $Ex = 0$ TÚ PREM. x_k MÔŽEME ZVOLIŤ ĽUBOVOĽNE

$\Rightarrow$ SPOR.

DEF. HODNOSŤ MATICE A JE ROVNÁ POČTU PIVOTOV V ODSTUPŇOVANOM TVARE ... $\text{rank}(A)$

VETA: SÚSTAVA LIN. ROVNÍC $Ax=b$ MÁ ASPOŇ 1 RIEŠENIE
$\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$

UVAŽME $(A'|b')$ VO ODSTUPŇOVANOM TVARE, KT. SME ZÍSKALI Z $A|b$ ELEM. ÚPRAVAMI

$\Rightarrow)$ $Ax=b$ MÁ ASPOŇ JEDNO RIEŠENIE
$\Rightarrow$ $A'x=b'$ MÁ ASPOŇ JEDNO RIEŠ.
$\Rightarrow$ V b' NIE JE ŽIADEN PIVOT
$\Rightarrow$ $\text{rank}(A'|b') = \text{rank}(A') = \text{rank}(A)$
$\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A)$

$\Leftarrow)$ $\text{rank}(A|b) = \text{rank}(A) \Rightarrow \text{rank}(A'|b') = \text{rank}(A') = \text{rank}(A)$
$\Rightarrow$ $(A'|b')$ NEMÁ PIVOT V b' $\Rightarrow$ EXISTUJE x : $A'x=b'$ $\square$

DEF. HOMOGÉNNE SÚSTAVY : $Ax=0$

KEĎ x_1, x_2 RIEŠIA $Ax=b$, POTOM x_1-x_2 RIEŠI $Ax=0$

$$A(x_1-x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b-b = 0$$

KEĎ $Ax_1=b$, $Ax_2=0$, POTOM $A(x_1+x_2)=b$

17.10.2005 Mo
PETER ČERNO

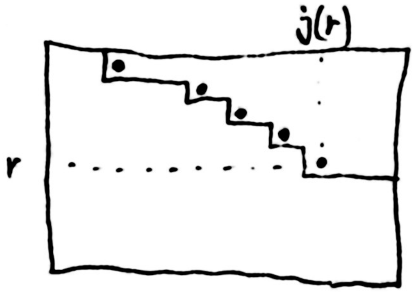
LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

VETA: NECH A JE MAT. S ~~...~~. HODNOSTOU r, POTOM $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\exists$ RIEŠ. $h_1 \dots h_{n-r}$ SÚSTAVY $Ax=0$ TAKÉ, ŽE
KAŽDÉ RIEŠ. x SÚSTAVY $Ax=0$ SA DÁ VYJADRIŤ V TVARE $x = p_1 h_1 + \dots + p_{n-r} h_{n-r}$, KDE $p_1, \dots, p_{n-r} \in \mathbb{R}$

SÚSTAVA MÁ IBA RIEŠ. $x=0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$

NAOPAK. AK $x = p_1 h_1 + \dots p_{n-r} h_{n-r}$, POTOM $Ax=0$ (ZREJMÉ)

KAŽDÉ RIEŠ. MOŽNO ZÍSKAŤ METÓDOU SPÄTNEJ SUBSTITÚCIE
POINTA: BÁZOVÉ PREMENNÉ SI VYJADRÍME POMOCOU VOĽNÝCH
$(x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(r)})$
OZNAČME VOĽNÉ PREM. $p_1, p_2, \dots, p_{n-r}$



$x_{j(r)} = h_{j(r),1} \cdot p_1 + \dots + h_{j(r),n-r} \cdot p_{n-r}$
PODOBNE PRE $x_{j(k)}$ $k<r$
...
DOSTÁVAME
$x_1 = h_{1,1} p_1 + \dots + h_{1,n-r} p_{n-r}$
....
$x_n = h_{n,1} p_1 + \dots + h_{n,n-r} p_{n-r}$

$$h_i = \begin{pmatrix} h_{1,i} \\ h_{2,i} \\ \vdots \\ h_{n,i} \end{pmatrix}$$

ZREJME $Ah_i = 0$ PRE $p_i = 1$, $p_k = 0$ $k \neq i$

$\Rightarrow$) AK JE IBA 1 RIEŠ. $x=0$, POTOM TAM NIE SÚ ŽIADNE VOĽNÉ PREMENNÉ $\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=n$ $\square$

$\Leftarrow$) KEĎ $\operatorname{rank}(A)=n \Rightarrow$ NIE SÚ VOĽNÉ PREM. $\Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0$

VETA: KAŽDÉ RIEŠENIE RIEŠITEĽNEJ SÚSTAVY $A\vec{x}=\vec{b}$ MOŽNO VYJADRIŤ V TVARE $\vec{x}=\vec{x}_0+\sum_{i=1}^{n-\operatorname{rank}(A)} p_i \vec{h}_i$,

KDE $A\vec{x}_0=\vec{b}$, p_i Ah_i SÚ AKO V MINULEJ VETE

DÔKAZ. NECH $A\vec{x}_0=\vec{b}$

$$\Rightarrow A\left(\sum_{i=1}^{n-r} p_i \vec{h}_i\right)=0 \Rightarrow A\left(\vec{x}_0+\sum_{i=1}^{n-r} p_i \vec{h}_i\right)=A\vec{x}_0=\vec{b}$$

$$\Leftarrow)\quad A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow A(\vec{x}-\vec{x}_0+\vec{x}_0)=\vec{b}$$

PRITOM $A(x-x_0)=0 \Rightarrow \vec{x}-\vec{x}_0=\sum_{i=1}^{n-r} p_i \vec{h}_i$ $\square$

EXISTUJE BIJEKCIA MEDZI MNOŽINOU RIEŠENÍ SÚSTAVY $Ax=0$ A $Ax=b$.

POZNÁMKY: CHYBY PRI ZAOKRÚHLOVANÍ

ZLE PODMIENENÉ SÚSTAVY

MALÁ ZMENA V ZADANÍ $\Rightarrow$ VEĽKÁ ZMENA V RIEŠ.

$$\begin{aligned} 835x+667y&=168\\ 333x+266y&=67\end{aligned}$$

$x=1,\ y=-1$

$$\begin{aligned} 835x+667y&=168\\ 333x+266y&=66\end{aligned}$$

$x=-666 \quad y=834$

N/2

24.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNI ALGEBRA – M1

DEF.: JEDNOTKOVÁ MATICA $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

NULOVÁ MATICA $O_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

PRE ŠTVORCOVÚ MATICU A RÁDU n
POVIEME, ŽE $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ TVORIA HLAVNÚ DIAGONÁLU

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE DIAGONÁLNA MATICA, KEĎ $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad A_{ij} = (A^T)_{ji}$ PRE $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

PR. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

MATICA A JE SYMETRICKÁ, KEĎ $A = A^T$. (MUSÍ BYŤ ŠTVORCOVÁ)

DEF. SÚČET MATÍC $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ JE $C = A+B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$C_{ij} = (A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$ PRE $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

DEF. SÚČIN $\alpha \in \mathbb{R}$ A $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ JE $C = \alpha A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$C_{ij} = (\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$ PRE $\forall\, i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$

CVIČENIA: PRE $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

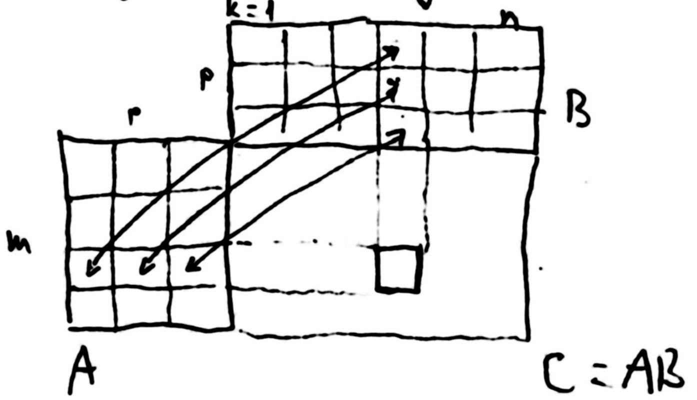
$A+B = B+A$
$(A+B)+C = A+(B+C)$
$A+O = A$

$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

KEĎ $(-A)$ JE Z $\mathbb{R}^{m\times n}$: $(-A)_{ij} = -A_{ij}$ $\quad i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$
POTOM $A + (-A) = O$
$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

DEF. $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, POTOM SÚČIN A A B JE $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $C = A.B$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj} \quad \text{PRE } i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$$



VETA: A, B, C PLATÍ

a) $(AB)^T = B^T A^T$

b) $(AB)C = A(BC)$ ASOCIATÍVITA

} $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$

c) $(A+B)C = AC + BC$ DISTRIBUTIVITA SPRAVA

$C(A+B) = CA + CB$ DISTRIBUTIVITA ZĽAVA

} $A, B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$

DÔKAZ.

a) $$[(AB)^T]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{p} (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \quad \text{PRE } i = 1 \dots r,\ j = 1 \dots m$$

b) $$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \left[\left(\sum_{l=1}^{p} A_{il} B_{lk} \right) C_{kj} \right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{l=1}^{p} A_{il} B_{lk} C_{kj} \right] = \sum_{l=1}^{p} \left[\sum_{k=1}^{r} A_{il} B_{lk} C_{kj} \right] =$$
$$= \sum_{l=1}^{p} \left[A_{il} \left(\sum_{k=1}^{r} B_{lk} C_{kj} \right) \right] = \sum_{l=1}^{p} \left[A_{il} (BC)_{lj} \right] = [A(BC)]_{ij}$$

PRE $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

24.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

c) $$[(A+B)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} (A+B)_{ir} C_{rj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (A_{ir} + B_{ir}) C_{rj} = \left[\sum_{k=1}^{r} A_{ir} C_{rj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{r} B_{ir} C_{rj}\right] =$$

$$= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC + BC)_{ij}$$

$i = 1 \ldots m, \; j = 1 \ldots n$

PODOBNE $C(A+B) = CA + CB$

VETA: $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow A . I_n = I_n A = A$

$$(A . I_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (I_n)_{kj} = A_{ij} \qquad i = 1 \ldots n, \; j = 1 \ldots n$$

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

POZOROVANIE: NECH MATICA B VZNIKNE Z A VYNÁSOBENÍM i-TEHO RIADKU ČÍSLOM t, POTOM

$$B = {}_{i}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & t & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} A = (I_n + (t-1)\, e_i\, e_i^T)$$

KDE $e_i = (I_n)_{\cdot i} = (\overbrace{0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0}^{n})^T$ (i-TÝ PRVOK)

NECH MATICA B VZNIKNE Z A PRIPOČÍTANÍM j-TEHO RIADKU K i-TEMU, POTOM

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdots i \; A$$
$\quad i \qquad j$

KEĎ B VZNIKNE Z A POUŽITÍM ELEM. ÚPRAV, POTOM
$B = CA$

FIBONACIHO ČÍSLA

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1, \quad \dots \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}, \quad A^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$A^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad :-)$$

VÝPOČET ČÍSLA F_n V ČASE $O(\log_2 n)$

DEF. KEĎ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, POTOM $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE INVERZNÁ K A, KEĎ $A \cdot B = I_n$
ZNAČÍME $B = A^{-1}$.

DEF. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REGULÁRNA, KEĎ HODNOSŤ rank $A = n$ ($Ax = 0$ MÁ 1 RIEŠ. $x = 0$)

VETA: A MÁ INV. MATICU $\Leftrightarrow$ A JE REGULÁRNA

$\Rightarrow$) $AA^{-1} = I_n \Rightarrow Ax = e_i$ PRE $x = (A^{-1})_{\cdot i}$

N3

31.10.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

VETA: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad \exists A^{-1} \Leftrightarrow A$ JE REGULÁRNA (TJ. $\operatorname{rank}(A) = n$)

DÔKAZ.

$\Rightarrow$) $A \cdot A^{-1} = I_n$. NECH $\vec{e}_i = (I_n)_{\cdot i}$

$A\vec{x} = \vec{e}_i$ MÁ RIEŠENIE $x = (A^{-1})_{\cdot i}$ PRE $i = 1, 2, \dots, n$

$(A \mid I_n) \to (\dots \mid \dots)$ (MATICA V ODSTUPŇOVANOM TVARE)

EXISTUJE NENULOVÝ PRVOK

TAKTIEŽ EXISTUJE NENULOVÝ PRVOK

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = n$

$\Leftarrow$) $\operatorname{rank}(A) = n$

RIEŠME $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$ $\quad$ ZREJME $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid \vec{e}_i) = n$

$\Rightarrow$ MÁ RIEŠENIE

STAČÍ POLOŽIŤ $A^{-1} = \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\right)$ $\square$

INVERZNÁ MATICA JE JEDNOZNAČNE DANÁ.

