Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Datové struktury II

Peter Černo, 2010
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Václav Koubek, DrSc.
E-mail: Vaclav.Koubek@mff.cuni.cz

Anotace: Přednáška navazuje na přednášku Datové struktury I. Bude věnována dvěma datovým strukturám - binárním vyhledávacím stromům a haldám. Seznamíme se se samoupravujícími strategiemi a s obecnou metodou dynamizace datových struktur. Na závěr popíšeme použití stromu pro řešení problému UNION-FIND.

Sylabus:

1. Binární vyhledávací stromy. Srovnání různých verzí vyvážených binárních vyhledávacích stromů. Vyvažování shora dolů v červeno-černých stromech. Konstrukce optimálního binárního vyhledávacího stromu a použití kvadratického programování. Aplikace na statický případ slovníkového problému.

2. Samoupravující datové struktury – seznamy a metoda MFR, splay stromy.

3. Amortizované počty aktualizačních operací pro propojené (a, b)-stromy.

4. Trie, komprimované trie, reprezentace řídkých matic a téměř konstantních polí.

5. Semidynamizace a dynamizace statických struktur pro řešení vyhledávacích problémů.

6. Problém UNION-FIND.

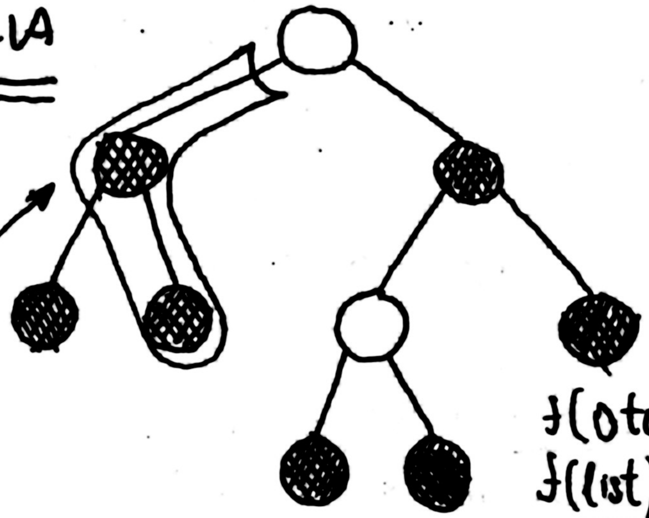
Cíl předmětu: Naučit základní datové struktury a algoritmy včetně teoretické analýzy jejich chování.

10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

HODNOSTNÁ FUNKCIA

$f(v)=2$



ČERV-ČIERNY STR. $\Leftrightarrow$ HODNOSTNÁ FUNKCIA

f NEKLESÁ ...
RASTIE NAJVIAC O 1

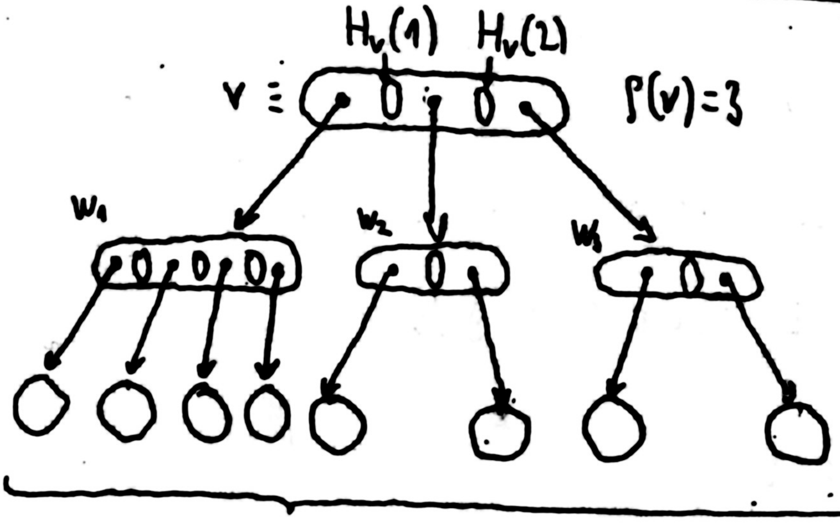
$f(ded(v)) > f(v)$

$f(otec(list)) = 1$
$f(list) = 0$

T ČERVENO-ČIERNY $\Rightarrow$ $f(v) :=$ POČET ČIERNYCH VRCHOLOV NA NIEKTOREJ CESTE Z NEJAKÉHO SYNA v DO LISTU

T, HODNOSTNÁ FUNKCIA f $\Rightarrow$ v ($\neq$ koreň) OFARBÍME ČIERNE $\Leftrightarrow$ $f(v) < f(otec(v))$

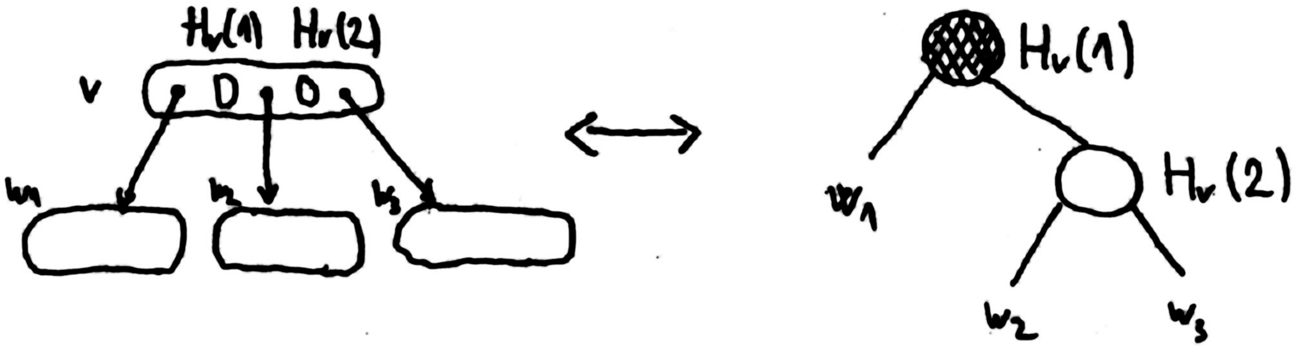
(2,4)-STROM REPR. S $\longleftrightarrow$ ČERVENO-ČIERNY STROM REPR. $S \setminus \max S$
$2 \leq \rho(v) \leq 4$



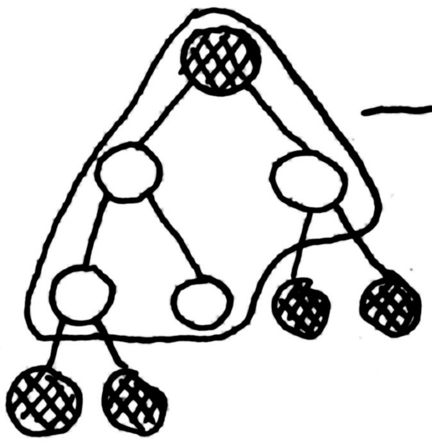
$H_v(i) = \max S_{w_i}$

V (a,b)-STROMOCH JE MNOŽINA S REPREZENTOVANÁ V LISTOCH!

S_v KĽÚČE $\rightarrow$ V BIN. STR. VO VNÚT. VRCHOLOCH!

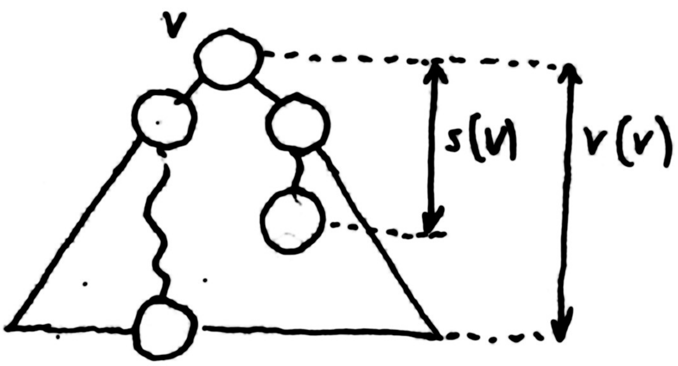


ZOVŠEOBECNENÉ ČERVENO-ČIERNE STROMY



→ IZOMORFNÝ S NEJAKÝM STROMOM ∈ VOPRED DEFINOVANEJ MNOŽINY ÚPLNÝCH BINÁRNYCH STROMOV
↓ MOŽNO DEFINOVAŤ PRE PRE KAŽDÚ DVOJICU (a,b) T.Ž.
$1 < a \quad 2a-2 < b$

POLOVYVÁŽENÝ T : $\boxed{\forall v : \; v(v) \leq 2s(v)}$!!



ČERVENO-ČIERNY T ⇒ POLOVYVÁŽENÝ :

$$\forall v : \; f(v) \leq s(v) \leq v(v) \leq 2f(v)$$

↑
HODNOSTNÁ FUNKCIA

10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

POLOVYVÁŽENÝ ⇒ HODNOSTNÁ FUNKCIA f:

f DEFINUJEME OD KOREŇA INDUKCIOU TAK, ABY

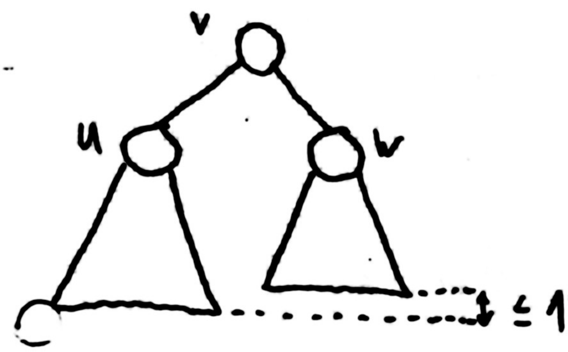
$$\forall v: \left\lceil \frac{v(v)}{2} \right\rceil \le f(v) \le s(v)$$

STAČÍ:

$$f(w) := \max\left\{ f(v)-1,\ \left\lceil \frac{v(w)}{2} \right\rceil \right\}$$

+ OVERIŤ 3 PODMIENKY HODNOSTNEJ FUNKCIE!

KAŽDÝ AVL-STROM JE ČERVENO-ČIERNY

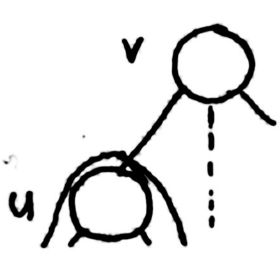


$v(u) \le 2s(u)$ &
$v(w) \le 2s(w)$

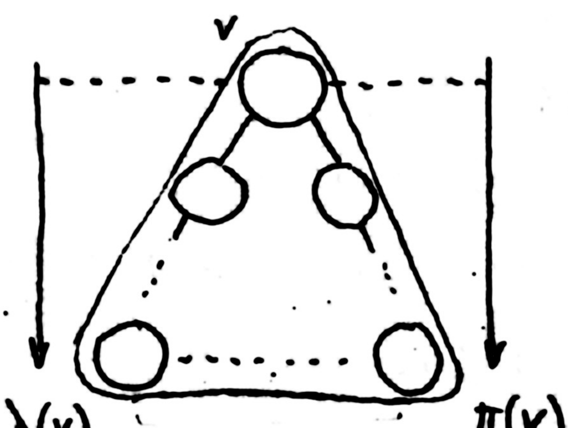
$\Rightarrow v(v) \le 2s(v)$

INDUKCIOU

ČERVENO-ČIERNE STROMY
VYVAŽOVANIE ZHORA NADOL

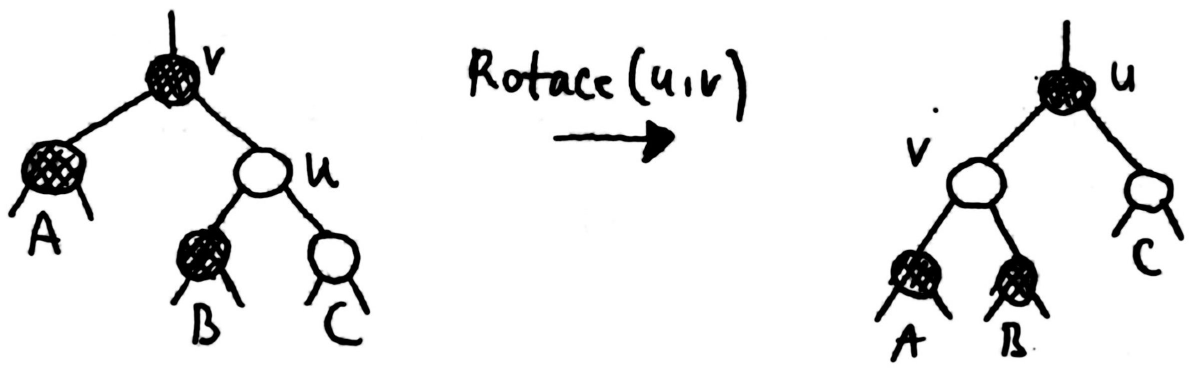


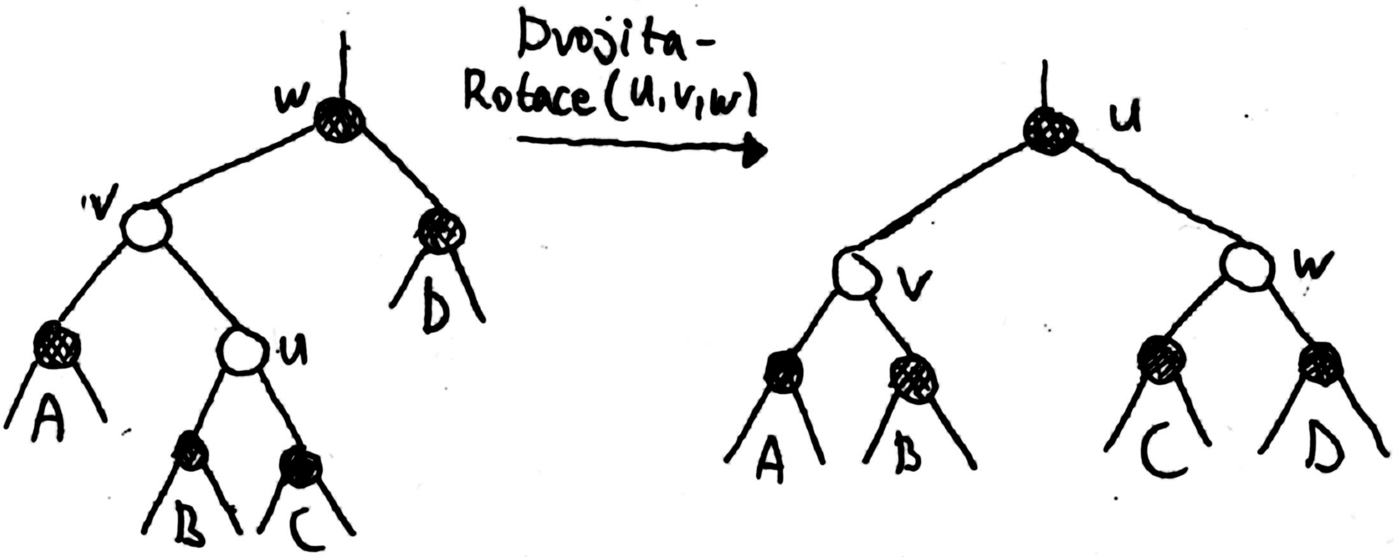
$\lambda(u) = \lambda(v)$
$\pi(u) = key(v)$



$\lambda(\text{koreň}) = -\infty$
$\pi(\text{koreň}) = +\infty$

$S_v = S \cap (\lambda(v), \pi(v))$





ZACHOVÁVAJÚ $\lambda(t), \pi(t)$ PRE $t \neq u, v, w$

INSERT

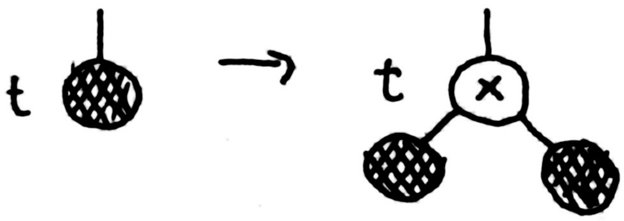
ALGORITMUS ZAISTÍ, ABY PRACOVNÝ VRCHOL t SPĹŇAL INVARIANT :

1) t JE ČIERNY T.Ž.:
   a) BUĎ t JE KOREŇ,
   b) ALEBO JEHO OTEC / BRAT OTCA JE ČIERNY
2) $\lambda(t) < x < \pi(t)$

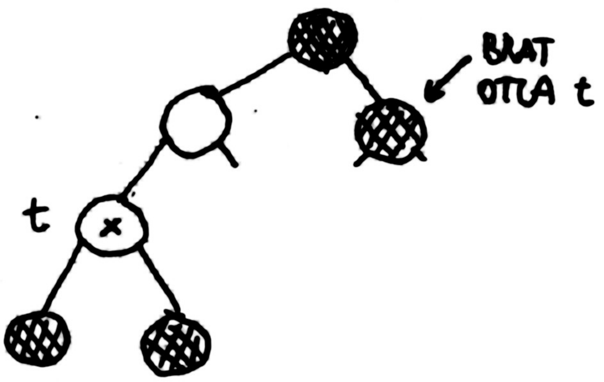
10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

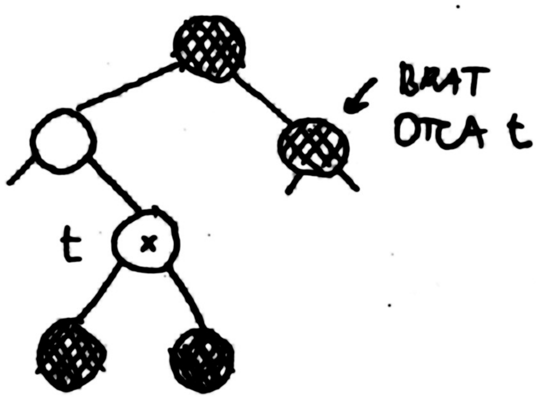
INSERT(x) ... ZISTÍME, ČI x JE UŽ REPREZENT. V T, AK NIE → NÁJDEME LIST t SPĹŇAJÚCI INVARIANT



PRÍPADY:



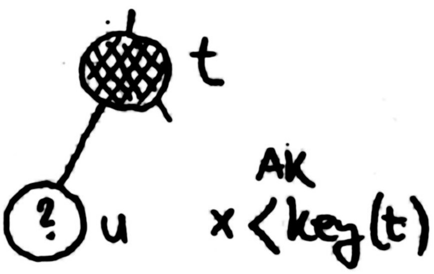
Rotace

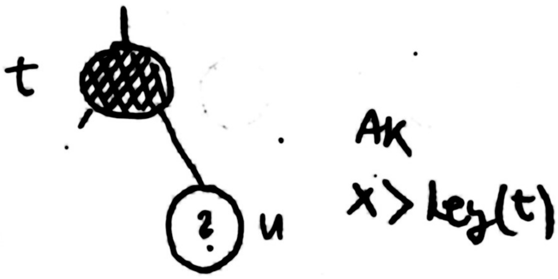


Dvojita-Rotace

VYHĽADÁVACÍ POSTUP ... ZACHOVÁVAJÚCI INVARIANT

NECH t SPĹŇA INVARIANT, HĽADÁME x





a) u JE VN. VRCHOL A key(u) = x → KONIEC

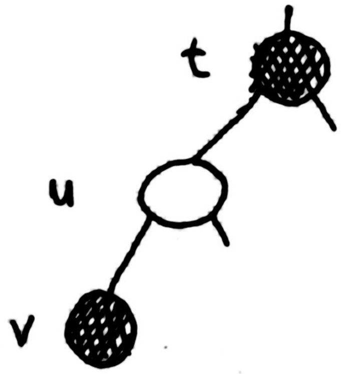
b) u JE LIST ⇒ u JE ČIERNY

c) u JE ČIERNY VN. VRCHOL A KEY(u) ≠ x

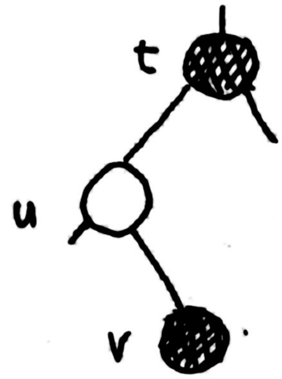
b), c) $\Rightarrow$ u SPĹŇA INVARIANT, $t \leftarrow u$

TREBA OŠETRIŤ PRÍPAD:

d) u JE ČERVENÝ VN. VRCHOL A key(u) ≠ x :



AK x < key(u)

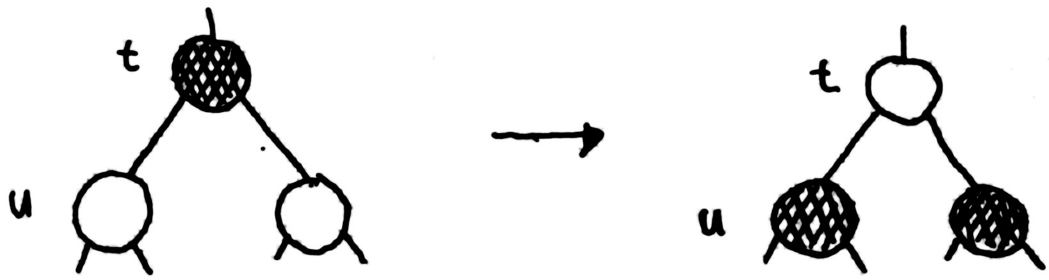


AK x > key(u)

d1) KEĎ v NIE JE LIST A key(v) = x → KONIEC

d2) KEĎ v JE LIST ALEBO
KEĎ v NIE JE LIST A key(v) ≠ x, POTOM:

- AK BRAT u JE ČIERNY → t ← v A KONIEC, PRETOŽE v SPĹŇA INVARIANT
- AK BRAT u JE ČERVENÝ, POTOM:



AK OTEC t JE ČIERNY →
t ← v A KONIEC
INAK → Rotace / Dvojita-Rotace
t ← v A KONIEC

10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

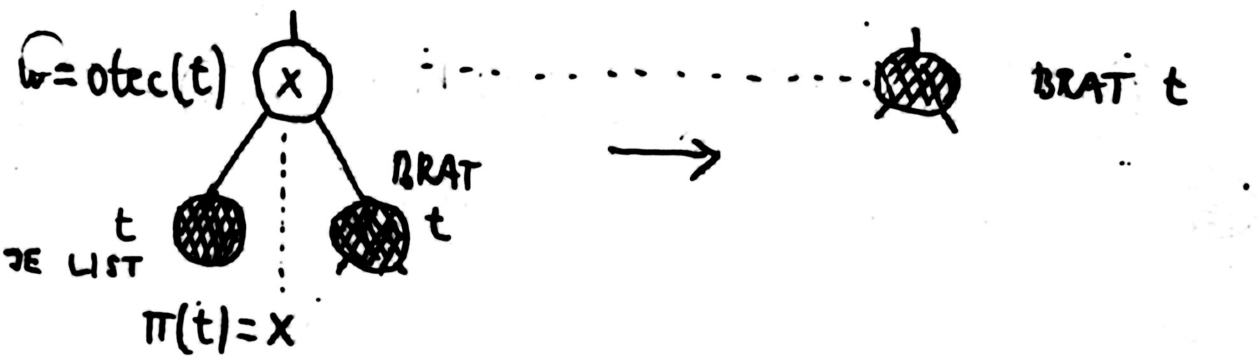
DELETE

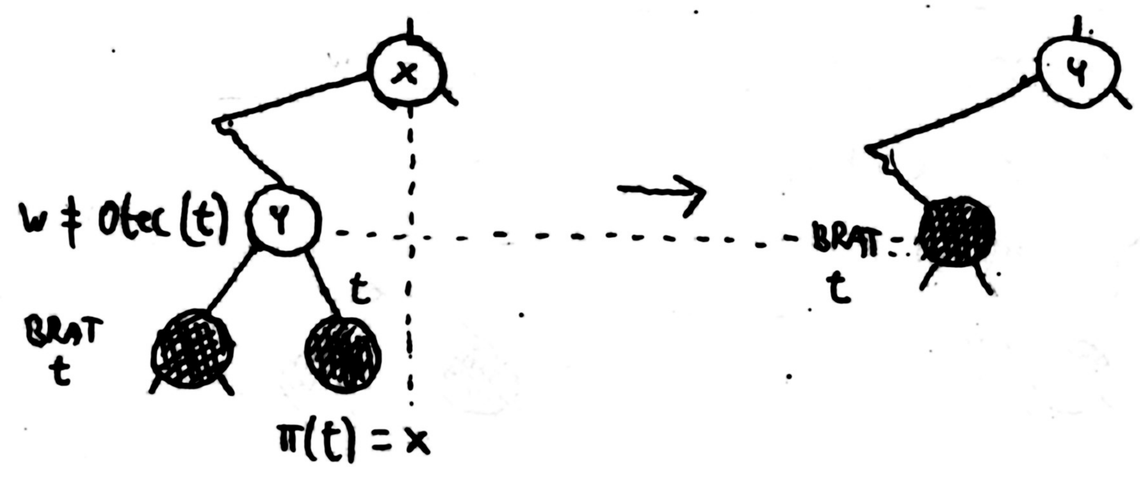
INVARIANT PRE PRACOVNÝ VRCHOL t:

1) t JE ČIERNY VRCHOL RÔZNY OD KOREŇA
2) $otec(t)$ JE ČERVENÝ
3) $hot = false \Rightarrow$ EŠTE SME NENAŠLI VRCHOL w V STROMU T TAKÝ, ŽE $key(w) = x$, A PLATÍ $\lambda(t) < x < \pi(t)$
4) $hot = true \Rightarrow \pi(t) = x = key(w)$

AK t JE <u>LIST</u>:

a) AK $hot = false \rightarrow$ KONIEC, $x \notin$ REPR. MNOŽINY
b) AK $hot = true \rightarrow$





PROBLÉM 1: NÁJSŤ t SPĹŇAJÚCI INVARIANT

PROBLÉM 2: PRE u SPĹŇAJÚCI INVARIANT NÁJSŤ NOVÝ VRCHOL t V NIŽŠEJ HLADINE, KTORÝ SPĹŇA INVARIANT. (u NIE JE LIST)

RIEŠENIE PROBLÉMU 1:

PREDPOKLAD: SYNOVIA KOREŇA NIE SÚ LISTY.

a) KOREŇ r REPREZENTUJE x:

POTOM $hot \leftarrow true$, $w \leftarrow r$, $t \leftarrow lavy(r)$

b) KOREŇ r NEREPREZENTUJE x:

POTOM $hot \leftarrow false$,

- KEĎ $x < key(r)$, POTOM $t \leftarrow lavy(r)$
- INAK $t \leftarrow pravy(r)$

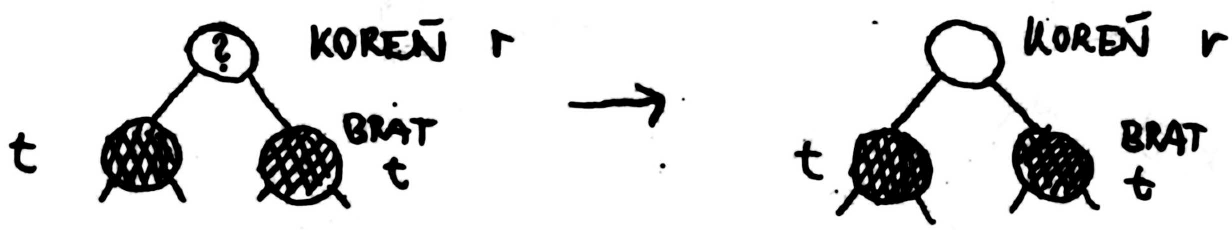
AK $x < key(r)$

AK $x > key(r)$

---

a) PREDPOKLADAJME, ŽE t JE ČIERNY:

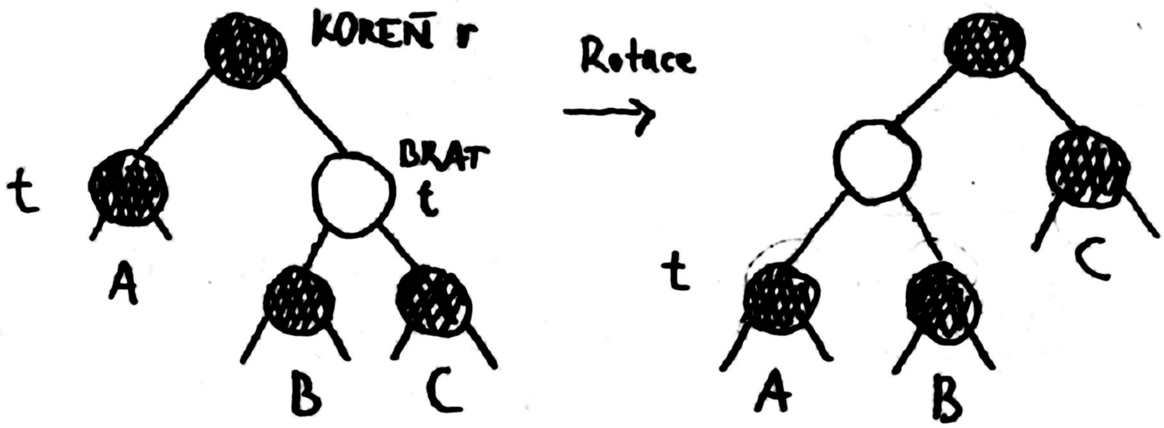
- AK BRAT t JE ČIERNY:



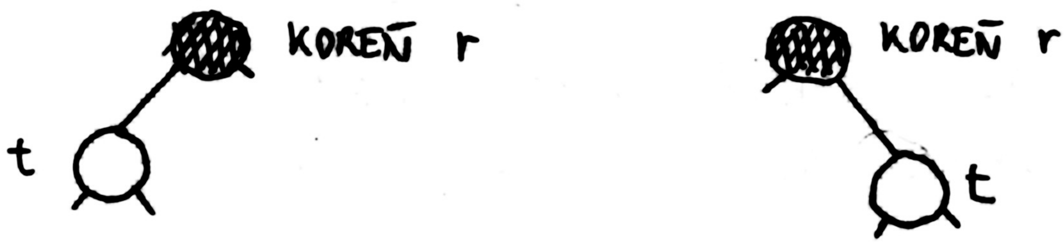
10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

- AK BRAT t JE ČERVENÝ:



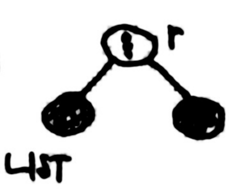
b) VRCHOL t JE ČERVENÝ:



AK $x < key(r)$ AK $x > key(r)$

- KEĎ $key(t) = x$, POTOM:
  hot ← true, $w \leftarrow t$, $t \leftarrow lavy(t)$, KONIEC
- KEĎ $x < key(t)$, POTOM $t \leftarrow lavy(t)$, KONIEC
- KEĎ $x > key(t)$, POTOM $t \leftarrow pravy(t)$, KONIEC

V PRÍPADE, ŽE NIEKTORÝ SYN KOREŇA JE LIST, VYKONÁME OPERÁCIU DELETE PRIAMO:

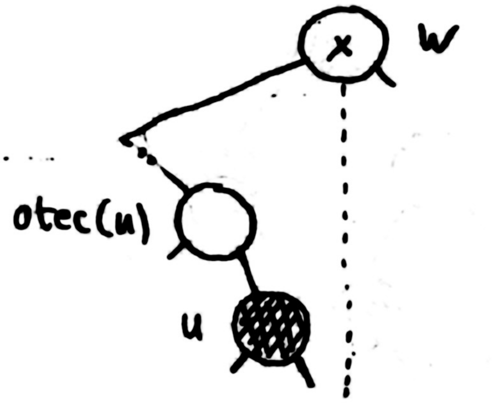
a)


b)


... INÉ MOŽNOSTI NIE SÚ ...!!!

