Poznámky z přednášek
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Aproximační algoritmy

Peter Černo, 2012
petercerno@gmail.com

Garant: doc. RNDr. Jiří Sgall DrSc.
E-mail: sgall@iuuk.mff.cuni.cz
Domácí stránka: `http://kam.mff.cuni.cz/~sgall/vyuka/`

Anotace: Pro mnohé optimalizační problémy je obtížné navrhnout algoritmy, které je vyřeší optimálně a zároveň rychle (např. pro NP-úplné problémy). V takovém případě studujeme tzv. aproximační algoritmy, které pracují rychle, a najdou řešení více či méně blízké optimálnímu řešení. Typický příklad je rozvrhování úloh na několika počítačích. Je poměrně jednoduché nalézt algoritmus, který vždy vrátí rozvrh nejvýše dvakrát delší než optimální. Použitím složitějších metod je však možné efektivně nalézt i např. rozvrh jen o jedno procento delší než optimální. Tzv. online algoritmy se studují v situaci, kdy není předem znám celý vstup. Např. při rozvrhování je možné, že úlohy dostáváme postupně, ale přidělit je jednotlivým počítačům musíme ihned.

Přednáška se zaměří na teoretické studium aproximačních a online algoritmů pro různé problémy. Přednáška je určena především studentům vyšších ročníků, případně i doktorandům. Předpokládá se znalost základních pojmů z a teorie algoritmů (např. DMI026). Přednášející v tomto oboru pracuje a publikuje.

Sylabus:

1. Základní pojmy, aproximační a kompetitivní poměr, polynomiální aproximační schémata.

2. Různé modely rozvrhování a "bin packing", hladový algoritmus, další aproximační a online algoritmy.

3. Kombinatorické problémy: nezávislé množiny, "set cover", minimální řez atd.

4. Použití metod lineárního a semidefinitního programování v aproximačních algoritmech.

5. Metody pro dokazování obtížnosti i přibližného řešení kombinatorických problémů, tzv. PCP věta.

6. Online algoritmy pro paging (caching). Tzv. k-server problém.

7. Podle času a zájmu některé další oblasti: pohyb v neznámém prostředí, směrování v sítích nebo finanční problémy.

Literatura:

1. David P. Williamson and David B. Shmoys: The Design of Approximation Algorithms, Cambridge University Press.

   `http://www.designofapproxalgs.com/`

2. V.V. Vazirani: Approximation Algorithms, Springer, 2001.

3. G. Ausiello et al: Complexity and Approximation, Springer, 1999.

4. D.S. Hochbaum (editor): Approximation algorithms for NP-hard problems, PWS publishing company, 1997.

5. A. Borodin, R. El-Yaniv: Online computation and competitive analysis. Cambridge university press, 1998.

6. A. Fiat, G. Woeginger: Online Algorithms - The State of the Art, LNCS 1442, Springer, 1998.

Články:

1. J. Sgall: On-line scheduling In Online Algorithms: The State of the Art, eds. A. Fiat and G. J. Woeginger, Lecture Notes in Comput. Sci. 1442, pages 196-231, Springer, 1998.

2. L. Epstein, J. Sgall: A lower bound for on-line scheduling on uniformly related machines Oper. Res. Lett., 26(1):17-22, 2000.

3. T. Ebenlendr, J. Sgall: Optimal and online preemptive scheduling on uniformly related machines In Proc. of the 21st Ann. Symp. on Theor. Aspects of Comput. Sci. (STACS) , Lecture Notes in Comput. Sci. 2996, pages 199-210. Springer, 2004.

4. B. Birnbaum, C. Mathieu: On-line bipartite matching made simple

   `http://www.cs.brown.edu/~claire/Publis/sigactnews08.pdf`

5. Susanne Albers: Competitive Online Algorithms

   `http://www.brics.dk/LS/96/2/`

This page is intentionally left blank.

NDMI018 - Aproximační a online algoritmy

LS 2012 - Jiří Sgall

Probraná témata

- základní pojmy
  - aproximační a kompetitivní poměr, třídy aproximačních algoritmů, PTAS, FPTAS
  - vztah NP-úplnosti a silné NP-úplnosti a existence aproximačních algoritmů a schémat
- metody
  - dynamické programování a zaokrouhlování
  - lokální prohledávání
  - relaxace pomocí lineárního programování
    - zaokrouhlování, pravděpodobnostní zaokrouhlování
    - duální řešení LP a jeho použití
  - primárně duální algoritmy
  - relaxace pomocí semidefinitního programování
  - derandomizace metodou podmíněných pravděpodobností
  - potenciál pro online algoritmy
  - metody dokazování neaproximovatelnosti
    - L-redukce
    - PCP věta a její použití, gap preserving redukce
    - unique games conjecture (znění)
- problém obchodního cestujícího a související
  - 1.5 aproximační algoritmus
  - PTAS v rovině
  - O(log *n*) aproximační algoritmus pro asymetrickou verzi
  - zobecněný Steinerův strom - primárně duální algoritmus
- kombinatorické a grafové problémy
  - maximální klika a vrcholové pokrytí grafu
  - množinové pokrytí
    - hladový algoritmus
    - algoritmy založené na lineárním programování
  - maximální řez v grafu
    - 0.878-aproximační algoritmus pomocí semidefinitního programování
  - barvení grafů: přibližné barvení 3-obarvitelných grafů
    - kombinatorický algoritmus
    - zlepšení pomocí semidefinitního programování
- problém rozvrhování a bin-packing
  - hladový algoritmus, zlepšení při uspořádání úloh, a (F)PTAS pro rozvrhování identických počítačů
  - "téměř" aproximační schéma pro bin-packing, first fit algoritmus
- splnitelnost a její varianty
  - 3/4-aproximační algoritmus pro MAX-SAT, varianty pro speciální případy, derandomizace
  - použití semidefinitního programování pro MAX-2SAT
- problém půjčování lyží (ski rental)
  - optimální deterministický a pravděpodobnostní online algoritmus
- paging a jeho varianty
  - *k*-kompetitivní deterministické algoritmy a dolní odhad
  - *O(log k)*-kompetitivní pravděpodobnostní algoritmy a dolní odhad

- *k*-server problém
    - dolní odhad *k* na kompetitivní poměr pro libovolné metrické prostory
    - definice *work function*, výpočet optimálního řešení (off-line)
    - WFA (work function algoritmus), definice bez důkazů
    - optimální deterministický online algoritmus pro stromy
- navigace
    - prohledávání přímky (*cow path*), optimální deterministický a pravděpodobnostní online algoritmus
- online rozvrhování
    - deterministické a pravděpodobnostní algoritmy na počítačích různých rychlostí - horní a dolní odhady
- online párování v bipartitních grafech
    - optimální deterministický a pravděpodobnostní algoritmus

Probraná látka podle přednášek

- 1. (27. 2.) CHAPTER 1 S. 1.1 - 1.6 DESIGN OF APPR.
    - √ úvod, definice apx. poměru
    - √ VC 2-apx, i vážené – POMOCOU LIN. PR.
    - √ TSP, 1.5 apx CH.3. VAZIRANI
    - √ rozvrhování, lokální prohledávání, hladový algoritmus (LIST) S. 2.3. DESIGN OF APPR.
- 2. (5. 3.)
    - √ Nezávislá/klika - porovnání s VC
    - √ zmínění obtížnosti aproximace, unique games conjecture CHAPTER 11 OF COMP. COMPL. MOD APPR.
    - √ hladové alg. pro rozvrhování (LIST, LPT) S. 2.3. DESIGN OF APPR. ALG.
    - √ definice: pseudopolynomiální alg., silně NP-těžké úlohy
    - √ definice: PTAS a FPTAS CHAPTER 8 OF VAZIRANI
- 3. (12. 3.)
    - √ bin packing, FIRST FIT CHAPTER 9 OF VAZIRANI
    - √ asymptotické PTAS pro bin packing
    - √ PTAS pro TSP v rovině bez důkazu CHAPTER 11 OF VAZIRANI
    - √ úvod do LP, algoritmy pro množinové pokrytí
- 4. (19. 3.) CH. 1 DESIGN OF APPR.
    - √ úvod do LP
    - √ množinové pokrytí: primal-dual a analýza hladového algoritmu pomocí duálu
    - √ obtížnost aproximace, zmíněná unique games conjecture a důsledky pro množinové pokrytí a splnitelnost
    - √ algoritmy pro MAX-SAT: náhodný a zaokrouhlování LP
- 5. (26. 3.) CH. 5 DESIGN OF APPR.
    - √ algoritmy pro MAX-SAT: náhodný výběr ze 2 algoritmů, zaokrouhlování s nelineární funkcí
    - √ derandomizace metodou podmíněných pravděpodobností
    - √ semidefinitní a vektorové programování CH. 6 DESIGN OF APPR.
    - √ MAXCUT pomocí semidefinitního programování → S. 6.1 DESIGN OF APPR.
- 6. (2. 4.)
    - √ MAXCUT pomocí SDP, dokončení ↓ S. 6.5 + S. 13.2. DESIGN OF...
    - * √? chromatické číslo, algoritmus pro obarvení 3-chromatických grafů O(n^1/4) barvami
- 7. (16. 4.)
    - √ nejkratší cesta - Dijkstra jako primárně duální algoritmus S. 7.3 DESIGN OF APPR...
    - * √? zobecněný Steinerův strom - 2-aproximační primárně duální algoritmus S. 7.4 DESIGN OF..
- 8. (23. 4.)