PLATÍ $A^{-1}A = I_n$

$AA^{-1} = I_n$

$A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I_n$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$\square$

$\operatorname{rank}(A^{-1}) \stackrel{?}{=} n$, $\quad x \neq 0 \Rightarrow$

$A(\underbrace{A^{-1}x}) = (AA^{-1})x = I_n x = x \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}x \neq 0$

$A^{-1}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A^{-1}) = n$

DÔSLEDOK: ŠTVORCOVÁ MATICA A JE REG.
$\Leftrightarrow$ $\forall b$ MÁ SÚSTAVA $Ax=b$ PRÁVE 1 RIEŠENIE.

VÝPOČET INVERZNEJ MATICE:

ZOBERME $(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{ELEM. RIADK. ÚPR.}} (I_n \mid B)$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

$$(I_n \mid B) = \overset{\text{ELEM. ÚPRAVY}}{C} (A \mid I_n) \qquad C.A = I_n \Rightarrow C = A^{-1} = B$$

VETA: PRE REGULÁRNE MATICE A, B TYPU $n \times n$ PLATÍ

$(A^{-1})^{-1} = A$, AB JE REGULÁRNA, $(AB) = B^{-1}A^{-1}$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

2/3

31. 10. 2005 Mo
PETER ČERNO

TELESÁ (V ALGEBRE)

DEF. KEĎ JE X NEJAKÁ MNOŽINA, POTOM BINÁRNA OPERÁCIA NA MNOŽINE X JE ZOBRAZENIE $X \times X \to X$

DEF.: TELESO JE MNOŽINA T SPOLU S DVOMA BIN. OPERÁCIAMI + (SČÍTANIE) A * (NÁSOBENIE), TJ. SPĹŇAJÚ NASL. VLASTNOSTI (AXIÓMY):

(SK) $\forall a,b : a+b=b+a$ (KOMUTATÍVITA SČÍTANIA)
(SA) $\forall a,b,c : (a+b)+c = a+(b+c)$ (ASOCIATÍVITA SČÍTANIA)
(S0) $\exists 0 \in T$ (NEUT. PR. K +) : $\forall a : a+0=a$
(SI) $\forall a \in T \ \exists b \in T : a+b=0$

(NK) $\forall a,b : ab=ba$
(NA) $\forall a,b,c : (ab)c = a(bc)$
(N1) $\exists 1 \in T \ \forall a \ a.1=a$
(NI) $\forall a \neq 0 \ \exists b : ab=1$
(D) $\forall a,b,c : a(b+c)=ab+ac$
(01) $0 \neq 1$

PRÍKLADY: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$

$a+x=b$ MÁ JEDNOZNAČNÉ RIEŠENIE

$x = x+(a+(-a)) = (x+a)+(-a) = b+(-a)$

POZOROVANIE:

PRVKY 0 A 1 SÚ URČENÉ JEDNOZNAČNE

DÔKAZ. NECH $\exists$ 2 NULOVÉ PRVKY: $0, \bar{0}$

$0 = 0 + \bar{0}$ ($\bar{0}$ SPĹŇA S0)

$\Rightarrow 0 = \bar{0}$

$\bar{0} = 0 + \bar{0}$ (0 SPĹŇA S0)

$\forall a$ .. $-a$ JE JEDNOZNAČNE URČENÝ

$a \neq 0 \Rightarrow a^{-1}$ —II—

NECH $a + (-a) = 0$, $a + (-\bar{a}) = 0$

$$(-a) = (-a) + [a + (-\bar{a})] = (-\bar{a})$$

$ab = a\bar{b} = 1$

$b = b(a\bar{b}) = (ba)\bar{b} = \bar{b}$

$\forall a$ $-(-a) = a$

$a + (-a) = 0$ $(-(-a)) = (-(-a)) + ((-a) + a) = a$

$(-a) + (-(-a)) = 0$

$\forall a$ $0.a = 0$, $(-1)a = (-a)$

$0 \cdot a = 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) = a(0+0) + (-0.a) =$

$= 0.a + (-0.a) = 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

DÔKAZ (SPOROM). $a \neq 0, b \neq 0, ab = 0 \,|\, \exists a^{-1} : aa^{-1} = 1$, $\exists b^{-1} : bb^{-1} = 1$

$1 = 1.1 = aa^{-1} . bb^{-1} = (ab)(a^{-1}b^{-1}) = 0$ SPOR.

$a + b = a + c \Rightarrow b = c$

$b = b + (a + (-a)) = (b + a) + (-a) = (c + a) + (-a) = c$

31.10.2005 Po
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

PRE $p \in \mathbb{N}$ MÁME MNOŽINY

$$M_i = \{i, i+p, i+2p, \dots\} \cup \{i-p, i-2p, \dots\} = \{i+kp,\ k \in \mathbb{Z}\} \quad i = 0,1,2,\dots,p-1$$

$\equiv$ ZVYŠKOVÉ TRIEDY mod p. $\mathbb{Z}_p$

PRE $a, b \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ DEFINUJEM $+, \cdot$ mod p

~~[illegible]~~

VETA: $\mathbb{Z}_p$ JE TELESO $\Leftrightarrow$ p JE PRVOČÍSLO.

DÔKAZ.

AK p NIE JE PRVOČÍSLO, TJ. $p = a.b$ $a>1, b>1$ $(a \neq 1, b \neq 1)$
POTOM $a.b \equiv 0 \pmod p$ $a \not\equiv 0, b \not\equiv 0 \pmod p$
$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_p$ NIE JE TELESO.

NECH p JE PRVOČÍSLO.
ZREJME (SK), (SA), (SO), (SI) $-a := p-a$, (NK), (NA), (N1) PLATIA.
$p \geq 2 \Rightarrow 0 \not\equiv 1 \pmod p \Rightarrow$ (01) PLATÍ
(D) PLATÍ.

7.11.2005 Mb
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

VETA: $\mathbb{Z}_p$ JE TELESO $\Leftrightarrow$ p JE PRVOČÍSLO

ČO NIE JE ZREJMÉ $\forall a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \ \exists\ b : ab = 1$

NECH $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$
ZVÁŽME $1a, 2a, 3a, 4a, \dots, (p-1)a$ ... VŠETKY SÚ NENULOVÉ mod p
TIETO SÚ NAVZÁJOM RÔZNE mod p

KEBY PRE $x<y$ BOLO
$xa = ya \pmod p$, POTOM BY $p \mid (y-x)a$
PRIČOM $y-x \in \{1,2,\dots,p-2\}$, $a \in \{1,\dots,p-1\}$
ČO JE SPOR.
$\Rightarrow$ NUTNE $\exists\ b \in \{1,2,\dots,p-1\} : ab = 1 \pmod p$.

VETA: KONEČNÉ TELESO S n PRVKAMI EXISTUJE
$\Leftrightarrow$ n JE MOCNINA PRVOČÍSLA

KEĎ EXISTUJE $\Rightarrow$ POTOM JE LEN JEDNO
(AŽ NA IZOMORFIZMUS)

OZNAČENIE .. GF(n) GALOIS FIELD

DEF. KEĎ EXISTUJE n TAKÉ, ŽE
$$\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n} = 0$$
POTOM NAJMENŠIE TAKÉ SA NAZÝVA CHARAKTERISTIKA TELESA
KEĎ NEEXISTUJE, POTOM JE CHARAKTERISTIKA 0.

VETA: CHARAKTERISTIKA TELESA JE BUĎ 0 ALEBO PRVOČÍSLO.

DÔKAZ. (SPOROM)

NECH MÁME TELESO T S CHARAKT. $n \neq$ PRVOČÍSLO, T.J. $n = ab$, $a > 1$, $b > 1$

$$0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n} = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{a}\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{b}$$, ČO JE SPOR. □

PRÍKLAD: $\{0, 1, x, x+1\}$ POLYNÓMY NAD $\mathbb{Z}_2$

$+$, $\cdot$ (KOEF. BERIEME mod 2, SÚČIN BERIEME mod x^2+x+1)

CVIČENIE: OVERIŤ AXIÓMY

VEKTOROVÉ PRIESTORY

DEF.: VEKTOROVÝ PRIESTOR NAD TELESOM $(T, +, \cdot)$ JE MNOŽINA V S BINÁRNOU OP. $\oplus$ A $\odot$ (NÁSOB. VEKT. SKALÁROM) SPĹŇAJÚCE NASL. AXIÓMY

V .. VEKTORY
T .. SKALÁRY

(SK) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$

(SA) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$

(S0) $\exists \vec{0} \in V \ \forall \vec{v} \in V: \vec{v} \oplus \vec{0} = \vec{v}$

(SI) $\forall \vec{v} \in V \ \exists \vec{u} \in V: \vec{v} \oplus \vec{u} = \vec{0}$ (ZN. $\vec{u} = \ominus \vec{v}$)

(NA) $\forall a, b \in T \ \forall \vec{v} \in V \quad a \odot (b \odot \vec{v}) = (ab) \odot \vec{v}$

(N1) $\forall \vec{v} \in V \quad 1 \odot \vec{v} = \vec{v}$

(D1) $\forall a, b \in T \ \forall \vec{v} \in V: (a+b) \odot \vec{v} = a \odot \vec{v} \oplus b \odot \vec{v}$

(D2) $\forall a \in T \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V: a \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = a \odot \vec{u} \oplus b \odot \vec{v}$

PRÍKLAD: VEKTOROVÝ PRIESTOR S 1 PRVKOM MÔŽE EXISTOVAŤ

NAPR. $V = \{\vec{0}\}$, ĽUBOVOĽNÉ TELESO T

7.11.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

- PRE ĽUBOVOĽNÉ TELESO T : $V = T^n$ JE ARITMETICKÝ VEKTOROVÝ PRIESTOR DIMENZIE n NAD T

- PRE ĽUBOVOĽNÉ TELESO T : V = VŠETKY MATICE TYPU $m \times n$, T.J. $V = T^{m \times n}$ JE VEKT. PRIESTOR

- MNOŽINA V POLYNÓMOV S REÁLNYMI KOEFICIENTAMI JE VEKTOROVÝ PRIESTOR

- MNOŽINA V POLYNÓMOV S REÁLNYMI KOEF. SO STUPŇOM NAJVIAC n JE VEKT. PRIESTOR

- PRE ĽUBOVOĽNÚ MNOŽINU $X \neq \emptyset$

  V = VŠETKY PODMNOŽINY X $\quad V := \mathcal{P}(X)$

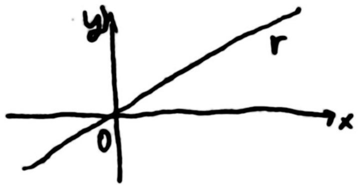
  $A, B \in V$ DEF. $A + B := A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

  $T = \mathbb{Z}_2 \quad \forall A \in V \quad 1.A = A, \quad 0.A = \emptyset$

  V JE VEKT. PRIESTOR

- PRIAMKA V $\mathbb{R}^2$ PRECHÁDZAJÚCA POČIATKOM

  $T := \mathbb{R}$



VETA: $\vec{O} \in V$ JE URČENÝ JEDNOZNAČNE

VETA: $\forall \vec{a} \in V$ JE $\ominus \vec{a} \in V$ URČENÝ JEDNOZNAČNE

VETA: $\forall \vec{a} \in V \quad 0 \odot \vec{a} = \vec{O}$

VETA: $\forall \vec{a} \in V \quad (-1) \odot \vec{a} = \ominus \vec{a}$

VETA: $\forall a \in T \quad a \odot \vec{O} = \vec{O}$

VETA: $\forall a \in T \; \forall \vec{u} \in V : \; a \odot \vec{u} = \vec{O} \Leftrightarrow a = 0 \vee \vec{u} = \vec{O}$

NECH $a \neq 0 \quad \vec{u} \neq \vec{O}$: $\quad \exists a^{-1} \in T \quad \vec{u} = 1 \odot \vec{u} = (a^{-1} a) \odot \vec{u} =$

$= a^{-1} \odot (a \odot \vec{u}) = \vec{O} \Rightarrow \vec{u} = \vec{O}$ SPOR ■

DEF. NECH $(V, \oplus, \odot)$ JE VEKT. PR. NAD TELESOM T

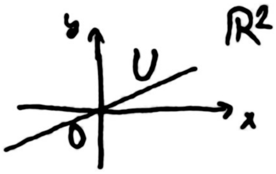
NECH $U \subseteq V$, PRE KT.

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U \cdot \vec{u} \oplus \vec{v} \in U$
2) $\forall \vec{u} \in U \ \forall a \in T \quad a \odot \vec{u} \in U$

POTOM HOVORÍME, ŽE $(U, \oplus, \odot)$ JE PODPRIESTOR PRIESTORU V

PRÍKLAD: $U = \{\vec{0}\}$

PRÍKLAD: $\mathbb{R}^2$



POZOROVANIE: PODPRIESTOR JE ZÁROVEŇ VEKTOROVÝM PRIESTOROM

$a = 0$, POTOM $a \odot \vec{u} \in U$, T.J. $\underline{\vec{0} \in U}$
$a = -1$, POTOM $a \odot \vec{u} \in U$ T.J. $\underline{\ominus \vec{u} \in U}$

VETA: NECH $U_1, U_2, \dots$ SÚ PODPRIESTORY VEKT. PRIESTORU V.

POTOM $U := \bigcap U_i$ JE PODPRIESTOR V

DÔKAZ.