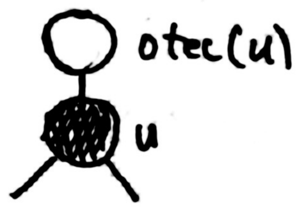
RIEŠENIE PROBLÉMU 2 :

1) KEĎ hot = true



POTOM $t \leftarrow$ pravý(u)

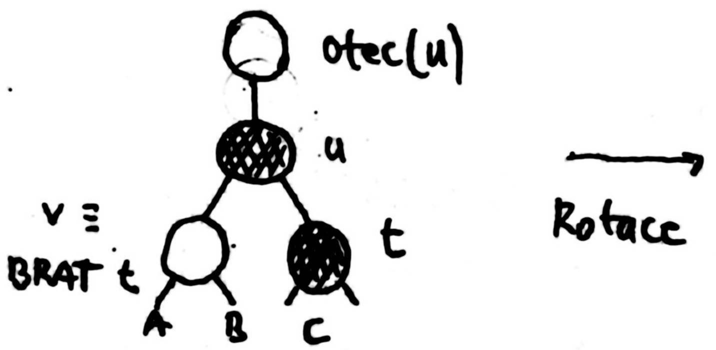
2) KEĎ hot = false

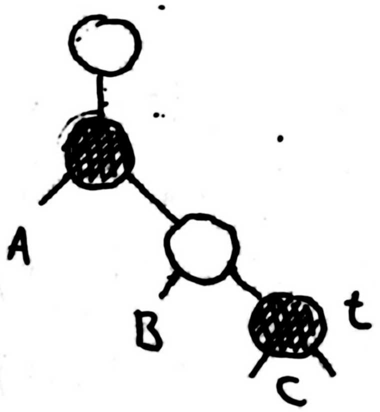


- KEĎ $x < key(u)$, POTOM $t \leftarrow$ ľavý(u)
- KEĎ $x > key(u)$, POTOM $t \leftarrow$ pravý(u)
- KEĎ $x = key(u)$, POTOM hot $\leftarrow$ true, $w \leftarrow u$, $t \leftarrow$ ľavý(u)

KEĎ t JE ČERVENÝ, POTOM $u \leftarrow t$, ZOPAKUJEME 1) ALEBO 2), A KONIEC.

NECH t JE ČIERNY :





- AK BRAT t JE ČERVENÝ

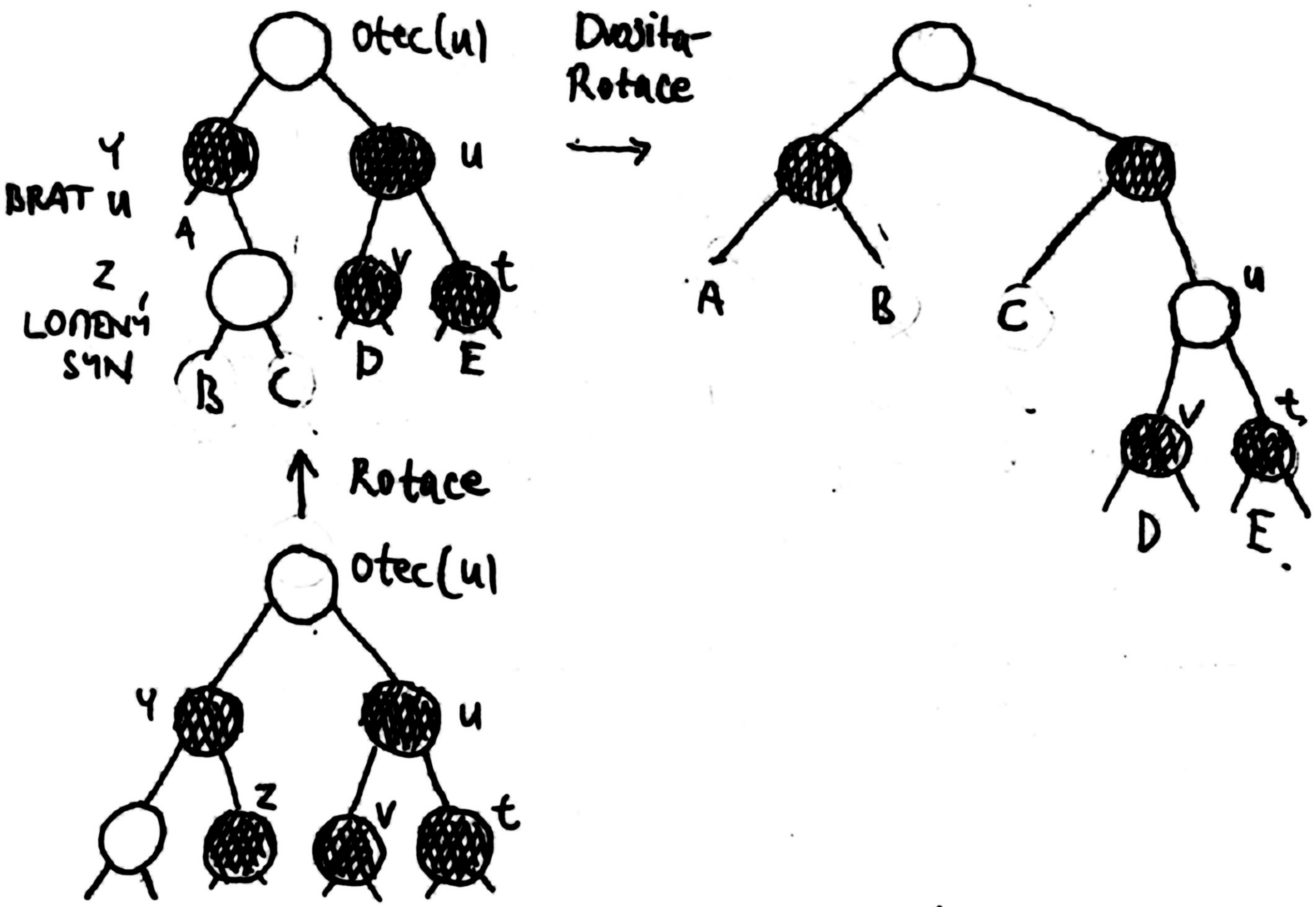
10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

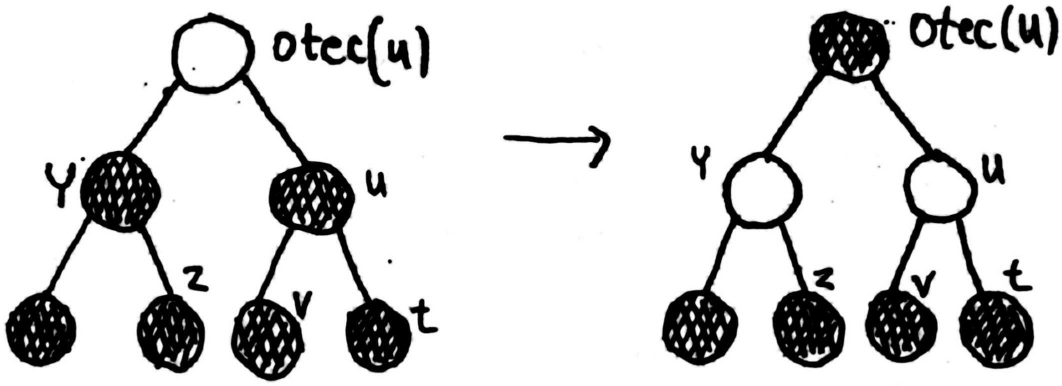
– PREDPOKLADAJME, ŽE $v \equiv$ (BRAT t) JE ČERNÝ.
z … LOMENÝ SYN y :

i)

ii)



iii)



RELAXOVANÉ STROMY

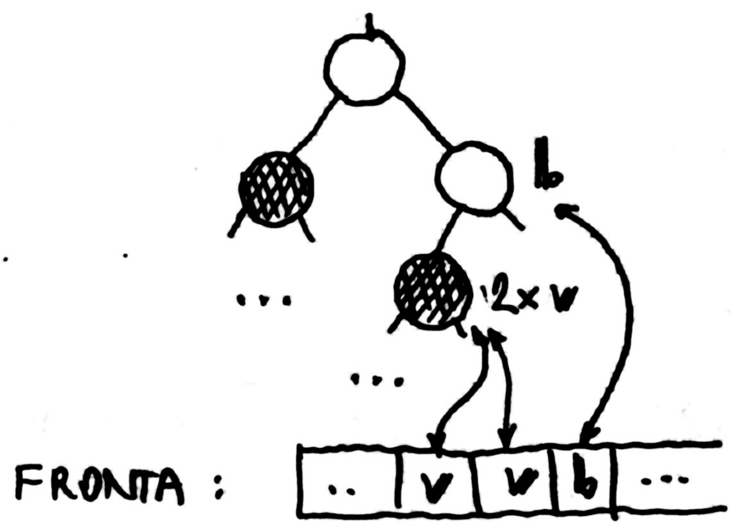
ČERVENO-ČIERNY STROM + FRONTA VYVAŽOVACÍCH POŽIADAVKOV (AK JE $\emptyset$ $\Rightarrow$ VYVÁŽENÝ Č.-Č. STROM)

PROCESY:
- UŽÍVATEĽSKÝ - MEMBER, INSERT, DELETE + PRIDÁVANIE POŽIADAVKOV DO FRONTY ...
- SPRÁVCOVSKÝ - BERIE VHODNÉ POŽIADAVKY Z FRONTY A VYKONÁVA ICH ...

POŽIADAVKY (NA VRCHOLE w):
- b - w JE ČERVENÝ A MÁ ČERVENÉHO OTCA
- v - w JE ČIERNY S VÁSOBNOSŤOU (k+1) KDE k JE CELKOVÝ POČET v NA w

POŽIADAVOK b MÔŽE BYŤ JEDINÝ A JE NEZLUČITEĽNÝ S INÝMI POŽIADAVKAMI ...

POŽIADAVKOV v MÔŽE BYŤ VIAC ...



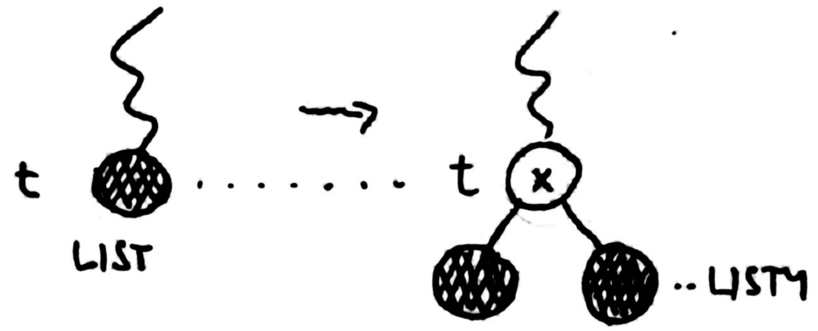
10.06.2010 Th.
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

MEMBER (x) ... KLASICKÉ VYHĽADÁVANIE x

INSERT (x) :

- KLASICKÉ VYHĽADÁVANIE x ... AK NAŠIEL, KONIEC.
- AK NENAŠIEL → SKONČIL V LISTE t :



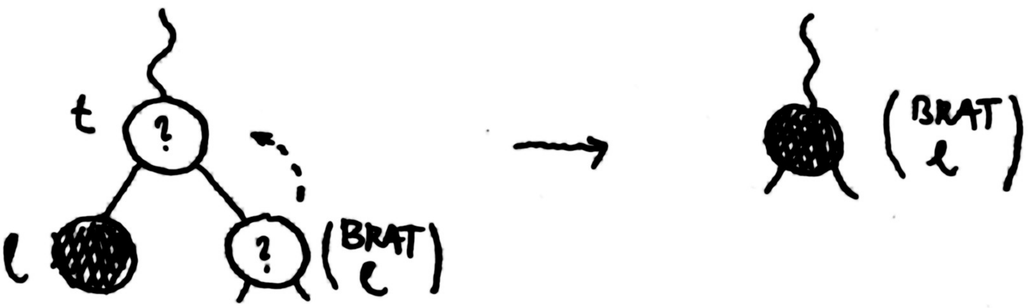
a) KEĎ t MAL POŽIADAVOK v :
POTOM ODSTRÁNI Z t 1 POŽIADAVOK v
A ZAFARBÍ t NA ČIERNO

b) KEĎ t NEMAL ŽIADEN POŽIADAVOK :
ZAFARBÍ t NA ČERVENO
AK otec(t) JE ČERVENÝ → VYTVORÍ POŽ. b

DELETE (x) :

- KLASICKÉ VYHĽADÁVANIE x ... AK NENAŠIEL, KONIEC.
- AK NAŠIEL →

NECH VRCHOL t A JEHO SYN l
MAJÚ BYŤ ODSTRÁNENÉ



- KEĎ t AJ (BRAT l) BOLI ČIERNE → NOVÝ POŽIADAVOK v
- POŽIADAVKY b SPOJENÉ S t & (BRAT l) SA RUŠIA
- (BRAT l) ZDEDÍ $\forall$ v SPOJENÉ S t

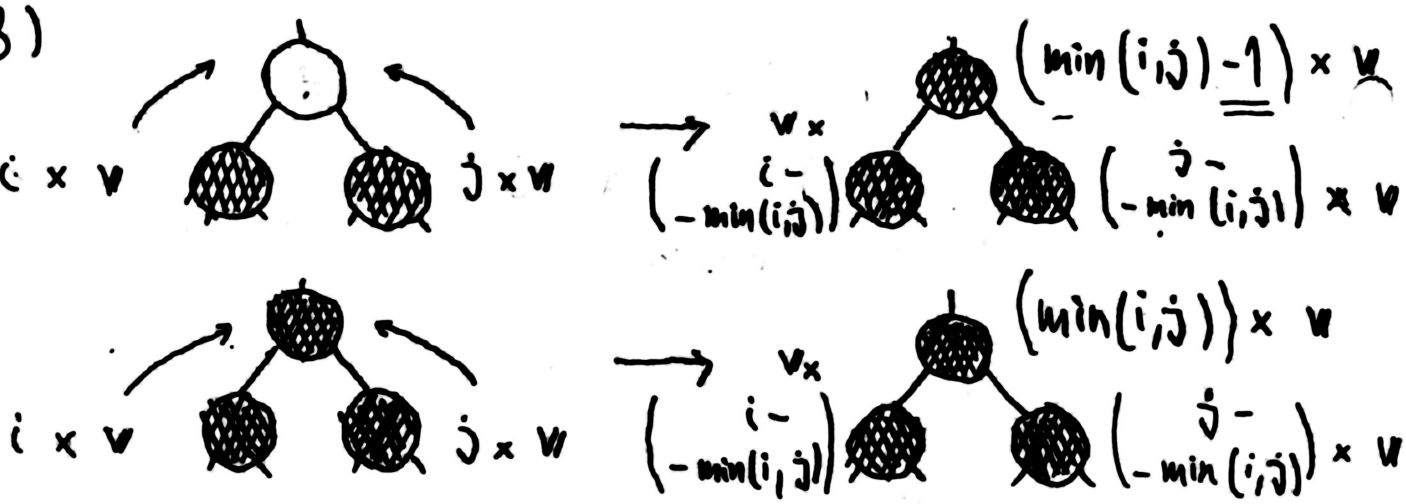
PRÁCA SPRÁVCOVSKÉHO PROCESU

VYKONÁ JEDNU Z NASLEDUJÚCICH AKCIÍ:

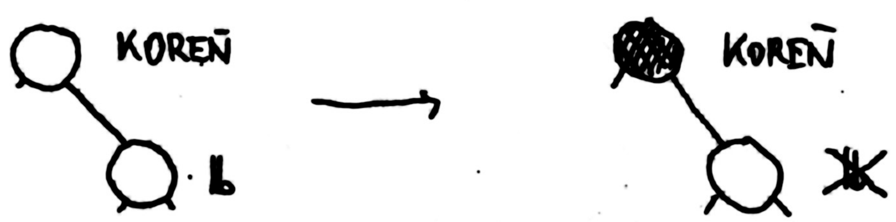
A1) ZRUŠÍ AKÝKOĽVEK POŽIADAVOK NA <u>KOREŇ</u>

A2) ZRUŠÍ b NA w, AK otec(w) JE ČIERNY.

A3)



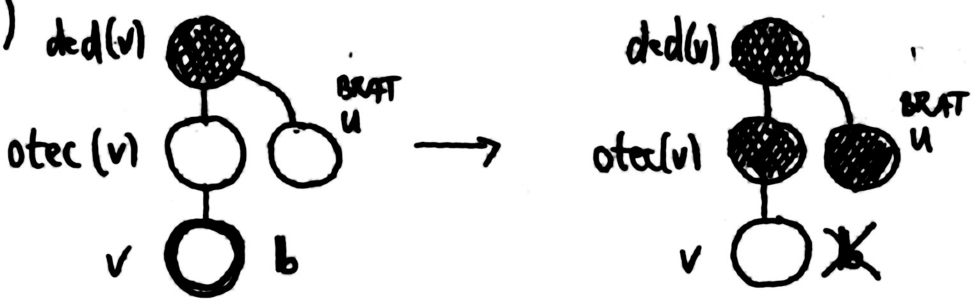
A4)



10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

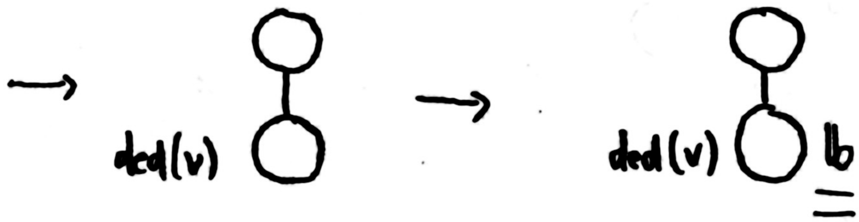
A5)



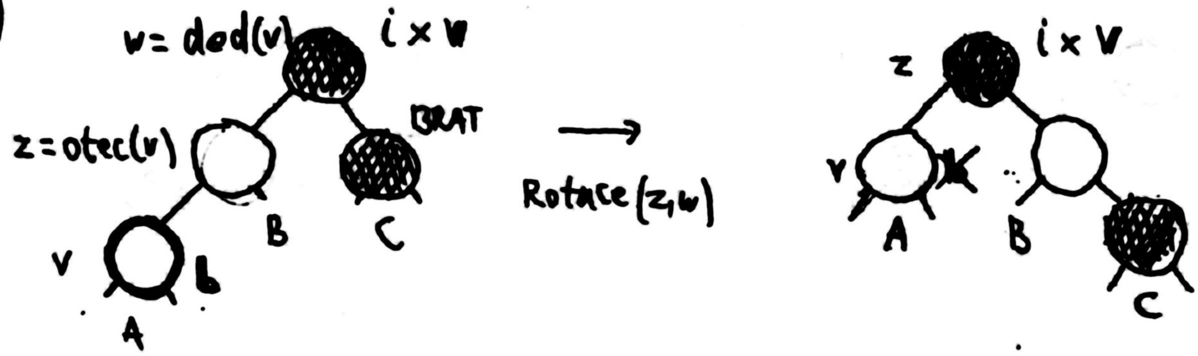
ODSTRÁNIME PRÍPADNÉ POŽIADAVKY b

a) ded(v) i × v, i > 0 → ded(v) (i−1) × v

b) ded(v) 0 × v → ded(v)

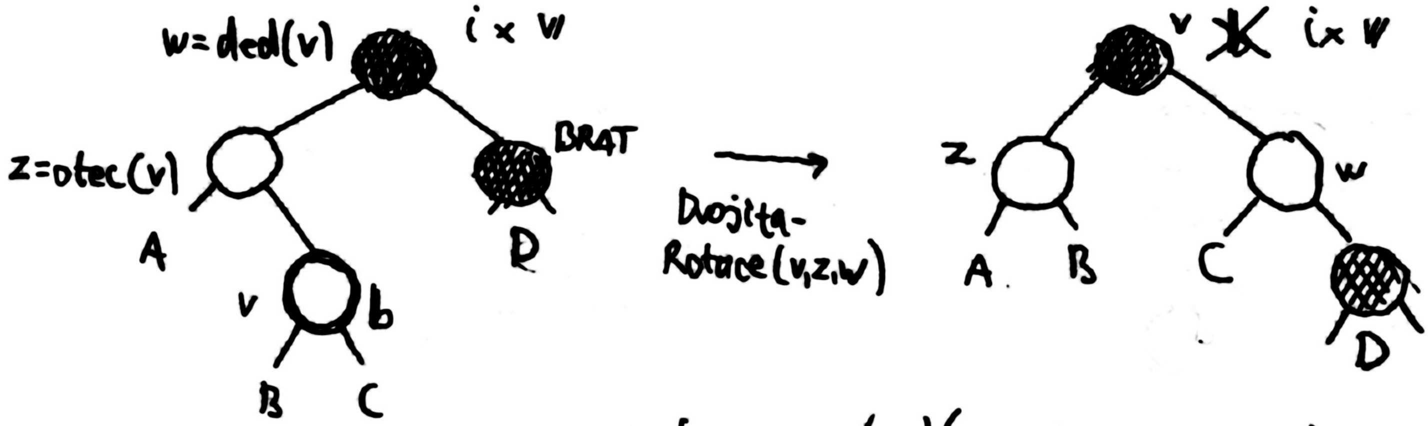


A6)



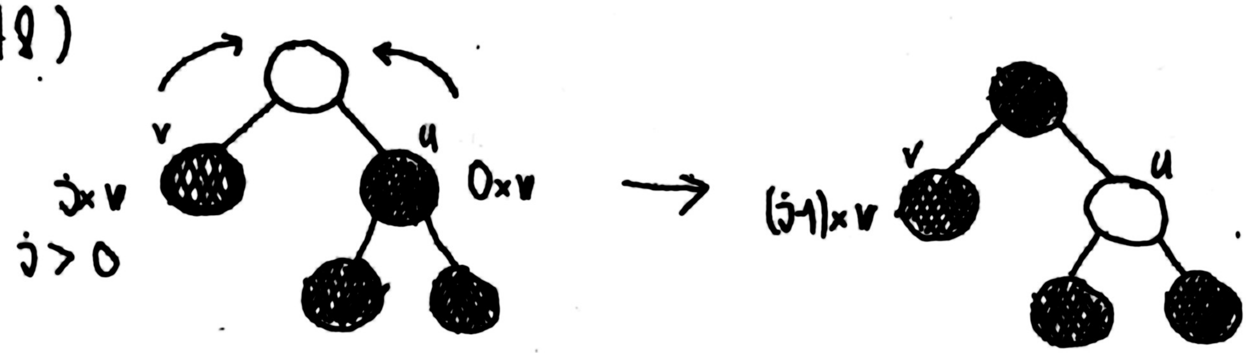
(z ZDEDÍ ∀ v VRCHOLU w)

A7) (AK v JE LOMENÝ ...)

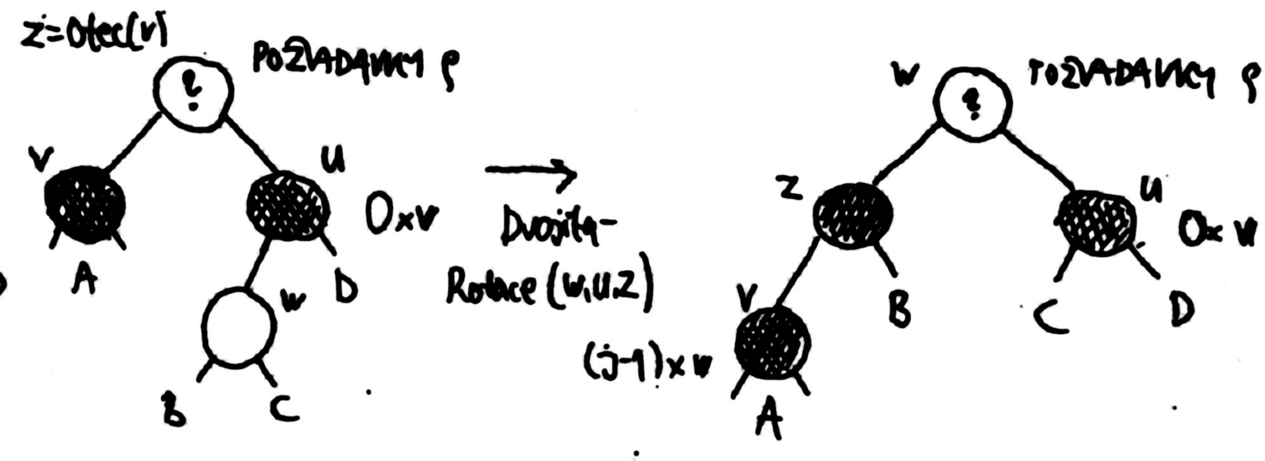


(V ZDEDÍ ∀ v VRCHOLU W.)