* = COMPLICATED

- ✓ prohledávání přímky deterministicky
    - ✓ problém paging, deterministické horní odhady
    - ✓ pravděpodobnostní algoritmy pro paging, 2H_k horní odhad
- 9. (30. 4.)
    - ✓ pravděpodobnostní algoritmy pro paging, H_k dolní odhad
    - ✓ k-server problém, definice, přehled výsledků
    - ✓ k-server problém, dolní odhad k v libovolném metrickém prostroru
    - ✓ k-server problém na přímce ⊗ NOT COVERED - USE NOTES!
- 10. (7. 5.)
    - ✱ ✓ k-server problém na stromech ⊗ USE NOTES!
    - ✓ work function algoritmus pro k-server
    - ✓ online preemptivní rozvrhování na počítačích různých rychlostí
        - ✓ horní odhad pro deterministické algoritmy (dvojnásobící algoritmy)

SUSANNE ALBERS: COMPETITIVE ONLINE ALG.

- 11. (14. 5.)
    - ✓ online preemptivní rozvrhování na počítačích různých rychlostí
        - ✓ horní odhad pro pravděpodobnostní algoritmy (dvojnásobící algoritmy)
    - ✱ ✓ dolní odhad pro online rozvrhování na počítačích různých rychlostí (preemptivní i nepreemptivní) SEE ARTICLE A(2)
    - ✱ ✓ online párování - pravděpodobnostní algoritmus SEE ARTICLE A(4)
- 12. (21. 5.)
    - ✓ dokazování neaproximace L-redukcemi
    - ✱ ✓ PCP věta a její použití, gap preserving redukce, příklady CH. 11 COMP. COMPL. MOD. APPR.
    - ✓ unique games conjecture (znění)
- v domácím úkolu: LPT pro rozvrhování, ATSP, ski renal (půjčování auta)

Literatura

Pro aproximační algoritmy je nejaktuálnější kniha Williamson-Shmoys, dále doporučuji poznámky Williamsona a knihu Vaziraniho. Pro online algoritmy pro paging a k-server problem knihu Borodin, El-Yaniv. Dále přikládám odkazy na články o rozvrhování. V mém přehledu je sepsaný důkaz 4/3-kompetitivního algoritmu pro 2 počítače (letos jsme neprobírali), v dalších dvou pak dolní a horní odhad na preemptivní rozvrhování na počítačích různých rychlostí.

Knihy

D. P. Williamson, D. B. Shmoys: The Design of Approximation Algorithms, Cambridge university press, 2011.
V. V. Vazirani: Approximation Algorithms, Springer, 2001.
A. Borodin, R. El-Yaniv: Online computation and competitive analysis. Cambridge university press, 1998.

Články

A(1) J. Sgall: On-line scheduling
In Online Algorithms: The State of the Art, eds.A. Fiat and G. J. Woeginger, Lecture Notes in Comput. Sci. 1442, pages 196-231, Springer, 1998.

A(2) L. Epstein, J. Sgall: A lower bound for on-line scheduling on uniformly related machines
Oper. Res. Lett., 26(1):17-22, 2000.

A(3) T. Ebenlendr, J. Sgall: Optimal and online preemptive scheduling on uniformly related machines
In Proc. of the 21st Ann. Symp. on Theor. Aspects of Comput. Sci. (STACS) , Lecture Notes in Comput. Sci. 2996, pages 199-210. Springer, 2004.

A(4) BENJAMIN BIRNBAUM, CLAIRE MATHIEU: ON-LINE BIPARTITE MATCHING MADE SIMPLE

27.02.2012 Mo.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALGORITMY

OPTIMALIZAČNÝ PROBLÉM

LITERATÚRA:
DESIGN OF APPROXIMATION ALG.
+ VAZIRANI

- INŠTANCIE
- PRÍPUSTNÉ RIEŠENIA
- ÚČELOVÁ FUNKCIA (OBJECTIVE FUNCTION)
- MIN./MAX. ÚČELOVÚ FUNKCIU

PRÍKLAD: TSP

INŠTANCIA: GRAF S VÁHAMI NA HRANÁCH (ÚPLNÝ)
PRÍP. RIEŠENIA: CYKLY (HAMILTONOVSKÉ)
ÚČELOVÁ FUNKCIA: SÚČET VÁH
CHCEME MIN. ÚČELOVÚ FUNKCIU

APROXIMAČNÝ POMER

MAJME ALG. $\mathcal{A}$ ...

$\mathcal{A}(I)$ < PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE / HODNOTA ÚČ. FUNKCIE

$\mathcal{A}$ JE c-APROXIMAČNÝ ALGORITMUS, KEĎ:

1) $\mathcal{A}$ BEŽÍ V POL. ČASE
2) $\mathcal{A}(I) \leq c \cdot \text{OPTIMUM}$ $\forall$ INŠTANCIE I
   (PRE MAXIMALIZAČNÉ PROBLÉMY)
   POPR. $\mathcal{A}(I) \geq \frac{1}{c} \cdot \text{OPTIMUM}$ $\forall I$
   (PRE MINIMALIZAČNÉ PROBLÉMY)

PRÍKLAD: PRE OBECNÝ TSP NEEXISTUJE ŽIADEN APROXIMAČNÝ ALGORITMUS (VÁHY 0, 1)

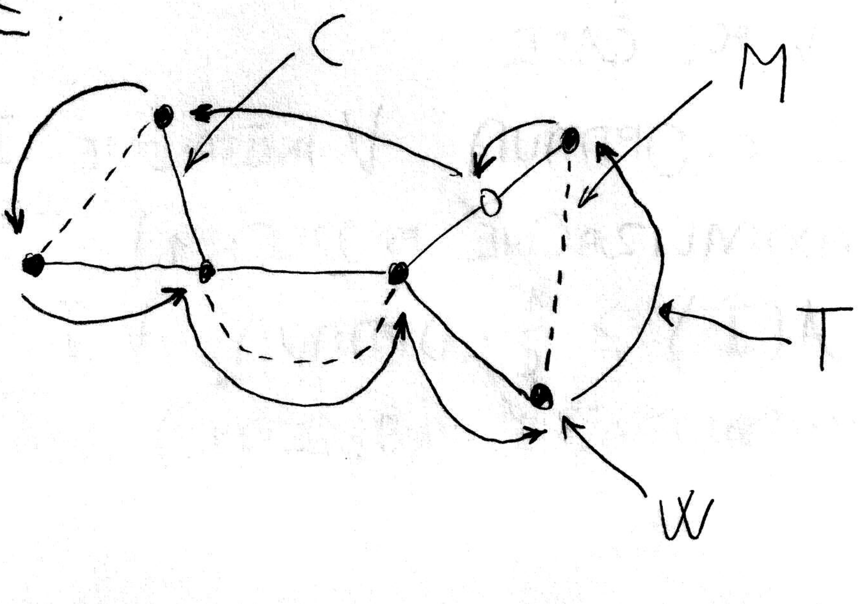
TSP S Δ-NEROVNOSŤOU

VETA: PRE ↑ EXISTUJE 1,5-APROX. ALG.
[CHRISTOFEDES, 70-TE ROKY]

ALGORITMUS:

1) NÁJDEME C := MINIMÁLNA KOSTRA
2) W := VRCHOLY NEPÁRNEHO STUPŇA V C
3) M := PÁROVANIE NA W MINIMÁLNEJ VÁHY (PERFEKTNÉ PÁROVANIE, MÁME PÁRNY POČ. VR.)
4) EULEROVSKÝ ŤAH T NA $C \cup M$ (MULTIGRAF)
... TEN EXISTUJE, KAŽDÝ VRCHOL MÁ PÁRNY STUPEŇ
5) SKRÁTIME T. VÝSTUP $A(I) := T$.

DÔKAZ.



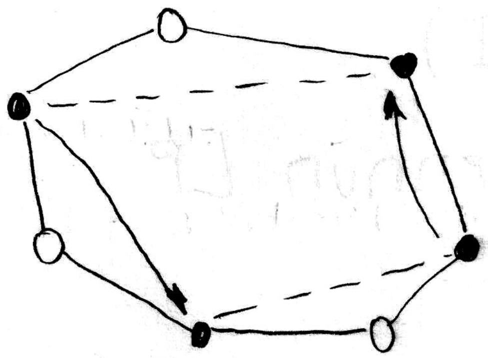
27.02.2012 Po
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ ALGORITMY

$$w(A(I)) \leq w(T)$$

$$w(C) \leq OPT(I)$$

$$w(M) \leq \frac{1}{2} OPT(I)$$



HAMILT. KRUŽNICA

$\blacksquare$

PRÍKLAD: VRCHOLOVÉ POKRYTIE (VÁŽENÁ VER.)