1) UZAVRETOSŤ NA $\oplus$

$\vec{u}, \vec{v} \in \bigcap U_i \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in U_i$ PRE $\forall i \Rightarrow \vec{u} \oplus \vec{v} \in U_i$ PRE $\forall i$
$\Rightarrow \vec{u} \oplus \vec{v} \in \bigcap U_i$

2) PODOBNE □

1/2

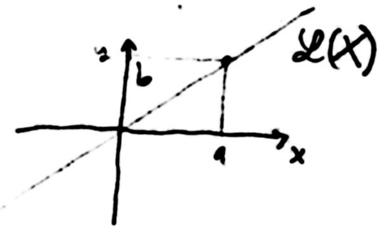
14.11.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I

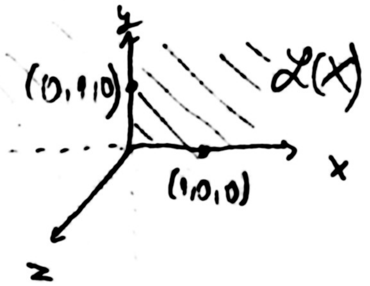
DEF.: KEĎ JE $(V, \oplus, \odot)$ VEKT. PRIESTOR NAD T A KEĎ JE $X \subseteq V$, POTOM PODPRIESTOR GENEROVANÝ X JE PRIENIK VŠETKÝCH PODPRIESTOROV OBSAHUJÚCICH $X \equiv \mathcal{L}(X)$

PRÍKLAD:

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, $X = \{(a,b)\}$



$X = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$



DEF. KEĎ SÚ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ NAD T
POTOM KAŽDÝ VÝRAZ $a_1\vec{v}_1 \oplus a_2\vec{v}_2 \oplus \dots \oplus a_n\vec{v}_n$
KDE $a_1, \dots, a_n \in T$ SA NAZÝVA LIN. KOMB. VEKT. $v_1, \dots, v_n$

POZN.: NAMIESTO $\odot$ NEPÍŠEME NIČ :), NAMIESTO $\oplus$ PÍŠEME $+$
$\vec{0}$ JE LIN. KOMB. $\emptyset$

VETA: PRE VEKT. PRIESTOR $(V, \oplus, \odot)$ NAD T, $X \subseteq V$
PLATÍ: $\mathcal{L}(X) = \underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i \mid n \geq 0,\ a_i \in T,\ \vec{x}_i \in X,\ i = 1, \dots, n\right\}}_{span(X)} = U$

DÔKAZ. $\Rightarrow$) $\mathcal{L}(X) \subseteq U$
STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE U JE PODPRIESTOR V.
[URČITE $X \subseteq U$]
MUSÍME OVERIŤ UZAVRETOSŤ U VZHĽADOM NA $\odot, \oplus$ ✓ ZREJMÉ
$\Rightarrow$ U JE VEKT. PODPRIESTOR V
$\Leftarrow$) ZREJME $\vec{x} \in X \Rightarrow \vec{x} \in \mathcal{L}(X)$...
KEĎ SI VEZMEME $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in X \Rightarrow$ POTOM NUTNE AJ ICH LIN. KOMB. $\in \mathcal{L}(X)$ □

DEF.: NECH $A \in T^{m \times n}$. POTOM <u>STĹPCOVÝ PRIESTOR</u> $\mathcal{S}(A)$ JE PODPRIESTOR T^m GENEROVANÝ STĹPCAMI TEJ MATICE

RIADKOVÝ PODPRIESTOR $\mathcal{R}(A)$ JE PODPRIESTOR T^n GENEROVANÝ RIADKAMI MATICE A.

POZNÁMKA: RIADKY BERIEME TRANSPONOVANÉ

JADRO MATICE $Ker(A)$ JE PODPRIESTOR T^n GENEROVANÝ $\forall$ RIEŠENIAMI $\vec{x}$ SÚSTAVY $A\vec{x} = \vec{0}$

POZOROVANIE: SÚSTAVA $A\vec{x} = \vec{b}$ MÁ RIEŠENIE $\Leftrightarrow$ $b = \mathcal{S}(A)$.

POZOROVANIE: ELEM. RIADKOVÉ ÚPRAVY NEMENIA $\mathcal{R}(A)$ ANI $Ker(A)$

POZOROVANIE: NECH $\vec{v} \in \mathcal{R}(A)$, $\vec{x} \in Ker(A)$, POTOM $\vec{v}^T \vec{x} = 0$.

$\vec{v} \in \mathcal{R}(A) \Rightarrow \vec{v} = a_1 A_{1.} + \dots + a_m A_{m.}$

$\vec{v}^T \vec{x} = a_1 (A_{1.})^T \vec{x} + \dots + a_m (A_{m.})^T \vec{x} = 0$

$A_{i.} = e_i^T A \qquad a_i (e_i^T A)\vec{x} = a e_i^T (A\vec{x}) = 0$ □

DEF. VEKTORY $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ SÚ LIN. NEZÁVISLÉ KEĎ ROVNICA

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}, \quad a_i \in T$$

MÁ 1 RIEŠENIE $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

INAK SÚ LIN. ZÁVISLÉ.

AK $v_i = v_j$ $(i \neq j)$ $a_i := +1$, $a_j := -1$, $a_k = 0$ $k \neq i, j$ $\Rightarrow$ LIN. ZÁV.

AK $v_i = 0$: $a_i := +1$, $a_k := 0$ $k \neq i$ $\Rightarrow$ LIN. ZÁV.

14. 11. 2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I

ROZŠÍRENIE: PRE ∞ SÚBORY VEKTOROV (MNOŽINA S OPAKOVANÍM). SÚBOR VEKTOROV U JE LIN. NEZÁVISLÝ KEĎ KAŽDÁ NEPRÁZDNA KONEČNÁ PODMNOŽINA U JE LIN. NEZÁVISLÁ.

PRÍKLAD $(V, \oplus, \odot)$ $V =$ MNOŽINA $\forall$ POLYNÓMOV $P(x)$
$T = \mathbb{R}$. $\oplus$ DEF. AKO $+$, $\odot$ DEF. AKO $\cdot$.
KEĎ ZOBERIEME SÚBOR $U = \{x, x^2, x^3, \dots\}$
POTOM JE ZREJME U LIN. NEZÁVISLÝ.

KEĎ SÚ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ LIN. ZÁVISLÉ, POTOM
$\exists a_i \in T$ TAKÉ, ŽE $a_i \neq 0$, $a_1\vec{v}_1 + \dots + a_i\vec{v}_i + \dots + a_n\vec{v}_n = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_i}\right)\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_i + \dots + \left(\frac{a_n}{a_i}\right)\vec{v}_n = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i = \left(-\frac{a_1}{a_i}\right)\vec{v}_1 + \dots + \left(-\frac{a_{i-1}}{a_i}\right)\vec{v}_{i-1} + \left(-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)\vec{v}_{i+1} + \dots + \left(-\frac{a_n}{a_i}\right)\vec{v}_n$$

LINEÁRNA KOMBINÁCIA.

PRÍKLADY: UVAŽME JEDNOTKOVÚ MATICU I_n
JEJ STĹPCOVÉ VEKTORY SÚ LIN. NEZÁVISLÉ, PRETOŽE

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

UVAŽME NENULOVÉ RIADKY MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ V ODSTUPŇOVANOM TVARE. TIE SÚ LIN. NEZÁVISLÉ. ✓

POZOROVANIE: KEĎ JE X MNOŽINA VEKT. TAKÝCH, ŽE SÚ LIN. NEZÁVISLÉ $\Rightarrow$ $Y \subseteq X$ JE LIN. NEZÁVISLÁ.

POZOROVANIE: $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ SÚ LIN. NEZÁVISLÉ $\Leftrightarrow$
PRE $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $v_i \notin \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$

1/2

21.11.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I

PRÍKLAD: 1) $V := \mathbb{R}$, $T := \mathbb{Q}$ V JE VEKT. PRIESTOR NAD T

2) $V := \mathbb{R}$, $T := \mathbb{R}$

3) $V := \mathbb{R}$, $T := \mathbb{Z}_5$ TREBA DEFINOVAŤ $\cdot : T \times V \to V$

NAPR $[6]x$ JE $1.x$

NIE JE TELESO, PRETOŽE

NEPLATÍ $(xy)\vec{u} \neq x(y\vec{u})$ PRE $\forall x, y \in T, \forall \vec{u} \in V$

STAČÍ POLOŽIŤ $x = y = 4$, $\vec{u} = \frac{1}{4}$

LINEÁRNY OBAL MNOŽINY $X \subseteq V$ NAD T

$$\mathcal{L}(X) = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i \quad n \geq 0 \quad a_1, \dots, a_n \in T, \ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V \}$$

LIN. NEZÁVISLÉ, LIN. ZÁVISLÉ VEKTORY

NAPR. $(2,1)$, $(1,2)$ V $\mathbb{R}^2$ SÚ LN

ALE V $\mathbb{Z}_3^2$ SÚ LIN. ZÁVISLÉ, PRETOŽE $(1,2) + (2,1) = (0,0)$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ SÚ LN $\Leftrightarrow$ $\forall i$: $\vec{v}_i \notin \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n\})$

UVAŽUJME TELESO T A VEKT. PRIESTOR T^n NAD T

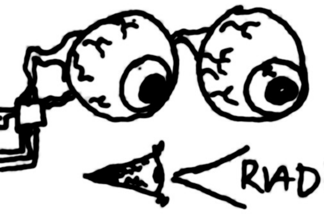
VEZMIME SI KONEČNÚ PODMN. $X \subseteq T^n$ $X = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$

UVAŽUJME MATICU $A \in T^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_m \end{pmatrix}$$

UVAŽUJME A^R, T.J. MATICU A V ODSTUPŇOVANOM TVARE

MNOŽINA X JE LN $\Leftrightarrow$ V A SA NENACHÁDZA $\vec{O}$ RIADOK



RIADKY a) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ SÚ LN $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i+\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_m$ SÚ LN

b) —||— $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_m$ SÚ LN

a)

$\Rightarrow$) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ SÚ LZ $\Rightarrow \exists \alpha_k \neq 0 \quad \alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_m\vec{v}_m = 0$

$\Rightarrow \alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1}+\alpha_i(\vec{v}_i+\vec{v}_j)+\dots+\alpha_m\vec{v}_m-\alpha_i\vec{v}_j=\vec{0}$

ALE TIEŽ $\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_{i-1}\vec{v}_{i-1}+\alpha_j(\vec{v}_i+\vec{v}_j)+\dots+\alpha_m\vec{v}_m-\alpha_j\vec{v}_i=\vec{0}$

TJ. MÁME

(1) $\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_i(\vec{v}_i+\vec{v}_j)+\dots+(\alpha_j-\alpha_i)v_j+\dots+\alpha_m\vec{v}_m=\vec{0}$

(2) $\alpha_1\vec{v}_1+\dots+\alpha_j(\vec{v}_i+\vec{v}_j)+\dots+(\alpha_i-\alpha_j)v_i+\dots+\alpha_m\vec{v}_m=\vec{0}$

KEĎ $k \neq i, j$, POTOM ZOBERIEME NAPR. (1) (MÔŽEME ZOBRAŤ AJ (2))

KEĎ $k=i\neq j$, POTOM ZOBERIEME (1)

KEĎ $k=j\neq i$, POTOM ZOBERIEME (2).

$\Leftarrow$) PODOBNE KEĎ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i+\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_m$ SÚ LZ ✓

b) TRIVIÁLNE. □

DEF.: SÚBOR VEKT. X Z V NAD T JE SYSTÉM GENERÁTOROV $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}(X) = V$ (SYSTÉM $\neq$ MNOŽINA, ALE POSTUPNOSŤ)

LIN. NEZÁVISLÝ SYSTÉM GENERÁTOROV JE BÁZA

PRÍKLAD: TELESO T, $V=T^n$ NAD T, POTOM

$\vec{e}_1=(\underbrace{1,0,0,\dots,0}_{n \text{ ZLOŽIEK}}), \vec{e}_2(0,1,0,\dots,0),\dots,\vec{e}_n=(0,0,0,\dots,1)$

ZREME $X=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ JE BÁZA

($\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ SÚ LIN. NEZÁVISLÉ)

21. 11. 2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I

PRÍKLAD: VEKT. PRIESTOR $\forall$ POLYNÓMOV NAD TELESOM T.

POTOM $1, x, x^2, x^3, \dots$ JE BÁZA (ZREJMÉ)

PRÍKLAD: VEKT. PRIESTOR $\mathbb{R}^2$ NAD $\mathbb{R}$

$\vec{v_1} = (a, b)$, $\vec{v_2} = (c, d)$

KEBY BOLO $\vec{v_1} = k\vec{v_2}$, POTOM BY $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ NEBOLA BÁZA VP $\mathbb{R}^2$

KEĎ $ad - bc \neq 0$, POTOM SÚ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ LN A TVORIA BÁZU.

VETA: NECH $X \subseteq V$ KT. JE TAKÁ, ŽE $\mathcal{L}(X) = V$

A PRE $\forall Y \subsetneq X$: $\mathcal{L}(Y) \neq V$

POTOM X JE BÁZA.