A8)



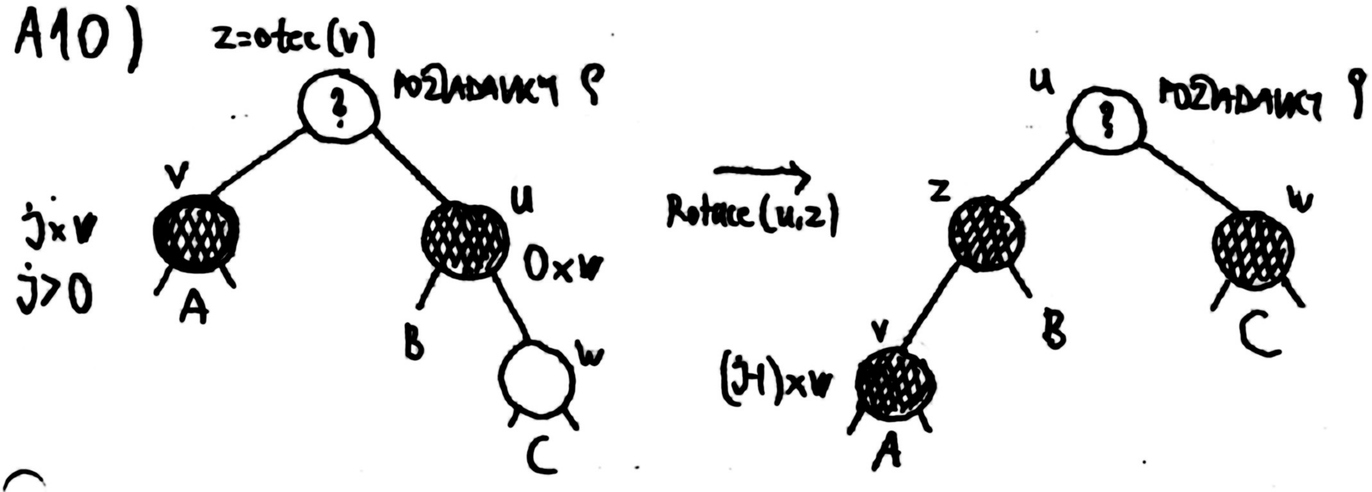
A9)



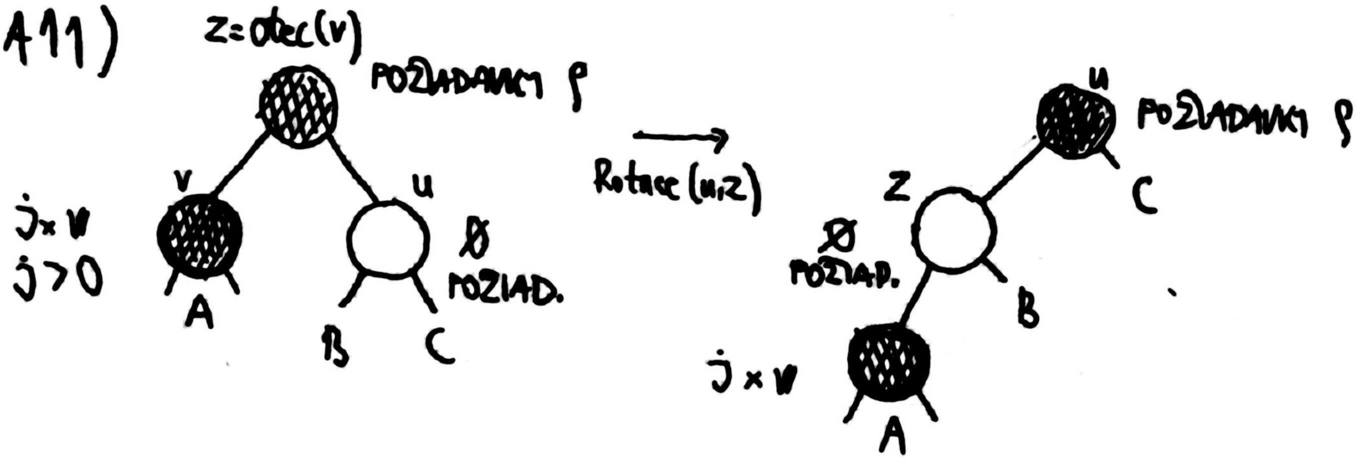
10.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

A10)



A11)



SPRÁVCOVSKÝ PROCES SA ROZHODUJE, ČI CHCE ODSTRÁNIŤ POŽADAVKY NA KOREŇ / POŽAD. b / POŽIAD. v

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ:

- POŽADAVOK b NA VRCHOL v V HĹBKE i ... +i
- POŽADAVOK v NA VRCHOL v V HĹBKE i, otec(v) JE ČERVENÝ ... +i
- POŽADAVOK v NA VRCHOL v V HĹBKE i, otec(v) JE ČERNÝ ... +i+2

OCENENIE FRONTY = $\sum$ OHODNOTENÍ $\forall$ POŽADAVKOV

KAŽDÁ AKCIA SPRÁV. PROCESU VEDE K ZNÍŽENIU ...

11.06.2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

NÁHODNÉ BINÁRNE VYHĽ. STROMY

$(x_1, \dots, x_n)$:

STROM REK. VOLANÍ ... JE IZOMORFNÝ S BIN. STROMOM:

QUICKSORT $((x_1, \dots, x_n)) \longleftrightarrow$ T: INSERT(x_1), ..., INSERT(x_n)

- PIVOT JE VŽDY 1. PRVOK!

VETA: PRI ROVNOMERNOM ROZDELENÍ DÁT:

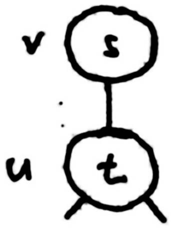
$$E(v(n)) = \alpha \ln(n) - \beta \ln(\ln(n)) + O(1)$$

$\alpha \doteq 4{,}31$
$\beta \doteq 1{,}95$

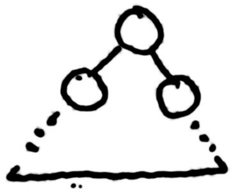
TREAP (TREE + HEAP)

$(U, \le)$, $S \subseteq U$, $s \in S \mapsto p(s)$ ... PRIORITA s
(PRAVDEPODOBNOSŤ DOTAZU NA s)

T:



$\Rightarrow p(s) \ge p(t)$



p NERASTIE

VETA: S; NAVZÁJOM RÔZNE PRIORITY: $\{p(s) \mid s \in S\}$

$\Rightarrow \exists!$ TREAP T REPR. S, p(s) (AŽ NA IZOMORFIZMUS)

(INDUKCIA PODĽA $|S|$) — JE TO IBA NUTNÁ PODMIENKA...

DEF.: S SPĹŇA PODMIENKU JEDNOZNAČNOSTI $\Leftrightarrow$

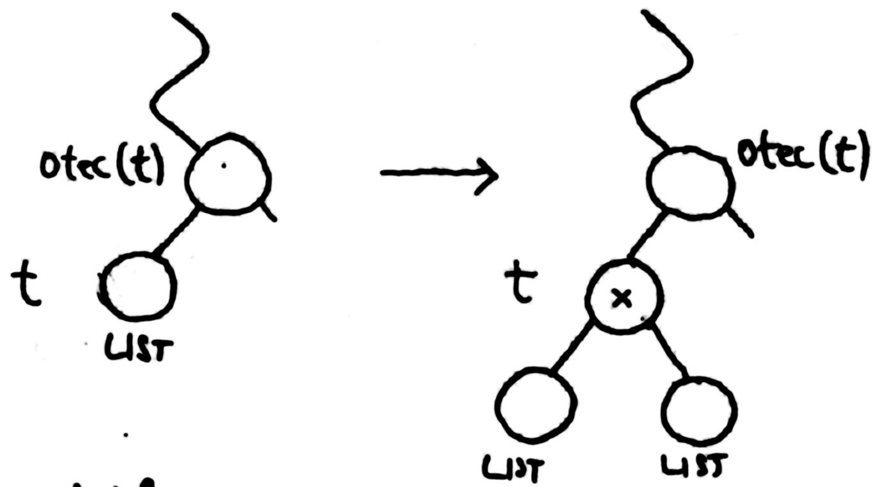
a) $S = \emptyset$, ALEBO

b) $\exists!\, s : p(s) = p_{max}$ & $S_{<p_{max}}$, $S_{>p_{max}}$ SPĹŇAJÚ

VETA : S, p SPĹŇA PODMIENKU JEDNOZNAČNOSTI $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists!$ TREAP REPREZENTUJÚCI S, p.

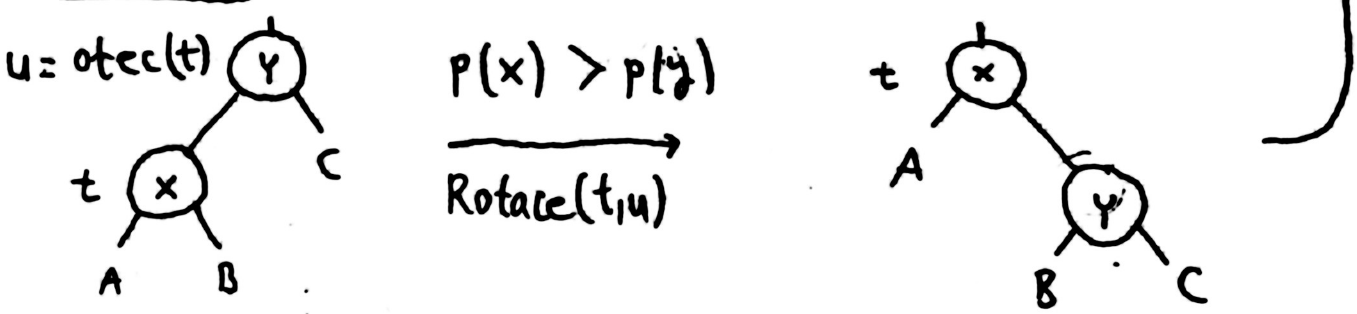
INSERT-TREAP $(x, p(x), T)$



PROPAGÁCIA NAHOR :

t

while :

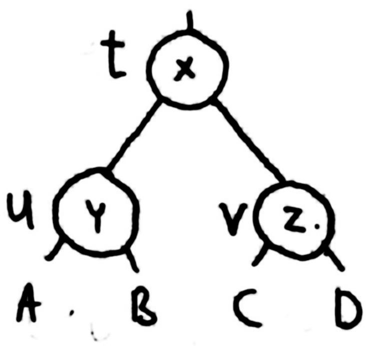


DELETE-TREAP (x, T)

PROPAGÁCIA NADOL :

t

- NÁJDI t : $key(t) = x$ →
- DOKEDY ŽIADEN ZO SYNOV t NIE JE LIST :



$p(y) \leq p(z)$ → Rotace (v, t)

$p(y) > p(z)$ → Rotace (u, t)

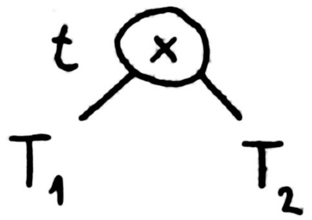
- VYMAŽ t ...

11. 06. 2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

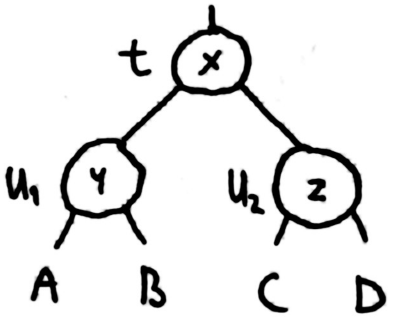
SPLIT-TREAP (x, T) ... $\equiv$ SPLIT(x)

JOIN3-TREAP $(T_1, x, p(x), T_2)$



$\longrightarrow$ **PROPAGÁCIA NADOL:** t

– DOKEDY $\exists$ SYN u VRCHOLU t T.Ž. $p(key(u)) > p(x)$



$\xrightarrow{p(y) \le p(z)}$ Rotace (u_2, t)

$\xrightarrow{p(y) > p(z)}$ Rotace (u_1, t)

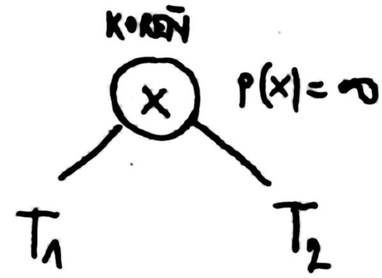
$p(x_n) \geq p(x_{n-1}) \geq \ldots \geq p(x_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ INSERT(x_1), ..., INSERT(x_n) $\rightarrow$ **TREAP**

PRE $x \notin S$:

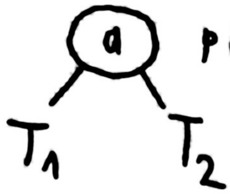
SPLIT-TREAP' (x, T)

- INSERT-TREAP $(x, +\infty, T)$:
- $T_1 \leftarrow$ lavy(koreň(T))
- $T_2 \leftarrow$ pravy(koreň(T))



◁ JOIN2 (T_1, T_2)

$\{$ $T \leftarrow$ JOIN3 $(T_1, a, +\infty, T_2)$:
DELETE (a, T)



$p(a) = +\infty$

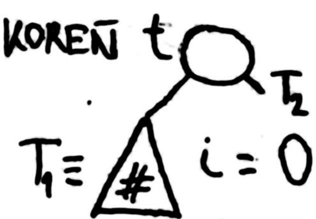
RANDOMIZOVANÝ TREAP : $p(x) \sim \text{Unif}(0,1)$

$\Rightarrow$ PRÍSL. TREAP MAJÚ ROVNOMERNÉ ROZDELENIE, OČAKÁVANÝ POČET ROTÁCII INSERT A DELETE ... 2.

$\boxed{\text{RANDOMIZOVANÝ BIN. VYHĽ. STROM}}$ (RBVS) :

a) BUĎ $S = \emptyset$, ALEBO

b) $|S| = n \geq 1$



$i = 0, \dots, n-1$ S PRAVDEP. $1/n$

& OBA PODSTROMY T_1, T_2 SÚ RANDOMIZOVANÉ

$n = \tau(t)$ ... POMOCNÁ PREMENNÁ

INSERT-RBVS (x, T) ... AK $x \notin S$

$\{$ S PRAVDEPODOBNOSŤOU $1/n$ $\leftarrow$ T REPREZENTUJE n-PRVKOVÚ MNOŽ.
Root-Insert (x, T)
INAK CHOĎ O ÚROVEŇ NIŽŠIE

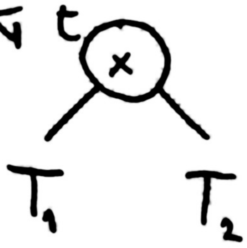
Root-Insert (x, T) $\equiv$ $(T_1, T_2) \leftarrow$ SPLIT (x, T) $\rightsquigarrow$

11.06.2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

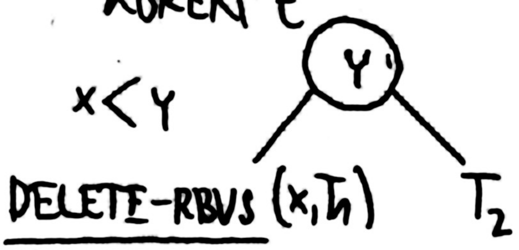
DELETE-RBVS (x, T)

a) KOREŇ t



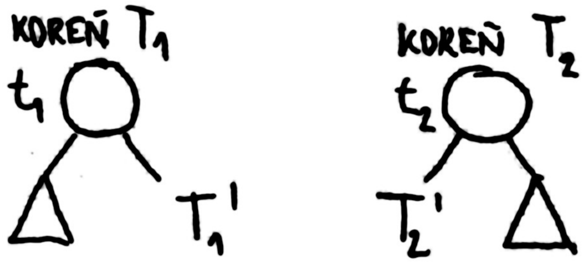
→ JOIN2-RBVS (T_1, T_2)

b) KOREŇ t

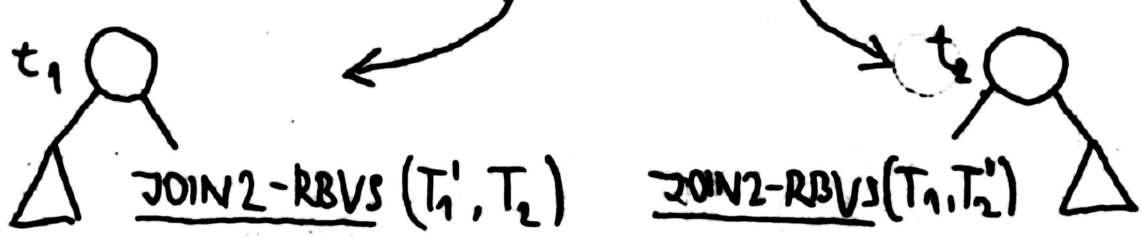


KOREŇ t

JOIN2-RBVS (T_1, T_2)



S PRAVDEPODOBNOSŤOU $\frac{n_1}{n_1+n_2}$, $\frac{n_2}{n_1+n_2}$



OČAKÁVANÝ ČAS ∀ OPERÁCIÍ ... $O(\log n)$

OPTIMÁLNE BINÁRNE VYHĽ. STROMY

$$\underbrace{-\infty <}_{\beta_0} \underset{\alpha_1}{x_1} \underbrace{<}_{\beta_1} \underset{\alpha_2}{x_2} \underbrace{<}_{\beta_2} \quad \dots \quad \underbrace{<}_{\beta_{n-1}} \underset{\alpha_n}{x_n} \underbrace{< +\infty}_{\beta_n}$$

$$\mathrm{hod}(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + 1) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j b_j$$

HĹBKA VRCHOLU REPR. x_i HĹBKA LISTU (x_j, x_{j+1})

... ≡ OČAKÁVANÝ ČAS OP. <u>MEMBER</u>

CHCEME NÁJSŤ $\mathrm{argmin}_T \, \mathrm{hod}(T)$.

... PODOBNÚ ÚLOHU RIEŠI <u>TREAP</u>, AK $p(x_i) = \alpha_i$ ...

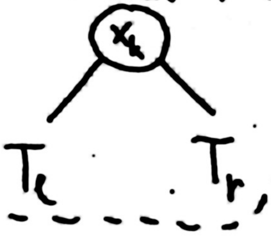
$\boxed{U_{i,j}}$ .... ÚLOHA PRE:

$S_{i,j} = \{x_k \mid i \le k \le j\}$,

$\{\alpha_k \mid i \le k \le j\}$,

$\{\beta_k \mid i-1 \le k \le j\}$.

<u>LEMMA</u>: KOREŇ T ... <u>REPR.</u> $S_{i,j}$,



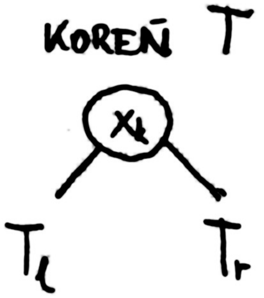
$$\Rightarrow \mathrm{hod}(T) = \mathrm{hod}(T_l) + \mathrm{hod}(T_r) + \sum_{k=i}^{j} \alpha_k + \sum_{k=i-1}^{j} \beta_k,$$

& T_l <u>REPR.</u> $S_{i,k-1}$, T_r <u>REPR.</u> $S_{k+1,j}$.

11.06.2010 Pi
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

LEMMA:



T JE OPTIMÁLNY PRE $\mathcal{U}_{i,j}$

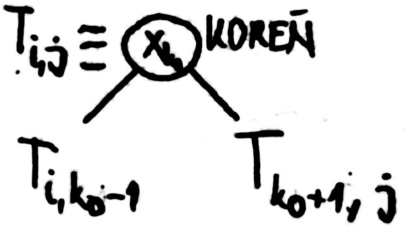
$\Rightarrow$ T_l JE OPT. PRE $\mathcal{U}_{i,k-1}$
$\Leftarrow$ T_r JE OPT. PRE $\mathcal{U}_{k+1,j}$

$\triangleleft$ $\bigcirc$ JE OPTIM. PRE $\mathcal{U}_{i,i-1}$, $\forall i : 1 \le i \le n$

LEMMA:

1) $T_{i,k}$ OPTIM. PRE $\mathcal{U}_{i,k}$, $\forall k: i-1 \le k < j$
2) $T_{k,j}$ OPTIM. PRE $\mathcal{U}_{k,j}$, $\forall k: i < k \le j+1$
3) $k_0 = \underset{i \le k \le j}{\operatorname{argmin}} \left(hod(T_{i,k-1}) + hod(T_{k+1,j}) \right)$

$\Rightarrow$



JE OPTIM. PRE $\mathcal{U}_{i,j}$

IDEA ALGORITMU

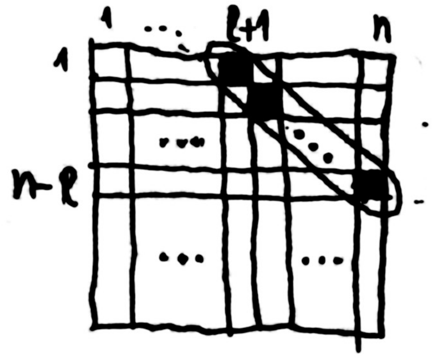
R ... $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ .... $R[i,j] = k_0$

H ... $\{1,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\}$ .... $H[i,j] = hod(T_{i,j})$

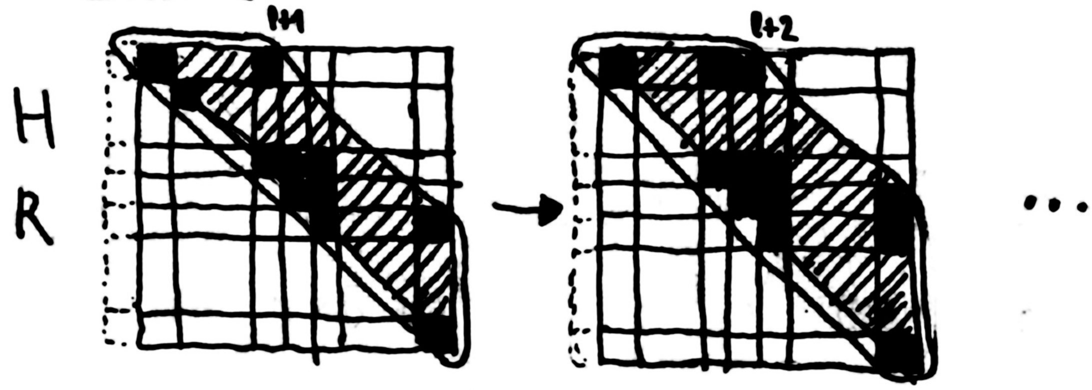
$W \dots \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \dots\dots W[i,j] = \sum_{k=i}^{j} \alpha_k + \sum_{k=i-1}^{j} \beta_k$

$\ell = 0,\dots,n-1$

<u>ℓ-TÁ DIAGONÁLA</u> $= \{(i, i+\ell) \mid i = 1,\dots,n-\ell\}$



<u>POSTUP:</u>



```
for i ← 1 ... n do  W[i,i] ← α_i + β_{i-1} + β_i
|   for j ← i+1 ... n do  W[i,j] ← W[i,j-1] + α_j + β_j
for i ← 1 ... n do  H[i,i] ← W[i,i],  R[i,i] ← i
for l ← 1 ... n-1 do
|   for i ← 1 ... n-l do
|   |   CHCEME SPOČÍTAT:
|   |       H[i, i+l]
|   |       R[i, i+l]
```

11.06.2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

$$\boxed{k_0 := \operatorname*{argmin}_{i \leq k \leq i+l} \left(H[i, k-1] + H[k+1, i+l]\right)}$$

$$H[i, i+l] \leftarrow H[i, k_0-1] + H[k_0+1, i+l] + W[i, i+l]$$

$$R[i, i+l] \leftarrow k_0$$

ČAS: $\underline{\underline{O(n^3)}}$, PAMÄŤ: $\underline{\underline{O(n^2)}}$

EXPERIMENTY UKÁZALI, ŽE VŽDY PLATÍ:

$$\boxed{R[i, j-1] \leq R[i,j] \leq R[i+1, j]} \quad \underline{\forall\, 1 \leq i \leq j \leq n}$$

V TAKOM PRÍPADE MÔŽME $\boxed{\operatorname*{argmin}_{R[i,i+l-1] \leq k \leq R[i+1,i+l]}}$ SPOČÍTAŤ V ČASE:

$$O(R[i+1, i+l] - R[i, i+l-1])$$

TAKŽE VNÚTORNÝ CYKLUS VYŽADUJE ČAS:

$$O\left(\sum_{i=1}^{n-l} R[i+1, i+l] - R[i, i+l-1]\right) = \underline{\underline{O(n)}}$$

$\Rightarrow$ ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ: $\underline{\underline{O(n^2)}}$

$\longrightarrow$ <u>ŠPECIÁLNY PRÍPAD KVADRATICKÉHO PROG.</u>

KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE

VSTUP: $w_{i,j}$ $\quad 1 \le i < j \le n$

VÝSTUP: $c_{i,j}$ $\quad 1 \le i \le j \le n$:

$$\boxed{c_{i,i} = 0 \quad \& \quad i<j \Rightarrow c_{i,j} = w_{i,j} + \min_{i+1 \le k \le j} \left(c_{i,k-1} + c_{k,j} \right)}$$

OZNAČME $r_{i,j} \in \operatorname{argmin}_{i+1 \le k \le j} \left(c_{i,k-1} + c_{k,j} \right)$ ... $r_{i,j}$ JE NAJVÄČŠIE MOŽNÉ TAKÉ k

---

PRE $U_{1,n}$ POLOŽME :

$$w_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j-1} \alpha_k + \sum_{k=i-1}^{j-1} \beta_k, \quad 1 \le i < j \le n+1$$

$$\Rightarrow c_{i,j+1} = H[i,j] \quad r_{i,j+1} = R[i,j], \quad 1 \le i \le j \le n$$

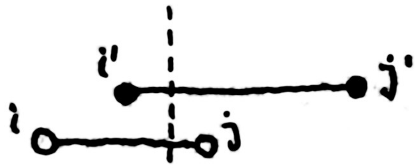
$$H[i,j] = c_{i,j+1} = w_{i,j+1} + \min_{i+1 \le k \le j+1} \left(c_{i,k-1} + c_{k,j+1} \right) =$$

$$= w_{i,j+1} + \min_{i+1 \le k \le j+1} \left(H[i,k-2] + H[k,j] \right) =$$

$$= w_{i,j+1} + \min_{i \le k \le j} \left(H[i,k-1] + H[k+1,j] \right)$$

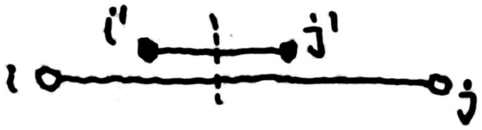
11.06.2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II



(*) STVORUHOLNÍKOVÁ NEROVNOSŤ:

$$w_{i,j} + w_{i',j'} \leq w_{i,j'} + w_{i',j}, \forall 1 \leq i \leq i' < j \leq j' \leq n$$



(**) PODMIENKA MONOTÓNIE:

$$w_{i',j'} \leq w_{i,j}, \forall 1 \leq i \leq i' < j' \leq j \leq n$$

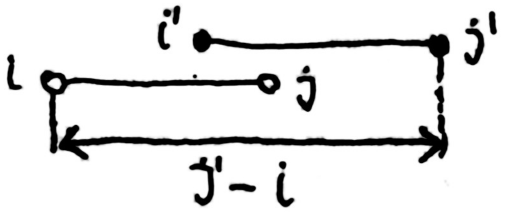
$$\Rightarrow \quad r_{i,j-1} \leq r_{i,j} \leq r_{i+1,j}, \forall 1 \leq i < j \leq n$$

(*) PLATÍ DOKONCA =.
(**) PLATÍ, AK $\alpha_i, \beta_j \geq 0$.

LEMMA 1: PLATÍ:

$$c_{i,j} + c_{i',j'} \leq c_{i,j'} + c_{i',j}, \forall 1 \leq i \leq i' \leq j \leq j' \leq n.$$

DÔKAZ (INDUKCIA PODĽA $j'-i$)



KEĎ $i=i'$ ALEBO $j=j'$, POTOM PLATÍ ROVNOSŤ

$\Rightarrow$ $j'-i \leq 1 \Rightarrow$ TVRDENIE PLATÍ

PREDPOKLADAJME, ŽE TVRDENIE PLATÍ, KEĎ $j'-i < q$.

NECH $j' - i = q$.