I ... GRAF S VÁHAMI NA VRCHOLOCH

RIEŠENIE ... $W \subseteq V$: $\forall e \in E : e \cap W \neq \emptyset$

CIEĽ : MIN. $w(W)$.

PRE NEVÁŽENÉ VRCH. POKR. :

M := MAXIMÁLNE PÁROVANIE VZHĽADOM K $\subseteq$

VÝSTUP := VRCHOLY M

VÁŽENÉ JE ZLOŽITEJŠIE

- POMOCOU LIN. PROGRAMOVANIA

$$\min \sum_{v \in V} x_v \cdot w(v)$$

$$x_u + x_v \geq 1 \quad \forall uv \in E$$

$$x_u \geq 0 \quad \forall u \in V$$

CELOČÍSELNÉ RIEŠENIE "$\longleftrightarrow$" VRCHOLOVÉ POKR.
AVŠAK CELOČÍS. RIEŠENIA $\subseteq$ $\forall$ RIEŠENIA

$\Rightarrow$ OPT. LP $\leq$ OPT(I).

ALGORITMUS : x^* ... OPTIMUM LP

$$W := \{ v \mid x_v \geq \tfrac{1}{2} \}.$$

W JE VRCHOLOVÉ POKRYTIE ... ZREJMÉ.

$$w(W) \leq 2 \cdot \sum_{v \in V} x_v^* \cdot w(v) \leq 2 \mathrm{OPT}(I). \blacksquare$$

PRÍKLAD : ZÁKLADNÁ VARIANTA ROZVRHOVANIA

VSTUP : m ... POČET POČÍTAČOV

$p_1, \dots, p_n$ ... DĹŽKY ÚLOH

VÝSTUP : $J_1, \dots, J_m$ ... ROZKLAD $\{1, \dots, n\}$

CIEĽ : $\min \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j \in J_i} p_j$.

ALG. (LOKÁLNE PREHĽADÁVANIE)

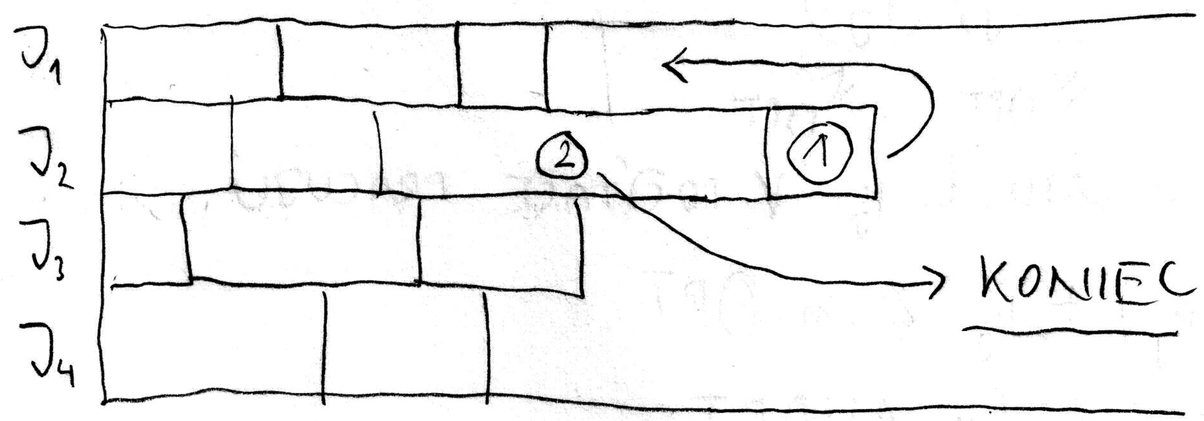
27.02.2012
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ ALGORITMY

1) ROZVRHNEME ÚLOHY AKOKOĽVEK,
NAPR. $J_1 = \{1, \dots, n\}$, $J_i = \emptyset$ $\forall i > 1$

OZNAČME $L_i := \sum_{j \in J_i} p_j$

2) VEZMIME i S MAXIMÁLNYM L_i
$j \in L_i$
j PRESUNIEME DO INEJ $J_{i'}$, POKIAĽ TÝM NEZVÄČŠÍME DĹŽKU ROZVRHU.
POKIAĽ TO IDE, OPAKUJ → KROK 2.
INAK KONIEC.



<u>VETA</u>: LOKÁLNE PREHĽADÁVANIE JE $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-APROXIMÁCIA, KEĎ VŽDY

a) PRESUNIEM NA i' S MIN. $L_{i'}$.

b) A ZÁROVEŇ TÝM ZMENŠÍM $\max(L_i, L_{i'})$

c) A PRESÚVAM VŽDY MAXIMÁLNE $j \in L_i$.

ALGORITMUS SKONČÍ V POL. ČASE
(KAŽDÚ ÚLOHU PRESUNIEM NAJVIAC 1x, PRETOŽE ČAS, KEDY SKONČÍ MIN. POČÍTAČ MÔŽE IBA NARÁSŤ).

<u>DÔKAZ</u>: NECH L_i JE MAXIMÁLNE, $j \in J_i$ JE POSLEDNÉ A ALG. SKONČIL.

$\forall i' \neq i : L_{i'} \geq L_i - p_j$.

ZREJME: $p_j \leq OPT(I)$.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{i=1}^{m} L_i \leq m \cdot OPT(I).$$

$$A(I) = \underbrace{L_i - p_j}_{\leq OPT} + \underbrace{p_j}_{\leq OPT}$$

DO ČASU $L - p_j$ $\forall$ POČÍTAČE PRACUJÚ

$$m(L - p_j) + p_j \leq m \cdot OPT$$

$$(m-1)\, p_j \leq (m-1)\, OPT$$

$$m\, A(I) \leq (2m-1)\, OPT. \qquad \blacksquare$$

12.03.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

DOPÍSAŤ POZN. Z 05.03.2012

BIN PACKING

VSTUP: $a_1, \dots, a_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$

VÝSTUP: ROZKLAD $I_1, \dots, I_m$ MNOŽ. $\{1, \dots, n\}$
TAKÝ, ŽE $\forall i : \sum_{j \in I_i} a_j \leq 1$.

CIEĽ: MINIMALIZOVAŤ m.

JE TO NP-ŤAŽKÝ PROBLÉM ...
AK $\sum_i a_i = 2$, TAK ZISTIŤ, ČI $OPT \leq 2$
JE NP-ŤAŽKÉ (VIĎ SUBSET-SUM PROBLÉM)
$\Rightarrow$ AK $\alpha < \frac{3}{2}$, POTOM NEEXISTUJE
α-APROXIMAČNÝ ALGORITMUS (KEĎ $P \neq NP$).

NAVIAC JE SILNO NP-ŤAŽKÝ.

OTVORENÝ PROBLÉM: ČI EXISTUJE POL. ALG. A
T.Ž. $\forall I$: $A(I) \leq OPT + c$,
ČI JE NP-ŤAŽKÉ NÁJSŤ I T.Ž. $A(I) \leq OPT + 1$.

EXISTUJE POL. ALG. T.Ž. $A(I) \leq OPT + O(\log^2 OPT)$.

ZAOKRÚHLOVANIE NÁM MOC NEPOMÔŽE, NAPR. $a_i = \frac{1}{3}$ ..

HLADOVÝ ALGORITMUS:

ZAČÍNAM NOVÚ KRABIČKU I_i, IBA KEĎ MUSÍM.

FIRST FIT - PRIDÁME DO PRVEJ KRABIČKY
BEST FIT - -||- DO NAJPLNEJŠEJ KRABIČKY
ANY FIT - -||- DO ĽUBOVOĽNEJ KRABIČKY

VETA: ANY FIT JE 2-APROX. ALGORITMUS

DÔKAZ: NAJVIAC 1 KRABIČKA JE $\leq \frac{1}{2}$

ZREJME $OPT \geq \sum_j a_j$

$\frac{1}{2}(A(I)-1) < \sum a_j \leq OPT$

$\Rightarrow A(I) < 2OPT + 1 \Rightarrow A(I) \leq 2OPT$. □

FIRST FIT A BEST FIT $\leq 1{,}7\,OPT + c$.

VETA: EXISTUJE POL. ALG. A T.Ž.

$\forall I: A(I) \leq (1+\varepsilon)OPT + 1$.

DÔKAZ: ALGORITMUS:

1) $I' = \{ j \mid a_j > \varepsilon \}$
2) NÁJDEME $A'(I') \leq (1+\varepsilon)OPT(I')$
3) ROZVRHNEME $I \setminus I'$ HLADOVO.