DÔKAZ. TREBA OVERIŤ, Č X JE LN ...

KEĎ X NIE JE MNOŽINA LN VEKTOROV, POTOM

$\exists \vec{x} \in X$ TAKÝ, ŽE JE LIN KOMBINÁCIOU MNOŽINY $X \setminus \{x\}$.

POTOM ALE $\mathcal{L}(X \setminus \{x\}) = \mathcal{L}(X) = V$, ČO JE SPOR. $\square$

DÔSLEDOK: Z KAŽDÉHO KONEČNÉHO SYSTÉMU GENERÁTOROV MOŽNO VYBRAŤ BÁZU. (ZREJMÉ)

VETA: KAŽDÝ VP MÁ BÁZU

DÔKAZ. KEĎ MÁ KONEČNÚ MNOŽINU X TAKÚ, ŽE $\mathcal{L}(X) = X$

$\Rightarrow$ VIĎ DÔSLEDOK VYŠŠIE

KEĎ NIE, POTOM ... HA HAHAHAHA !

$\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ BÁZA VP V NAD T,

POTOM PRE $\forall \vec{w} \in V$ $\exists! (a_1, \dots, a_n) \in T^n$: $\vec{w} = a_1\vec{v_1} + \dots + a_n\vec{v_n}$.

DÔKAZ.: $\exists (b_1, \dots, b_n) \in T^n$: $\vec{w} = b_1\vec{v_1} + \dots + b_n\vec{v_n}$

$\Rightarrow \vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{v_1} + \dots + (a_n - b_n)\vec{v_n} \Rightarrow a_i = b_i$ $\square$

DEF. : NECH $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ JE KONEČNÁ BÁZA VP V NAD T, POTOM PRE $w \in V$ $\exists! (a_1, \dots, a_n) \in T^n$: $a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_n \vec{x}_n = w$

POTOM $(a_1, \dots, a_n)$ NAZÝVAME SÚRADNICOU VEKT. w VZHĽADOM NA BÁZU X. (V BÁZE X).

LEMMA O VÝMENE : NECH $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ SÚ SYSTÉMOM GENERÁTOROV VP V NAD T A NECH $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$.

POTOM PRE KAŽDÉ i, $\underline{a_i \neq 0}$ PLATÍ, ŽE

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n$ JE SYSTÉM GEN. VP V NAD T.

DÔKAZ. $a_i \neq 0 \Rightarrow v_i = \frac{1}{a_i}\left(\vec{w} - a_1\vec{v}_1 - \dots - a_{i-1}\vec{v}_{i-1} - a_{i+1}\vec{v}_{i+1} - \dots - a_n\vec{v}_n\right)$

KEĎ ZOBERIEME $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_i$ JE SYSTÉM GENERÁTOROV VP V NAD T, KDE $\vec{v}_i$ JE LIN. KOMB. ZOSTÁVAJÚCICH VEKT. $\to$ MOŽNO HO VYNECHAŤ

ALEBO KEĎ $\vec{x} = b_1\vec{v}_1 + \dots + b_n\vec{v}_n =$

$= b_1\vec{v}_1 + \dots + b_{i-1}\vec{v}_{i-1} + b_i\left(\frac{1}{a_i}\left(\vec{w} - a_1\vec{v}_1 - \dots\right)\right) + \dots + b_n\vec{v}_n$,

ČO JE LIN. KOMB. VEKT. $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}, \vec{v}_{i+1}, \dots \vec{v}_n$. $\square$

STEINITZOVA VETA O VÝMENE :

NECH V JE VEKT. PRIESTOR NAD T.

KEĎ $X = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ JE MN. LIN. NEZ. VEKTOROV

$Y = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ JE SYSTÉM GEN. V.

POTOM $k \leq n$.

ĎALEJ MÔŽEME r VEKTOROV Z Y NAHRADIŤ r VEKTORMI Z X TAK, ŽE ZÍSKAME OPÄŤ SYSTÉM GENERÁTOROV. [POZOR! NEMÔŽEME NAHODIŤ $\vec{w}_1$]

DÔKAZ. $\vec{w}_1 = \sum a_j \vec{v}_j$ $a_i \neq 0 \Rightarrow$ ODSTRÁNIME $\vec{v}_i$, PRIDÁME $\vec{w}_1$. PODOBNE $\vec{w}_2$ ...

$k > n$, POTOM $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ JE SYSTÉM GEN. $\Rightarrow \vec{w}_{n+1}$ JE LIN. KOMB. $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$

$\Rightarrow X$ NIE SÚ LIN. NEZ., SPOR $\Rightarrow k \leq n$. $\square$

1/2

29.11.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

VETA: KEĎ MÁ VP. KONEČNÚ BÁZU, POTOM VŠETKY BÁZY SÚ ROVNAKO VEĽKÉ.

DÔKAZ.: VEZMIME SI DVE BÁZY X, Y

X JE MN. LN VEKTOROV
Y JE SYSTÉM GENERÁTOROV

$$\left.\begin{array}{l}\text{STEINITZOVA VETA}: |X| \leq |Y| \\ \text{PODOBNE } |Y| \leq |X|\end{array}\right\} |X| = |Y|$$

DEF.: <u>DIMENZIA</u> VP V NAD T JE MOHUTNOSŤ NEJAKEJ JEHO BÁZY

VETA: ĽUBOVOĽNÚ LN MNOŽINU MOŽNO V KONEČNE GENEROVANOM VP DOPLNIŤ NA BÁZU.

VETA: KEĎ JE W PODPRIESTOR VP V (KONEČNE GEN.) POTOM $\dim W \leq \dim V$.
KEĎ $\dim W = \dim V$, POTOM $W = V$.

DÔKAZ. NECH X JE BÁZA W, Y JE BÁZA V $\quad W \subseteq V$

$|X| \leq |Y| \quad |X| = \dim W, \ |Y| = \dim V$

X .... W $\quad \dim W = \dim V$
Y V

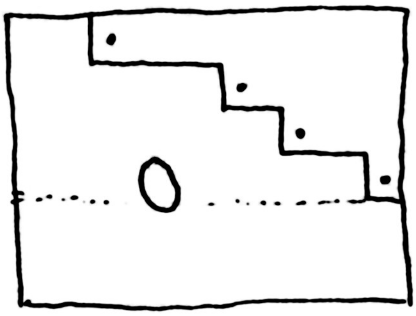
VŠETKY VEKT. v X NAHRADÍME VEKT. Y
$\Rightarrow [X] = V$.

VETA: NECH $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in T^n$ JE SYSTÉM GENERÁTOROV VP V NAD T. NECH A JE MATICA $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{v}_m^{\,T} \end{pmatrix}.$$

POTOM $\dim(V) = \mathrm{rank}(A)$.

DÔKAZ. PREVEDIEME A DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU A^R

$A^R =$ 

ELEMENTÁRNE RIADKOVÉ OPERÁCIE NEMENIA RIADKOVÝ PRIESTOR MATICE $\rightarrow$ TJ. RIADKY MATICE A^R JE SYSTÉM GENERÁTOROV V.
NENULOVÉ RIADKY A^R SÚ LN $\Rightarrow$ TVORIA BÁZU V.
$\Rightarrow \dim V = \mathrm{rank}\, A$.

POZOROVANIE: VP V DIMENZIE n, VEKTORY $v_1, \dots, v_m \in V$, $m > n$, POTOM SÚ LZ.

POZOROVANIE: VP V DIMENZIE n, VEKTORY $v_1, \dots, v_n \in V$ SÚ SYSTÉM GENERÁTOROV POTOM SÚ LN.

29.11.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

! VETA:
NECH $A \in T^{m \times n}$ T JE TELESO.
POTOM: $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A)$.

POMOCNÁ VETA: NÁSOBENIE ZĽAVA REGULÁRNOU MATICOU NEMENÍ DIMENZIU $\mathcal{S}(A)$.

POZOR: SAMOTNÝ PRIESTOR $\mathcal{S}(A)$ SA MÔŽE MENIŤ
NAPR. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

DÔKAZ.: NECH $R \in T^{m \times m}$ R JE REGULÁRNA, $A \in T^{m \times n}$.
NECH $A = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ $\vec{u}_i \in T^m$
NECH $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ JE BÁZA $\mathcal{S}(A)$
$A' := R.A$ $A' = (\vec{u}_1', \dots, \vec{u}_n')$
$\vec{u}_i' = R.\vec{u}_i$ $i = 1, \dots, n$.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k'$ JE SG $\mathcal{S}(A')$
KDE $\vec{v}_i' = R\vec{v}_i$.

$$w \in \mathcal{S}(A') \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i' = \sum_{i=1}^{n} a_i (R.\vec{u}_i) =$$
$$= R.\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i = R.\sum_{i=1}^{k} b_i \vec{v}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} b_i (R\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} b_i \vec{v}_i' \quad \square$$

ĎALEJ CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k'$ SÚ LN.
PRE SPOR. NECH $\exists a_1, \dots, a_k$ $a_j \neq 0$ PRE NEJAKÉ j
$$\sum_{i=1}^{k} a_i R v_i = 0 \quad R \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$$
SPOR S TÝM, ŽE $a_j \neq 0$.

$\Rightarrow \vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k'$ JE BÁZA $\mathcal{S}(A') \Rightarrow \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{S}(A')$.

ALEBO $\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_k'$ JE SG $\mathcal{S}(A')$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}(A')) \leq k = \dim(\mathcal{S}(A))$ (STEINITZOVA VETA)

$A = R^{-1}(RA) = R^{-1}(A')$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}(A)) \leq \dim(\mathcal{S}(A'))$ $\square$

DÔKAZ POVODNEJ VETY:

NECH $A^R = Q \cdot A$, A^R JE V ODST. TVARE, Q JE REG.

STĹPCE A^R OBSAHUJÚCE PIVOTY SÚ LN A TVORIA SG $\mathcal{S}(A^R)$ $\Rightarrow$ TVORIA BÁZU

$\dim(\mathcal{S}(A^R)) = \text{rank}(A)$, $\dim(\mathcal{S}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A^R))$.

$A^R = Q.A$

A NAVIAC $\dim(\mathcal{R}(A)) = \text{rank}(A)$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = \text{rank}(A)$. $\square$

DÔSLEDOK: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

$\text{rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A^T)) = \text{rank}(A^T)$. $\square$

DÔSLEDOK: $\dim(\text{Ker } A) + \text{rank}(A) = n$ PRE $A \in T^{m \times n}$.

$\triangleleft$ $\dim(\text{Ker } A) = \#$ VOĽNÝCH PREMENNÝCH = (CVIČENIE)

$A \to A^R$ $\#$ VOĽ. PREM. $A^R = n - \text{rank}(A^R)$ ...

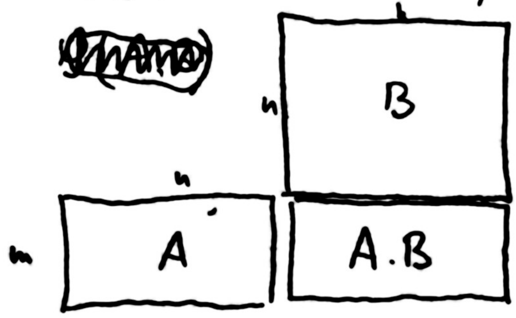
1/2

05.12.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

DÔSLEDOK: $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$
KEĎ JE DEFINOVANÝ SÚČIN $A.B$

DÔKAZ. $A \in T^{m\times n}$, $B \in T^{n\times k}$



ZREJME $\mathcal{S}(A) = \{A\vec{v}, \vec{v} \in T^n\}$
$\mathcal{R}(A) = \{\vec{v} A, \vec{v} \in T^m\}$

$$\mathcal{S}(AB) = \{(AB)\vec{v}, \vec{v} \in T^k\} =$$
$$= \{A\vec{v}, \vec{v} \in \mathcal{S}(B)\} \subseteq \{A\vec{v}, \vec{v} \in T^n\}$$
$$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}(AB)) \leq \dim(\mathcal{S}(A))$$
$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$$

$$\mathcal{R}(AB) = \{\vec{u}AB, \vec{u} \in T^m\} =$$
$$= \{\vec{u}B, \vec{u} \in \mathcal{R}(A)\} \subseteq \{\vec{u}B, \vec{u} \in T^n\}$$
$$\dim(\mathcal{R}(AB)) \leq \dim(\mathcal{R}(B))$$
$$\Rightarrow \dim(\mathcal{S}(AB)) \leq \dim(\mathcal{S}(B))$$
$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B) \quad \square$$

DÔSLEDOK: PRE REGULÁRNU MATICU $R \in T^{m\times m}$ A PRE MATICU $A \in T^{m\times n}$ JE $\mathrm{rank}(R.A) = \mathrm{rank}(A)$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{rank}(R.A) \leq \mathrm{rank}(A) \\ A = R^{-1}.R.A \quad \mathrm{rank}(R^{-1}.R.A) \leq \mathrm{rank}(R.A)\end{array}\right\} \mathrm{rank}(R.A) = \mathrm{rank}(A). \quad \square$$

INÝ DÔKAZ. : KEĎ NÁSOBÍME MATICU A REGULÁRNOU MATICOU $R_{6,1}$ ZĽAVA POTOM SA NEMENÍ HODNOSŤ STĹPCOVÉHO PRIESTORU.