1) $\boxed{j = i'}$

OZNAČME $k = r_{i,j'}$ BÚNO $k \le j$

$k > i \Rightarrow$ Z INDUKČNÉHO PREDPOKLADU:

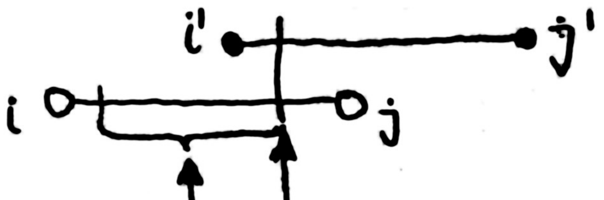
$$c_{k,j} + c_{i',j'} \le c_{k,j'} + c_{j,j} = c_{k,j'}$$

TAKŽE $c_{i,j} + c_{i',j'} = w_{i,j} + c_{i,k-1} + c_{k,j} + c_{i',j'} \le$

$$\le \underbrace{w_{i,j} + c_{i,k-1} + c_{k,j'} \le w_{i,j'}}_{\text{PRETOŽE } i < j \le j'} + c_{i,k-1} + c_{k,j'} = c_{i,j'}$$

(PODMIENKA MONOTÓNIE (**))

2) $\boxed{i' < j}$



OZNAČME $k = r_{i,j'}$ $l = r_{i',j}$ BÚNO $k \le l$

$1 \le i < k \le l \le j \le n$

$1 \le i' < l \le j \le j' \le n$

$$c_{i,j} + c_{i',j'} = w_{i,j} + c_{i,k-1} + c_{k,j} + w_{i',j'} + c_{i',l-1} + c_{l,j'} \le$$

□ NEROVNOSŤ (*)

INDUKČNÝ PREDPOKLAD

$$\le w_{i,j'} + c_{i,k-1} + c_{k,j'} + w_{i',j} + c_{i',l-1} + c_{l,j} \le$$

$$\le c_{i,j'} + c_{i',j}.$$

■

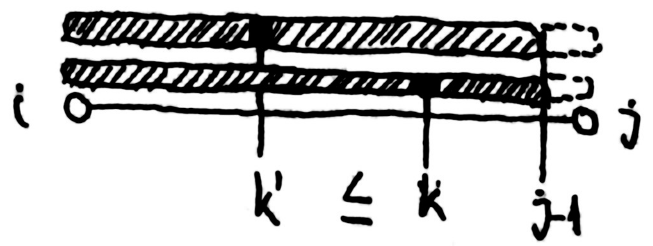
11.06.2010 Fr
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

LEMMA 2: PLATÍ: $r_{i,j-1} \leq r_{i,j} \leq r_{i+1,j}, \forall 1 \leq i < j \leq n.$

UKÁŽEME $\boxed{r_{i,j-1} \leq r_{i,j}}$ (DRUHÁ $\leq$ JE SYMETRICKÁ ☺)

KEĎ $1 \leq i < k' \leq k < j \leq n$, POTOM PLATÍ:



$$\boxed{\begin{array}{l} c_{i,k-1} + c_{k,j-1} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j-1} \Rightarrow \\ c_{i,k-1} + c_{k,j} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j} \end{array}} \quad (\bullet)$$

DÔKAZ L2: NECH $k = r_{i,j-1}$. POTOM

PRE KAŽDÉ $i < k' \leq k$ PLATÍ:

$$c_{i,k-1} + c_{k,j-1} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j-1}.$$

Z $(\bullet)$ POTOM: $c_{i,k-1} + c_{k,j} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j}$

$\Rightarrow r_{i,j} \geq k$ (PODĽA DEFINÍCIE $r_{i,j}$)

$\Rightarrow r_{i,j} \geq r_{i,j-1}$, ČO BOLO TREBA DOKÁZAŤ. □

DÔKAZ $(\bullet)$:

$$c_{i,k-1} + c_{k,j-1} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j-1} \Leftrightarrow c_{i,k'-1} + c_{k',j-1} - c_{i,k-1} - c_{k,j-1} \geq 0$$

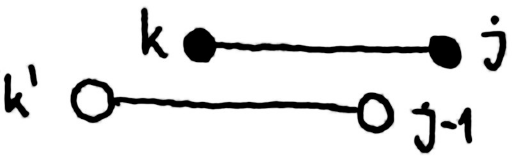
$$c_{i,k-1} + c_{k,j} \leq c_{i,k'-1} + c_{k',j} \Leftrightarrow c_{i,k'-1} + c_{k',j} - c_{i,k-1} - c_{k,j} \geq 0$$

STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE

$$\cancel{c_{i,k-1}} + c_{k',j-1} - \cancel{c_{i,k-1}} - c_{k,j-1} \le \cancel{c_{i,k'-1}} + c_{k',j} - \cancel{c_{i,k-1}} - c_{k,j},$$

TJ. $c_{k',j-1} - c_{k,j-1} \le c_{k',j} - c_{k,j}$

TJ. $c_{k',j-1} + c_{k,j} \le c_{k',j} + c_{k,j-1}$



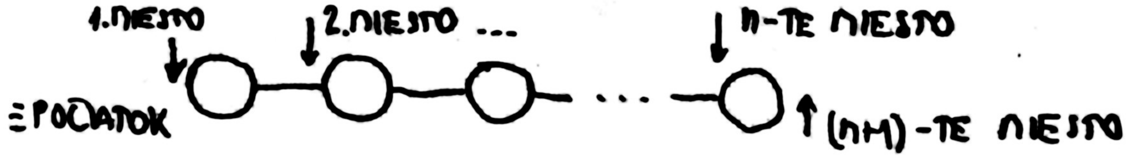
ČO PLATÍ PODĽA <u>LEMMY 1</u>. ■

12.06.2010 So
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

SAMOOPRAVUJÚCE SA ZOZNAMY

ZOZNAM:



OPERÁCIE: MEMBER, INSERT, DELETE

NECH L JE n PRVKOVÝ ZOZNAM. POTOM:

a) $x \notin L \Rightarrow$ MEMBER(x), INSERT(x), DELETE(x)
... VYŽADUJÚ ČAS $n+1$.

b) $x \in L$, x JE NA i-TOM MIESTE $\Rightarrow$
MEMBER(x), INSERT(x) ... ČAS $\max\{i, j\}$
(AK CHCÚ PREMIESTNIŤ x NA j-TE MIESTO)
DELETE(x) ... ČAS i

- - - - - - - - - - - - - - -

VYHĽADÁVACÍ ČAS, VOĽNÉ & PLATENÉ VÝMENY

a) $x \notin L \Rightarrow$ VYHĽ. ČAS $= n+1$

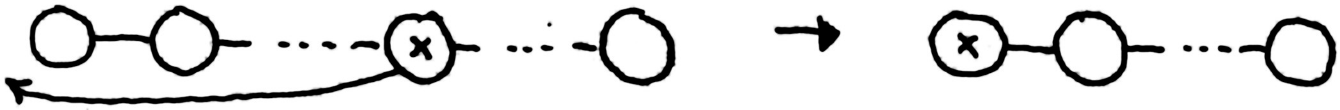
b) $x \in L$, x JE NA i-TOM MIESTE $\Rightarrow$ VYHĽ. ČAS $= i$

		OPERÁCIA	VOĽNÉ VÝMENY	PLATENÉ VÝMENY
a)	$x \notin L$	INSERT(x) NA j-TE M.	$n+1-j$	0
b)	$x \in L$ NA i-TOM M.	MEMBER(x) / INSERT(x) + PRESUN NA j-TE M.	$\max\{i-j, 0\}$	$\max\{j-i, 0\}$

STRATÉGIE

MFR (MOVE FRONT RULE)

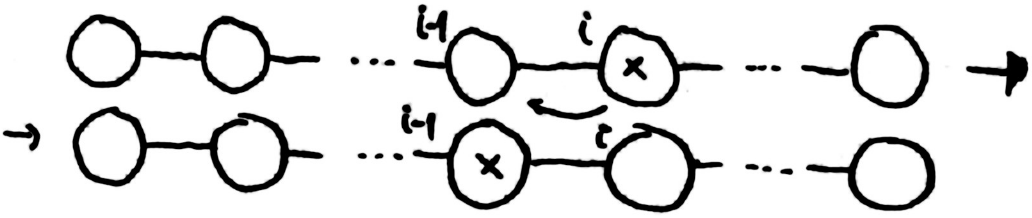
MEMBER(x), INSERT(x) : $[i \to 1]$



INSERT(x) : $[\ \to 1]$

TR (TRANSITION RULE)

MEMBER(x), INSERT(x) : $[i \to \max\{i-1, 1\}]$.



INSERT(x) : $[\ \to n]$

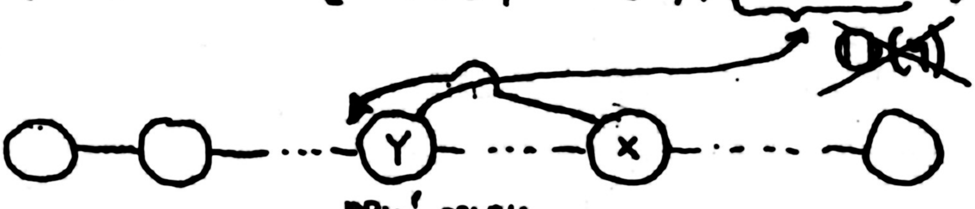
TIMESTAMP

... PAMÄTÁ SI HISTÓRIU OPERÁCIÍ

$x \in L$: a) $D(x) \notin$ HISTORY $\Rightarrow$

MEMBER(x), INSERT(x) NECHAJÚ x NA SVOJOM M.

b) HISTORY = $\{\ \dots,\ D(x),\ \overset{\text{POSLEDNÝ}}{\dots\dots}\ \}$



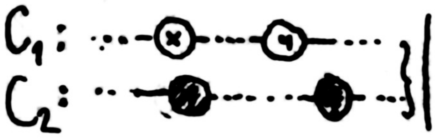
PRVÝ PRVOK

12.06.2010 So
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ MFR-ALGORITMU V ZÁVISLOSTI NA ALGORITMU A

NECH C_1, C_2 REPR. B

$\underline{bal}(C_1, C_2) := \Big| \{(x,y) \in B \times B \mid x \neq y,$  $\} \Big|$

ZREJME $0 \leq bal(C_1, C_2) \leq \frac{1}{2}|B|(|B|-1)$

$\underline{MFR}$: $\quad C_1 \xrightarrow{①} D_1 \quad \dots$ $\underline{ČAS.\ ZLOŽITOSŤ}$ t

$\underline{A}$: $\quad C_2 \xrightarrow{①} D_2 \quad \dots$ $\underline{VYHL.Č.}$ c, $\underline{VOĽ.}$ v, $\underline{PLAT.}$ p

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ MFR: $C_1 \xrightarrow{①} D_1$ JE:

$$a \overset{def}{:=} \boxed{(\text{ČAS MFR OP. } ① \cdot t) + bal(D_1, D_2) - bal(C_1, C_2)}$$

$\underline{\text{LEMMA}}$: $\quad A: C_2 \xrightarrow{①} D_2$, $\underline{VYHL.Č.}$ c, $\underline{VOĽ.}$ v, $\underline{PLAT.}$ p

$\Rightarrow$ $\underline{\text{AMOR. ZLOŽ.}}$ $\boxed{a \leq 2c + p - v - 1.}$

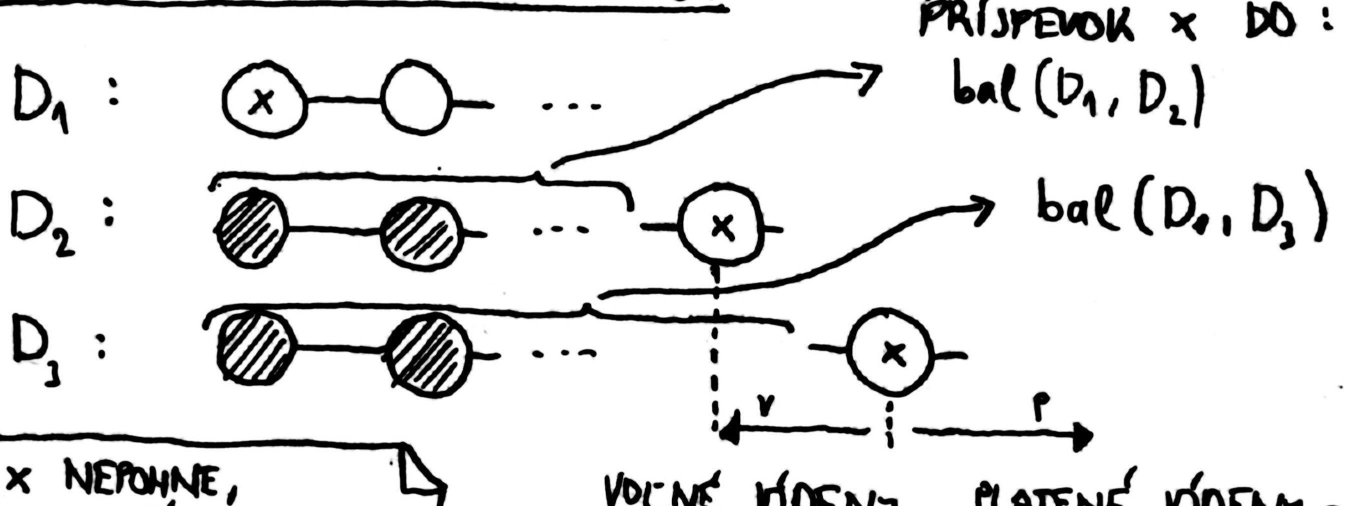
$\underline{\text{DÔKAZ}}$. NECH S JE ŠTANDARDNÝ ALGORITMUS.

$\underline{S}$: $\quad C_2 \xrightarrow{①} D_3$

$$a = t + bal(D_1, D_2) - bal(C_1, C_2) =$$

$$= \boxed{t + bal(D_1, D_3) - bal(C_1, C_2)} + \boxed{bal(D_1, D_2) - bal(D_1, D_3)}$$

1) $bal(D_1, D_2) - bal(D_1, D_3)$



S s x NEPOHNE,
POPR. HO VLOŽÍ NA KONIEC

$$\Rightarrow \quad bal(D_1, D_2) - bal(D_1, D_3) = \underline{\underline{p - v}}$$

2) $t + bal(D_1, D_3) - bal(C_1, C_2)$ $\quad (|C_1| = n)$

MFR: $C_1 \xrightarrow{\sigma} D_1$

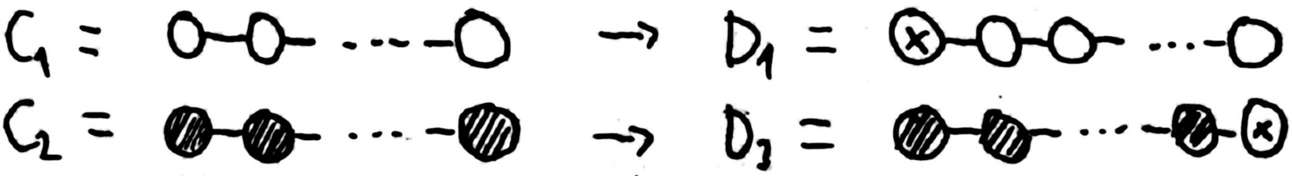
S: $C_2 \xrightarrow{\sigma} D_3$

A) $\boxed{x \notin C_1}$

$C_1 = D_1, \; C_2 = D_2 = D_3$

a) $\sigma = \begin{cases} \underline{MEMBER}(x) \\ \underline{DELETE}(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = c = n+1 \\ p = v = 0 \end{array} \Rightarrow a = t \leq 2c + p - v - 1$ ✓

b) $\sigma = \underline{INSERT}(x) \Rightarrow t = c = n+1$



$\Rightarrow bal(D_1, D_3) - bal(C_1, C_2) = n$

$\Rightarrow a = n+1 + n + p - v = 2c + p - v - 1.$ ✓

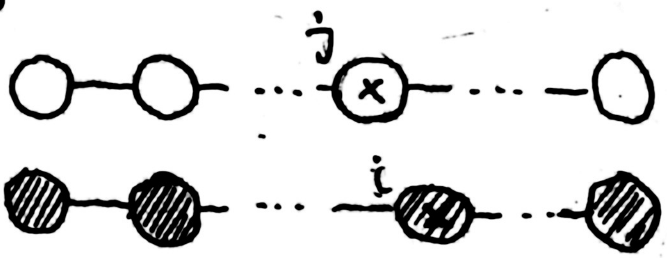
12.06.2010 So
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

B) $\boxed{x \in C_1}$

$C_1 =$

$C_2 =$

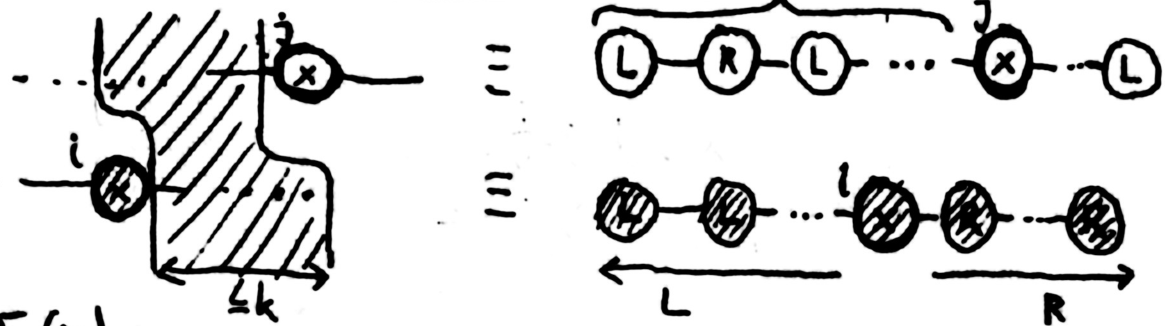


$k = \left|\{\, y \in B \mid y \neq x,\ y <_{C_1} x \ \&\ x <_{C_2} y \,\}\right|$

ZREJME $j \le i + k$, $\boxed{\#R\text{-IEK}} = k \ge \boxed{\text{ASPOŇ } (j-i) \text{ R-IEK}}$

$C_1 = \;\equiv$

$C_2 = \;\equiv$



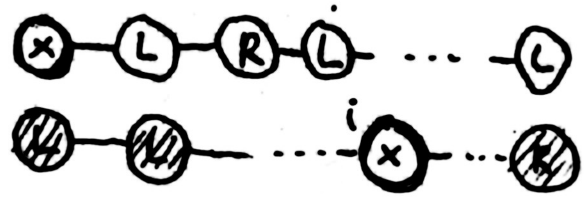
a) $D = \underline{\text{DELETE}}(x)$

$t = j$, $c = i$, $p = v = 0$, $bal(D_1, D_3) - bal(C_1, C_2) \le -k$

$\Rightarrow a = j - k \le i \le 2c + p - v - 1$. ✓

b) $D = \begin{cases} \underline{\text{MEMBER}}(x) \\ \underline{\text{INSERT}}(x) \end{cases}$ $\rightarrow D_1 \equiv$

$C_2 \equiv D_2 \equiv$



$t = j$, $c = i$

$bal(D_1, D_3) - bal(C_1, C_2) \le -k + (i-1)$

$\Rightarrow a = j - k + (i-1) + p - v \le 2i + p - v - 1$. ✓

$\Rightarrow \underline{\underline{t_{MFR}}} \le \sum a + bal(L_1, L_2) \le \underline{\underline{2c_A + p_A - v_A - |P| + bal(L_1, L_2)}}$

ZLÁ POSTUPNOSŤ PRE TR-STRATÉGIU

$\{INSERT(x_i)\}_{i=1}^{n}$, $(MEMBER(x_1), MEMBER(x_n))^m$

$x_2 - x_3 - \dots - x_n - x_1$

$m*$

$C_{OPT}(P,B)$ ... NAJMENŠÍ ČAS PRE NEJAKÝ ALG. A

A JE <u>c-KOMPETITÍVNY</u> $\Leftrightarrow$ $\exists$ KONŠT. a :

$\forall P, B : t_A \leq c \cdot C_{OPT}(P,B) + a + |B|^2/2$

MFR JE 2-KOMPETITÍVNA STRATÉGIA

NAJLEPŠIA MOŽNÁ PRE DETERM. A

ANALÝZA OČAKÁVANÉHO ČASU PRE MFR

POUŽÍVAJÚ SA IBA <u>MEMBER(x)</u> OPERÁCIE

<u>MARKOVOV REŤAZEC (MR)</u> :

PRAVDEPODOBNOSŤ DOTAZU MEMBER(x)

$$\pi \xrightarrow[MEMBER(x)]{B_x} \pi'$$

ZOZNAM

ZOZNAM PO VYKONANÍ OP. MEMBER(x) NA π

ZNAČENIE : $\pi(x) = i$ $\Leftrightarrow$ x JE i-TY V ZOZNAME π

12.06.2010 Sa
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

MR JE NEROZLOŽITEĽNÝ & APERIODICKÝ
$\Rightarrow \exists$ LIMITNÁ PRAVDEPODOBNOSŤ ν_π

OČAKÁVANÁ ZLOŽITOSŤ MEMBER(x):

$$\boxed{P_{MFR} = \sum_{\pi} \nu_\pi \boxed{\sum_{x \in B} \beta_x \pi(x)}} \longrightarrow \text{OČAKÁVANÁ ZLOŽITOSŤ MEMBER(x) NA } \pi$$

OZNAČME: $\delta(x,y) = \boxed{\sum_{\pi : \pi(x) < \pi(y)} \nu_\pi}$ ... PRAVD., ŽE x JE PRED y

---

LEMMA: (1) $P_{MFR} = \sum_{x \in B} \beta_x \left(1 + \boxed{\sum_{y \in B, y \neq x} \delta(y,x)}\right)$

OČAKÁVANÝ # PRVKOV PRED X

(2) $\delta(x,y) = \dfrac{\beta_x}{\beta_x + \beta_y}$

DÔKAZ 1) $\boxed{p_x = \sum_\pi \nu_\pi \pi(x)}$ ... OČAKÁVANÁ POZÍCIA x

$$P_{MFR} = \sum_{x \in B} \beta_x \boxed{\sum_{\pi} \nu_\pi \pi(x)} = \sum_{x \in B} \beta_x p_x$$

$$p_x = \sum_\pi \nu_\pi \left(1 + |\{y \in B \mid \pi(y) < \pi(x)\}|\right) =$$

$$1 + \sum_{y \in B, y \neq x} \boxed{\sum_{\pi : \pi(y) < \pi(x)} \nu_\pi} = \delta(y,x)$$

$\square$

---

2) $\delta(x,y) = P($ NASTANE MEMBER(x), PO KTOROM UŽ NENASTANE MEMBER(x), ANI MEMBER(y) $) =$
$$= \beta_x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (\beta_x + \beta_y))^k .$$

$\blacksquare$

P_{OPT} ... NAJMENŠÍ OČAKÁVANÝ ČAS MEMBER(x)

AK $\beta_{x_1} \geq \beta_{x_2} \geq \ldots \geq \beta_{x_n}$, POTOM

$P_{OPT} = \sum_{i=1}^{n} i\,\beta_{x_i}$.

<u>VETA</u> : $P_{MFR} = 1 + \sum_{x \neq y} \frac{\beta_x \beta_y}{\beta_x + \beta_y} \leq 2P_{OPT} - 1$

<u>DŌKAZ</u>.

$$P_{MFR} = \sum_{x \in B} \beta_x \left(1 + \sum_{y \neq x} \frac{\beta_y}{\beta_x + \beta_y}\right) = 1 + \sum_{x \neq y} \frac{\beta_x \beta_y}{\beta_x + \beta_y} \quad \checkmark$$

$$= 1 + 2 \sum_{j<i} \frac{\beta_{x_i} \beta_{x_j}}{\beta_{x_i} + \beta_{x_j}} \leq 1 + 2 \sum_{j<i} \beta_{x_i}$$

$$= 1 + 2\sum_{i=1}^{n} i\,\beta_{x_i} - 2\sum_{i=1}^{n} \beta_{x_i} = 2P_{OPT} - 1. \quad \blacksquare$$

13.06.2010 Su
PETER ČERNO

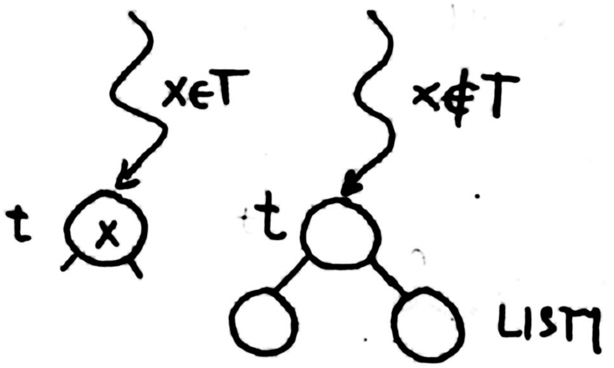
EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

SPLAY STROMY

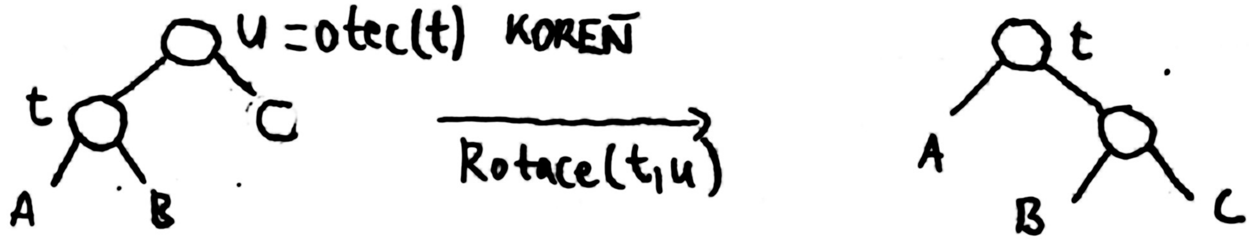
POPIS OPERÁCIÍ MEMBER, SPLIT, CHANGEWEIGHT, JOIN2, JOIN3, DELETE, INSERT POMOCOU SPLAY ... VIĎ SKRIPTÁ

SPLAY(x, T)

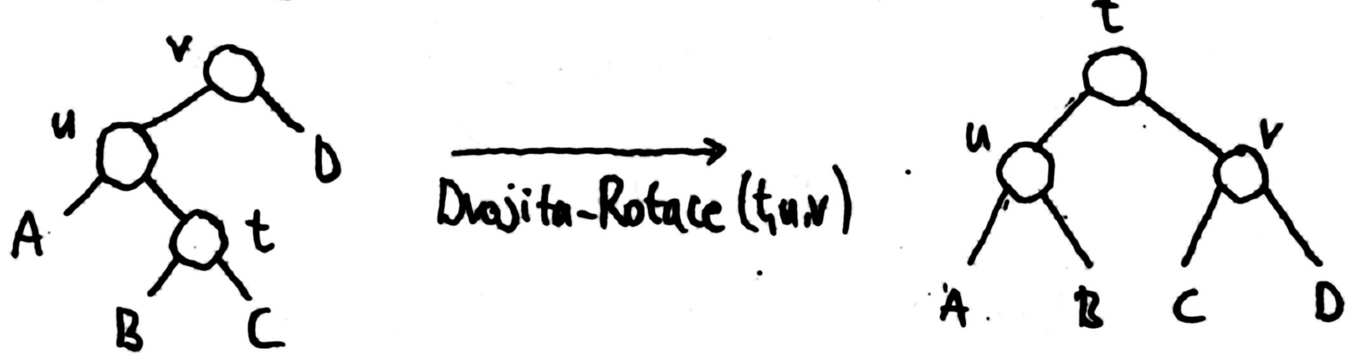
(1)

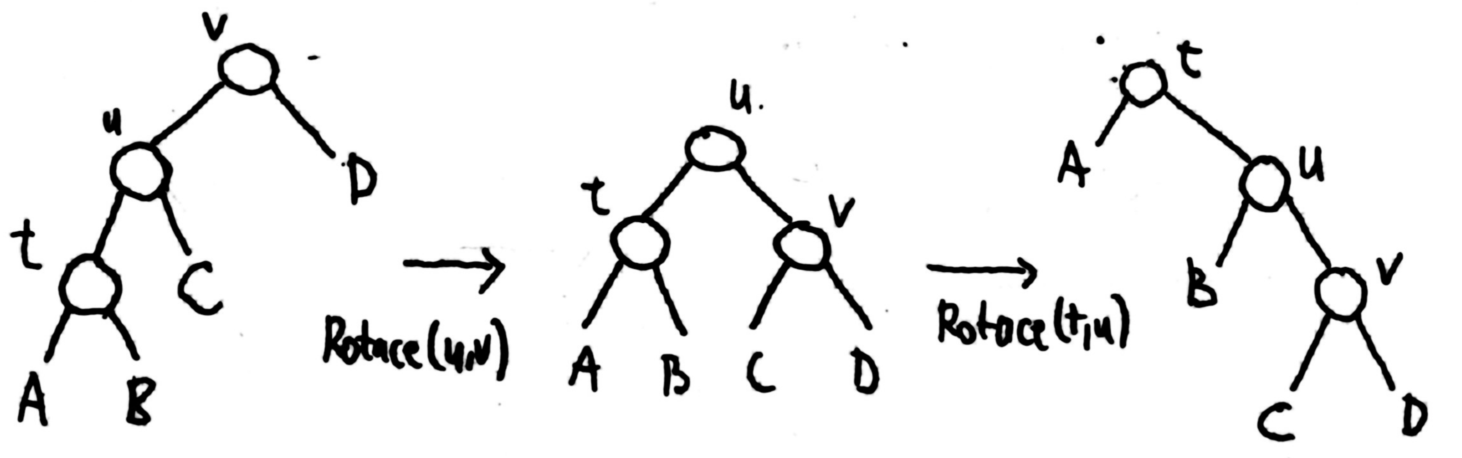


(2) a) otec(t) JE KOREŇ:



b) otec(t) NIE JE KOREŇ:





PREDPOKLAD: $w(x) > 0$

$tw(v) = \sum \{ w(t) \mid t$ JE V PODSTROME $T_v \}$

RANK $r(v) = \lceil \log_2 (tw(v)) \rceil$

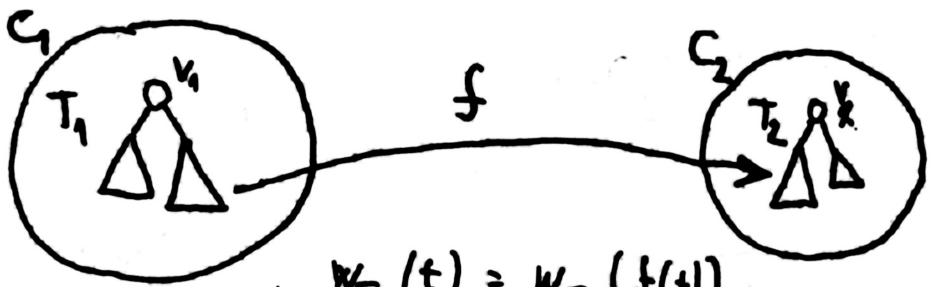
<u>LEMMA</u>: $r(v) > \min \{ r(\text{lavy}(v)), r(\text{pravy}(v)) \}$

$tw(v) \geq tw(\text{lavy}(v)) + tw(\text{pravy}(v)) \geq$

$\geq 2 \min \{ tw(\text{lavy}(v)), tw(\text{pravy}(v)) \}$ ... $\square$

$bal(C) = \sum r(v)$

VEC ... KONFIGURACIA



(+)

$w_{C_1}(t) = w_{C_2}(f(t))$

$\Rightarrow r_{C_1}(v_1) \leq r_{C_2}(v_2)$ ... $=$ AK f JE BIJEKCIA

13.06.2010 Su
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

ČAS. ZLOŽITOSŤ $\overset{\text{def}}{:=}$ # OPAKOVANÍ CYKLU (2)

LEMMA: AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ SPLAY(x, T) JE $\leq 3(r(T) - r(t)) + 1$.