KEĎ V KROKU 3 NEPRIBUDLA NOVÁ KRABIČKA .. OK ✓

AK V KROKU 3 PRIBUDLA NOVÁ KRABIČKA

$\Rightarrow \exists$ NAJVIAC 1 KRABIČKA $\leq (1-\varepsilon)$.

12.03.2012 Po
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

$$(A(I)-1)(1-\varepsilon) \leq OPT(I)$$

$$A(I) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} OPT(I) + 1 \leq$$

$$\leq (1+2\varepsilon) OPT(I) + 1 .$$

ZOSTÁVA DOKONČIŤ ALG. A'.

ZVOLME k, NECH $a_1 > \dots > a_n$

$$I' : \quad a_1 \; \dots \; a_k \quad a_{k+1} \; \dots \; a_{2k} \; \dots$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$I'' : \quad a_1 \; \dots \; a_1 \quad a_{k+1} \; \dots \; a_{k+1} \; \dots$$

PLATÍ: $OPT(I'') \leq OPT(I') + k$

$OPT(I') \geq \varepsilon \cdot n$, $OPT(I') \leq OPT(I'')$

ZVOLME $k := \varepsilon^2 n$

$$\Rightarrow OPT(I'') \leq OPT(I') + \varepsilon OPT(I') =$$
$$= (1+\varepsilon) OPT(I') .$$

I'' MÁ $\leq \frac{n}{k} = \frac{1}{\varepsilon^2}$ RÔZNYCH a_j''

$\Rightarrow \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ MOŽNÝCH KONFIGURÁCIÍ I_i

$\Rightarrow \leq \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ MOŽNÝCH KONF. PO NAPLNENÍ t KRABIČIEK

... MOŽNÉ RIEŠIŤ DYNAMICKÝM PROGRAMOVANÍM. $\square$

PTAS: NEZÁVISLÁ MNOŽINA V ROVINNOM GR.

KLIKA V ROVINNOM GRAFE (RIEŠME VŠETKY 4-ICE VRCHOLOV)

TSP V EUKLIDOVSKEJ ROVINE (JE NP-ŤAŽKÝ, ALE NEVIEME, Č JE NP)

SET COVER (MNOŽINOVÉ POKRYTIE)

VSTUP: $U = \{1, \dots, n\}$,

$S_1, \dots, S_m \subseteq U$, $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}_0^+$

VÝSTUP: $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ T.Ž. $\bigcup_{j \in I} S_j = U$

CIEĽ: MIN. $\sum_{j \in I} w_j$.

$g = \max |S_j| \leq n$

DEFINUJME $f_i = |\{j \mid i \in S_j\}|$, $f = \max f_i$

12.03.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

LP: $x_1, \dots, x_m \in \{0,1\}$. (RELAXUJEME NA ≥ 0)

$$\sum_{j: i \in S_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in U$$

CIEL: $\min \sum_{j=1}^{m} w_j x_j$.

ALG.: $x^* \dots OPT_{LP}$

$$I = \{ j \mid x_j^* \geq \tfrac{1}{f} \}.$$

VETA: ALG JE f-APROX. ALGORITMUS.

f JE MAX. POČET PREM. V JEDNOTLIVÝCH PODMIENKACH LP. □

DUÁLNE LP: $y_i \geq 0$ ... DUÁLNE CENY

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j \quad \forall j$$

CIEL: $\max \sum y_i$.

PLATÍ: PRE KAŽDÉ PRÍP. RIEŠENIE $\vec{y}, \vec{x}$

JE $\sum y_i \leq \sum w_j x_j$.

PRE OPTIM. $\sum y_i^* = \sum w_j x_j^*$.

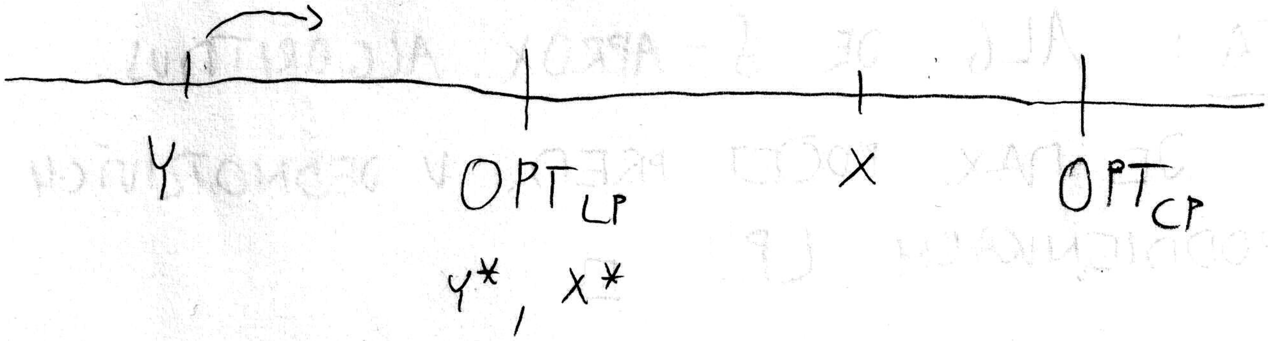
PLATIA KOMPLEMENTÁRNE PODMIENKY:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i\in S_j} y_i^* = w_j \quad \forall j \in \{1,\dots,m\}$$

$$y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j: i\in S_j} x_j^* = 1 \quad \forall i \in U.$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j: i\in S_j} x_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i\in S_j} y_i \le \sum_{j=1}^{m} w_j x_j$$

PRE OPTIMÁLNE RIEŠENIE NASTÁVA $=$.



19.03.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALGORITMY

SET COVER

VSTUP: $S_1, \dots, S_m \subseteq \{1, \dots, n\}$
$w_1, \dots, w_m \in \mathbb{R}_0^+$

VÝSTUP: I T.Ž. $\bigcup_{j \in I} S_j = \{1, \dots, n\}$

LP: $\min \sum w_j x_j$

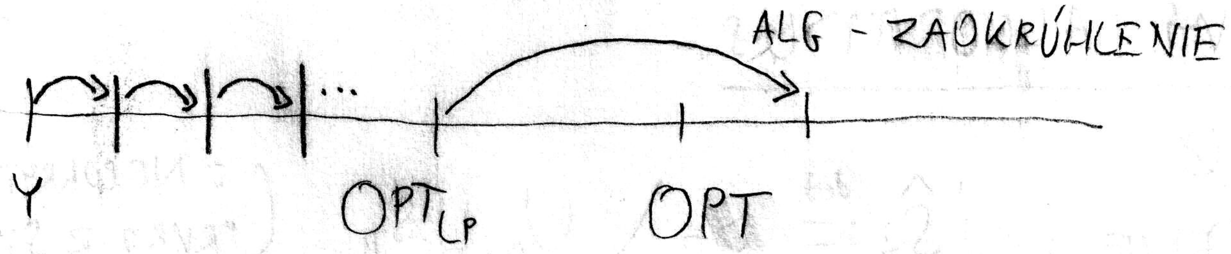
$$\sum_{j:\, S_j \ni i} x_j \geq 1 \quad \forall i \qquad\qquad x_j \geq 0$$

DUÁL: $\max \sum y_i$

$$\sum_{i \in S_j} y_i \leq w_j \quad \forall j \qquad\qquad y_i \geq 0$$

$f := \max_i |\{j \mid i \in S_j\}|$

$g := \max_j |S_j|$



TERAZ: ZAČNEME S NEJAKÝM Y
A POSTUPNE HO BUDEME ZVÄČŠOVAŤ

PRIMÁRNO-DUÁLNY ALGORITMUS:

$y_i := 0$

$I := \emptyset$

NECH $i_0 \notin \bigcup_{j \in I} S_j$

ZVYŠUJEME y_{i_0} AŽ NASTANE ROVNOSŤ

$\sum_{i \in S_j} y_i = w_j$ PRE NEJAKÉ j : $i_0 \in S_j$.

$I := I \cup \{j\}$

V CYKLE POKRYJEME VYBRANÉ i_0.

y JE DUÁLNE PRÍPUSTNÉ.

NA KONCI: I JE POKRYTIE.

$$\sum_{j \in I} w_j = \sum_{j \in I} \sum_{i \in S_j} y_i \leq f \sum_{i=1}^{n} y_i \leq$$

$$\leq f \cdot OPT_{LP} \leq f \cdot OPT. \quad \square$$

HLADOVÝ ALGORITMUS

$I := \emptyset$

ZNAČENIE: $\hat{S}_j \overset{def.}{:=} S_j \setminus \bigcup_{B \in I} S_B$ (= NEPOKRYTÉ PRVKY Z S_j)

VYBERÁME VŽDY ℓ TAK, ŽE $\frac{w_\ell}{|\hat{S}_\ell|}$ JE MIN., $\hat{S}_\ell \neq \emptyset$.