LINEÁRNE ZOBRAZENIA

DEF. : ZOBRAZENIE $f: U \to V$ U, V SÚ VEKT. PRIESTORY NAD TELESOM T

POTOM f JE LINEÁRNE ZOBRAZENIE, KEĎ:

a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U : f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

b) $\forall \vec{u} \in U, \forall c \in T : f(c\vec{u}) = c f(\vec{u})$

PRÍKLADY : 1) $f: U \to U$, $f(\vec{u}) := \vec{u}$ PRE $\forall \vec{u} \in U$,

2) $f: U \to U$, $f(\vec{u}) := \vec{0}$ PRE $\forall \vec{u} \in U$,

3) NECH $U = T^n$, $f(x_1, \dots, x_n)^T := x_i$ PRE $\forall \vec{u} = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$

$f: U \to T$ ŤJ. $f: T^n \to T^1$ ... PROJEKCIA

4) $U = \mathbb{R}^2$, $f: U \to U$ $f(x_1, x_2)^T := (x_1 + 2, x_2 - 3)^T$

PRE $\forall \vec{u} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 = U$

f NIE JE LIN. ZOBRAZENIE → NEPLATÍ b).

5) $U = \mathbb{R}^2$, $f: U \to U$ $f(x_1, x_2)^T := (\alpha x_1, \alpha x_2)^T$ PRE $\forall \vec{u} = (x_1, x_2)$

f JE LIN ZOBRAZENIE

$$f(\vec{u}) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \vec{u}$$

6) $f(x_1, x_2)^T := f(-x_1, x_2)^T$

$$f(\vec{u}) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}$$

VŠEOBECNE $f(x_1, x_2)^T := (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)^T$

PRE LIN. ZOBRAZENIE $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{u}) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{u}$$

05.12.2005 M6
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

$f(1,0)^T = (a,c)^T$
$f(0,1)^T = (b,d)^T$

$$f(x_1,x_2)^T = f\left(x_1(1,0)^T + x_2(0,1)^T\right) = (ax_1+bx_2,\ cx_1+dx_2)^T \quad \square$$

7) $U = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$p(x) \in U$, DEFINUJME $f(p(x)) := p'(x)$, $f: U \to U$

ZREJME f JE LINEÁRNE ZOBRAZENIE

8) $U_n = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$p(x) \in U$, DEF. $f(p(x)) := p'(x)$, $f: U_n \to U_{n-1}$.

POZOROVANIE: PRE LIN. ZOBR. $f: U \to V$

$\dim(f(U)) \leq \dim(U)$

$f(U)$ JE VEKTOROVÝ PRIESTOR

DÔKAZ. $\vec{u} \in U \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$ $\quad (e_1, \dots e_n)$ JE BÁZA

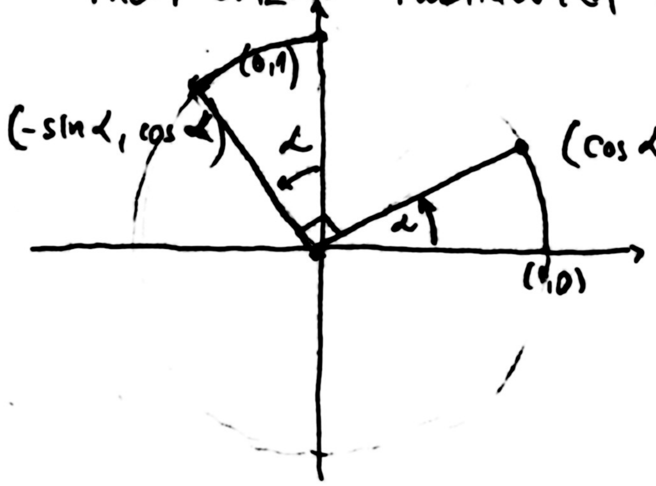
$f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\vec{e}_i)$ KDE $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ JE SG $f(U)$.

$\Rightarrow \dim f(U) \leq n = \dim(U)$. (STEINITZOVA VETA)

POZOROVANIE: KEĎ JE f LIN. ZOBRAZENIE $f: U \to V$
g JE LIN. ZOBRAZENIE $g: V \to W$, POTOM
$g \circ f$ JE LIN. ZOBR. $U \to W$.

VETA: NECH V A W SÚ VEKTOROVÉ PRIESTORY NAD T
A NECH $(v_1, \dots, v_n)$ JE BÁZA V.
POTOM PRE KAŽDÚ n-TICU $(w_1, \dots, w_n)$ EXISTUJE
PRÁVE JEDNO LIN. ZOBRAZENIE f TAKÉ, ŽE
$f: V \to W$, $f(v_i) = w_i$.

PRÍKLAD: AKO VYZERÁ PREDPIS LIN. ZOBRAZENIA, KT. ZODPOVEDÁ OTOČENIU OKOLO POČIATKU O UHOL α PROTI SMERU HODINOVÝCH RUČIČIEK.



$$f(x,y)^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

PRÍKLAD: DANÝ PRAVIDELNÝ n-UHOLNÍK SO STREDOM V POČIATKU S VRCHOLMI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

UVÁŽME LIN. ZOBRAZENIE, KTORÉ OTÁČA ROVINU OKOLO POČIATKU O UHOL $\frac{2\pi}{n}$ .. $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \tau(v_i) = v_{i+1} \quad (i<n), \quad \tau(v_n) = v_1$.

$$\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \tau(\vec{v}_i)$$

ZREJME $\tau(\vec{s}) = \vec{s} \Rightarrow \vec{s}$ JE STRED ROTÁCIE $\Rightarrow \vec{s} = \vec{0}$.

12.12.2005 Po
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

DEFINÍCIA: NECH V A W SÚ VEKT. PRIESTORY NAD T A NECH $X = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ JE BÁZA V A $Y = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m)$ JE BÁZA W

f JE LIN. ZOBRAZENIE $V \to W$

$[f(\vec{v}_i)]_Y$ JE STĹPCOVÝ VEKTOR $(a_1, \dots, a_m)^T$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{w}_k = f(\vec{v}_i).$$

ZOBERME SI MATICU $\overbrace{\left([f(\vec{v}_1)]_Y, \dots, [f(\vec{v}_n)]_Y\right)}^{\text{OZNAČENIE } [f]_{XY}} \in T^{m \times n}$

TÚTO MATICU NAZÝVAME MATICOU ZOBRAZENIA $f: V \to W$ VZHĽADOM K BÁZI X A Y.

NECH $\vec{v} \in V$, $[\vec{v}]_X$ .. SÚRADNICE $\vec{v}$ VZHĽADOM K X.

$[f(\vec{v})]_Y = ?$

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \vec{v}_k \Rightarrow f(\vec{v}) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(\vec{v}_k)$$

$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k$ $\quad \boxed{\vec{v}_1 \quad \dots \quad \vec{v}_n}$

$\Downarrow$

$\vec{w} = \sum_{k=1}^{n} a_k f(\vec{v}_k)$ $\quad \boxed{f(\vec{v}_1) \quad \dots \quad f(\vec{v}_n)}$

$$\begin{array}{c|ccc|} \vec{w}_1 & & & \\ \vdots & [f(\vec{v}_1)]_Y & \dots & [f(\vec{v}_n)]_Y \\ \vec{w}_m & & & \end{array}$$

$$[f(\vec{v})]_Y = [f]_{XY} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [f]_{XY} \cdot [\vec{v}]_X$$

$$\left([f(\vec{v}_1)]_Y, [f(\vec{v}_2)]_Y, \dots, [f(\vec{v}_n)]_Y\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

VETA: PRE VEKT. PRIESTORY V, W NAD T S BÁZAMI X A Y A PRE LIN. ZOBR. $f: V \to W$ PLATÍ: $\forall \vec{u} \in V$:

$$[f(\vec{u})]_Y = [f]_{XY} \cdot [\vec{u}]_X$$

DÔSLEDOK: ĽUBOVOĽNÉ LIN. ZOBRAZENIE $f: T^n \to T^m$ MÁ TVAR $f(\vec{u}) = A.\vec{u}$, KDE A JE MATICA $\in T^{m \times n}$ A JEJ I-TY STĹPEC JE OBRAZOM BÁZOVÉHO VEKTORU $\vec{e_i} = (0,..,0,1,0,..,0)^T \in \mathbb{R}^n$.
$\underset{\text{I-TÁ POZÍCIA}}{}$

VŠIMNÚŤ SI: $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$

ZREJME $(u_1, \dots, u_n)^T$ JE TIEŽ VEKT. SÚRADNÍC VEKT. $\vec{u}$ VOČI BÁZI $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) = X$

PLATÍ $\vec{u} = [\vec{u}]_X$

PODOBNE PRE BÁZU $(\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_m'}) = Y$ VEKT. PRIESTORU T^m JE $f(\vec{u}) = [f(\vec{u})]_Y$.

$$\Rightarrow f(\vec{u}) = [f]_{XY} \cdot \vec{u}, \text{ KDE } [f]_{XY} = \left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), \dots, f(\vec{e_n})\right) = A.$$

VETA: NECH U, V, W SÚ VEKT. PRIESTORY NAD T S KONEČNÝMI BÁZAMI X, Y, Z.
NECH $f: U \to V$ A $g: V \to W$ f, g SÚ LIN. ZOBRAZENIA.
POTOM: $[g \circ f]_{XZ} = [g]_{YZ} \cdot [f]_{XY}$.

DÔKAZ.: $[g \circ f(\vec{u})]_Z = [g(f(\vec{u}))]_Z = [g]_{YZ} \cdot [f(\vec{u})]_Y = ([g]_{YZ} \cdot [f]_{XY}) \cdot [\vec{u}]_X$

$[f(\vec{u})]_Y = [f]_{XY} \cdot [\vec{u}]_X$

ĎALEJ $[g \circ f(\vec{u})]_Z = [g \circ f]_{XZ} [\vec{u}]_X$ PRE $\forall \vec{u} \in U$

$\Rightarrow [g \circ f(\vec{u})]_Z = [g]_{YZ} \cdot [f]_{XY}$. $\square$

12. 12. 2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I − M1

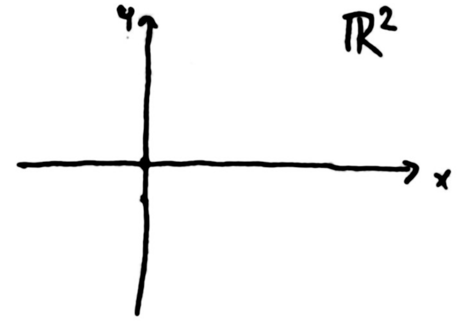
ZVLÁŠTNY PRÍKLAD:

NECH V JE VP NAD T, $id : V \to V$

ZVOLME SI DVE BÁZY X A Y VEKT. PRIESTORU V.

MATICU $[id]_{XY}$ NAZÝVAME MATICOU PRECHODU Z BÁZY X DO BÁZY Y.

PRÍKLAD:



$X = ((1,0), (0,1))$

$Y = ((-1,0), (0,-1))$

HĽADÁME $[id]_{XY}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_Y = (-1,0)^T, \quad \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_Y = (0,-1)^T$$

$$\Rightarrow [id]_{XY} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

PRÍKLAD: ROTÁCIA OKOLO POČIATKU O UHOL α

$$R_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

ZAUJÍMA NÁS ROTAČNÁ MATICA PRE UHOL $\alpha+\beta$

ZREJME $R_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta), & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta), & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

ALE TAKTIEŽ $R_{\alpha+\beta} = R_\beta \cdot R_\alpha =$

$$= \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta, & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta, & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta\end{aligned}$$

PRÍKLAD: $V_1 = \mathbb{R}^4$, V_2 = PRIESTOR V POLYNÓMOV STUPŇA ≤ 3 NAD $\mathbb{R}$.

DEFINÍCIA: NECH V A W SÚ VP NAD T. POTOM LIN. ZOBRAZENIE $f: V \to W$, KTORÉ JE BIJEKCIA NAZÝVAME IZOMORFIZMUS PRIESTOROV V A W.

POZOROVANIE: f^{-1} JE LINEÁRNE ZOBRAZENIE.

DÔKAZ: ZOBERME SI $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$.

EXISTUJE $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$: $f(\vec{v_1}) = \vec{w_1}$, $f(\vec{v_2}) = \vec{w_2}$.

$$f^{-1}(\vec{w_1} + \vec{w_2}) = f^{-1}\left(f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2})\right) = f^{-1}\left(f(\vec{v_1} + \vec{v_2})\right) = \vec{v_1} + \vec{v_2} = f^{-1}(\vec{w_1}) + f^{-1}(\vec{w_2})$$

$a \in T$, POTOM $f^{-1}(a.\vec{w}) = f^{-1}(a.f(\vec{v})) = f^{-1}(f(a\vec{v})) = a\vec{v} = a.f^{-1}(\vec{w})$ □

VETA: NECH V A W SÚ VP NAD T S KONEČNÝMI BÁZAMI X A Y. POTOM $f: V \to W$ JE IZOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $[f]_{XY}$ JE REGULÁRNA.