DÔKAZ. NECH $k = \#$ OPAKOVANÍ CYKLU (2)

$T_0 = T$, $\quad T_0 \xrightarrow{1.\text{BEH}} T_1 \xrightarrow{2.\text{BEH}} \dots \xrightarrow{k\text{-TY BEH}} T_k$

z_i ... DED VRCHOLU t V STROME T_i, $i = 0, \dots, k-2$

z_{k-1} ... KOREŇ T_{k-1} ... $= \left\langle \begin{matrix} \text{OTEC } t \\ \text{DED } t \end{matrix} \right.$ v T_{k-1}

$r_i(v)$ ... RANK v V STROME T_i, $i = 0, \dots, k-1$

- - - - - - - - - - - -

DOKÁŽME, ŽE AMORT. ZLOŽITOSŤ i-TEHO BEHU JE $\leq$:

$$\begin{cases} 3(r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(t)), & i = 1, \dots, k-1 \\ 3(r_{k-1}(z_{k-1}) - r_{k-1}(t)) + 1, & i = k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AMORT. ZLOŽITOSŤ CELÉHO ALGORITMU JE $\leq$:

$$1 + 3(r_{k-1}(z_{k-1}) - r_0(t)) = \underline{\underline{3(r(T) - r(t)) + 1}}.$$

PRETOŽE PODĽA (†):

$$\begin{cases} r_0(z_i) = r_1(z_i) = \dots = r_i(z_i) = r_{i+1}(t), & i = 0, \dots, k-2 \\ r_{k-1}(z_{k-1}) = r(T) \\ r_0(t) = r(t). \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - -

A) z_{k-1} JE OTEC t v T_{k-1}

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ k-TEHO BEHU :

$$1 + bal\,(k\text{-TA KONF.}) - bal\,((k-1)\text{-TA KONF.}) =$$

$$= 1 + r_k(z_{k-1}) + r_k(t) - r_{k-1}(z_{k-1}) - r_{k-1}(t) \leq$$

$$= 1 + 2\left(r_k(t) - r_{k-1}(t)\right) =$$

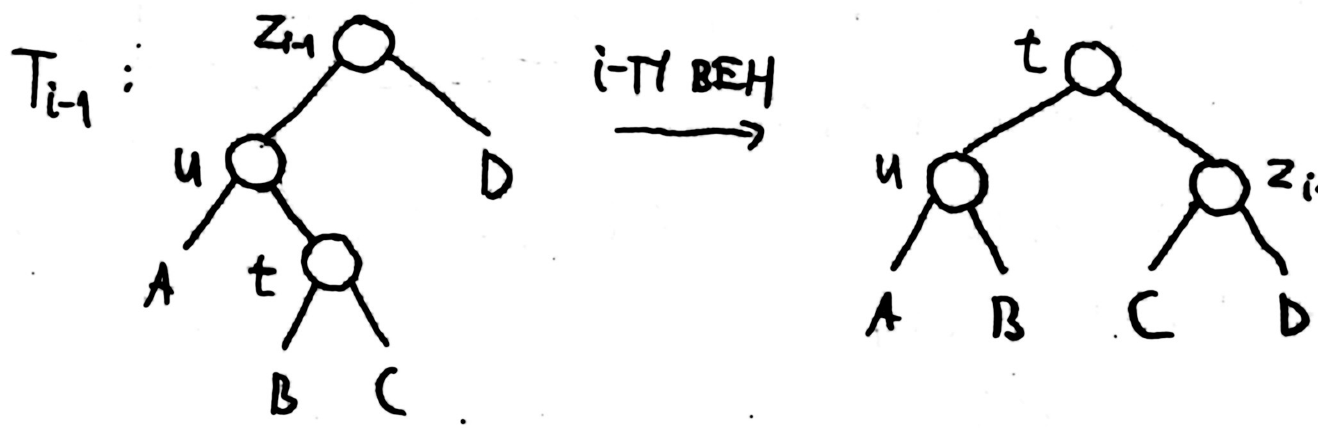
$$= 1 + 2\left(r_{k-1}(z_{k-1}) - r_{k-1}(t)\right) \leq$$

$$\leq 1 + 3\left(r_{k-1}(z_{k-1}) - r_{k-1}(t)\right)$$

PRETOŽE $r_k(z_{k-1}) \leq r_k(t) = r_{k-1}(z_{k-1}) \geq r_{k-1}(t)$

B) z_{i-1} JE DED t v T_{i-1} , $i \in \{1, \dots, k\}$

<u>i) t JE LOMENÝ :</u>



13.06.2010 Su
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ i-TEHO BEHU:

$1 + bal(i\text{-TA KONF.}) - bal((i-1)\text{-TA KONF.}) =$

$= 1 + r_i(z_{i-1}) + r_i(u) + r_i(t) - r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(u) - r_{i-1}(t) \leq$

$\leq 3\,(r_i(t) - r_{i-1}(t))$

PRETOŽE $r_i(t) > \min\{r_i(u), r_i(z_{i-1})\}$

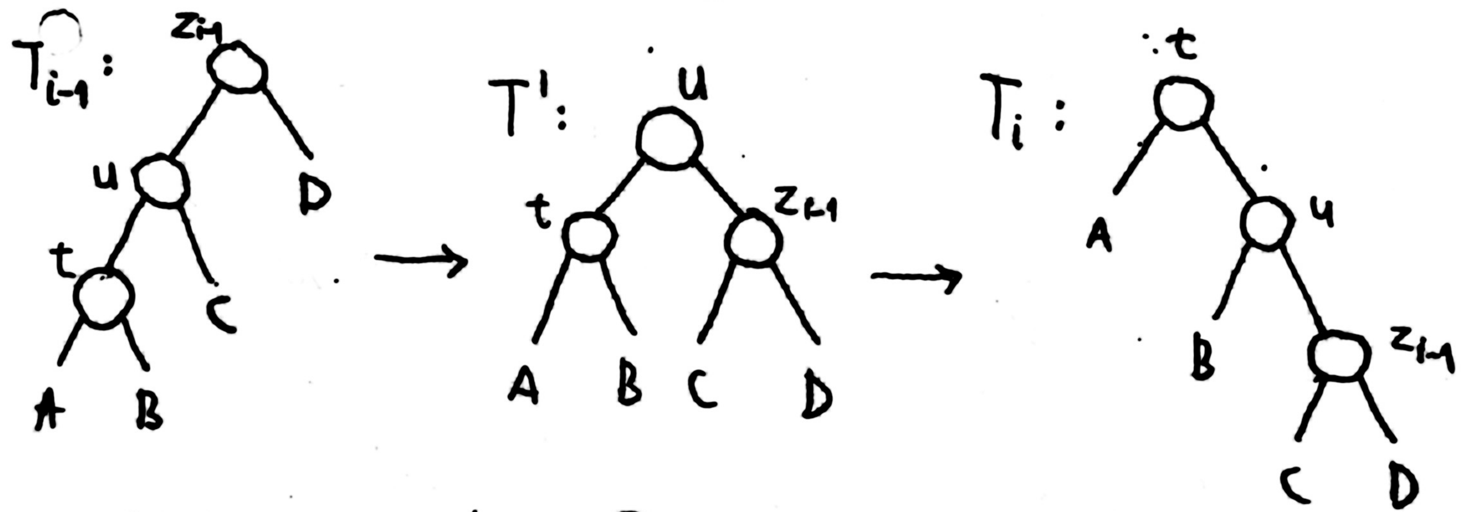
A $\underline{r_i(t) \geq \max\{r_i(u), r_i(z_{i-1})\}}$

$\Rightarrow 2r_i(t) \geq r_i(u) + r_i(z_{i-1}) + 1$

A $r_{i-1}(t) \leq r_{i-1}(u) \leq r_{i-1}(z_{i-1}) = r_i(t)$

$= 3\,(r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(t))$

(ii) t NIE JE LOMENÝ:



AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ i-TEHO BEHU:

$1 + bal(i\text{-TA KONF.}) - bal((i-1)\text{-TA KONF.}) =$

$= 1 + r_i(z_{i-1}) + r_i(u) + r_i(t) - r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(u) - r_{i-1}(t)$

BUĎ $r'(t) < r'(u)$, ALEBO $r'(z_{i-1}) < r'(u)$,

T.J. BUĎ $r_{i-1}(t) < \boxed{r_{i-1}(z_{i-1})}$, ALEBO $r_i(z_{i-1}) < r_i(t)$.

V PRVOM PRÍPADE:

$$1 + r_i(z_{i-1}) + r_i(u) + r_i(t) - \boxed{r_{i-1}(z_{i-1})} - r_{i-1}(u) - r_{i-1}(t) \leq$$
$$\leq 1 + 3r_i(t) - \boxed{r_{i-1}(z_{i-1})} - 2r_{i-1}(t) \leq$$
$$\leq 3(r_i(t) - r_{i-1}(t)) = 3(r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(t))$$

V DRUHOM PRÍPADE:

$$1 + r_i(z_{i-1}) + r_i(u) + r_i(t) - r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(u) - r_{i-1}(t) \leq$$
$$\leq 1 + r_i(z_{i-1}) + 2r_i(t) - 3r_{i-1}(t) \leq$$
$$\leq 3(r_i(t) - r_{i-1}(t)) = 3(r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(t)). \quad \blacksquare$$

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ SPLAY(x,T)

JE $\underline{\underline{O\left(\log \frac{tw(T)}{tw(t)}\right)}}$.

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ OSTATNÝCH OPERÁCIÍ

... <u>VIĎ SKRIPTÁ</u>

NAPR. <u>MEMBER</u>(x,T) ... $O\left(\log \frac{tw(T)}{\min\{tw(t_-), tw(t_+)\}}\right)$

t_- REPREZENTUJE PRVOK $\max\{s \in S \mid s \leq x\}$

t_+ —〃— $\min\{s \in S \mid s \geq x\}$

13.06.2010 Su
PETER ČERNO

EXAM : DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

VETA : MAJME POSTUPNOSŤ OPERÁCIÍ
$P = \{ \text{MEMBER}(y_j) \}_{j=1}^{m}$ PRE MNOŽINU
$S = \{ x_1 < x_2 < \dots < x_n \}$.
PRE $i = 1, \dots, n$ DEFINUJME :
$\alpha_i = |\{ j \mid j = 1, \dots, m;\ y_j = x_i \}| / m$
PRE $i = 0, 1, \dots, n$ DEFINUJME :
$\beta_i = |\{ j \mid j = 1, \dots, m;\ x_i < y_j < x_{i+1} \}| / m$
KDE $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$.
NECH T_1 JE <u>OPTIM. BIN. VYHĽ. STROM</u> PRE
S, $\{ \alpha_i \mid i = 1, \dots, n \}$, $\{ \beta_i \mid i = 0, \dots, n \}$.
NECH t JE ČAS, KTORÝ VYŽADUJE REALIZÁCIA POSTUPNOSTI P KLASICKÝM ALGORITMOM NA STR. T_1.
KEĎ T_2 JE <u>BIN. VYHĽ. STROM</u> REPREZENTUJÚCI S, POTOM REALIZÁCIA POSTUPNOSTI P NA STR. T_2 POMOCOU <u>SPLAY - ALGORITMU</u> VYŽADUJE ČAS $O(t + |S|^2)$.

DÔKAZ :

d ... VÝŠKA STROMU T_1
d_x ... HĹBKA VRCHOLU REPR. x V STROME T_1

KLASICKÁ OP. <u>MEMBER</u> (x, T_1) ... ČAS $O(d_x)$

DEFINUJME $w(x) := 3^{d-d_x}$ ... VÁHA PRVKU x

ODHAD $tw(T_2)$:

$$tw(T_2) = \sum_{x\in S} 3^{d-d_x} \leq \sum_{i=0}^{d} 2^i \cdot 3^{d-i} = 3^d \sum_{i=0}^{d} \left(\frac{2}{3}\right)^i \leq \underline{\underline{3^{d+1}}}$$

$\exists$ NAJVIAC 2^i PRVKOV S VÁHOU 3^{d-i}

$\Rightarrow$ $r(T_2) \leq 1 + \log_2 3^{d+1} = O(n)$

$\Rightarrow$ $bal(\text{KONFIGURÁCIA}) = \sum_{x\in S} r(x) = O(n^2)$

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ <u>MEMBER</u>(x) (SPLAY-ALG.)

$x\in S \Rightarrow a = O(r(T) - r(t)) =$

$= O(d+1-(d-d_x)) = O(d_x+1)$ ... t REPR. x.

$x\notin S \Rightarrow$ HĹBKA LISTU...b REPR. INTERVAL $\ni x$ (v T_1)

JE $\max\{d_{x-}, d_{x+}\}$, $\begin{pmatrix} x_+ = \min\{s\in S \mid s > x\} \\ x_- = \max\{s\in S \mid s < x\}\end{pmatrix}$

$d - d_{x-}, d - d_{x+} \geq d - b$

$\Rightarrow a = O(r(T) - r(t)) = O(b)$.

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ POSTUPNOSTI P JE

$O(\sum_{j=1}^{m}$ ČAS. ZLOŽ. <u>MEMBER</u>$(y_j, T_1)) = O(t)$.

PRETOŽE r JE NEZÁPORNÁ A $bal(\text{VSTUPNÁ KONF.}) =$

$= bal(T_2) = O(|S|^2)$ $\Rightarrow$

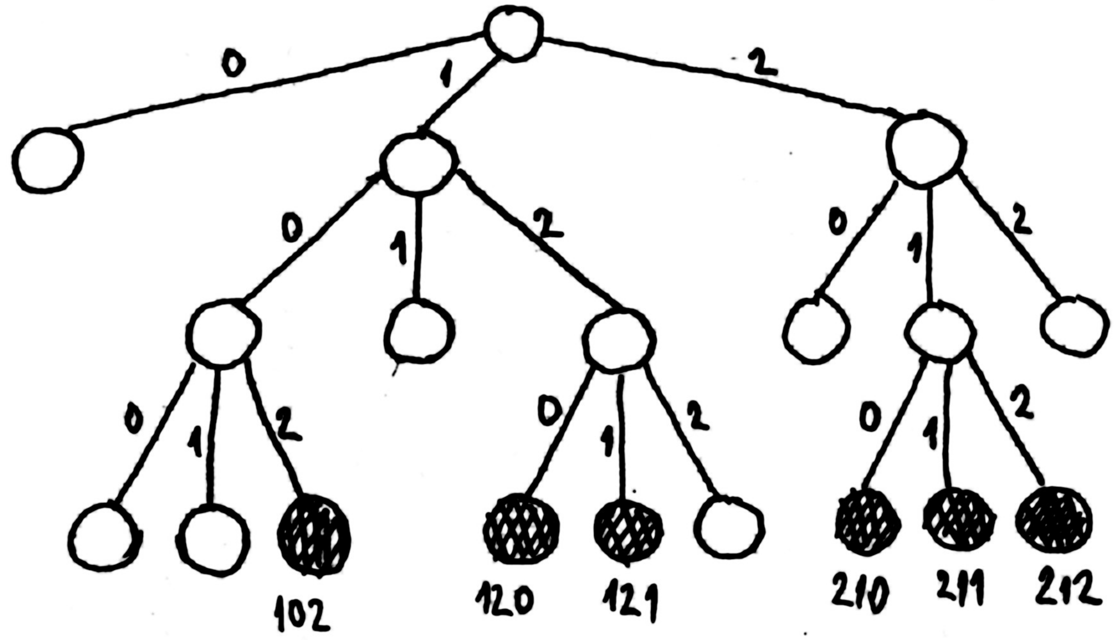
ČAS. ZLOŽITOSŤ <u>SPLAY-ALG.</u> JE $O(t + |S|^2)$: ■

14.06.2010 Mo
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

TRIE

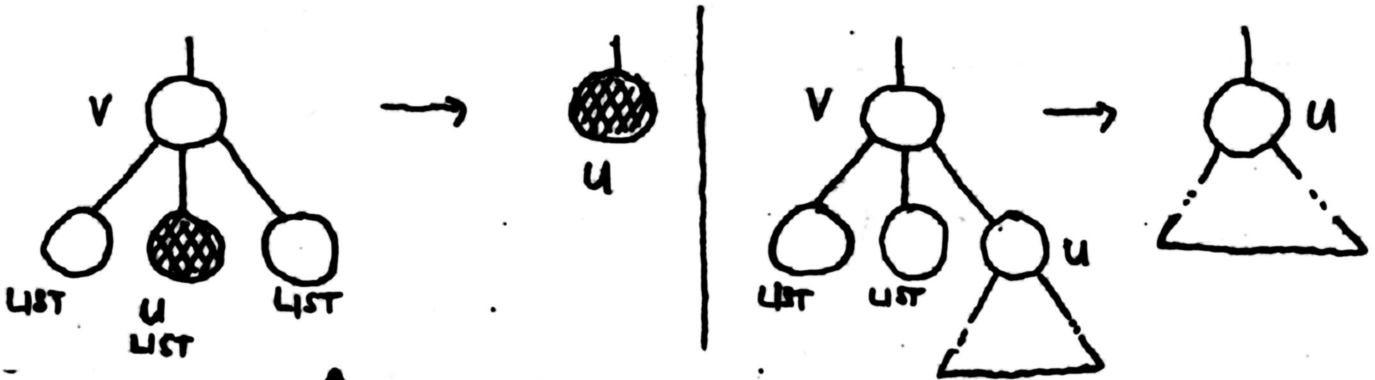
$\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $S = \{\overbrace{102}^{l=3}, 120, 121, 210, 211, 212\}$



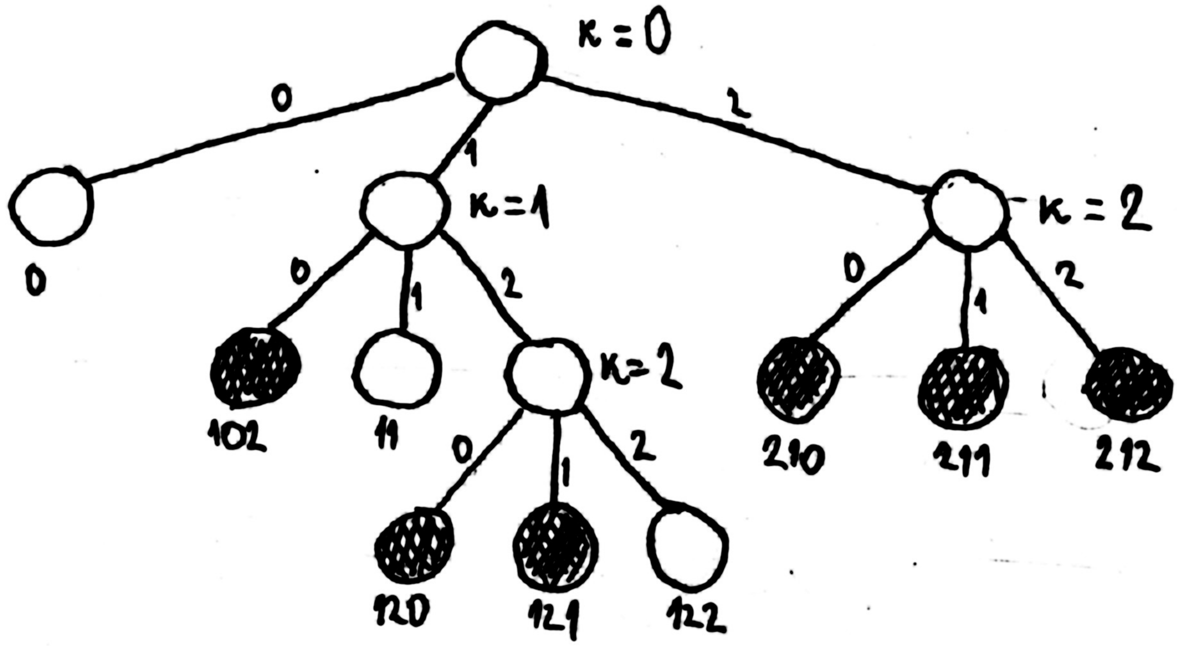
REPREZENTÁCIA A POPIS OP. TRIE → VIĎ SKRIPTÁ

KOMPRIMOVANÁ TRIE

PRE KAŽDÝ VRCHOL v ... HĹBKA k(v) V PÔVODNEJ TRIE
PRE KAŽDÝ LIST v ... slovo(v)



$\exists!\, u$: ALEBO



POPIS OP. KOMPRIMOVANEJ TRIE ... VIĎ SKRIPTÁ

VYHĽADÁVANIE SLOVA α SKONČÍ V LISTE t $\Leftrightarrow$
$\alpha[k(u)+1] = slovo(t)[k(u)+1]$ PRE $\forall u \in$ KOREŇ $\rightsquigarrow t$

VN. VRCHOLOV TRIE $\leq |S|-1$. (INDUKCIOU)

OČAKÁVANÁ VÝŠKA KOMPR. TRIE

$|S|=n$, $|\Sigma|=k$, $S \in \binom{\Sigma^e}{n}$, $\forall S$ SÚ ROVNAKO PRAVDEPODOBNÉ

q_d ... KOMP. TR. MÁ VÝŠKU $\geq d$

$\Rightarrow$ OČAKÁVANÁ VÝŠKA $= \sum_{d=1}^{\infty} d(q_d - q_{d+1}) = \sum_{d=1}^{\infty} q_d$

$$P(h(T)=d) = P(h(T) \geq d \ \& \ h(T) < d+1)$$
$$= 1 - P(h(T) < d \vee h(T) \geq d+1) =$$
$$= 1 - ((1-q_d) + q_{d+1}) = q_d - q_{d+1}$$

14.06.2010 Mo
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

$|S| = |\{\alpha \mid \alpha$ JE PREFIX O DĹŽKE d SLOVA $\in S\}|$

$\Rightarrow h(T) \leq d$ $\quad \cdots \underbrace{\qquad\qquad}_{S_{1..d}} \cdots$

$S_{1..d} \in \binom{\Sigma^d}{n} \ldots \binom{k^d}{n}$ MOŽNOSTÍ

$\#$ n-TÍC SLOV $\in \Sigma^{l-d} \ldots (k^{l-d})^n$

$\Rightarrow \exists$ $\boxed{\binom{k^d}{n} k^{n(l-d)}}$ MNOŽÍN S SLOV O DĹŽKE l TAKÝCH, ŽE $|S| = |S_{1..d}|$.

$$q_d = 1 - P(h(T) < d) = 1 - \frac{\binom{k^{d-1}}{n} k^{n(l-d+1)}}{\binom{k^l}{n}} \leq$$

$$\leq 1 - \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (k^{d-1} - i)\, k^{n(l-d+1)}}{k^{nl}} =$$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \frac{k^{d-1} - i}{k^{d-1}} = 1 - \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right)\right) \quad (*)$$

FUNKCIA $\ln\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right)$ JE KLESAJÚCA $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right) \geq \int_i^{i+1} \ln\left(1 - \frac{x}{k^{d-1}}\right) dx.$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} \ln\left(1 - \frac{x}{k^{d-1}}\right) dx = \int_0^n \ln\left(1 - \frac{x}{k^{d-1}}\right) dx$$

$$(*) \leq 1 - \exp\left(\int_0^n \ln\left(1 - \frac{x}{k^{d-1}}\right) dx\right)$$

$$\int \ln\left(1-\frac{x}{k^{d-1}}\right)dx \qquad t = 1-\frac{x}{k^{d-1}}\ ,\ dt = -\frac{1}{k^{d-1}}\,dx$$

$$= \int \ln t \cdot (-k^{d-1})\,dt =$$

$$= -k^{d-1}(t\ln t - t) = -k^{d-1}\left[\left(1-\frac{x}{k^{d-1}}\right)\ln\left(1-\frac{x}{k^{d-1}}\right) - \left(1-\frac{x}{k^{d-1}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^n \ln\left(1-\frac{x}{k^{d-1}}\right)dx = \overbrace{(n-k^{d-1})}^{<0}\ln\left(1-\frac{n}{k^{d-1}}\right) - n \geq$$

$$\geq (n-k^{d-1})\cdot\left(-\frac{n}{k^{d-1}}\right) - n = -\frac{n^2}{k^{d-1}}$$

$x \geq \ln(1+x)$ ..PRE $x > -1$

$e^x \geq x+1$, TJ. $1-e^x \leq -x$

TAKŽE:

$$q_d \leq 1 - e^{-\frac{n^2}{k^{d-1}}} \leq \frac{n^2}{k^{d-1}}$$

POLOŽME $c = 2\lceil \log_k n \rceil$. POTOM:

$$E[h(T)] = \sum_{d=1}^{\infty} q_d = \sum_{d=1}^{c} q_d + \sum_{d=c+1}^{\infty} q_d \leq$$

$$\leq \sum_{d=1}^{c} 1 + \sum_{d=c+1}^{\infty} \frac{n^2}{k^{d-1}} = c + \frac{n^2}{k^c}\sum_{d=0}^{\infty}\frac{1}{k^d} \leq 2\lceil \log_k n\rceil + \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$\Rightarrow$ KOMPRIMOVANÁ TRIE MÁ OČAKÁVANÚ VÝŠKU $O(\log_k |S|)$ A VYŽADUJE $O(k\cdot|S| + \ell\cdot|S|)$ PRIESTORU.

14.06.2010 Po
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

OBMEDZÍME SA NA OP. MEMBER(x)

V(T) ... MNOŽ. VN. VRCHOLOV KOMPRIMOVANEJ TRIE

LIST v — slovo(v) NIL — ~~slovo~~(v) ⟵ NEPOTREBUJEME

⇒ TRIE MOŽNO REPR. POMOCOU:

$k : V(T) \to \mathbb{N}$,

$M : V(T) \times \Sigma \to \begin{cases} \text{VN. VRCHOL} \in V(T) \\ \text{SLOVO} \\ \text{NIL} \end{cases}$

KOMPRIMOVANÁ REPREZENTÁCIA

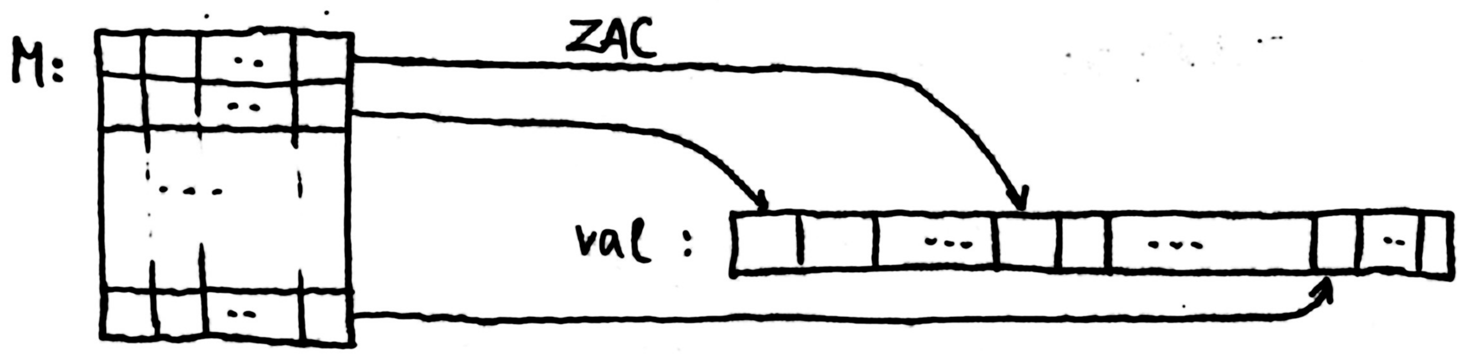
PARCIÁLNA M TYPU $r \times s$ (INDEXUJEME OD 0)

⟶ VEKTOR **ZAC** DIMENZIE r, VEKTOR **val**:

$M(i,j)$ JE DEF. $\Rightarrow M(i,j) = val(ZAC(i) + j)$

$M(i,j), M(i',j')$ SÚ DEF. & $(i,j) \neq (i',j')$

$\Rightarrow ZAC(i) + j \neq ZAC(i') + j'$



KOMP-RIADKY (M)

1) ZOTRIEDIME RIADKY M PODĽA POČTU DEF. MIEST
2) PRECHÁDZAME RIADKY M V KLESAJÚCOM PORADÍ PODĽA POČTU DEF. MIEST ...

ZAC(i) := NAJMENŠIE ČÍSLO TAKÉ, ŽE : $\forall i'$ PREDCHÁDZAJÚCE i A $\forall j, j'$ T.Ž. $M(i,j), M(i',j')$ SÚ DEF. : $ZAC(i)+j \neq ZAC(i')+j'$

... ZÁLEŽÍ NA TOM, V AKOM PORADÍ PRECHÁDZAME RIADKY S ROVNAKÝM POČTOM DEF. MIEST.

---

m ... POČET DVOJÍC (i,j) T.Ž. $M(i,j)$ JE DEF.
m_l ... POČET DEF. (i,j) V RIADKOCH i S $\geq l+1$ DEF. POZÍCIAMI

VETA: $\boxed{\forall l : m_l < \frac{m}{l+1}} \Rightarrow \boxed{\forall i : ZAC(i) < m}$
& ALG. VYŽADUJE ČAS $O(rs + m^2)$.