$\ell := \underset{\hat{S}_\ell \neq \emptyset}{\operatorname{argmin}} \frac{w_\ell}{|\hat{S}_\ell|}$, $I := I \cup \{\ell\}$, $\left[y_i := \frac{w_\ell}{|\hat{S}_\ell|} \ \forall i \in \hat{S}_\ell \right]$

19.03.2012 Po.
PETER ČERNO

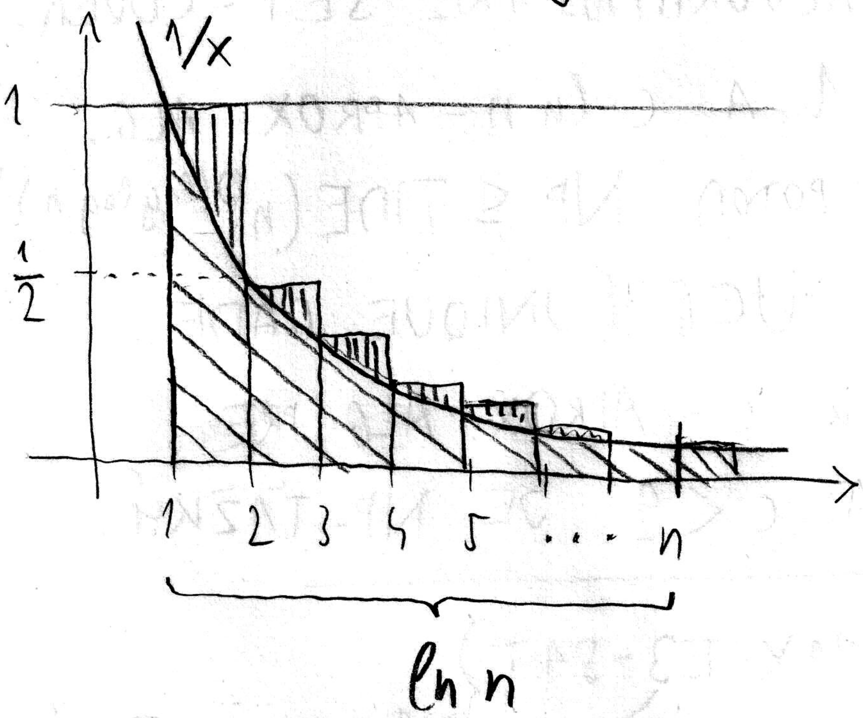
NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALGORITMY

PREDPOKLADAJME, ŽE POKRÝVAM PRVKY V PORADÍ $n, n-1, \dots, 1$.

KEĎ MI ZOSTÁVA POKRYŤ PRVKY $k, \dots, 1$, POTOM ZAPLATÍM NAJVIAC OPT/k NA 1 PRVOK.

ZREJME $y_k \leq OPT/k$.

NAVIAC $\sum_{j \in I} w_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) OPT$.



$$H_n = \ln n + O(1)$$

VETA: HLADOVÝ ALGORITMUS JE H_g-APROX.

DÔKAZ. UKÁŽEME, ŽE $\frac{1}{H_g} y$ JE DUÁLNE PRÍPUSTNÉ.

POTOM $\frac{1}{H_g} \sum y_i \leq OPT_{LP}$, A JE TO!

CHCEME: $\forall j \; \sum_{i \in S_j} y_i \leq H_g w_j$.

PREDPOKLADAJME, ŽE $S_j = \{1, \dots, k\}$

POKRYTÉ V PORADÍ $k, k-1, \dots, 1$.

TVRDÍME, ŽE $y_i \leq \frac{w_j}{i}$ PRE $\forall i = 1, \dots, k$.

POTOM $\sum_{i=1}^{k} y_i \leq w_j \left(1 + \dots + \frac{1}{k}\right) \leq H_g w_j$. ■

<u>VETA</u>: $\exists c > 0$: JE NP-ŤAŽKÉ NÁJST $c \cdot \ln n$ - APROXIM. ALGORITMUS PRE SET-COVER.

<u>VETA</u>: KEĎ $\exists c < 1$ A $c \cdot \ln n$ - APROX. ALG. PRE SET-COVER, POTOM $NP \subseteq TIME(n^{O(\log \log n)})$.

<u>VETA</u>: KEĎ PLATÍ UCG (UNIQUE GAME CONJECTURE), TAK c - APROX. ALG. PRE VERTEX-COVER A $c < 2$ JE NP-ŤAŽKÝ.

<u>MAX-SAT</u> (MAX-E3-SAT)

PRESNE 3 LITERÁLY

<u>VSTUP</u>: CNF $C_1 \wedge \dots \wedge C_m$

<u>VÝSTUP</u>: $a \in \{0,1\}^n$

<u>CIEĽ</u>: MAXIMALIZOVAŤ # SPLNENÝCH C_j

<u>VETA</u>: EXISTUJE 3/4 - APROX. ALG. PRE MAX-SAT

<u>VETA</u>: EXISTUJE 7/8 - APROX. ALG. PRE MAX-E3-SAT

19.03.2012 r.
PETER ČERNO

NDMI018 APROX. A ONLINE ALGORITMY

VETA: C-APROX. ALG. PRE MAX-E3-SAT PRE $c > \frac{7}{8}$ NP-ŤAŽKY.

VETA: PRE NEJAKÉ $c < 1$ JE C-APROX. ALG. PRE MAX-2SAT NP-ŤAŽKÝ.

ALGORITMUS PRE MAX-3E-SAT (ALG1)

VEZMI a UNIFORMNE NÁHODNE.

DEF.: PRAVDEPODOBNOSTNÝ ALG A JE C-APROX., KEĎ PRE $\forall I$ PLATÍ $E[A(I)]$

(a) $\leq c$ OPT (PRE MIN.-PROBLÉMY)

(b) $\geq c$ OPT (PRE MAX.-PROBLÉMY, $c < 1$).

ANALÝZA: NECH C_j MÁ ℓ LITERÁLOV.

POTOM $P[\text{ALG1 SPLNÍ } C_j] \geq 1 - 2^{-\ell}$.

$E[\text{ALG1}(I)] = \sum_j P[\text{ALG1 SPLNÍ } C_j]$. ∎

$\Rightarrow \frac{7}{8}$ APROX. PRE E3-SAT.

AVŠAK IBA $\frac{1}{2}$-APROX. PRE MAX-SAT.

POUŽITIE LP: $x_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_7$

$\rightsquigarrow \quad y_1 + (1-y_3) + y_7 \geq z_j$

OZNAČME P_j ... POZITÍVNE LITERÁLY V C_j

N_j ... NEGATÍVNE LIT. V C_j.

<u>LP:</u> $\max \sum_{j=1}^{m} w_j z_j$ (ISTOTNE $OPT_{LP} \geq OPT$)

$\forall j: \sum_{y_i \in P_j} y_i + \sum_{y_i \in N_j} (1-y_i) \geq z_j . \left(0 \leq \begin{matrix} y_i \\ z_j \end{matrix} \leq 1 \right)$

ALGORITMUS (ALG2)

VEZMI y^*, z^* OPTIMUM LP

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{S PRAVD. } y_i^* \\ 0 & \text{INAK} \end{cases}$

<u>ANALÝZA</u>: NECH C_j MÁ ℓ LITERÁLOV.

POTOM $P[\text{ALG2 SPLNÍ } C_j] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^\ell\right] z_j^*$

<u>DÔKAZ</u>: NECH C_j MÁ IBA POZ. LIT. $P[\text{ALG2 NESPLNÍ}] \leq$

$\leq \prod_{i \in P_j} (1-y_i^*) \leq \left(1 - \frac{\sum_{i \in P_j} y_i^*}{\ell}\right)^\ell$ (AG-NEROVNOSŤ)

$\leq \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell}\right)^\ell$. $P[\text{ALG2 SPLNÍ}] \geq 1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{\ell}\right)^\ell \geq$

$\geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^\ell\right] z_j^*$. $\Rightarrow$ ALG2 JE $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$-APROX. A.

SPOJENÍM ALG1 A ALG2 DOSIAHNEME $\frac{3}{4}$-APROX. A.

26.03.2012 r.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

LP PRE MAX-SAT

$$\max \sum_{i=1}^{m} w_i z_i$$

$$\sum_{j \in P_i} y_j + \sum_{j \in N_i} (1 - y_j) \geq z_i \quad \forall \text{ KLAUZ. } C_i$$

$$y, z \geq 0 \qquad z_i \leq 1 \quad y_j \leq 1$$

ALG 1 : $x \in \{0,1\}^n$ NÁHODNE

$P[C_i$ s l LITERÁLMI SPLNENÁ $] \geq$

$1 - 2^{-l} \geq [1 - 2^{-l}] \cdot z_i^*$

ALG 2 : NÁHODNÉ ZAOKRÚHLENIE LP

$P[\ \cdots\ ] \geq [1 - (1 - \frac{1}{l})^l]\, z_i^*$

l	1	2	3	4	l
ALG 1	1/2	3/4	7/8	15/16	a_l
ALG 2	1	3/4	19/27		$b_l \ldots \geq 1 - \frac{1}{e}$

ALG 3 : S PRAVDEPOD. 1/2 POUŽI ALG 1,

INAK ALG 2.