DÔKAZ. $\Leftarrow$) MAJME LIN. ZOBR. $f: V \to W$ A VIEME, ŽE $[f]_{XY}$ JE REGULÁRNA. CHCEME DOK., ŽE f JE BIJEKCIA.

VIEME, ŽE EXISTUJE $([f]_{XY})^{-1}$

ZOBERME LIN. ZOBR. $g: W \to V$ TAKÉ, ŽE $[g]_{YX} = ([f]_{XY})^{-1}$

UVAŽUJME ZOBR. $g \circ f$:

$$[g \circ f]_{XX} = [g]_{YX} \cdot [f]_{XY} = ([f]_{XY})^{-1} \cdot [f]_{XY} = I \Rightarrow \underline{\underline{g \circ f(\vec{x}) = \vec{x}}}$$

$\Rightarrow f$ JE PROSTÉ ZOBRAZENIE

ZOBR. $f \circ g$:

$$[f \circ g]_{YY} = [f]_{XY} \cdot [g]_{YX} = I$$

$\Rightarrow f$ JE NA. $\underline{\underline{f \circ g(\vec{y}) = \vec{y}}}$

$\Big\}$ f JE BIJEKCIA

$\Rightarrow$) CHCEME DOKÁZAŤ: ŽE 1. $[f]_{XY}$ JE ŠTVORCOVÁ, 2. EX. $([f]_{XY})^{-1}$.

$\exists f^{-1}: W \to V$. $[f \circ f^{-1}]_{YY} = [f]_{XY} \cdot [f^{-1}]_{YX} = I_{|Y|}$, $[f^{-1} \circ f]_{XX} = I_{|X|}$

$|Y| = \text{rank}[I_{|Y|}] = \text{rank}([f]_{XY} \cdot [f^{-1}]_{YX}) \leq \min\begin{Bmatrix}\text{rank}[f]_{XY} \\ \text{rank}[f^{-1}]_{YX}\end{Bmatrix}$ $\quad |X| \leq \min\begin{Bmatrix}\text{rank}[f]_{XY} \\ \text{rank}[f^{-1}]_{YX}\end{Bmatrix}$

MÁME VEKTOROVÝ PRIESTOR V S BÁZOU $X=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$,
VEKT. PR. W S BÁZOU $Y=(\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_m)$, $n,m\in\mathbb{N}$, NAD T.

NECH $f: V\to W$ JE LIN. ZOBRAZENIE

DEF. $\vec{v}\in V \Rightarrow [\vec{v}]_X=(a_1,\dots,a_n)^T\in T^n$:

$v = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2+\dots+a_n\vec{v}_n$

HĽADÁME $[f(\vec{v})]_Y=(b_1,\dots,b_m)^T\in T^m$

$$f(\vec{v})=\sum_{i=1}^{n} a_i\, f(\vec{v}_i)$$

STAČÍ VYJADRIŤ $[f(\vec{v}_i)]_Y$.

NECH $[f(\vec{v}_i)]_Y = (c_{1i}, c_{2i},\dots,c_{mi})^T\in T^m$

TJ. $f(\vec{v}_i)=\sum_{k=1}^{m} c_{ki}\cdot \vec{w}_k$

POTOM $$f(\vec{v})=\sum_{i=1}^{n} a_i f(\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{k=1}^{m} c_{ki}\vec{w}_k\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_{ki}\right).\vec{w}_k$$

$$\Rightarrow [f(\vec{v})]_Y=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_{1i},\ \sum_{i=1}^{n} a_i c_{2i},\ \dots,\ \sum_{i=1}^{n} a_i c_{mi}\right)^T=$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & \dots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & \dots, & c_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{m1}, & c_{m2}, & c_{m3}, & \dots, & c_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}=$$

$$=\left([f(\vec{v}_1)]_Y, [f(\vec{v}_2)]_Y, [f(\vec{v}_3)]_Y, \dots, [f(\vec{v}_n)]_Y\right)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$$

□

STAČÍ SI VŠIMNÚŤ, ŽE

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m) \cdot \left([f(\vec{v}_1)]_Y , [f(\vec{v}_2)]_Y , \dots, [f(\vec{v}_n)]_Y \right) =$$

$$= \left(f(\vec{v}_1), \ f(\vec{v}_2), \dots, \ f(\vec{v}_n) \right)$$

TO PRETO, LEBO

$$(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m) \cdot [\vec{w}]_Y = \vec{w} \quad \text{PRE} \quad \forall \vec{w} \in W.$$

POTOM SI STAČÍ UŽ IBA UVEDOMIŤ, ŽE

$$\left(f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n) \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = f(\vec{v})$$

$\Rightarrow$

$$[f]_{XY} = \left([f(\vec{v}_1)]_Y , \dots, [f(\vec{v}_n)]_Y \right) \in T^{m \times n}$$

19.12.2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

VETA: NECH V A W SÚ VP NAD T S KONEČNÝMI BÁZAMI X A Y. POTOM $f: V \to W$ JE IZOMORFIZMUS $\Leftrightarrow$ $[f]_{XY}$ JE REGULÁRNA.

DÔKAZ. $\Leftarrow$) PREDP., ŽE $[f]_{XY}$ JE REGULÁRNA ($\Rightarrow$ ŠTVORCOVÁ)
$\Rightarrow \exists \left([f]_{XY}\right)^{-1}$. ZOBERME SI ZOBR. $g: W \to V$
TAKÉ, ŽE $[g]_{YX} = \left([f]_{XY}\right)^{-1}$.

ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $[g \circ f]_{XX} = I_{\dim V}$, $[f \circ g]_{YY} = I_{\dim W}$.

$\Rightarrow$ NUTNE $g = f^{-1} \Rightarrow f$ JE BIJEKCIA.

$\Rightarrow$) f JE IZOMORFIZMUS $\Rightarrow \exists f^{-1}$.

ZREJME f^{-1} JE LIN. ZOBRAZENIE Z W DO V.

$$\Rightarrow \quad [f]_{XY}[f^{-1}]_{YX} = [f \circ f^{-1}]_{YY} = [id_Y]_{YY} = I_{\dim W}$$

PODOBNE $[f^{-1}]_{YX}[f]_{XY} = I_{\dim V}$

MUSÍME UKÁZAŤ, ŽE $[f]_{XY}$ JE ŠTVORCOVÁ A ŽE K NEJ EXISTUJE INVERZNÁ MATICA.

$$\mathrm{rank}(A \cdot B) \leq \min\begin{pmatrix}\mathrm{rank}(A)\\ \mathrm{rank}(B)\end{pmatrix}$$

$$\dim W = |Y| = \mathrm{rank}(id_Y) \leq \min\begin{pmatrix}\mathrm{rank}([f]_{XY})\\ \mathrm{rank}([f^{-1}]_{YX})\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}([f]_{XY}) \geq \dim W$$

PODOBNE $\mathrm{rank}([f]_{XY}) \geq \dim V$

$[f]_{XY}$ JE MATICA $|X| \times |Y|$ $\Rightarrow \mathrm{rank}([f]_{XY}) \leq |X|, |Y|$

$\Rightarrow$ NUTNE $[f]_{XY}$ JE ŠTVORCOVÁ. $\square$

PLATÍ: $[f^{-1}]_{YX} = \left([f]_{XY}\right)^{-1}$.

VETA: KAŽDÝ n-DIMENZIONÁLNY VEKT. PRIESTOR V NAD TELESOM T JE IZOMORFNÝ S T^n.

DÔKAZ. VEZMIME SI ĽUBOVOĽNÚ BÁZU X VP. V.

UVAŽUJME ZOBRAZENIE $f: V \to T_n$

$f(\vec{v}) := [\vec{v}]_X$ PRE $\forall \vec{v} \in V$.

UVAŽME BÁZU $f(X)$ VP. T_n

ZREJME $[f]_{X f(X)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ JE BIJEKCIA. $\square$

PRÍKLAD: NECH S JE KONEČNÁ MNOŽINA, $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$V = \mathcal{P}(S)$. V JE VP. NAD $T = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$.

$A, B \in V \Rightarrow A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in V$

$A \in V \qquad 1 \odot A = A, \quad 0 \odot A = \emptyset$

BÁZA V ... NAPR. $(\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\})$

$\Rightarrow \dim V = |S| = n$

$\Rightarrow V$ JE IZOMORFNÝ S $\mathbb{Z}_2^{|S|}$.

$f: V \to \mathbb{Z}_2^{|S|}$ JE CHARAKTERISTICKÁ FCIA.

$A \in V \Rightarrow f(A) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

$$x_i := \begin{cases} 0 & a_i \notin A \\ 1 & a_i \in A \end{cases}.$$

BÁZA $\mathbb{Z}_2^{|S|}$
$$\begin{cases} f(\{a_1\}) = (1, 0, \ldots, 0)^T \\ f(\{a_2\}) = (0, 1, \ldots, 0)^T \\ \cdots \\ f(\{a_n\}) = (0, 0, \ldots, 1)^T. \end{cases}$$

19. 12. 2005 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I – M1

VETA: KEĎ JE $f: V \to W$ LIN. ZOBR. Z V DO W, f JE IZOMORFIZMUS, $X = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ JE BÁZA V, POTOM $f(X) = \{ f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n) \}$ JE BÁZA W.

DÔKAZ. 1) $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ SÚ LIN. NEZÁVISLÉ.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i \vec{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

$f(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$, PRETOŽE $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

2) $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ JE SG.

$$\vec{w} \in W \Rightarrow f^{-1}(\vec{w}) = \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{v}_i) = \vec{w} \quad \square$$

INÝ SPÔSOB:

$$\left.\begin{array}{ll} f(V) \text{ JE VP.}, & \dim f(V) \le \dim V \\ f^{-1}(W) \text{ JE VP.} & \dim f^{-1}(W) \le \dim V \end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = \dim W. \quad \square$$

VETA: IZOMORFIZMUS ZACHOVÁVA DIMENZIU.

VETA: NECH V A W SÚ VP. NAD T.

$Z(V, W) := \{ f,\ f \text{ JE LIN. ZOBRAZENIE Z } V \text{ DO } W \}$

DEFINUJME SÚČET $f \oplus g$ A SÚČIN $c \odot f$:

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ PRE $\forall f, g \in Z(V, W), \forall x \in V$

$(c \odot f)(x) = c\, f(x)$. PRE $\forall f \in Z(V, W), c \in T, \forall x \in V$

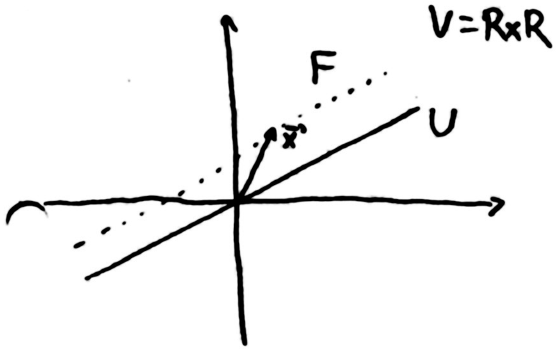
POTOM $(Z(V, W), \oplus, \odot)$ JE VEKT. PRIESTOR NAD T.

1/2

02.01.2006 Mo
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

DEFINÍCIA: NECH U JE VEKT. PODPRIESTOR VEKT. P. V A NECH $\vec{x_0} \in V$. POTOM PODMNOŽINA $F = \{\vec{x_0} + \vec{u},\ \vec{u} \in U\}$ PRIESTORU V JE AFINNÝ PODPRIESTOR V.



DIMENZIA F :: DIMENZIA U.

$\sphericalangle$ $U = \{\vec{x} - \vec{y},\ \vec{x}, \vec{y} \in F\}$

DÔKAZ. 1) $\vec{z} \in U$. POTOM POLOŽME $\vec{x} := \vec{z} + \vec{x_0} \in F$, $\vec{y} := \vec{0} + \vec{x_0} \in F$

$\Rightarrow U \subseteq \{\vec{x} - \vec{y},\ \vec{x}, \vec{y} \in F\}$

2) $\vec{z} \in \{\vec{x} - \vec{y},\ \vec{x}, \vec{y} \in F\}$, T.J. $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ PRE NEJAKÉ $\vec{x}, \vec{y} \in F$.

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{x} = \vec{x_0} + \vec{u_1}, & \text{KDE } \vec{u_1} \in U \\ \vec{y} = \vec{x_0} + \vec{u_2}, & \text{KDE } \vec{u_2} \in U \end{array}\right\} \vec{z} = \vec{u_1} - \vec{u_2} \in U$$

$\Rightarrow \{\vec{x} - \vec{y},\ \vec{x}, \vec{y} \in F\} \subseteq U$. $\square$

DEFINÍCIA:
KEĎ $\dim F = 1$, POTOM F JE PRIAMKA
$\dim F = 2$, POTOM F JE ROVINA
$\dim F = n-1$, KDE $\dim V = n$, POTOM F JE NADROVINA.