DÔKAZ. ČAS. ZLOŽITOSŤ:

r_i := POČET j : $M(i,j)$ JE DEF.
R_i := ZOZNAM j: —||—

} ČAS $O(rs)$

KEĎŽE $0 \leq r_i \leq s$ ... TRIEDENIE BUCKETSORT ... $O(r+s)$
NA OVERENIE, ŽE "$ZAC(i) = k$ JE ZAKÁZANÉ" ... $O(r_i)$
KEĎŽE $0 \leq ZAC(i) < m$ ... NÁJDENIE $ZAC(i)$ ... $O(m r_i)$

SPOLU $O(rs + \sum_{i=0}^{r-1} m r_i) = O(rs + m^2)$.

14.06.2010 Mo
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

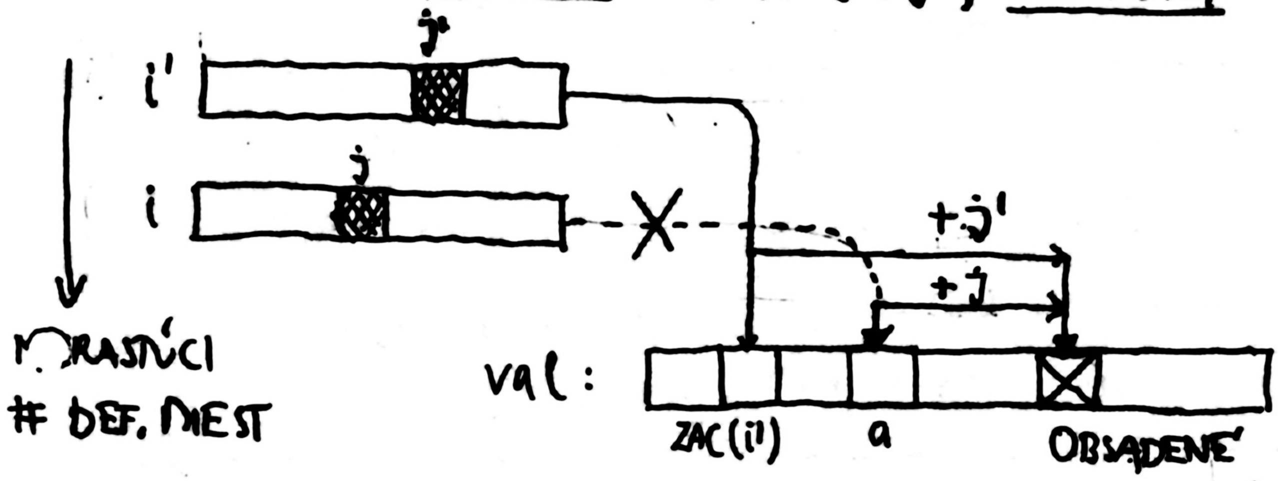
ZOSTÁVA DOKÁZAŤ, ŽE $ZAC(i) < m$ PRE $\forall i$.

KEĎ APLIKUJEME KROK 2) NA RIADOK i T.Ž. $r_i = l$
($\Rightarrow$ PRE $\forall$ PREDCHÁDZAJÚCE i' JE $r_{i'} \geq l$)
POTOM val OBSAHUJE <u>MENEJ NEŽ</u> m_{l-1} DEF. MIEST.

$ZAC(i) = a$ JE <u>ZAKÁZANÁ</u> AK:

$\exists (i,j), (i',j')$: $M(i,j)$, $M(i',j')$ SÚ DEF.,
i' JE PREDCHODCA i,
$a + j = ZAC(i') + j'$.

HOVORÍME, ŽE <u>DVOJICE</u> (i,j), (i',j') <u>ZAKÁZALI</u> $ZAC(i)=a$.

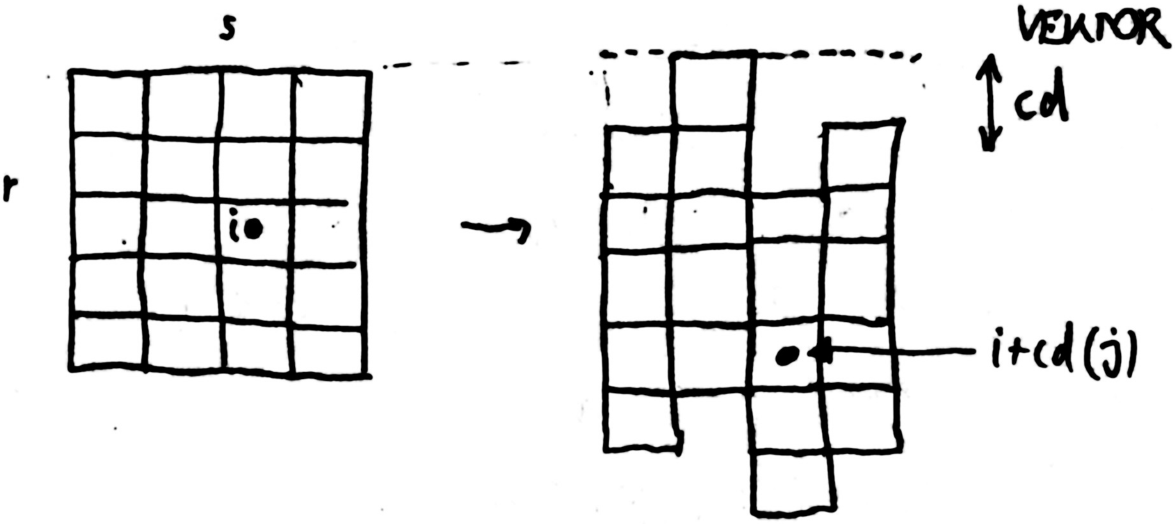


D. DVOJICE $\underbrace{(i,j)}_{\text{TÝCHTO JE } r_i = l}$, $\underbrace{(i',j')}_{\text{TÝCHTO JE } < m_{l-1}}$ ZAKÁŽU $\cancel{ZAC(i) = ZAC(i') + j' - j}$

SPOLU JE ZAKÁZANÝCH $\leq l \cdot m_{l-1} - 1 \leq m - 2$ POZÍCIÍ

$\Rightarrow$ <u>$ZAC(i) < m$</u>. ■

POSÚVANIE STĹPCOV



$$(i,j) \longrightarrow ZAC\big(i + cd(j)\big) + j$$

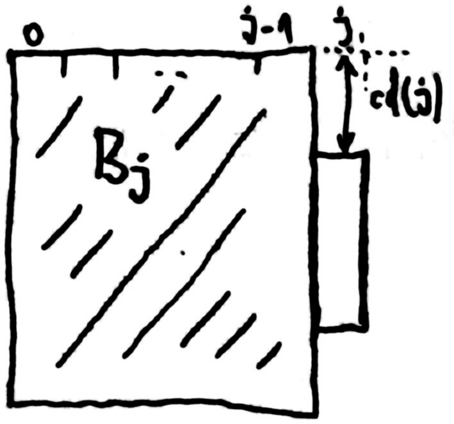
PRE $cd(j) = r \cdot (j-1)$ BUDÚ SPLNENÉ PREDPOKLADY PREDCH. VETY, AVŠAK $\dim ZAC = r.s$, :-(

B_j ... MATICA, PRVÝCH j POSUNUTÝCH STĹPCOV

$m(j)$ ... # DEF. MIEST V B_j (NEZÁVISÍ NA VOĽBE cd)

$m(j)_l$ ... # DEF. MIEST V TÝCH RIADKOCH B_j, KTORÉ MAJÚ ASPOŇ $l+1$ DEF. MIEST

KROK 1 : PRE KAŽDÉ $j=0,\dots,s-1$ NÁJDEME NAJMENŠIE $cd(j)$ T.Ž. :



$$\boxed{\begin{gathered}\forall l = 0,1,\dots : \\ m(j+1)_l \leq \frac{m}{\underbrace{f(l, m(j+1))}_{\text{ŠPECIFIKUJEME NESKÔR}}}\end{gathered}}$$

14.06.2010 Mo
PETER ČERNO

EXAM : DATOVÉ STRUKTURY II

PRE $l = 0$: $m(j)_0 = m(j) \leq \dfrac{m}{f(0, m(j))}$, $j = 1, \dots, s$

TAKŽE: $f(0, m(j)) \leq \dfrac{m}{m(j)}$ PRE KAŽDÉ $j = 1, \dots, s$.

KEĎ PRE KAŽDÉ l PLATÍ $f(l, m) \geq l + 1$, POTOM

$$m_l = m(s)_l \leq \frac{m}{f(l, m(s))} = \frac{m}{f(l, m)} \leq \frac{m}{l+1}$$

$\Rightarrow B_s$ SPĹŇA PREDPOKLADY PREDCH. <u>VETY</u>, A TO CHCEME!

POŽADUJEME, ABY $f(-,-)$ SPĹŇALA:

(i) $f(0, m(j)) \leq \dfrac{m}{m(j)}$ PRE $\forall\, j = 1, 2, \dots, s$

(ii) $f(l, m) \geq l + 1$ PRE $\forall\, l = 0, 1, \dots$

PREDPOKLADAJME, ŽE PRI SPRACOVÁVANÍ STĹPCA S INDEXOM $j-1$ JE ZAKÁZANÁ HODN. $cd(j-1) = a$.

Z PREDCHÁDZAJÚCEHO KROKU VIEME, ŽE

$$m(j-1)_l \leq \frac{m}{f(l, m(j-1))} \quad \text{PRE } \forall\, l = 0, 1, \dots$$

PRETOŽE $cd(j-1) = a$ JE ZAKÁZANÁ, $\exists\, l$ T.Ž.

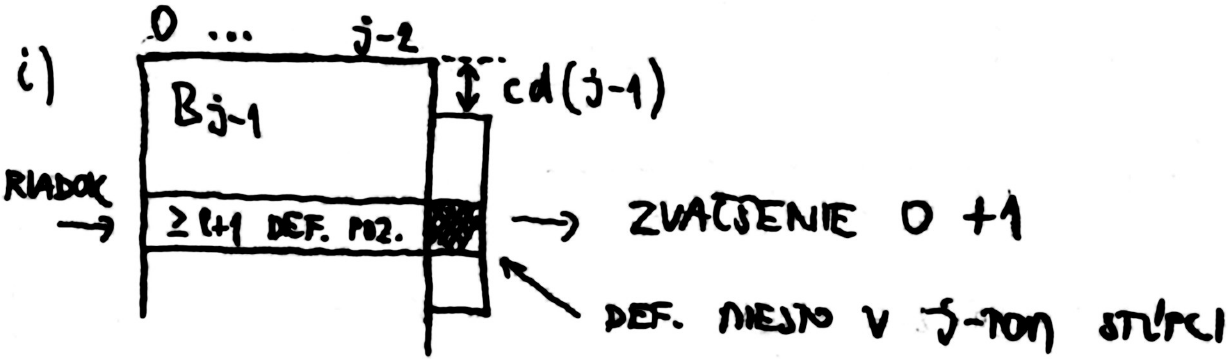
$$m(j)_l > \frac{m}{f(l, m(j))}$$

$$\Rightarrow \quad m(j)_\ell - m(j-1)_\ell > \frac{m}{f(\ell, m(j))} - \frac{m}{f(\ell, m(j-1))}$$

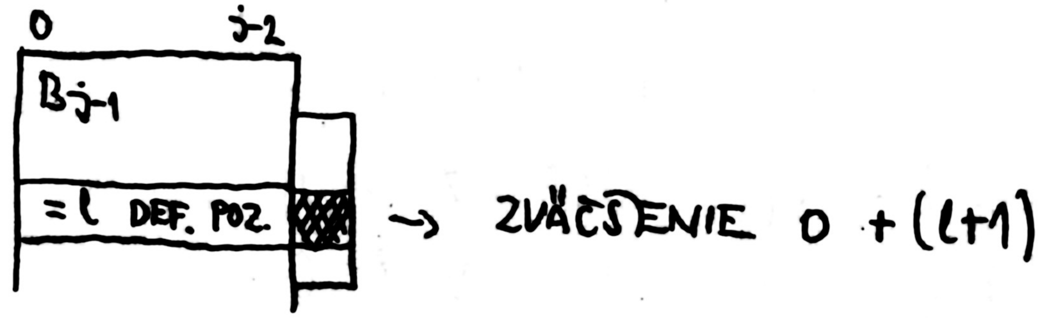
BUDEME PREDP., ŽE f JE KLESAJÚCA V 2. PREMENNEJ.

$m(j)_\ell$ SA MÔŽE ZVÄČŠIŤ, IBA AK:

i)



ii)



ABY $cd(j-1)=a$ BOLA ZAKÁZANÁ, MUSÍ VOĽBA $cd(j-1)=a$ VIESŤ K ASPOŇ:

$$\frac{\dfrac{m}{f(\ell, m(j))} - \dfrac{m}{f(\ell, m(j-1))}}{\ell+1} =: \alpha(\ell)$$

DVOJICIAM (RIADOK B_{j-1} S ASPOŇ ℓ DEF. POZÍCIAMI, DEFINOVANÉ MIESTO V j-TOM STĹPCI)

14.06.2010 Mo
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

B_{j-1} MÁ NAJVIAC:

$$\frac{m(j-1)_{l-1}}{l} \leq \boxed{\frac{m}{l \cdot f(l-1, m(j-1))}}$$

RIADKOV S ASPOŇ l DEF. POZÍCIAMI.

j-TY STĹPEC MÁ $\boxed{m(j) - m(j-1)}$ DEF. MIEST.

CELKOVO: $\dfrac{(m(j) - m(j-1))\, m}{l \cdot f(l-1, m(j-1))}$ DVOJÍC $=: B(l)$

KAŽDÁ DVOJICA PATRÍ DO NAJVIAC 1 NASTAVENIA HODNOTY $cd(j-1)$.

$\Rightarrow$ ZAKÁZANÝCH JE NAJVIAC $\dfrac{B(l)}{\alpha(l)}$ NASTAVENÍ $cd(j-1)$.

POLOŽME $l_0 := \min \left\{ l \;\middle|\; \dfrac{m}{f(l, m(j-1))} < l \right\}$.

POTOM PRE $\forall l \geq l_0$:

$$m(j-1)_l \leq \frac{m}{f(l, m(j-1))} < l_0 \leq l .$$

D. $\neg\exists$ v B_j RIADOK S $> l_0$ DEF. POZÍCIAMI.

$\Rightarrow$ # ZAK. HODNÔT $cd(j-1)$ JE $\leq \displaystyle\sum_{l=1}^{l_0} \frac{B(l)}{\alpha(l)}$

PRE $\boxed{f(x,y) = 2^{x(2-\frac{y}{m})}}$ JE TO $\boxed{\leq 4m \log\log m + 15.3\, m}$.

DÔSLEDOK : PARCIÁLNU MATICU M TYPU $r \times s$ MOŽNO REPR. POMOCOU VEKTOROV cd, ZAC, val

$$(i,j) \longrightarrow ZAC(i + cd(j)) + j$$

$\dim cd = s$, $\quad \sup cd \leq 4m \log\log m + 15.3m$

$\dim ZAC \leq 4m \log\log m + 15.3m + r$, $\quad \sup ZAC \leq m$

$\dim val \leq m + s$

ČAS. ZLOŽITOSŤ ... $O(s(r + m \log(\log m)^2))$.

ĎALŠIA KOMPRESIA

ÚLOHA : REPREZENTOVAŤ VEKTOR v, $\dim v = nd$

$\{ i_0 < i_1 < \dots < i_{s-1} \} \equiv$ ∀ INDEXY j : $v(j) \neq 0$

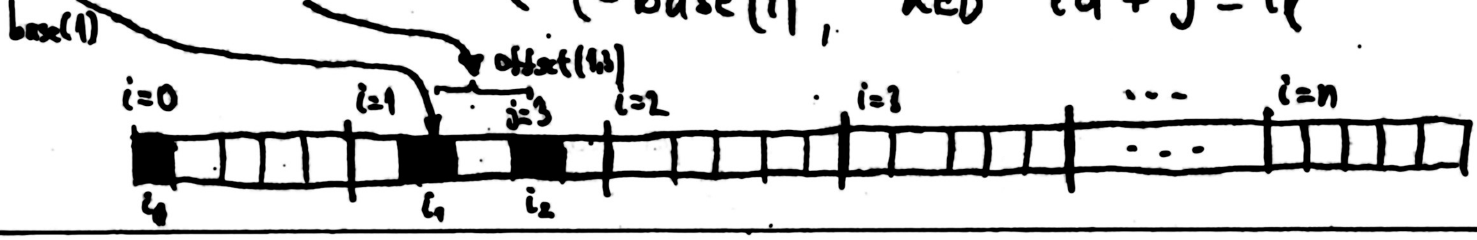
DEFINUJME : cv, $\dim cv = s$, $\quad cv(j) := v(i_j)$.

$base$, $\dim base = n$

$$base(i) = \begin{cases} \text{NAJMENŠIE } l : \; i_l \operatorname{div} d = i \\ -1 \quad \text{AK TAKÉ } l \text{ NEEXISTUJE} \end{cases}$$

$offset(i,j)$ $\quad i = 0, \dots, n-1, \quad j = 0, \dots, d-1$

$$offset(i,j) = \begin{cases} -1, & \text{KEĎ } v(id + j) = 0 \\ l - base(i), & \text{KEĎ } id + j = i_l \end{cases}$$



14.06.2010 Mo.
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

VÝPOČET $v(i)$

$k := i \text{ div } d$

$l := i \bmod d$

AK $\text{offset}(k,l) = -1$, POTOM $v(i) = 0$

INAK $v(i) = cv(\text{offset}(k,l) + \text{base}(k))$

HODNOTY offset SÚ V ROZMEDZÍ $-1 \dots d-1$.

DEFINUJME $\underline{\text{off}}(k) = \sum_{l=0}^{d-1} (\text{offset}(k,l)+1)(d+1)^l$

$\equiv$ KÓDOVANIE $\text{offset}(k,\cdot)$ DO 1 ČÍSLA

$\therefore$ V ROZMEDZÍ $0 \,..\, (d+1)^d - 1$.

AK $d \leq \lceil \log \log n \rceil$, POTOM $(d+1)^d < n$.

DYNAMIZÁCIA

U_1, U_2, U_3 ... UNIVERZÁ

$f : U_1 \times 2^{U_2} \to U_3$ ... VYHĽADÁVACÍ PROBLÉM

$\mathcal{S}$ ... STATICKÁ DAT. ŠTRUKTÚRA RIEŠIACA PROBLÉM f,

i) KEĎ JE DANÝ ALGORITMUS, KT. PRE:

$A \subseteq U_2 \leadsto$ SKONŠTRUUJE $\mathcal{S}(A)$

ii) A ALGORITMUS, KTORÝ PRE:

$x \in U_1$ A $\mathcal{S}(A) \leadsto$ VYČÍSLI $f(x, A)$

$\mathcal{S}$ ... SEMIDYNAMICKÁ, KEĎ JE DANÝ ALG., KT. PRE

$x \in U_2$, $\mathcal{S}(A) \overset{\text{SKONŠT.}}{\leadsto}$ $\mathcal{S}(A \cup \{x\})$ $\equiv$ INSERT(x)

ALG. VYČ. $f(y, A \cup \{x\})$, $\forall y \in U_1$

$\mathcal{S}$ ... DYNAMICKÁ, AK JE SEMIDYNAMICKÁ A

$x \in U_2$, $\mathcal{S}(A) \overset{\text{SKONŠTR.}}{\leadsto}$ $\mathcal{S}(A \setminus \{x\})$ $\equiv$ DELETE(x)

ALG. VYČ. $f(y, A \setminus \{x\})$, $\forall y \in U_1$

VYHĽADÁVACÍ PROBLÉM JE ROZLOŽITEĽNÝ, AK:

$\exists$ BIN. OP. $\odot$ NA U_3 T.Ž.

$\forall A, B \subseteq U_2$, $A \cap B = \emptyset$, $\forall x \in U_1$:

$$\boxed{f(x, A) \odot f(x, B) = f(x, A \dot{\cup} B)}$$

BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE f JE ROZLOŽITEĽNÝ

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

PREDPOKLADY NA f, $\odot$ A $\mathcal{Y}$:

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ $\odot$ ... $O(1)$
ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ $f(x, A)$ ... $Q_y(|A|)$
PAMÄŤOVÁ ZLOŽITOSŤ $\mathcal{Y}(A)$ ... $S_y(|A|)$
ČASOVÁ ZLOŽ. NA KONŠTR. $\mathcal{Y}(A)$ ... $P_y(|A|)$

PREDPOKLADÁME: $Q_y(n)$, $\frac{S_y(n)}{n}$, $\frac{P_y(n)}{n}$ NEKLESAJÚ

KONŠTRUKCIA

... SEMIDYNAMICKÁ $\mathcal{P}$ RIEŠIACA f
AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ **INSERT** BLÍZKA $\frac{P_y(n)}{n}$

$A \subseteq U_2$

NAVZÁJOM DISJUNKTNÉ MNOŽINY:

$$A = \underbrace{A_0}_{2^0} \dot\cup \underbrace{A_1}_{2^1} \dot\cup \underbrace{A_2}_{2^2} \dot\cup \dots \dot\cup A_{\lceil \log_2(|A|) \rceil}$$

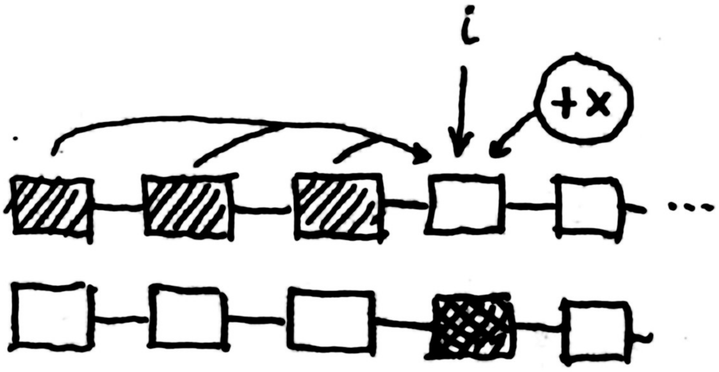
PRVKOV ...

ŠTRUKTÚRA $\mathcal{P}(A)$ POZOSTÁVA Z:

- ZOZNAM $\mathcal{Y}$-ŠTRUKTÚR $\{ \mathcal{Y}(A_i) \mid i = 0, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil$, $A_i \neq \emptyset \}$
- ZOZNAM $\{ s(A_i) \mid i = 0, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil, A_i \neq \emptyset \}$
  KDE $s(A_i)$ JE PROSTÝ DVOJSMERNÝ ZOZNAM PRVKOV MNOŽINY A_i
- ŠTRUKTÚRA T ... REPR. A
  (NAPR. ČERVENO-ČIERNY STROM, ...)

ALGORITMUS PRE VYČÍSLENIE $f(x, A)$:

> return $\bigodot_{A_i \neq \emptyset} f(x, A_i)$



INSERT (x)

if $x \notin T$ then

  INSERT (x, T)

  NÁJDI NAJMENŠIE i T.Ž. $A_i = \emptyset$

  $s(A_i) := \{x\}$

  foreach $j < i$ do

    $s(A_i) := s(A_i) \cdot s(A_j)$ KONKATENÁCIA

    ZRUŠ $s(A_j)$, $\varphi(A_j)$

  VYTVOR $\varphi(A_i)$ ZO ZOZNAMU $s(A_i)$

$$\boxed{1+\sum_{j=0}^{i-1} 2^j = 2^i}$$

◁ BIN. ZÁPIS $|A|$ URČUJE, KT. $A_i \neq \emptyset$.

VETA : P JE SEMIDYNAMICKÁ ŠTR. RIEŠIACA f,

- ZLOŽITOSŤ $f(x, A)$ ... $O(Q_\varphi(n) \cdot \log(n))$

(NAVIAC, KEĎ $Q_\varphi(n) = n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow O(n^\varepsilon)$)

- AMORTIZOVANÁ ZL. INSERT ... $O\left(\frac{P_\varphi(n) \cdot \log(n)}{n}\right)$

(NAVIAC, KEĎ $P_\varphi(n) = n^\varepsilon$, $\varepsilon > 1 \Rightarrow O(n^{\varepsilon-1})$)

- PAMÄŤOVÁ ZLOŽITOSŤ P ... $O(S_\varphi(n))$

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

DÔKAZ. ZLOŽITOSŤ $f(x, A)$:

$$\log_2 n + \sum_{A_i \neq \emptyset} Q_\varphi(|A_i|) \le \log_2 n + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} Q_\varphi(n) =$$

$$= \underline{\underline{O(Q_\varphi(n) \cdot \log n)}}$$

PAMÄŤOVÁ ZLOŽITOSŤ:

$$cn + \sum_{A_i \neq \emptyset} S_\varphi(|A_i|) \le cn + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{S_\varphi(2^i)}{2^i} \cdot 2^i \le$$

$$\le cn + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{S_\varphi(n)}{n} 2^i \le cn + 2 S_\varphi(n) = \underline{\underline{O(S_\varphi(n))}}$$

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ INSERT:

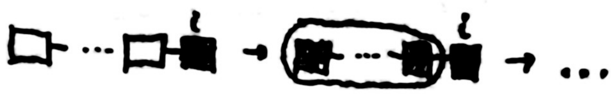
TEST $x \in T$ ... $O(\log n)$

KONKATENÁCIA ZOZNAMOV ... $O(1)$

$\Rightarrow$ VYTVORENIE $s(A_i)$ A ZRUŠENIE $s(A_j), \varphi(A_j)$, $j < i$

VYŽADUJE ČAS ... $O(\log n)$

ĎALŠIA $s(A_i)$ SA MÔŽE VYTVORIŤ AŽ PO $2^{i+1}-1$

ÚSPEŠNÝCH OP. INSERT 

$\Rightarrow$ AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ INSERT

$$c \log_2 n + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{P_\varphi(2^i)}{2^i} \le c \cdot \log n + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{P_\varphi(n)}{n} =$$

$$= \underline{\underline{O\left(\frac{P_s(n)}{n} \log n\right)}}$$

$\to O(n^\varepsilon)$

PRE $\varepsilon > 1$

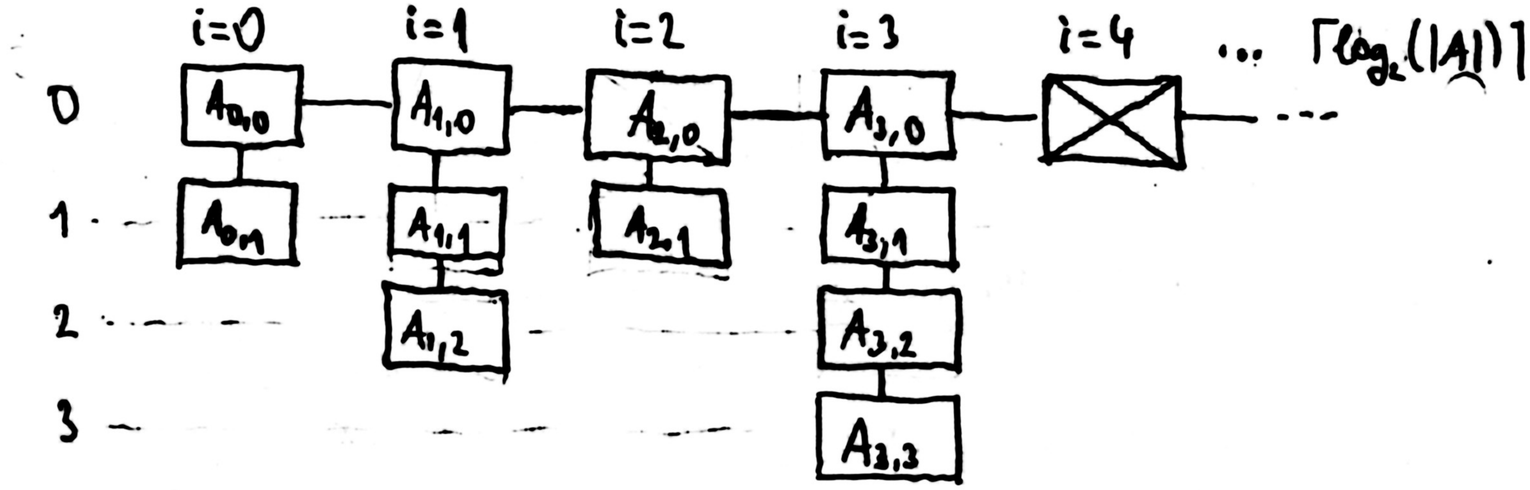
PRE $\varepsilon > 0$: $\log n \le n^\varepsilon$, $\sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (2^i)^\varepsilon \le \boxed{\frac{2^\varepsilon \cdot n^\varepsilon - 1}{2^\varepsilon - 1}} < 2n^\varepsilon$

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ NIE JE VŽDY USPOKOJUJÚCA, CHCEME DOBRÚ ZLOŽITOSŤ OP. $\boxed{\text{INSERT}}$ V NAJHORŠOM PRÍP.