VETA : ALG3 JE $\frac{3}{4}$ - APROX. PRE MAX-SAT.

DÔKAZ. $P[\text{ALG3 SPLNÍ } C_i \text{ S } \ell \text{ LITERÁLMI}] \overset{?}{\geq} \frac{3}{4} z_i^*$

$$= \frac{1}{2}(a_\ell + b_\ell) \overset{?}{\geq} \frac{3}{4} z_i^*$$

VYPLÝVA Z TOHO, ŽE $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right) \geq \frac{3}{4}$. ∎

$\frac{1}{2}(0,875 + 0,632) > \frac{3}{4}$ ...

UVAŽUJME FORMULU:

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

$OPT = 3$ $\quad OPT_{LP} = 4$ (VŠETKY $y_i = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$ LEPŠÍ AKO $\frac{3}{4}$-APROX. ALG.
NEMÔŽEME DOSTAŤ.

VETA : MEDZERA CELOČÍSELNOSTI (INTEGRITY GAP) POUŽITÉHO LP JE $3/4$.

INTEGRITY GAP $\overset{\text{def.}}{:=} \max\limits_{I} \frac{OPT(I)}{OPT_{LP}(I)}$.

DERANDOMIZÁCIA

METÓDA PODMIENENÝCH PRAVDEPODOBNOSTÍ

26.03.2012 n.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

VIEM SPOČÍTAŤ $E[\#$ SPLNENÝCH KLAUZULÍ $]$
PRE ALG_1 JE TO $\frac{1}{2}\#$ JEDNIČKOVÝCH KLAUZULÍ
$+ \frac{3}{4}\#$ POČET DVOJKOVÝCH KLAUZULÍ ATĎ...

TAKTIEŽ VIEM SPOČÍTAŤ:

$E[\#$ SPLNENÝCH KLAUZULÍ $\mid x_1 = 0]$
$E[\#$ —"— $\mid x_1 = 1]$

A ZVOLÍM x_1, PRE KTORÉ VYJDE $E[\dots]$ VÄČŠIE.

NECH $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE SYMETRICKÁ MATICA
$A \succcurlyeq 0$ ... A JE POZITÍVNE SEMIDEFINITNÁ (PSD)

FAKT: NASLEDUJÚCE JE EKVIVALENTNÉ:

(1) $A \succcurlyeq 0$
(2) $x^T A x \geq 0 \quad \forall x$
(3) MÁ n NEZÁPORNÝCH VL. ČÍSIEL
(4) $\exists V \in \mathbb{R}^{n \times n} : V^T V = A$.

$V = \left(\sqrt{\lambda_1} v_1, \sqrt{\lambda_2} v_2, \dots, \sqrt{\lambda_n} v_n \right)$

MAX-CUT

VSTUP: $G=(V,E)$, $w: E \to \mathbb{R}_0^+$

VÝSTUP: $A \subseteq V$

CIEĽ: MAXIMALIZOVAŤ $\sum_{e \in E \cap A \times (V-A)} w_e$

A … NÁHODNÉ, UNIFORMNÉ

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$ - APROXIMAČNÝ ALGORITMUS

UVAŽUJME PREMENNÉ $y_i \in \{-1, +1\}$

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} (1 - y_i y_j) w_{ij}$$

VEKTOROVÝ PROGRAM: $v_i \in \mathbb{R}^n$, $v_i^T v_i = 1$

$$\max \frac{1}{2} \sum_{i<j} (1 - v_i^T v_j) w_{ij}$$

SEMIDEFINITNÝ PROGRAM

PREMENNÉ x_{ij} $i,j = 1, \dots, n$

SDP: $\max/\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$

ZA PODMIENOK $\sum_{i,j} a_{ijk} x_{ij} = b_k$, $X \succeq 0$

26.03.2012 n.
PETER ČERNO

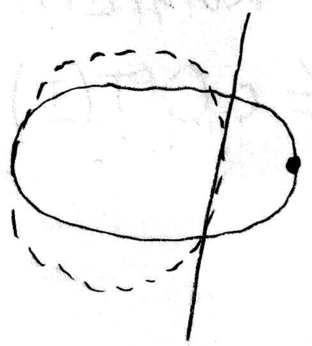
NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

POKIAĽ SÚ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIA V NEJAKEJ GULI, TAK VIEME NÁJSŤ RIEŠENIE S ADITÍVNOU CHYBOU ε.

$$X \succeq 0 \xrightarrow{\text{EKVIV.}} a^T X a \geq 0 \quad (\forall a)$$

$\equiv$ LIN. PROGRAM S NESPOČETNE VEĽA PODM.

<u>ELIPSOIDOVÁ METÓDA</u> – MÁ JEDNODUCHÝ PREDPOKLAD ... AK MÁME BOD, KT. NIE JE PRÍPUSTNÝ, TAK ELIPS. METÓDA NÁJDE PODM., KTORÚ PORUŠUJE



ELIPSOIDOVÚ METÓDU POVAŽUJEME ZA ČIERNU SKRINKU ...

<u>VEKTOROVÝ PROGRAM</u> $\equiv$ SEMIDEFINITNÝ PROGRAM ... $X = V^T V$

PREMENNÉ $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$

$\max/\min \sum_{i,j} c_{ij} (v_i \cdot v_j)$.

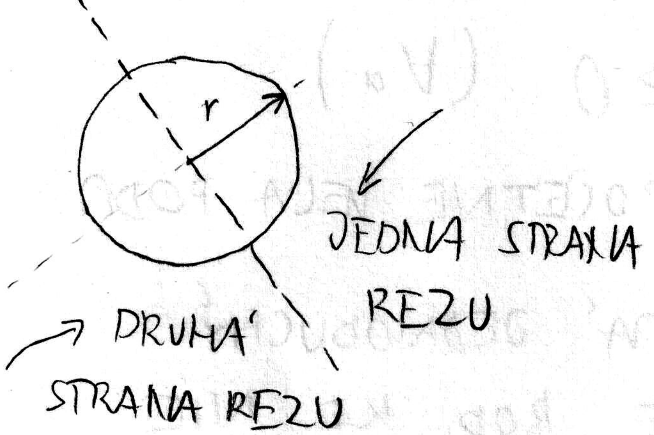
ZA PODM.: $\sum_{i,j} a_{ijk} (v_i \cdot v_j) = b_k \quad (\forall k)$

ALG.

(1) NÁJDI v_i^* ... OPTIMUM VEKT. PROG.

(2) ZVOĽ $r \in \mathbb{R}^n$, $\|r\|=1$ UNIF. NÁHODNE

(3) VÝSTUPNÝ REZ: $\{i \mid r^T v_i \geq 0\}$



ONLINE ALGORITMUS JE c-KOMPETITÍVNY KEĎ $(\exists d > 0)\ (\forall I)\ ALG(I) \leq c\,OPT(I) + d$

02.04.2012 M.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

MAX CUT

$$\max \frac{1}{2} \sum_{ij \in E} w_{ij} (1 - y_i y_j)$$

T. Z. $y_i \in \{-1, +1\}$

SDP

$$\max \frac{1}{2} \sum_{ij \in E} w_{ij} (1 - v_i \cdot v_j)$$

T. Z. $v_i \cdot v_i = 1$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ (POTREBUJEME PRIESTOR DIMENZIE $\geq n$!)

ALG v_i^* ... OPT_{SDP}

r ... NÁHODNÝ VEKTOR

$y_i = \operatorname{sgn}(r \cdot v_i)$

$$\alpha := \min_{x \in \langle -1, 1 \rangle} \frac{\frac{1}{\pi} \arccos(x)}{\frac{1}{2}(1 - x)} \doteq 0,878$$

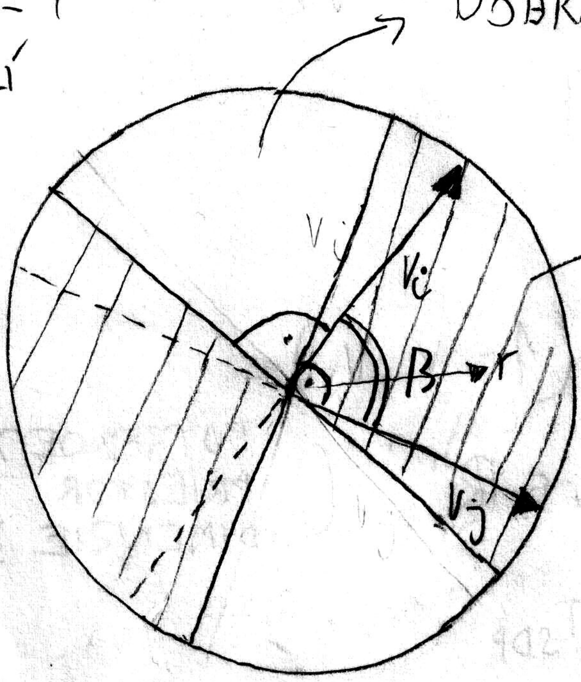
VETA: ALG JE α-APROXIMAČNÝ PRE MAXCUT.