VETA: KEĎ f JE LIN. ZOBRAZENIE $U \to V$
$\vec{b} \in V$ JE PEVNÝ VEKTOR.
POTOM: 1) $f^{-1}(\vec{0})$ JE VEKT. PODPRIESTOR U
2) $f^{-1}(\vec{b})$ JE AFINNÝ PODPRIESTOR U.

KEĎ $f^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset$, POTOM $f^{-1}(\vec{b}) = \vec{x}_0 + f^{-1}(\vec{o})$

KDE $\vec{x}_0$ JE ĽUBOVOĽNÝ VEKTOR $\in f^{-1}(\vec{b})$.

DÔKAZ. 1) $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(\vec{o})$, POTOM

$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \vec{o} \Rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in f^{-1}(\vec{o})$.

$f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) = \vec{o} \Rightarrow \alpha \vec{x} \in f^{-1}(\vec{o})$.

$\vec{o} \in f^{-1}(\vec{o})$.

2) $f^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$

$f^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, \vec{x}_0 \in U : f(\vec{x}_0) = \vec{b}$

PRE ĽUBOVOĽNÉ $\vec{x} \in f^{-1}(\vec{b})$

JE: $f(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{o}$

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 \in f^{-1}(\vec{o}) \Rightarrow \vec{x} \in \vec{x}_0 + f^{-1}(\vec{o})$.

NAOPAK $\vec{x} \in \vec{x}_0 + f^{-1}(\vec{o})$, POTOM

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{z}$, $\vec{z} \in f^{-1}(\vec{o})$

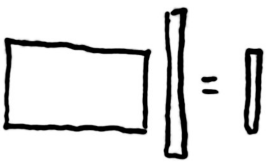
$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \vec{z}) = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} \in f^{-1}(\vec{b})$.

POZNÁMKA: V REČI MATÍC IDE O VZŤAH MEDZI RIEŠENIAMI $A\vec{x} = \vec{b}$ A $A\vec{x} = \vec{o}$.

$A \in T^{m \times n}$, $\vec{b} \in T^{m}$

MNOŽINA $\forall$ RIEŠENÍ $A\vec{x} = \vec{b}$ JE BUĎ PRÁZDNA* ALEBO JE TVARU $\vec{x}_0 + \mathrm{Ker}(A)$, KDE $A\vec{x}_0 = \vec{b}$.

POZNÁMKA: SÚSTAVA LIN. ROVNÍC $A\vec{x} = \vec{b}$



- NÁJDI VEKTOR $\vec{x}$ TAKÝ, ŽE LIN. ZOBRAZENIE f DANÉ MATICOU A ZOBRAZÍ $\vec{x}$ NA $\vec{b}$.
- PATRÍ $\vec{b}$ DO $\varphi(A)$?
- HĽADÁME PRIESEČNÍK VŠETKÝCH NADROVÍN; (DEFINOVANÝCH RIADKAMI)

02.01.2006 Mb
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - M1

DEFINÍCIA: ŠTANDARDNÁ DEFINÍCIA SKALÁRNEHO SÚČINU:

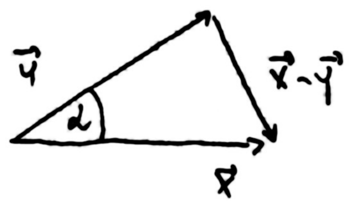
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, POTOM $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

EUKLIDOVSKÁ DĹŽKA VEKTORU $\vec{x}$ JE $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$.

VEKTOR JE JEDNOTKOVÝ, KEĎ $\|\vec{x}\| = 1$.

PRE $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{x} \neq \vec{0}$ JE $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ JEDNOTKOVÝ VEKTOR.

PRÍKLAD:



KOSÍNUSOVÁ VETA:

$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos \alpha$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \langle \vec{x}-\vec{y} | \vec{x}-\vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \langle x | y \rangle$

$\langle x, y \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \alpha$. $\Rightarrow \cos \alpha = \langle \vec{x}_0 | \vec{y}_0 \rangle$

DEFINÍCIA: VŠEOBECNÁ DEFINÍCIA SKALÁRNEHO SÚČINU:

NECH V JE VEKT. PRIESTOR NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

POTOM ZOBRAZENIE $V \times V \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) (OZN. $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$)

JE SKALÁRNY SÚČIN, KEĎ SPĹŇA NASL. AXIÓMY:

(P) $\forall \vec{x} \in V$: $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$, ROVNOSŤ NASTÁVA IBA PRE $\vec{x} = \vec{0}$

(L1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$): $\langle \alpha \vec{x} | \alpha \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$

(L2) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ $\langle x+y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$.

(K) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ PRE $\mathbb{R}$

$\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ PRE $\mathbb{C}$.

PRÍKLAD: PRE $\mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

DEFINUJME $\langle x | y \rangle := x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 + 5 y_1 y_2$

OVERTE AXIÓMY SKALÁRNEHO SÚČINU.

PRÍKLAD: DEFINUJME $\langle x|y\rangle := x^T A^T A y$, KDE A JE REG. MATICA

DOKÁŽ, ŽE $\langle x|y\rangle$ JE SK. SÚČIN.

DEFINÍCIA: NECH V JE VP NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

ZOBRAZENIE $V \to \mathbb{R}$ KT. VEKTORU $\vec{x}$ PRIRADÍ ČÍSLO $\|\vec{x}\|$ SA NAZÝVA NORMA (VEĽKOSŤ) $\Leftrightarrow$:

(1) (P) $\forall \vec{x} \in V: \|\vec{x}\| \geq 0$, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

(2) $\forall \vec{x} \in V \; \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}): \|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$

(3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ Δ-NEROVNOSŤ

PRÍKLAD: EUKLIDOVSKÁ DĹŽKA VEKTOROV JE NORMA (CVIČENIE).

PRÍKLAD: L1 NORMA: $\|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

L2 NORMA: $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

LP NORMA: $\|x\| := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$

L∞ NORMA: $\|x\| := \max \{ |x_i| \}$

NORMA ODVODENÁ ZO SKALÁRNEHO SÚČINU

$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$

JE POTREBNÉ OVERIŤ AXIÓMY NORMY ...

31.01.2006 Tu
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I

VETA (CAUCHY-SCHWARZ): KEĎ JE V VP NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) SO SKALÁRNYM SÚČINOM, A KEĎ JE $\|\vec{x}\|$ NORMA ODVODENÁ ZO SKAL. S., POTOM $\forall \vec{x},\vec{y} \in V$ $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ V $\mathbb{R}$

$|\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ V $\mathbb{C}$

DÔKAZ: PRE $\vec{y}=\vec{0}$ ZREJMÉ.

NECH $\vec{y} \neq \vec{0}$: $P(t) := \langle \vec{x}+\vec{y}t \,|\, x+\vec{y}t\rangle =$

$= \langle \vec{x}|\vec{x}+\vec{y}t\rangle + t\cdot\langle \vec{y}|\vec{x}+t\vec{y}\rangle =$

$= \langle \vec{x},\vec{x}\rangle + 2t\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + t^2\langle \vec{y},\vec{y}\rangle =$

$= t^2\|\vec{y}\|^2 + 2t\langle \vec{x},\vec{y}\rangle + \|x\|^2 \geq 0$

$D = 4\langle \vec{x},\vec{y}\rangle^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0$ □

DÔSLEDOK: PLATÍ $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

DÔKAZ: $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y}\rangle} = \sqrt{\langle \vec{x}|\vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle \vec{y}|\vec{y}\rangle} \leq$

$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|$

$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle \leq \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ V $\mathbb{R}$

$Re(\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle) \leq |\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle|$ V $\mathbb{C}$ □

DÔSLEDOK: $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$

DÔKAZ: $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\vec{y} = (1,\dots,1)$

DEF.: $\vec{x},\vec{y}$ V PRIEST. SO SKAL. SÚČINOM SÚ KOLMÉ
$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$ ~~(POZN.: $\vec{x},\vec{y} \neq \vec{0}$)?~~

DEF.: NECH V JE KONEČ. GEN. VP NAD $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
$B = (\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ JE JEHO BÁZA, $\forall i \neq j \Rightarrow \vec{v}_i \perp \vec{v}_j$, $\forall i\ \|\vec{v}_i\| = 1$
POTOM B JE ORTONORMÁLNA BÁZA.

VETA: KAŽDÝ SYSTÉM VZÁJOMNE KOLMÝCH NENULOVÝCH VEKTOROV JE LINEÁRNE NEZÁVISLÝ.

DÔKAZ: (SPOROM)

NECH $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ SÚ NENULOVÉ, KOLMÉ, ALE $\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{x}_i$

$0 < \langle \vec{x}_n | \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_n | \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{x}_i \rangle = 0$, ČO JE SPOR. □

VETA: NECH $B = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ JE ORTONORMÁLNA BÁZA VP V SO SKAL. SÚČINOM A $\vec{x} \in V$. POTOM

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i .$$

DÔKAZ: NECH $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$.

POTOM $\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j, v_i \rangle = \alpha_i$ PRE $\forall i$. □

KOEF. $\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle$ SÚ TZV. FOURIEROVÉ KOEF. $\vec{x}$ VOČI BÁZE B.

DEF.: NECH V JE PODPRIESTOR W A $Z = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ JE ORTON. BÁZA V. POTOM ZOBRAZENIE

$P_V : W \to V$, $P_V(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u} | \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$, SA NAZÝVA ORTONORM.(?) PROJEKCIA Z W NA V.

TREBA OVERIŤ, ŽE P_V JE LIN. ZOBRAZENIE

VETA: $P_V(\vec{u})$ JE NAJBLIŽŠÍ BOD Z V K $\vec{u}$.

DÔKAZ: CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\forall z \in V$ JE $\|\vec{u} - P_V(\vec{u})\| \leq \|\vec{u} - \vec{z}\|$

OZNAČME $\vec{a} := P_V(\vec{u}) - \vec{u}$, $\vec{b} := \vec{z} - P_V(\vec{u}) \in V$ $\vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{v}_j$.

CHCEME DOKÁZAŤ, ŽE $\|\vec{a}\| \leq \|\vec{a} + \vec{b}\|$

POMOCNÉ TVRDENIE: V JE PODPRIESTOR W A $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ JE ORTONORMÁLNA BÁZA V. POTOM $\forall \vec{x} \in W$ JE $\vec{x} - P_V(\vec{x}) \perp \vec{v}_i$ $(\forall i)$

DÔKAZ: $\langle \vec{x} - P_V(\vec{x}) | \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{x} - \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j | \vec{v}_i \rangle =$

$= \langle \vec{x} | v_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle \langle \vec{x} | \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j | \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{x} | \vec{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{v}_j \rangle \langle \vec{v}_j | \vec{v}_i \rangle =$

$= \langle \vec{x} | \vec{v}_i \rangle - \langle \vec{x} | \vec{v}_i \rangle = 0.$ □

$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b} | \vec{a} + \vec{b} \rangle = \|a\|^2 + 2 \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle + \overbrace{\|b\|^2}^{\geq 0} \geq \|\vec{a}\|^2$

$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \langle P_V(\vec{u}) - \vec{u} | \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{v}_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle P_V(\vec{u}) - \vec{u}, \vec{v}_j \rangle = 0.$ □

+ POZRI GRAM-SCHMIDTOVU ORTONORMALIZÁCIU!!!