KONŠTRUKCIA

SEMIDYNAMICKÁ Φ_1 RIEŠIACA $\mathcal{J}$

$A \subseteq U_2$



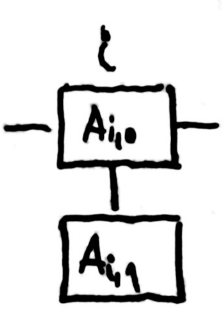
$k_0 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 3 \quad k_4 = -1 \quad \dots$

$i = 0, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil, \quad j = 0, \dots, k_i$

$k_i \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

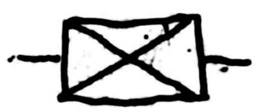
---

a) $k_i \geq 0$



$A_{i,j} \subseteq A$
$|A_{i,j}| = 2^i \qquad \forall j = 0, \dots, k_i$

$k_i = -1$

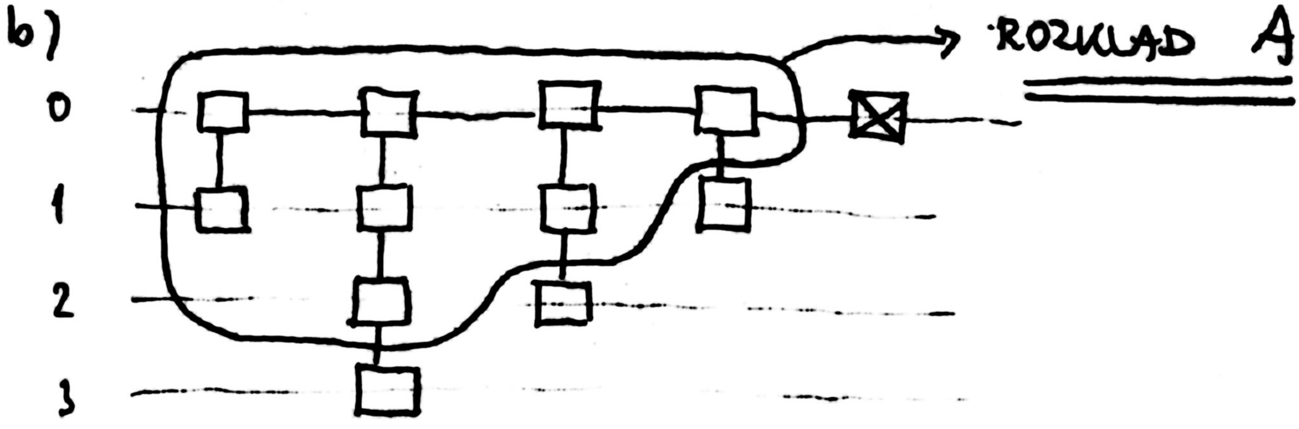


$A_{i,\cdot} = \emptyset$

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

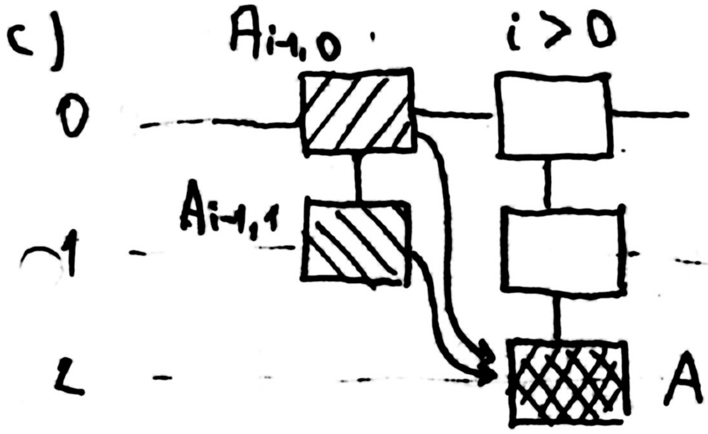
b)



$\{ A_{0,j} \mid j = 0, \dots, k_0 \} \cup \{ A_{i,j} \mid i = 1, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil,$ TAKÉ, ŽE $k_i > 0$ A $j = 0, \dots, k_i - 1 \}$

JE ROZKLAD A

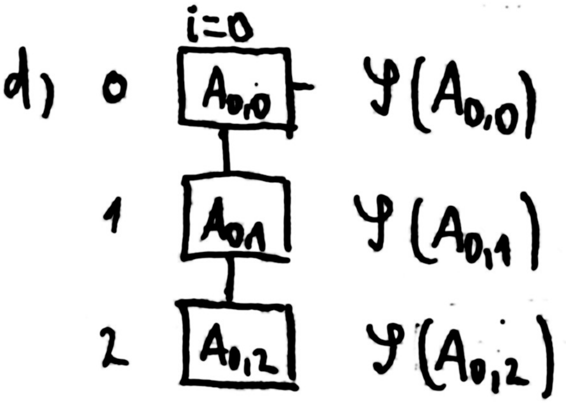
c)



$A_{i,k_i} = A_{i-1,0} \cup A_{i-1,1}$

$k_{i-1} \geq 1 \Leftarrow k_i \geq 0 \Rightarrow$

d)

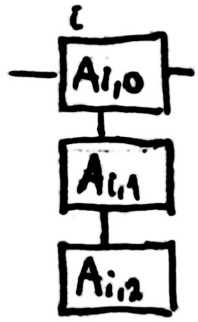


PRE KAŽDÉ $j = 0, \dots, k_0$ JE PRE $A_{0,j}$ VYTVORENÁ φ-ŠTRUKTÚRA $\varphi(A_{0,j})$

e) $i > 0,\ k_i \geq 0$

PRE $j = 0, \dots, k_i - 1$ JE VYTVORENÁ $\varphi(A_{i,j})$

PRE $j = k_i$ ... ROZPRACOVANÁ $\varphi(A_i, k_i)$



0 $\quad \varphi(A_{i,0})$

1 $\quad \varphi(A_{i,1})$

2 $\quad$ ČIASTOČNÁ $\varphi(A_{i,2})$ ... ROZPRACOVANÁ

$k_i = 2$

ŠTRUKTÚRA $P_1(A)$ POZOSTÁVA Z:

- ZOZNAM φ-ŠTRUKTÚR A ROZPRACOVANÝCH φ-ŠTRUKTÚR:

$$\{ \varphi(A_{i,j}) \mid i = 0, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil \text{ T.Ž. } k_i \geq 0,\ j = 0, \dots, k_i \}$$

- ZOZNAM DVOJSMERNÝCH ZOZNAMOV PRVKOV $A_{i,j}$:

$$\{ s(A_{0,j}) \mid j = 0, \dots, k_0 \} \cup$$
$$\cup \{ s(A_{i,j}) \mid i = 1, \dots, \lceil \log_2(|A|) \rceil \text{ T.Ž. } k_i \geq 0,\ j = 0, \dots, k_i - 1 \}$$

- ŠTRUKTÚRA T ... REPR. A

ALGORITMUS PRE VYČÍSLENIE $f(x, A)$

```
f(x, A) := f(x, A_{0,k_0})
foreach i = 0, ..., ⌈log_2(|A|)⌉ , k_i ≥ 0 do
    foreach j = 0, ..., k_i - 1 do
        f(x, A) := f(x, A) ⊙ f(x, A_{i,j})
```

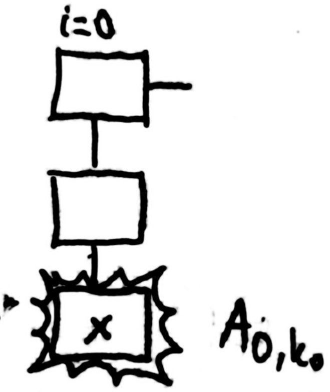
15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

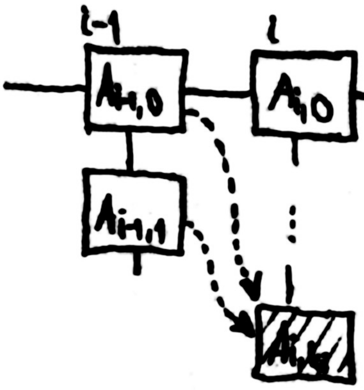
INSERT (x)

if $x \notin T$ then

- INSERT (x, T)
- $k_0 \leftarrow k_0 + 1, \quad A_{0,k_0} \leftarrow \{x\}$
- VYTVOR φ-ŠTRUKTÚRU $\varphi(A_{0,k_0})$
- A SPOJOVÝ ZOZNAM $s(A_{0,k_0})$



- foreach $i = 1, 2 \ldots$ (while $k_i \geq 0$) do
  - VYKONAJ $P_\varphi(2^i)/_{2^i}$ KROKOV V KONŠTRUKCII $\varphi(A_{i,k_i})$



$\frac{P_\varphi(2^i)}{2^i}$ KROKOV PRE $\varphi(A_{i,k_i})$

ZA DOKOPY 2^i KROKOV BUDE $\varphi(A_{i,k_i})$ HOTOVÁ...

  - if KONŠTRUKCIA $\varphi(A_{i,k_i})$ JE DOKONČENÁ then
    - $s(A_{i,k_i}) = s(A_{i-1,0}) \cdot s(A_{i-1,1})$
    - ZRUŠ UZLY $\boxed{A_{i-1,0}}$ A $\boxed{A_{i-1,1}}$ (A PRÍSL. φ-KONŠTR.)
    - $k_{i-1} \leftarrow k_{i-1} - 2$
    - $k_i \leftarrow k_i + 1$
    - VYKONAJ 1. KROK KONŠTRUKCIE $\varphi(A_{i,k_i})$
- if $k_{i-1} = 1$ then $k_i \leftarrow 0$, VYKONAJ 1. KROK PRE $\varphi(A_{i,0})$.

<u>VETA</u> : $\mathcal{P}_1$ JE SEMIDYNAMICKÁ ŠTR. RIEŠIACA f,

- <u>ZLOŽITOSŤ $f(x, A)$</u> ... $O(Q_{\mathcal{Y}}(n) \cdot \log n)$

(NAVIAC KEĎ $Q_{\mathcal{Y}}(n) = n^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ ... $O(n^{\varepsilon})$)

- <u>ZLOŽITOSŤ INSERT</u> ... $O\left(\frac{P_{\mathcal{Y}}(n) \cdot \log n}{n}\right)$

(NAVIAC KEĎ $P_{\mathcal{Y}}(n) = n^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 1$ ... $O(n^{\varepsilon - 1})$)

- <u>PAMÄŤOVÁ ZLOŽITOSŤ</u> ... $O(S_{\mathcal{Y}}(n))$.

DELETE

... POŽADUJEME, ABY PRE $\mathcal{Y}$-ŠTRUKTÚRU EXISTOVALA OPERÁCIA <u>FALOŠNÝ DELETE</u> (→ OP. <u>Označenie</u>)

$$\mathcal{Y}(A) \xmapsto{\text{Označenie}(x)} \begin{cases} \mathcal{Y}(A) \text{ ... AK } x \notin A \\ \bar{\mathcal{Y}}(A) \text{ ... PAM. ZLOŽITOSŤ } S_{\mathcal{Y}}(|A|), \end{cases}$$

+ ALGORITMUS NA $f(y, A \setminus \{x\})$

... S ČASOVOU ZL. $Q_{\mathcal{Y}}(|A|)$)

PRE $x \in U_2$ SKONŠTRUUJEME $\bar{\mathcal{Y}}(A)$ V ČASE $D_{\mathcal{Y}}(|A|)$

PREDPOKLADÁME, ŽE $D_{\mathcal{Y}}$ JE NEKLESAJÚCA

<u>KONŠTRUKCIA</u>

DYNAMICKÁ $\mathcal{D}$ RIEŠIACA f

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

<u>ÚMLUVA</u>: PRE MN. $B = A \setminus \{x_i \mid i = 1, \dots, k\}$

A $\bar{\mathcal{Y}}(B)$ VZNIKNUTÚ ŠTRUKTÚRU:

$\bar{\mathcal{Y}}(B)$ ... VYŽADUJE $S_{\mathcal{Y}}(|A|)$ PAMÄTI

$f(y, B)$ ... VYPOČÍTAME V ČASE $Q_{\mathcal{Y}}(|A|)$

$\bar{\mathcal{Y}}(B \setminus \{x\})$ .. SKONŠTRUUJEME V ČASE $D_{\mathcal{Y}}(|A|)$

HOVORÍME, ŽE $\mathcal{Y}(A)$ JE <u>PÔVODCOM</u> $\bar{\mathcal{Y}}(B)$.

<u>ŠTRUKTÚRA $\mathcal{D}(A)$ POZOSTÁVA Z:</u>

- SÚBOR ŠTRUKTÚR $\{ \bar{\mathcal{Y}}(A_i) \mid i = 0, \dots, \lfloor \log_2(|A|) \rfloor + 3 \}$
- SÚBOR SPOJ. ZOZ. $\{ s(A_i) \mid i = 0, \dots, \lfloor \log_2(|A|) \rfloor + 3 \}$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ PRE $i \neq j$

$\bigcup A_i = A$

BUĎ $A_i = \emptyset$ / ALEBO $2^{i-3} < |A_i| \leq 2^i$ ..

KEĎ $A_i \neq \emptyset$, POTOM $\mathcal{Y}(B_i)$ JE PÔVODCA $\bar{\mathcal{Y}}(A_i)$, $|B_i| \leq 2^i$

- ŠTRUKTÚRA T ... REPR. A

PRE KAŽDÝ PRVOK $a \in A$ SÚ DANÉ UKAZOVATELE SPÁJAJÚCE a V T S PRVKOM a V A_i.

<u>ALGORITMUS PRE VYČÍSLENIE $f(x, A)$</u>

$\Big\}$ return $\bigodot_{A_i \neq \emptyset} f(x, A_i)$.

INSERT (x)

if $x \notin T$ then

INSERT (x, T)

NÁJDI NAJMENŠIE j : $1+\sum_{i=0}^{j}|A_i| \leq 2^j$

PRE TAKTO NÁJDENÉ j PLATÍ :

$1+\sum_{i=0}^{j-1}|A_i| > 2^{j-1}$, TJ. $\sum_{i=0}^{j-1}|A_i| \geq 2^{j-1}$

x AJ VŠETKY PRVKY Z $A_0, \ldots, A_j$ SA "ZMESTIA" DO A_j

$s(A_j) \leftarrow s(A_j) \cup \{x\}$ ... + SPOJ $X \longleftrightarrow T$

foreach $i=0,\ldots,j$ do

$s(A_j) \leftarrow s(A_j) \cdot s(A_i)$

ZRUŠ $s(A_i)$, $\overline{\varphi}(A_i)$

SKONŠTRUUJ $\overline{\varphi}(A_j)$ A OPRAV ODKAZY

DELETE (x)

if $x \in T$ then

NÁJDI i T.Ž. $x \in s(A_i)$

ODSTRÁŇ x ZO ZOZNAMU $s(A_i)$ → PRÍPADY:

i) $|A_i| = 1 \Rightarrow$ ZRUŠ $\overline{\varphi}(A_i)$ AJ $s(A_i)$

ii) $2^{i-1}+2 \leq |A_i| \Rightarrow$ Označenie $(x, \overline{\varphi}(A_i))$

iii) $1 < 2^{i-1}+1 = |A_i| \Rightarrow$

a) KEĎ $A_{i-1} = \emptyset$ ALEBO $|A_{i-1}| \geq 2^{i-2}+1$:

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

VYMEŇ $s(A_{i-1}) \leftrightarrow s(A_i)$, $\bar{\varphi}(A_i) := \bar{\varphi}(A_{i-1})$
VYBUDUJ $\bar{\varphi}(A_{i-1})$ ZO ZOZNAMU $s(A_{i-1})$

b) KEĎ $0 < |A_{i-1}| \leq 2^{i-2}$:

$s(B) \leftarrow s(A_{i-1}) \cdot s(A_i)$

ZRUŠ $s(A_{i-1})$, $s(A_i)$, $\bar{\varphi}(A_{i-1})$, $\bar{\varphi}(A_i)$

VYBUDUJ $\bar{\varphi}(B)$ ZO ZOZNAMU $s(B)$

KEĎ $|B| < 2^{i-2} \Rightarrow \bar{\varphi}(A_{i-1}) \leftarrow \bar{\varphi}(B)$, $s(A_{i-1}) \leftarrow s(B)$

KEĎ $|B| \geq 2^{i-2} \Rightarrow \bar{\varphi}(A_i) \leftarrow \bar{\varphi}(B)$, $s(A_i) \leftarrow s(B)$.

DELETE (x, T)

◁ KEĎ INSERT VYTVORÍ φ-ŠTRUKTÚRU $\bar{\varphi}(A_j)$,
POTOM $2^{j-1} < |A_j| \leq 2^j$

◁ KEĎ DELETE VYTVORÍ φ-ŠTRUKTÚRU $\bar{\varphi}(A_i)$,
POTOM $2^{i-2} \leq |A_i| \leq 2^{i-1}$.

PLATÍ V PRÍPADE (ii) a), KDE
$s(A_{i-1})$ OBSAHUJE 2^{i-3} PRVKOV

V PRÍPADE (ii) b) :

$2^{i-3} < |B| \leq 2^{i-3} + 2^{i-2} < 2^{i-1}$, T.J. PLATÍ.

◁ KEĎ DELETE(x) PRE $x \in A_i$ VYTVÁRA $\bar{\varphi}(A_{i-1})$,
POTOM BUĎ $|A_{i-1}| > 2^{i-2}$, ALEBO $|A_{i-1}| \leq 2^{i-3}$.

VETA: AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ DELETE JE $O\left(D_y(n) + \log n + \frac{P_y(n)}{n}\right)$.

KEĎ DELETE(x) VYTVÁRA y-ŠTRUKTÚRU $\mathcal{Y}(A_j)$, POTOM $j = l$ ALEBO $j = l-1$.

$$2^{j-1} \geq |A_j| \geq 2^{j-2}$$

KEĎ $j = l-1$, POTOM $A_l = \emptyset$, ALEBO $|A_l| > 2^{l-2}$.

VYTVORENIE $\mathcal{Y}(A_j)$ MÔŽE ZNOVU NASTAŤ AŽ PO ASPOŇ 2^{j-3} OP. DELETE(z), KT. OZNAČIA $z \in A_j$.

$\Rightarrow$ AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ VYTVÁRANIA $\mathcal{Y}$-ŠTRUKTÚRY JE NAJVIAC $c \cdot P_y(2^{j-2}) / 2^{j-3} = O(P_y(n)/n)$. □

VETA: KEĎ APLIKUJEME POSTUPNOSŤ $\{\Phi_i\}_{i=1}^{l}$ OP. <u>INSERT</u> A <u>DELETE</u> NA $\mathcal{D}(\emptyset)$, POTOM AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ <u>INSERT</u> JE $O\left(\frac{P_y(n)\log n}{n}\right)$.

Φ_{k_0} ... <u>INSERT</u> ⟶ Φ_{k_1} ... <u>INSERT</u>

↓ ↓

VYTVORÍ $\mathcal{Y}(A_j)$ — VYTVORÍ $\mathcal{Y}(A_l)$ $\quad l \geq j$

$\forall j' < j : A_{j'} = \emptyset$

PRED Φ_{k_1} MUSÍ BYŤ

NUTNE $k_1 - k_0 \geq 2^{j-2}$ $\qquad$ $\left|\bigcup_{i=0}^{j-1} A_i\right| \geq 2^{j-1}$

<u>DELETE</u> MÔŽE Z A_j DO A_l PRESUNÚŤ $\leq 2^{j-3}$ PRV.

$\Rightarrow$ AM. ZLOŽ. JE $\log(n) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{P_y(2^i)}{2^{i-2}} = O\left(\frac{P_y(n)\log n}{n}\right)$.

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

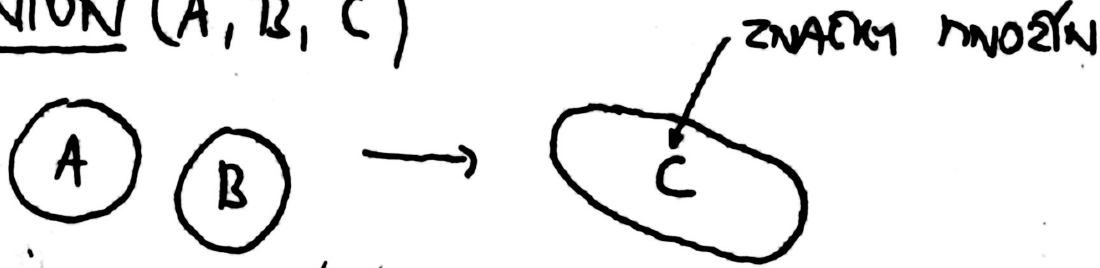
EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

PROBLÉM UNION-FIND

VSTUP: ROZKLAD $\mathcal{S}$ UNIVERZA $U = \{1, \dots, n\}$
POZOSTÁVAJÚCI Z 1-PRVKOVÝCH MNOŽÍN $\mathcal{S} = \{\{i\} \mid i \in U\}$

ÚLOHA: IMPLEMENTOVAŤ

UNION (A, B, C)



FIND (x)

RIEŠENIE 1 ... PREFERUJÚCE FIND

$R[1, \dots, n]$, $R[x] \longrightarrow A$

FIND (x) : return $R[x]$ ... $O(1)$

UNION (A, B, C) :

foreach $x \in U$ do
    if $(R[x] = A) \vee (R[x] = B)$ then $R[x] \leftarrow C$

... $O(n)$

VYLEPŠENIE : $R[x] \mapsto$ VN. REPR. MNOŽINY $\ni x$

s : NÁZOV MNOŽINY $\mapsto$ ZOZNAM PRVKOV

SIZE : NÁZOV MNOŽINY $\mapsto$ VEĽKOSŤ MN.

MAPIN : NÁZOV MNOŽINY $\mapsto$ VNÚTORNÁ REPR. MN.

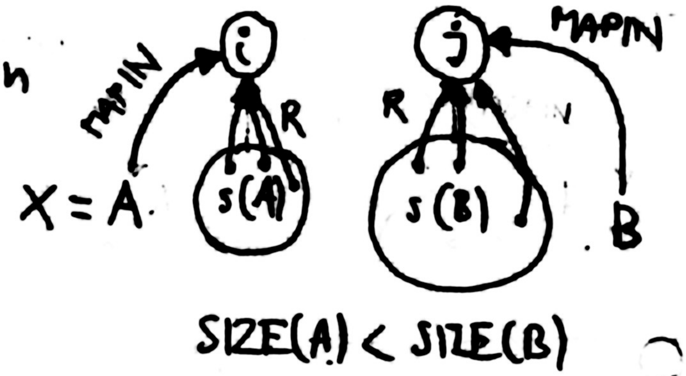
MAPOUT : VNÚTORNÁ REP. $\mapsto$ NÁZOV MNOŽINY

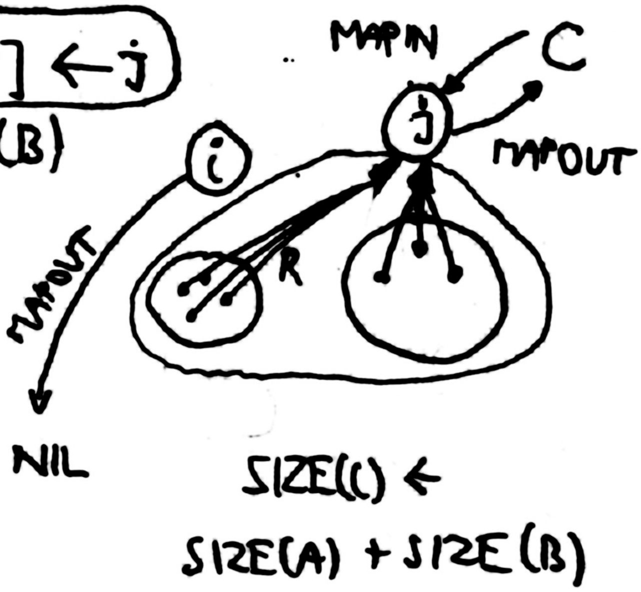
FIND (x) ... $O(1)$

return MAPOUT$(R[x])$ ... $O(1)$

UNION (A, B, C)

```
if SIZE(A) < SIZE(B) then
    i ← MAPIN(A)
    j ← MAPIN(B)
    X ← A
else ... PODOBNE ...
foreach x ∈ s(X) do R[x] ← j
SIZE(C) ← SIZE(A) + SIZE(B)
MAPIN(C) ← j
MAPOUT(j) ← C
MAPOUT(i) ← NIL
```





VETA : $m \times$FIND, $(n-1)\times$UNION ... $\underline{\underline{O(m + n \log n)}}$

15.06.2010 Tu
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

DÔKAZ. $p(x)$ ... KOĽKOKRÁT BOLA ZMENENÁ HODNOTA $R[x]$.

PLATÍ: $p(x) \leq \log_2 n$.

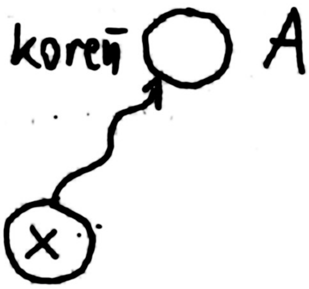
INVARIANT: KEĎ PRE $x \in A$ JE $p(x) = i$, POTOM $|A| \geq 2^i$. ■

RIEŠENIE 2 ... PREFERUJÚCE UNION

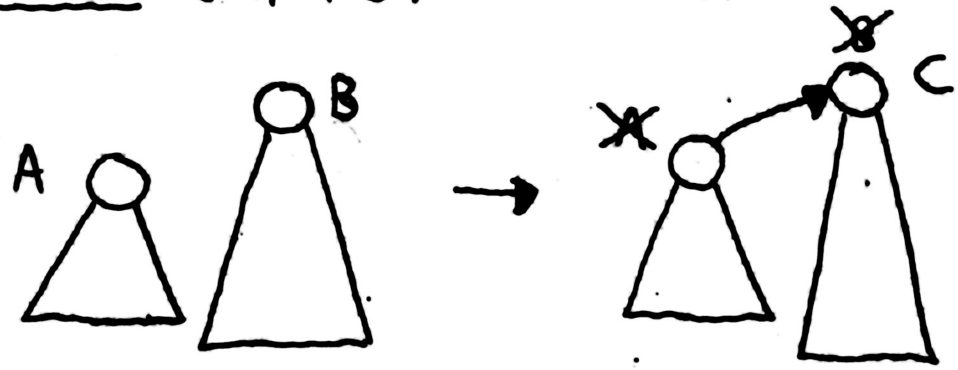
$A \in \mathcal{Y}$ ... REPREZENTOVANÁ STROMOM ...

FIND (x)

```
v := vrchol(x)
while otec(v) ≠ NIL do
   v ← otec(v)
return názov(v)
```



UNION (A, B, C) ... $O(1)$



SIZE(A) < SIZE(B)

VETA: $m \times$ FIND, $(n-1) \times$ UNION ...
$O(n + m \log n)$

DÔKAZ. FIND(x) ... $O(\text{hĺbka}(x))$

INVARIANT: KEĎ PRE $x \in A$
JE hĺbka$(x) = i$, POTOM $|A| \geq 2^i$. ∎

RIEŠENIE 3

UNION BY RANK WITH
PATH COMPRESSION
BUDE PREZENTOVANÉ NESKÔR

16.06.2010 We
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

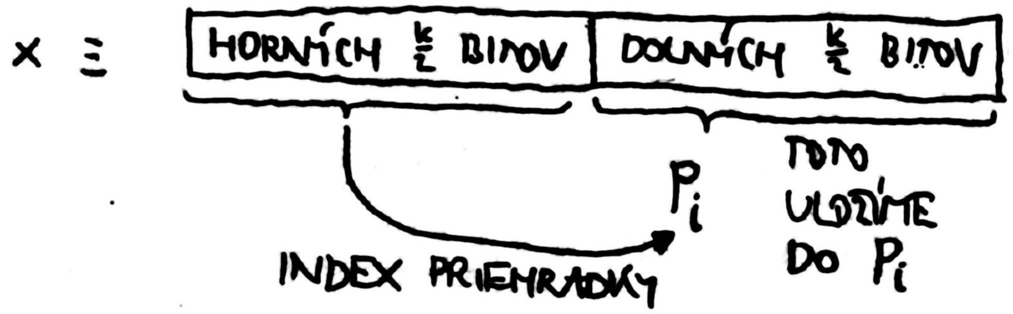
ZOVŠEOBECNENIE HALD

VAN-EMDE-BOAS TREES

RAM-OVÁ ŠTRUKTÚRA, REPREZENTUJÚCA $S \subseteq \{0, \dots, U-1\}$
... DOKÁŽE VYKONÁVAŤ „STROMOVÉ OPERÁCIE"
(VKLADANIE, MAZANIE, NÁSLEDNÍK)
V ČASE $O(\log \log U)$.

<u>DEFINÍCIA</u> <u>VEBT(U)</u> OBSAHUJE: (BÚNO $U=2^{2^k}$)

- min, max REPR. MNOŽINY
- PRIEHRADKY $P_0, \dots, P_{\sqrt{U}}$ OBSAHUJÚCE VŠETKY <u>OSTATNÉ HODNOTY</u> ... REPREZENTOVANÉ AKO <u>VEBT($\sqrt{U}$)</u>



- SUMÁRNA VEBT($\sqrt{U}$) OBSAHUJÚCA ČÍSLA NEPRÁZDNYCH PRIEHRADOK :

<u>FindMin</u> / <u>FindMax</u> ... V KORENI V ČASE $O(1)$

<u>Find(x)</u> ... PRIAMOČIARO REKURZIOU V ČASE $O(k)$

<u>Insert(x)</u>

1. OŠETRÍME TRIVIÁLNE PRÍPADY (PRÁZDNY/JEDNOPR. STROM)
2. AK JE TO NUTNÉ, PREHODÍME x S min / max
3. PRVOK x PADNE DO PRIEHRADKY P_i
   a) AK JE $P_i = \emptyset$, $\Rightarrow$
      Insert(i) DO SUMÁRNEHO STROMU
      ZALOŽENIE TRIVIÁLNEHO STROMU PRE P_i
   b) AK JE $P_i \neq \emptyset$ $\Rightarrow$
      PREVEDIEME NA INSERT V PODSTROME P_i

V KAŽDOM PRÍPADE BUĎ ROVNO SKONČÍME, ALEBO IDEME DO STROMU NIŽŠIEHO RÁDU.