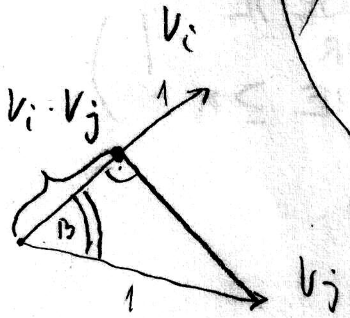
VETA: JE NP-ŤAŽKÉ APROXIMOVAŤ MAXCUT S APROX. POMEROM $> \frac{16}{17} \approx 0.94 \ldots$

VETA: ZA PREDPOKLADU UNIQUE GAMES CONJ. JE NP-ŤAŽKÉ APROXIMOVAŤ MAX CUT S POMEROM $> \alpha \doteq 0{,}878$.

$\frac{1}{2}(1 - y_i y_j) = 1$

$\iff$ r ODDELÍ v_i A v_j





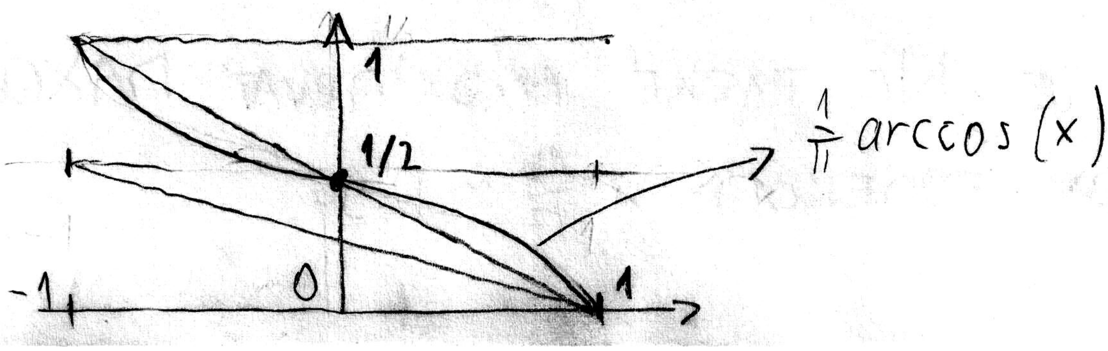
$P[$r ODDELÍ v_i A $v_j] = \frac{\beta}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos v_i v_j$

NEMUSÍME SA ZAOBERAŤ KOLMOU ZLOŽKOU VEKTORU r (VZHĽADOM K ROVINE v_i, v_j).

DÔKAZ VETY: $E[\text{ALG.}] = \sum_{ij \in E} w_{ij}$.

$P[$r ODDELÍ v_i A $v_j] = \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{1}{\pi} \arccos v_i v_j$

$\geq \alpha \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{1}{2}(1 - v_i v_j) = \alpha \cdot OPT_{SDP} \geq \alpha\ OPT.$ □



2/3

02. 04. 2012 M.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

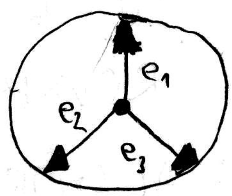
VETA: EXISTUJE α-APROX. ALG. PRE MAX-2SAT.

VETA: EXISTUJE ALGORITMUS, KTORÝ KAŽDÝ 3-CHROMATICKÝ GRAF MAX. STUPŇA Δ OFARBÍ $\tilde{O}(\Delta^{1/3})$ FARBAMI.

$\tilde{O}$ ... ZANEDBÁVA log FAKTORY ...

VETA: EXISTUJE ALG., KTORÝ KAŽDÝ 3-CHROMATICKÝ GRAF OFARBÍ $\tilde{O}(n^{1/4})$ FARBAMI.
NAJLEPŠÍ ODHAD JE $\tilde{O}(n^{0,211})$.

AKO UMIESTNIŤ 3 VEKTORY DĹŽKY 1, ABY BOLI ČO NAJĎALEJ OD SEBA?



KOĽKO JE $e_i e_j$ PRE $i \neq j$? ... $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ **SDP**: MAXIMALIZUJ 0

T.Ž. $v_i v_j = -\frac{1}{2}$ PRE $\forall ij \in E$

$v_i v_i = 1 \quad \forall i$

KAŽDÝ 3-OFARBITEĽNÝ GRAF ZREJME MÁ PRÍPUSTNÉ RIEŠENIE ...

HĽADÁME OFARBENIE IBA KONŠTANTNEJ ČASTI VRCHOLOV ... STAČÍ LOG. VEĽA KROKOV ...

POVEDZME, ŽE PO 1. ITERÁCII JE

$E[|V_1|] \leq 0.9\,|V|$, V_1 ... NEOFARBENÉ VR. PO 1. ITERÁCII

$\Rightarrow E[|V_i|] \leq 0{,}9^i\,|V|$ ...

ALG: $t = 2 + \log_3 \Delta$

$r_1, \dots, r_t$ ... NÁHODNÉ 1-OVÉ VEKTORY

VRCHOL i OFARBÍM FARBOU

$(\operatorname{sgn} v_i r_1, \dots, \operatorname{sgn} v_i \cdot r_t)$ ... 2^t FARIEB

$ij \in E$ JE ŠPATNÁ, KEĎ i A j MAJÚ ROVNAKÚ FARBU ...

ALGORITMUS OFARBÍ $\forall$ VRCHOLY, KT. NIE SU V ŠPATNEJ HRANE ...

LEMMA: $P[r_k$ NEODDELÍ $i\,j] = \frac{1}{3}$. (ZREJMÉ)

LEMMA: $P[ij \in E$ JE ŠPATNÁ$] = \frac{1}{3^t} = \frac{1}{9\Delta}$.

LEMMA: $P[v$ LEŽÍ V ŠPATNEJ HRANE$] \leq 1/9$.

$E[\#$ ZAFARBENÝCH VRCHOLOV$] \geq 0{,}89\,n$.

$\#$ FARIEB $= 2^{2+\log_3 \Delta} = 4\Delta^{\log_3 2} \doteq 4\Delta^{0{,}63\dots}$.

02.04.2012 ПО
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

ALG: ZVOLÍM „MAGICKÉ" $\varepsilon := \sqrt{\frac{2}{3}\ln n}$

VEZMEM NÁHODNÝ VEKTOR $r \in (N(0,1))^n$

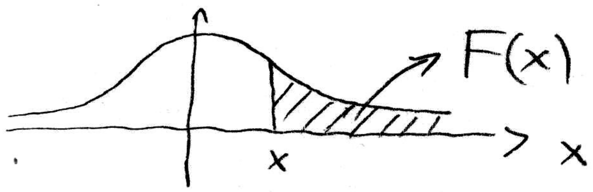
$S(\varepsilon) := \{ i \mid v_i \cdot r \geq \varepsilon \}$,

$S'(\varepsilon) := \{ i \in S(\varepsilon) \mid i$ NEMÁ SUSEDA V $S(\varepsilon) \}$.

VÝSTUP: $S'(\varepsilon)$. ($S'(\varepsilon)$ JE NEZÁVISLÁ MN.)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ... HUSTOTA NORM. ROZD.

$F(x) = \int_x^\infty f(y)\,dy$



VIE SA, ŽE: $\frac{x}{1+x^2} f(x) \leq F(x) \leq \frac{1}{x} f(x)$, $x>0$

LEMMA: $E[|S(\varepsilon)|] = n \cdot F(\varepsilon)$. (ZREJMÉ)

LEMMA: NECH $i \in S(\varepsilon)$, $ij \in E$.

POTOM $P[j \in S(\varepsilon)] \leq F(\sqrt{3}\,\varepsilon) \leq \frac{1}{2\Delta}$

$v_j = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2} v_i$

$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}v_i + v_j\right)$

$\Rightarrow E[|S'(\varepsilon)|] \geq$

$\geq \frac{n}{2} F(\varepsilon)$.

$r\, v_i \geq \varepsilon$ A $r\, v_j \geq \varepsilon$

$\Rightarrow r \cdot u \geq \sqrt{2}\, \varepsilon$.

16.04.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

NAJKRATŠIA s-t CESTA (DIJKSTRA)

$\mathcal{Y} = \{ S \mid S \ni s, S \not\ni t \}$, $\delta(S) = \{ e \in E \mid |e \cap S| = 1 \}$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \quad \forall S \in \mathcal{Y}$$

CELOČÍSELNÝ PROGRAM ... $x_e \in \{0,1\}$ $\forall e \in E$.

V KAŽDOM PRÍP. RIEŠ. s A t SÚ V 1 KOMP.