1/1

16.10.2005 Su
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA I - HOMEWORK

ÚLOHA: NÁJDI $42 \cdot 100^{-1}$ V $\mathbb{Z}_{113}$

$$113 = 1 \cdot 100 + 13 \Rightarrow 13 = 1 \cdot 113 - 1 \cdot 100$$

$$100 = 7 \cdot 13 + 9 \qquad 9 = 1 \cdot 100 - 7 \cdot 13 = 1 \cdot 100 - 7 \cdot (1 \cdot 113 - 1 \cdot 100) = = 8 \cdot 100 - 7 \cdot 113$$

$$13 = 1 \cdot 9 + 4 \qquad 4 = 1 \cdot 13 - 1 \cdot 9 = (1 \cdot 113 - 1 \cdot 100) - 1 \cdot (8 \cdot 100 - 7 \cdot 113) = = 8 \cdot 113 - 9 \cdot 100$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \qquad 1 = 9 - 2 \cdot 4 = 8 \cdot 100 - 7 \cdot 113 - 2 \cdot (8 \cdot 113 - 9 \cdot 100) = = -23 \cdot 113 + 26 \cdot 100$$

$$26 \cdot 100 \equiv 1 \pmod{113}$$

$$42 \cdot 26 = 1092 \equiv \underline{\underline{75 \pmod{113}}} \qquad 1092 = 9 \cdot 113 + 75$$

25. 11. 2005 Fr
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA I

PRÍKLAD: V $\mathbb{R}^4$ MAJME DANÝ PODPRIESTOR

$$V = \{(a,b,c,d)\ \ 7a+b=0,\ 3b+c-d=0\}$$

NÁJDITE BÁZU

$(1,-7,21,0)$

$(1,-7,22,1)$

NECH $(x,y,z,w) \in V$

$$7x+y=0$$
$$3y+z-w=0$$

POLOŽME $\alpha = x-w$

$\beta = w$

$x = \alpha+\beta$

$y = -7\alpha-7\beta$

$z = 21\alpha+22\beta$

$w = \beta$

$$\alpha(1,-7,21,0)+\beta(1,-7,22,1) =$$
$$= (\alpha+\beta,\ -7\alpha-7\beta,\ 21\alpha+22\beta,\ \beta) =$$
$$= (x,\ -7x+7w-7w,\ 21x-21w+22w,\ w)$$

VEKTOROVÝ PRIESTOR $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ NEVIEME NÁJSŤ BÁZU

UVAŽUJME VEKT. PRIESTOR $\mathbb{R}$ NAD TELESOM $\mathbb{Q}$

V $\mathbb{Z}_7$

$$3x+2y+z+w=0$$
$$2x+y-z-w=1$$
$$x+y+2z+3w=2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} & 4 \end{array}\right)$$

$\boxed{w=3}$

$y+5z=3 \Rightarrow \boxed{y=3+2z}$

$x+y+2z+3w=2$

$x+3+2z+2z+2=2 \Rightarrow \boxed{x=4+3z}$

Z množiny $M = \{(1,1,0,1), (1,1,1,0), (0,1,1,1), \cancel{(1,2,3,4)}, \cancel{(2,2,0,2)}, (1,3,4,0), \cancel{(0,1,1,0)}, \cancel{(1,1,1,1)}\}$

vyberme lin. nezávislú $N \subseteq M$ takú, že $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(M)$

$(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$,
$(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 4, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 4, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 4, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 2, & -3 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

1/2

16.11.2005 Th
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA I - K6

NAD $\mathbb{Z}_7$ NÁJDITE INV. MATICU K $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & & -1 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & -1 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
$$

$\vdots$

16. 11. 2005 Fr
PETER ČERNO

EX: LINEÁRNA ALGEBRA I - K6

A/4

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 4 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

$$
\left(I_n \; A^{-1}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{cccccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-\frac{1}{n+1}, & 1-\frac{2}{n+1}, & 1-\frac{3}{n+1}, & \ldots, & 1-\frac{n}{n+1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-\frac{2}{n+1}, & 2-2\cdot\frac{2}{n+1}, & 2-2\cdot\frac{3}{n+1}, & \ldots, & 2-2\cdot\frac{n}{n+1} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-\frac{3}{n+1}, & 2-3\cdot\frac{2}{n+1}, & 3-3\cdot\frac{3}{n+1}, & \ldots, & 3-3\cdot\frac{n}{n+1} \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1-\frac{n-1}{n+1}, & 2-(n-1)\frac{2}{n+1}, & 3-(n-1)\frac{3}{n+1}, & \ldots, & (n-1)-(n-1)\frac{n}{n+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{n+1}, & \frac{2}{n+1}, & \frac{3}{n+1}, & \ldots & \frac{n}{n+1}
\end{array}\right)
$$

$i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

$$
\left(A^{-1}\right)_{ij} = a_{ij} = \min\{i, j\} - i \cdot \frac{j}{n+1} = \min\{i, j\} \cdot \left(1 - \frac{\max\{i, j\}}{n+1}\right)
$$

$$
\left(A^{-1}\right)_{nj} = a_{nj} = \frac{j}{n+1}
$$

03. 11. 2005 Th
PETER ČERNO

LINEÁRNA ALGEBRA
ÚLOHA: ROZDELENIE POKLADU

OZNAČME SI PIRÁTOV $P_1, P_2, \dots, P_5$

UVAŽUJME NAJSKÔR 2 PIRÁTOV P_4, P_5

BEZ OHĽADU NA TO, AKÉ ROZDELENIE NAVRHNE PIRÁT P_4, PIRÁT P_5 BUDE HLASOVAŤ PROTI → A TÝM ZÍSKA ∀ PENIAZE.
KEBY PIRÁT P_4 NAVRHOL ROZDELIŤ POKLAD TAK, ŽE PIRÁTOVI P_5 DÁ VŠETKO, BUDE P_5 TIEŽ HLASOVAŤ PROTI
(POSLEDNÁ PRIORITA - ZABIŤ ČO NAJVIAC PIRÁTOV)
P_4 TAK Č ONAK NEPREŽIJE, P_5 PREŽIJE

UVAŽUJME 3 PIRÁTOV P_3, P_4, P_5

P_3 NAVRHNE ROZDELENIE, P_4 HLASUJE VŽDY ZA (CHCE PREŽIŤ) → NÁVRH PRIJATÝ
⇒ P_3 ZÍSKA VŠETKO, P_4 A P_5 NIČ (VIĎ PRÍPAD P_4, P_5)
! VŠETCI PIRÁTI PREŽIJÚ !

UVAŽUJME 4 PIRÁTOV P_2, P_3, P_4, P_5

P_2 NAVRHNE ROZDELENIE
P_3 HLASUJE VŽDY PROTI - PRETOŽE POKIAĽ BY PIRÁT P_2 NEPREŽIL, ZÍSKAL BY VŠETKO (2. PRIORITA)
+ NAVYŠE CHCE UROBIŤ ČO NAJVIAC ŠKODY (3. PRIORITA)
P_4, P_5 HLASUJÚ ZA IBA KEĎ MAJÚ ASPOŇ 1\$ KAŽDÝ (2. PRIORITA)
KEBY MAL NAPR. P_4 ZÍSKAŤ 0\$, RADŠEJ HLASUJE PROTI A ZABIJE PIRÁTA P_2 (3. PRIORITA); 0\$ ZÍSKA TAK Č TAK
P_2 PRETO NAVRHNE ROZDELENIE TAKÉ, ŽE P_3 ZÍSKA 0\$, P_4 A P_5 1\$, ZVYŠOK SI NECHÁ ...

! OPÄŤ VŠETCI PREŽIJÚ !

NA 2. STRANE →

UVAŽUJME VŠETKÝCH 5 PIRÁTOV $P_1, \dots, P_5$

PIRÁT P_1 NAVRHNE ROZDELENIE.
POTREBUJE ZÍSKAŤ 3 HLASY (VRÁTANE SVOJHO)

P_2 HLASUJE ZA, IBA KEĎ MU P_1 NAVRHNE ASPOŇ 99\$ (NEMÔŽE ZÍSKAŤ VIAC) - PRIORITA 2

P_3 HLASUJE ZA, IBA KEĎ MU P_1 NAVRHNE ASPOŇ 1\$ (INAK NEZÍSKA VIAC - PRIORITA 2)

P_4, P_5 HLASUJÚ ZA, IBA KEĎ IM P_1 NAVRHNE ASPOŇ 2\$
KEBY P_1 NAVRHOL NAPR. PIRÁTOVI P_4 MENEJ AKO 2\$, POTOM HLASUJE PROTI (3. PRIORITA), PRETOŽE KEĎ P_1 ZOMRIE, ZÍSKA 1\$ (VIĎ PRÍPAD 4 PIRÁTOV P_2, P_3, P_4, P_5)
PODOBNE P_5 ...

PRETOŽE P_1 POTREBUJE ZÍSKAŤ 2 HLASY (OKREM SVOJHO) JE PRE NEHO NAJVÝHODNEJŠIE NAVRHNÚŤ PREROZDELENIE:

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ZÍSKAJÚ POSTUPNE (97\$, 0\$, 1\$, 2\$, 0\$)
POPR. (97\$, 0\$, 1\$, 0\$, 2\$).

! OPÄŤ VŠETCI PREŽIJÚ !

04.11.2005 Fr
PETER ČERNO

HOMEWORK: LINEÁRNA ALGEBRA I

ZADANIE (ZOVŠEOBECNENÉ):

MÁME n ODSÚDENCOV ($n \geq 2$) ZORADENÝCH ZA SEBOU

1. 2. 3. ... n.

i-TY ODSÚDENEC VIDÍ NA $i+1, i+2, \dots, n$-TÉHO.

NA HLAVY IM DÁME KLOBÚKY – KAŽDÝ KLOBÚK MÔŽE MAŤ 1 Z k FARIEB – OZN. SI FARBY $0, 1, 2, \dots, k-1$.

POČNÚC 1. ODSÚDENCOM, KAŽDÝ POVIE NEJAKÚ FARBU (TJ. ČÍSLO $0, 1, \dots, k-1$) — KEĎ SA TRAFÍ, PREŽIJE; INAK ZAHYNIE.

STRATÉGIA: NECH MAJÚ KLOBÚKY FARBY $a_1, a_2, \dots, a_n$
i-TY ODSÚDENEC MÁ KLOBÚK S FARBOU $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

PRVÝ POVIE FARBU $f_1 := \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) \bmod k$ [POČÍTAME AKOBY V $\mathbb{Z}_k$]

(TO MÔŽE, PRETOŽE VIDÍ KLOBÚKY ODSÚDENCOV $2, 3, \dots, n$)

PRVÝ NEMÁ ZAISTENÉ, ŽE PREŽIJE...

DRUHÝ POVIE FARBU $f_2 := \left[f_1 - \left(\sum_{i=3}^{n} a_i\right)\right] \bmod k$

ZREJME $f_1 - \left(\sum_{i=3}^{n} a_i\right) \equiv \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) - \left(\sum_{i=3}^{n} a_i\right) \equiv a_2 \pmod{k}$

TAKŽE DRUHÝ POVIE FARBU SVOJHO KLOBÚKA $\rightarrow$ PREŽIJE

...

URČIME f_i PRE $i > 2$. TJ. FARBU f_i, KTORÚ POVIE i-TY ODSÚDENEC.
VIEME, ŽE $f_1 = \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) \bmod p$, $f_2 = a_2$, $f_3 = a_3$, ..., $f_{i-1} = a_{i-1}$. (INDUKČ. PR.)

STAČÍ PRETO POLOŽIŤ $f_i := \left(f_1 - f_2 - f_3 - \dots - f_{i-1} - \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k\right)\right) \bmod k$

PRETOŽE $f_1 - \left(\sum_{k=2}^{i-1} f_k\right) - \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k\right) \equiv \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=2}^{i-1} a_k\right) - \left(\sum_{k=i+1}^{n} a_k\right) \equiv a_i \pmod{k}$

TJ. $f_i = a_i$ (PRE $\forall i \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$)

TAKŽE AŽ NA PRVÉHO ODSÚDENCA, POVEDIA VŠETCI FARBU SVOJHO KLOBÚKA $\Rightarrow$ $n-1$ URČITE PREŽIJE.

NA RIEŠENIE PÔVODNEJ ÚLOHY STAČÍ POLOŽIŤ
$n = 50$, $k = 2$ $\Rightarrow$ TJ. POČÍTAME V $\mathbb{Z}_2$.

1/1

17.11.2005 Th
PETER ČERNO

HOMEWORK: LINEÁRNA ALGEBRA I

ZADANIE:
MÁME 16 DUKÁTOV - KAŽDÝ JE Z JEDNEJ STRANY BIELY A Z DRUHEJ ČIERNY. NA STOLE JE 10 OTOČENÝCH ČIERNOU STRANOU NAHOR A 6 JE BIELOU STRANOU NAHOR.
SO ZAVIAZANÝMI OČAMI MÁME ZOSTROJIŤ 2 KÔPKY TAK, ABY V KAŽDEJ BOL ROVNAKÝ POČET BIELYCH DUKÁTOV.

RIEŠENIE:
ZOBERIEME ĽUBOVOĽNÝCH ŠESŤ DUKÁTOV, OTOČÍME ICH A PREHLÁSIME ZA 1 KÔPKU. 2. KÔPKU BUDÚ TVORIŤ ZVYŠNÉ DUKÁTY.

DÔKAZ. POVEDZME, ŽE SME ZOBRALI a BIELYCH A b ČIERNYCH DUKÁTOV $(a+b=6)$.
OTOČÍME ICH → DOSTANEME b BIELYCH A a ČIERNYCH DUKÁTOV.
V 2. KÔPKE MÁME $6-a$ BIELYCH, ZVYŠNÉ SÚ ČIERNE.
ĽAHKO NAHLIADNUŤ, ŽE $6-a=b$. $\square$

20.11.2005 S4
PETER ČERNO

HOMEWORK: LINEÁRNA ALGEBRA I

ZADANIE: MÁTE 2 ZÁPALNÉ ŠNÚRY, KAŽDÁ Z NICH ZHORÍ ZA HODINU, ALE OBE HORIA NEROVNOMERNE.
MÁME ODSTOPOVAŤ 45 min.

RIEŠENIE:

1) 1. ŠNÚRU ZAPÁLIME Z OBOCH KONCOV +

2. ŠNÚRU ZAPÁLIME Z JEDNÉHO KONCA

2) 1. ŠNÚRA VYHORÍ ZA $\frac{1}{2}$ HODINY.
V MOMENTE, KEĎ DOHORÍ, ZAPÁLIME 2. KONIEC 2. ŠNÚRY

DRUHÁ ŠNÚRA DOHORÍ ZA 15 min.

$\Rightarrow$ SPOLU MÁME 45 min.