<u>Delete(x)</u>

1. OŠETRÍME TRIVIÁLNE PRÍPADY (PRÁZDNY / JEDNOPRV. / DVOJPRVKOVÝ)
2. KEĎ MAŽEME min (ANALOGICKY max), NAHRADÍME HO MINIMOM Z PRVEJ NEPRÁZDNEJ PRIEHRADKY P_i (TÚ NÁJDEME V ČASE $O(1)$ PODĽA SUMÁRNEHO STROMU) A PREVEDIEME NA Delete V PRIEHRADKE P_i

16.06.2010 Wk
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

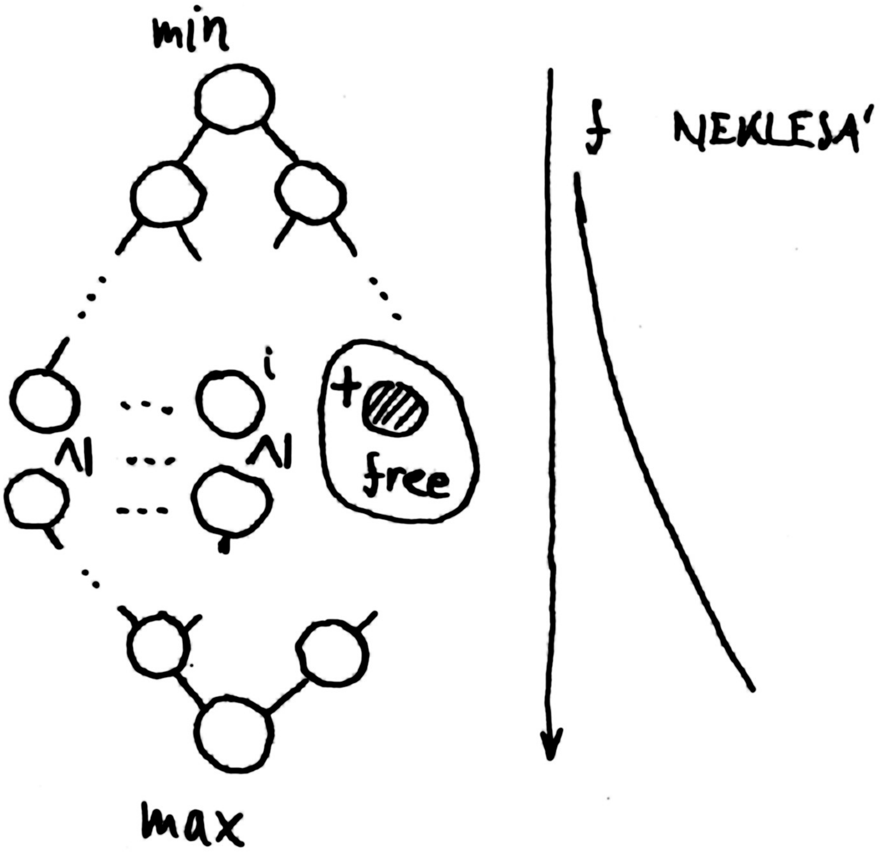
3. PRVOK x PADNE DO P_i:
   a) AK JE P_i JEDNOPRVKOVÁ:
   ZRUŠÍME PRIEHRADKU
   Delete(i) V SUMÁRNOM STROME
   b) AK JE P_i VIACPRVKOVÁ:
   Delete V PRIEHRADKE P_i

Succ(x)

1. TRIVIÁLNE PRÍPADY ($x < \min \to \min$, $x \geq \max \to +\infty$)
2. PRVOK x PADNE DO P_i:
   a) $P_i = \emptyset$ v $\max(P_i) = x$, POTOM:
   POMOCOU Succ V SUMÁRNOM STROME NÁJDEME P_j
   AK EXISTUJE $\to$ VRÁTIME $\min(P_j)$
   AK NEEXISTUJE $\to$ VRÁTIME max
   b) $x < \max(P_i)$, POTOM:
   PREVEDIEME NA Succ V P_i.

ČASOVÁ ZLOŽITOSŤ TÝCHTO OP. $O(k) = O(\log \log U)$
PAMÄŤOVÁ ZLOŽITOSŤ $O(U \cdot \log \log U)$

MIN-MAX BINÁRNA HALDA



POPIS OPERÁCIÍ ... <u>VIĎ SKRIPTÁ</u>

ČAS. ZLOŽITOSŤ MIN, MAX ... $O(1)$

OSTATNÉ HALDOVÉ OP ... $O(\log n)$

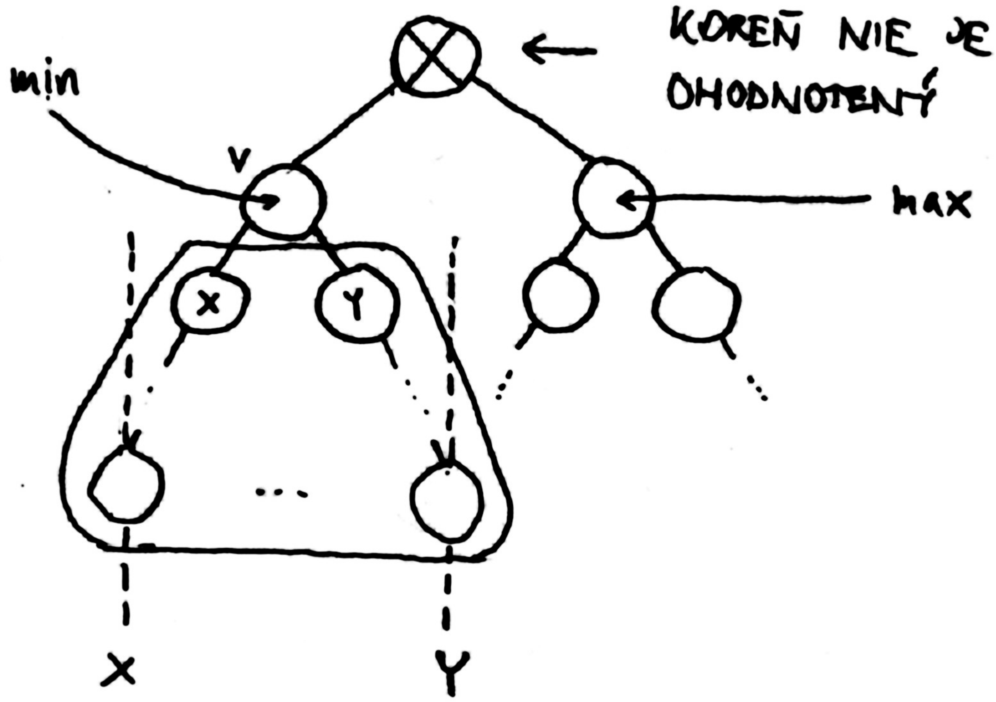
... MOŽNO REPREZENTOVAŤ POMOCOU 2 ROVNAKO VEĽKÝCH POLÍ A PREMENNEJ FREE.

3/6

16.06.2010 We
PETER ČERNO

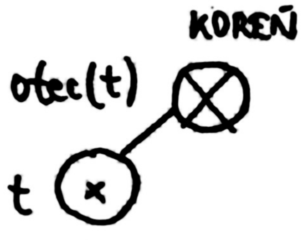
EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

SYMETRICKÁ MIN-MAX HALDA



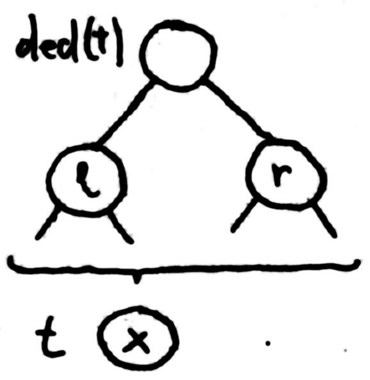
Up (x)

a)



→ <u>KONIEC</u>.

b)

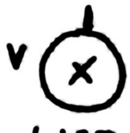


$x < l \Rightarrow$ SWAP $x \leftrightarrow l$

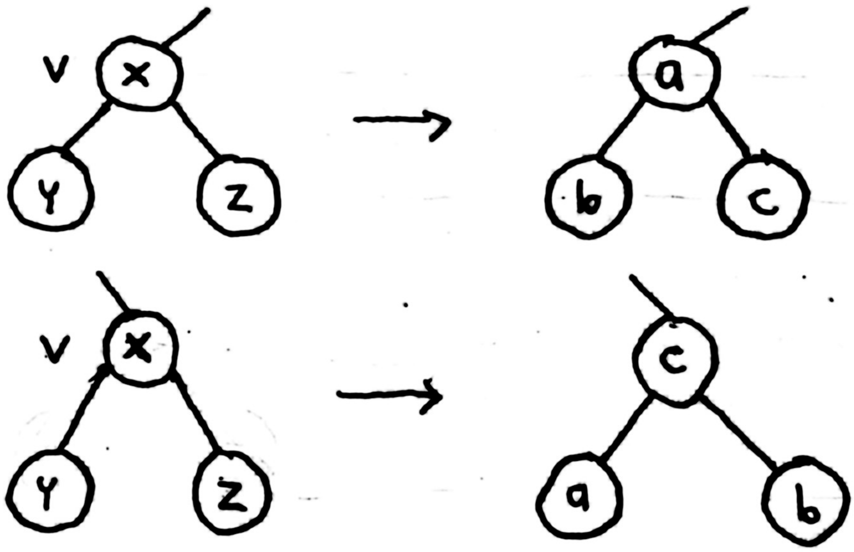
$x > r \Rightarrow$ SWAP $x \leftrightarrow r$

V OPAČNOM PRÍPADE → <u>KONIEC</u>.

Down (x)

a)  ⟶ KONIEC.

LIST

b) 

AK $x = a$, TAK KONIEC.

AK $x = c$, TAK KONIEC.

$\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$, $a < b < c$

POKRAČUJ VO VRCHOLE REPREZENTUJÚCOM x

REFLEX - HALDA

JEDNOKONCOVÁ HALDA ♡ REPREZENTUJÚCA S

⟶ DVOJKONCOVÁ HALDA 

Q_{min} ...... $|S_1| \doteq \lceil |S|/2 \rceil$

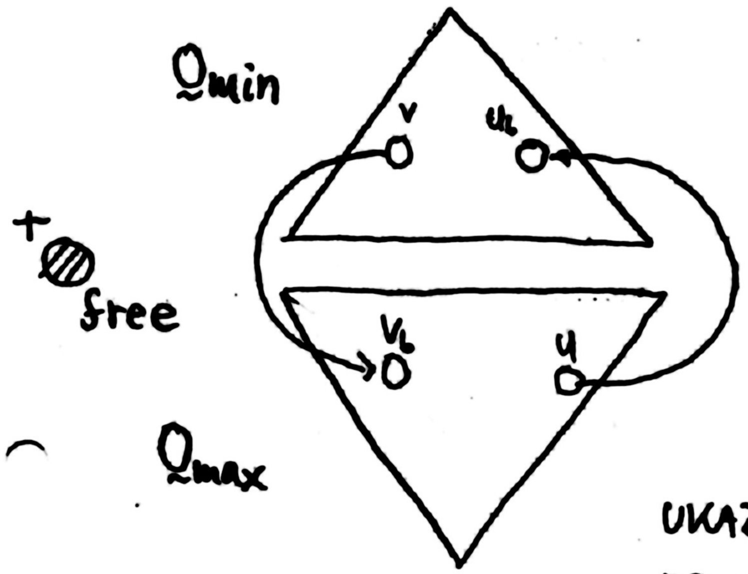
+ ● free

Q_{max} .... $|S_2| = \lceil |S|/2 \rceil$

REPR. S, $S = S_1 \cup S_2$ (+free)

16.06.2010 We
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II



$\forall v \in Q_{min} : (v_L)_L = v$

&

$key(v) < key(v_L)$

PRI UP, DOWN SA UKAZATELE MEDZI PRVKAMI POHYBUJÚ SÚČASNE S PRVKAMI (TJ. NIE S VRCHOLMI)

Insert(x)

1. AK $x < min$ ALEBO $x > max$, POTOM VYMEŇ x S TÝMTO PRVKOM
2. AK $free = \emptyset$, POTOM $free := x$
3. AK $free \neq \emptyset$, POTOM:

   $\min\{x, free\} \rightarrow Q_{min}$

   $\max\{x, free\} \rightarrow Q_{max}$

Delete(x)

1. AK $free = \emptyset$, POTOM
   PRESUN KĽÚČA SPÁROVANÉHO VRCHOLU DO free
2. AK $free \neq \emptyset$, POTOM
   free NAHRADÍ ODSTRÁNENÝ PRVOK

PROBLÉM UNION-FIND POMOCOU UNION BY RANK & PATH COMPRESSION

MAKE-SET (x)

$p[x] \leftarrow x$ ... PARENT  ... KOREŇ

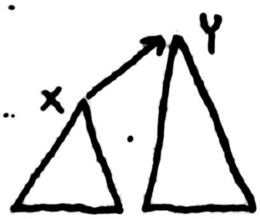
$rank[x] \leftarrow 0$ ... RANK = VÝŠKA STROMU

UNION (x, y)

LINK (FIND-SET (x), FIND-SET (y))

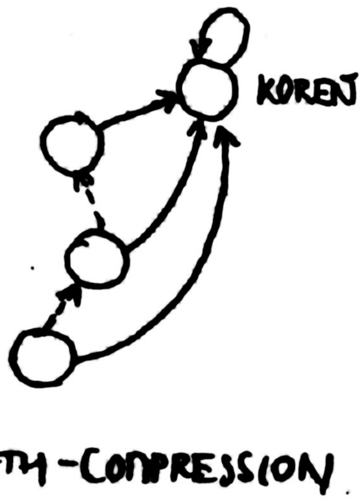
LINK (x, y)

if $rank[x] > rank[y]$ then $p[y] \leftarrow x$
else $p[x] \leftarrow y$
if $rank[x] = rank[y]$ then
  $rank[y] \leftarrow rank[y] + 1$



FIND-SET (x)

if $x \neq p[x]$ then
  $p[x] \leftarrow$ FIND-SET $(p[x])$
return $p[x]$



PATH-COMPRESSION

16.06.2010

PETER ČERNO

EXAM : DATOVÉ STRUKTURY II

m OPERÁCII NA n PRVKOVOM UNIVERZU MÁ ZLOŽITOSŤ $O(m\,\alpha(n))$.

PRE $k \geq 0$, $j \geq 1$ DEFINUJEME:

$$\boxed{A_k(j) = \begin{cases} j+1, & \text{AK } k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j), & \text{AK } k \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{\alpha(n) := \min\{k : A_k(1) \geq n\}}$$

$\alpha(n) \leq 4$ PRE VÄČŠINU REÁLNYCH VSTUPOV

LEMMA 1 :

i) PRE $\forall x$: $rank[x] \leq rank[p[x]]$
PRIČOM $rank[x] < rank[p[x]]$, AK $x \neq p[x]$

ii) HODNOTA $rank[x]$ JE NA ZAČIATKU 0 A RASTIE, AŽ KÝM NENASTANE: $x \neq p[x]$ ... V TOM MOMENTE PRESTANE $rank[x]$ RÁSŤ A UŽ SA NEZMENÍ

iii) HODNOTA $rank[p[x]]$ RASTIE V PRIEBEHU ČASU

LEMMA 2 : $\forall x : \text{rank}[x] \leq n-1$

ODTERAZ BUDEME PREDPOKLADAŤ, ŽE POUŽÍVAME IBA LINK (TJ. NIE UNION), A ŽE VSTUPOM BUDÚ VŽDY 2 RÔZNE KORENE ...

POTENCIÁLOVÁ FUNKCIA

PO q KROKOCH KAŽDÉMU UZLU x PRIRADÍME POTENCIÁL $\varphi_q(x)$.

CELKOVÝ POTENCIÁL $\Phi_q = \sum_x \varphi_q(x)$.

NA ZAČIATKU POLOŽME $\Phi_0 = 0$.

VŽDY BUDE PLATIŤ $\Phi_q \geq 0$

---

i) AK x JE KOREŇ, ALEBO $\text{rank}[x] = 0$, POTOM

$$\varphi_q(x) = \alpha(n)\,\text{rank}[x]$$

ii) PREDPOKLADAJME, ŽE $x \neq p[x]$ A $\text{rank}[x] \geq 1$

$$\text{level}(x) := \max\{k \mid \text{rank}[p[x]] \geq A_k(\text{rank}[x])\}$$

LEMMA level : $0 \leq \text{level}(x) < \alpha(n)$.

16.06.2010
PETER CERNO

EXAM: DATOVÉ STRUKTURY II

DŐKAZ.

$$\mathrm{rank}[p[x]] \geq \mathrm{rank}[x]+1 = A_0(\mathrm{rank}[x]).$$

$$\Rightarrow \mathrm{level}(x) \geq 0$$

$$A_{\alpha(n)}(\mathrm{rank}[x]) \geq A_{\alpha(n)}(1) \geq$$ ← PODĽA DEF. $\alpha(n)$

$$\geq n > \mathrm{rank}[p[x]]$$

$$\Rightarrow \mathrm{level}(x) < \alpha(n). \quad \square$$

$$\mathrm{iter}(x) := \max\{i \mid \mathrm{rank}[p[x]] \geq A^{(i)}_{\mathrm{level}(x)}(\mathrm{rank}[x])\}$$

LEMMA iter: $1 \leq \mathrm{iter} \leq \mathrm{rank}[x]$.

DŐKAZ. ZREJME. $\mathrm{iter} \geq 1$

$$A^{(\mathrm{rank}[x]+1)}_{\mathrm{level}(x)}(\mathrm{rank}[x]) =$$

$$= A_{\mathrm{level}(x)+1}(\mathrm{rank}[x]) > \mathrm{rank}[p[x]]$$

$$\Rightarrow \mathrm{iter} \leq \mathrm{rank}[x]. \quad \square$$

DEFINUJME:

$$\boxed{\varphi_q(x) := \begin{cases} \alpha(n)\cdot \mathrm{rank}[x] & \text{AK } p[x]=x \vee \mathrm{rank}[x]=0 \\ (\alpha(n)-\mathrm{level}(x))\cdot \mathrm{rank}[x] - \mathrm{iter}(x) & \text{INAK} \end{cases}}$$

LEMMA φ_q : $0 \le \varphi_q(x) \le \alpha(n)\,\mathrm{rank}[x]$

DOKAZ. ZREJME PLATÍ, AK $p[x]=x \vee \mathrm{rank}[x]=0$.

V OPAČNOM PRÍPADE:

$$\varphi_q(x) = (\alpha(n) - \mathrm{level}(x)) \cdot \mathrm{rank}[x] - \mathrm{iter}(x)$$

TAKŽE $\le$ JE ZREJMÁ, PRETOŽE $\mathrm{level}(x), \mathrm{iter}(x) \ge 0$.

KEĎŽE: $\mathrm{level}(x) \le \alpha(n) - 1$

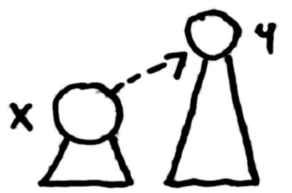
$\mathrm{iter}(x) \le \mathrm{rank}[x]$

PLATÍ AJ $\ge$. □

LEMMA : NECH $O_q \in \{\text{LINK}, \text{FIND-SET}\}$ A x NIE JE KOREŇ. POTOM $\varphi_q(x) \le \varphi_{q-1}(x)$.

AK SA ZMENÍ $\mathrm{level}(x)$ ALEBO $\mathrm{iter}(x)$, POTOM $\varphi_q(x) \le \varphi_{q-1}(x) - 1$.

LEMMA : AMORTIZOVANÁ Č.ZL. LINK ... $O(\alpha(n))$.



JEDINE $\varphi_q(y)$ MÔŽE NARÁSŤ ... NAJVIAC O $\alpha(n)$.

PRE OSTATNÉ UZLY: $\varphi_q \le \varphi_{q-1}$ □

LEMMA : AMORT. ZL. FIND-SET ... $O(\alpha(n))$.

... ASPOŇ $\max\{0, s - (\alpha(n)+2)\}$ UZLOV ... POKLES φ □

17.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

HODNOSTNÁ FUNKCIA $\longleftrightarrow$ ČERVENO-ČIERNY STROM

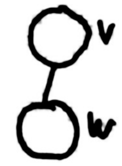
PREVOD (2,4)-STROM $\longleftrightarrow$ ČERVENO-ČIERNY STROM

POLOVYVÁŽENÝ T $\longleftrightarrow$ HODNOSTNÁ FUNKCIA

$\to$) HĽADÁME f,

CHCEME $\lceil \frac{r(v)}{2} \rceil \le f(v) \le s(v)$

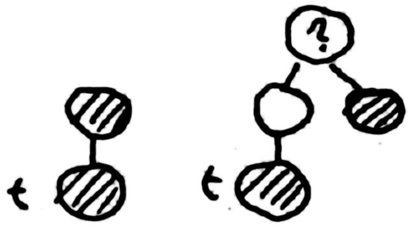
STAČÍ $f(w) := \max \{ f(v)-1, \lceil \frac{r(w)}{2} \rceil \}$



AVL STROM $\to$ POLOVYVÁŽENÝ

VYVAŽOVANIE ZHORA $\to$ NADOL

Rotace, Dvojita-Rotace



INSERT

INVARIANT:
(1) t JE ČIERNY:
a) t JE KOREŇ, ALEBO
b) otec(t) / brat(otec(t)) JE ČIERNY
(2) $\lambda(t) < x < \pi(t)$

AK t JE LIST ... TRIV. INSERT

DELETE

INVARIANT:
(1) t JE ČIERNY RÔZNY OD KOREŇA
(2) otec(t) JE ČERVENÝ
(3) hot=false $\Rightarrow$ EŠTE SME NENAŠLI $w: key(w)=x$
PLATÍ $\lambda(t) < x < \pi(t)$
(4) hot=true $\Rightarrow$ $\pi(t) = x = key(w)$

AK t JE LIST ... TRIV. DELETE

RELAXOVANÉ STROMY

ČERVENO-ČIERNY STROM + FRONTA VYVAŽ. POŽIADAVIEK

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ:

b V HĽBKE i ... $+i$

v V HĽBKE i:

i) otec ... ČERVENÝ ... $+1$

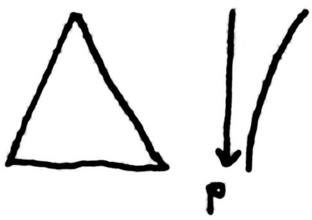
ii) otec ... ČIERNY ... $+i+2$

NÁHODNÉ BIN. VYHĽ. STROMY

STROM REK. VOLANÍ QUICKSORT$(x_1, \dots, x_n)$ $\longleftrightarrow$ BIN. VYHĽ. STROM: INSERT$(x_1), \dots,$ INSERT(x_n)

TREAP

$s \mapsto p(s)$ PRIORITA



PODMIENKA JEDNOZNAČNOSTI

RANDOMIZOVANÝ TREAP

RANDOMIZOVANÝ BIN. VYHĽ. STROM

$i = 0, \dots, n-1$ S PRAVD. $\frac{1}{n}$

17.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DATOVÉ ŠTRUKTÚRY II

OPTIMÁLNE BIN. VYHĽ. STROMY

$$hod(T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + 1) + \sum_{i=0}^{n} \beta_j b_j$$

$$k_0 := \operatorname*{argmin}_{i \le k \le i+l = j} \left(H[i, k-1] + H[k+1, i+l] \right)$$

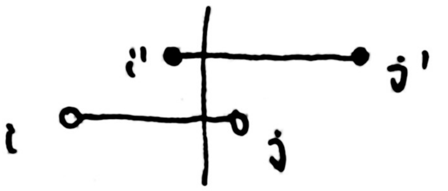
$R[i, j-1]$ $\quad$ $R[i+1, j]$

KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE

$w_{i,j}$, $1 \le i < j \le n$ $\longrightarrow$ $c_{i,j}$, $1 \le i \le j \le n$

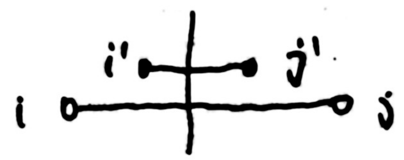
$$c_{i,i} = 0 \quad \& \quad i < j \Rightarrow c_{i,j} = w_{i,j} + \min_{i+1 \le k \le j} \left(c_{i,k-1} + c_{k,j} \right)$$

NEROVNOSŤ:

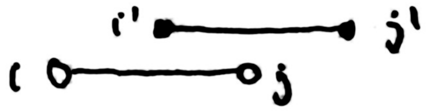


$$w_{i,j} + w_{i',j'} \le w_{i,j'} + w_{i',j}$$

PODM. MONOTÓNNIE:



$$w_{i',j'} \le w_{i,j}$$

LEMMA 1 : 

INDUKCIA PODĽA $j'-i$

$$c_{i,j} + c_{i',j'} \le c_{i,j'} + c_{i',j}$$

LEMMA 2 : $1 \le i < k \le k' < j \le n$

$$c_{i,k-1} + c_{k,j-1} \le c_{i,k'-1} + c_{k',j-1} \Rightarrow$$
$$c_{i,k-1} + c_{k,j} \le c_{i,k'-1} + c_{k',j}$$

$k = r_{i,j-1} \Rightarrow \forall\, i < k' \le k$ $\quad r_{i,j} \ge k$

SAMOOPRAVUJÚCE SA ZOZNAMY

ČAS, VYHĽADÁVACÍ ČAS, VOĽNÉ, PLATENÉ VÝMENY

STRATÉGIE : MFR, TR, TIMESTAMP

AMORTIZOVANÁ ZLOŽITOSŤ MFR V ZÁVISLOSTI NA A

$bal(l_1, l_2)$

MFR : $l_1 \xrightarrow{\sigma} D_1$ ... ČAS t

A : $l_2 \xrightarrow{\sigma} D_2$ ... VYHĽ. Č. c, VOĽ. v, PLAT. p

$$a(\sigma) := t + bal(D_1, D_2) - bal(l_1, l_2)$$

LEMMA : $a(\sigma) \le 2c + p - v - 1$

ANALÝZA OČAKÁVANÉHO ČASU PRE MFR

π, MARKOVOVE REŤAZCE ... IBA MEMBER OP.

β_x ... PR. MEMBER(x)

17.06.2010 Th
PETER ČERNO

EXAM: DÁTOVÉ ŠTRUKTÚRY II

SPLAY STROMY

$tw(v) = \sum_{t \in T_v} w(t) \qquad r(v) = \lceil \log_2(tw(v)) \rceil$

LEMMA: $r(v) > \min\{r(\text{ľavý}(v)), r(\text{pravý}(v))\}$

$bal(C) = \sum_{v \in C} r(v)$

ČAS. ZL. := # OPAKOVANÍ (2) V SPLAY

LEMMA AM. ZL. $\leq 3(r(T) - r(t)) + 1$

AMORT. ZL. i-TEHO BEHU JE $\leq$

$3(r_{i-1}(z_{i-1}) - r_{i-1}(t)) \qquad i = 1, \ldots, k-1$

$3(r_{k-1}(z_{k-1}) - r_{k-1}(t)) + 1 \qquad i = k$

VZŤAH K OPTIM. BIN. VYHĽ. STROMU ... $O(t_{OPT} + |S|^2)$

$P = \{MEMBER(y_j)\}_{j=1}^{m}$

$w(x) := 3^{d-d_x}$

TRIE

KOMPRIMOVANÁ TRIE $\quad k(v)$, LIST ⇒ $slovo(v)$

OČAKÁVANÁ VÝŠKA KOMP. TRIE $\sum d(q_d - q_{d+1})$

$q_d = 1 - P(h(T) < d) \ldots \leq n^2 / k^{d-1}$

KOMPRIMOVANÁ REPR., val, ZAC

ALG. KOMP-RIADKY (n)

VETA: $\forall l \; m_l < \frac{m}{l+1} \Rightarrow \forall i \; ZAC(i) < m$

ČAS $O(rs + m^2)$

POSÚVANIE STĹPCOV cd

$(i,j) \to ZAC(i + cd(j)) + j$

$j = 0, \dots, s-1$ NÁJDEME $cd(j)$:

$$m(j+1)_l \leq \frac{m}{f(l, m(j+1))}$$

ĎALŠIA KOMPRESIA

cv, base, offset

DYNAMIZÁCIA

VYHĽ. PROBLÉM $f : U_1 \times 2^{U_2} \to U_3$

PROBLÉM UNION-FIND

VAN EMDE-BOAS TREES

MIN-MAX BIN. HALDA, SYMETRICKÁ BIN. HD

REFLEX HALDA;