DUÁL: $$\max \sum_{S \in \mathcal{Y}} y_S$$

$$\sum_{S:\, e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \quad \forall e \in E$$

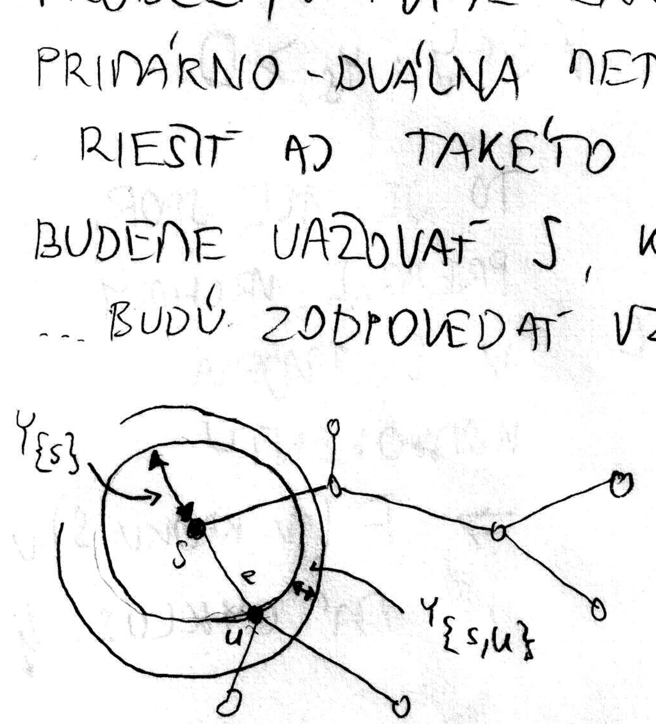
$$y_S \geq 0 \quad \forall S \in \mathcal{Y}$$

PROBLÉM: MÁME EXPONENCIÁLNE VEĽA PREM.

PRIMÁRNO-DUÁLNA METÓDA UMOŽŇUJE EFEKTÍVNE RIEŠIŤ AJ TAKÉTO PROBLÉMY

BUDEME UVAŽOVAŤ S, KT. SÚ DO SEBA VNORENÉ ..

... BUDÚ ZODPOVEDAŤ VZDIALENOSTIAM



ALGORITMUS $y := 0$, $F := \emptyset$

DOKEDY F NEOBSAHUJE s-t CESTU

$S :=$ KOMPONENTA OBSAHUJÚCA s

ZVYŠUJEME y_S DOKEDY NEPLATÍ

$\sum_{T: e \in \delta(T)} y_T = c_e$ PRE NEJAKÉ $e \in \delta(S)$

$F := F \cup \{e\}$.

VÝSTUP = s-t CESTA V F. OZNAČME JU P.

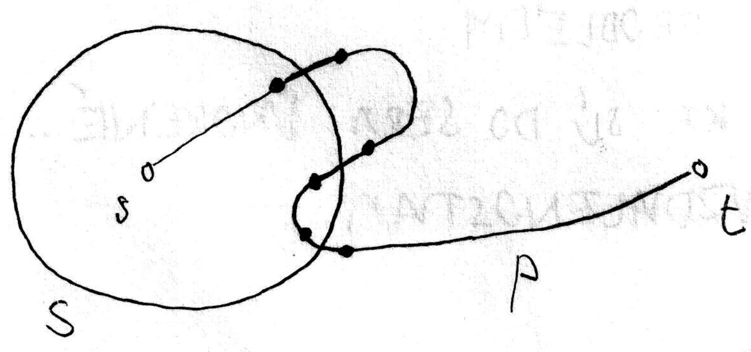
POZOR: F JE STROM.

CHCEM SPOČÍTAŤ CENU ~~PRIA~~ MOSTENÉHO RIEŠENIA ... $\sum_{e \in P} c_e$.

$\sum_{e \in P} c_e = \sum_{e \in P} \sum_{S: e \in \delta(S)} y_S =$ (PODOBNÝ TRIK SME POUŽILI V SET-COVER.)

$= \sum_{S \in y} |P \cap \delta(S)| \, y_S = \sum_{S \in y} y_S$.

UKÁŽEME, ŽE $|P \cap \delta(S)| \leq 1$, $\forall S \in y : y_S > 0$.



TO JE ALE SPOR, PRETOŽE VRCHOLY V S TVORIA KOMPONENTU $\Rightarrow$ F (V KROKU S) $\cup$ $\cup$ P MÁ CYKLUS. ↯

PRÍPAD: $|P \cap \delta(S)| > 1$

16.04.2012 Po
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

ZOVŠEOBECNENÝ STEINEROV STROM

VSTUP: $G = (V, E)$, c_e, DVOJICE $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$

VÝSTUP: $F \subseteq E$ ... $\forall i$ F OBSAHUJE s_i-t_i CESTU.

CIEĽ: $\min \sum_{e \in F} c_e$.

LP: $\mathcal{S}_i = \{ S \subseteq V \mid |S \cap \{s_i, t_i\}| = 1 \}$

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e, \quad x_e \in \{0,1\}$$

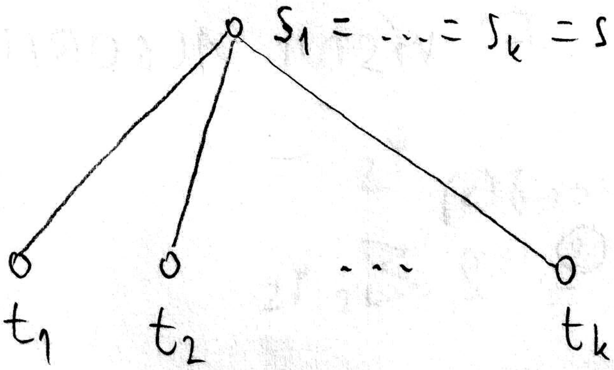
$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1, \quad \forall S \in \mathcal{S}_i$$

DUÁL: $\max \sum_{S \in \bigcup_i \mathcal{S}_i} y_S, \quad y_S \geq 0 \quad \forall S \in \bigcup_i \mathcal{S}_i$

$$\sum_{S : e \in \delta(S)} y_S \leq c_e \quad (\forall e \in E)$$

SKÚSIME POUŽIŤ ROVNAKÝ ALG. A ZISTÍME, ŽE TO NEJDE...

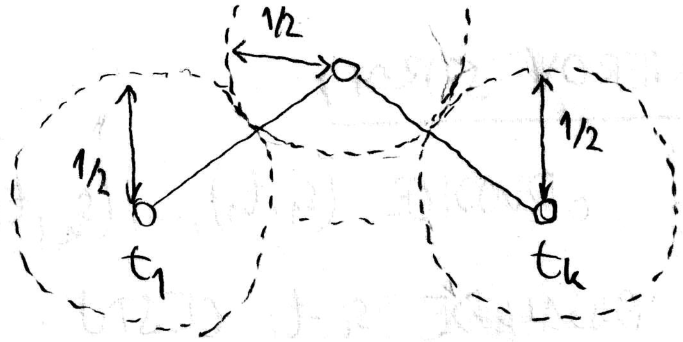
UVAŽUJME ÚPLNÝ GRAF S 1 CENAMI



ARGUMENT S PREHODENÍM $\sum \sum$ UŽ NEBUDE FUNGOVAŤ

$\forall$ HRANY ÚČTUJEME IBA VRCHOLU s ...

BUDEME ÚČTOVAŤ VŠETKÝM PREMENNÝM:



TJ. HRANY, KTORÝCH SA TO TÝKA, ZAPOČÍTAVAME NA OBOCH KONCOCH

HRANY BUDEME ČÍSLOVAŤ

ALGORITMUS $y := 0$, $F := \emptyset$, $\ell := 0$

DOKEDY $\exists i$: $s_i - t_i$ NIE SÚ SPOJENÉ V F:

- $\mathcal{C} = \{ S \in \bigcup_i \mathcal{S}_i \mid S$ JE KOMPONENTA $(V, F) \}$
- ZVÝŠIME VŠETKY y_C, $C \in \mathcal{C}$, (ROVNAKÝM TEMPOM) DOKEDY NENASTANE $\sum_{S: e \in \delta(S)} y_S = c_e$, PRE NEJAKÉ $e \in \delta(C)$, $C \in \mathcal{C}$.
- $\ell := \ell + 1$, $e_\ell := e$, $F := F \cup \{e_\ell\}$.

PRE $i := \ell \searrow 1$, KEĎ $F \setminus \{e_i\}$ JE PRÍPUSTNÉ,
$F := F \setminus \{e_i\}$.

POZOR: F JE LES, TJ. NEZÁLEŽÍ NA PORADÍ

NECH $F = \{e_1, \dots, e_\ell\}$, F' VÝSTUP ALGORITMU.

$$\sum_{e \in F'} c_e = \sum_{e \in F'} \sum_{S: e \in \delta(S)} y_S =$$

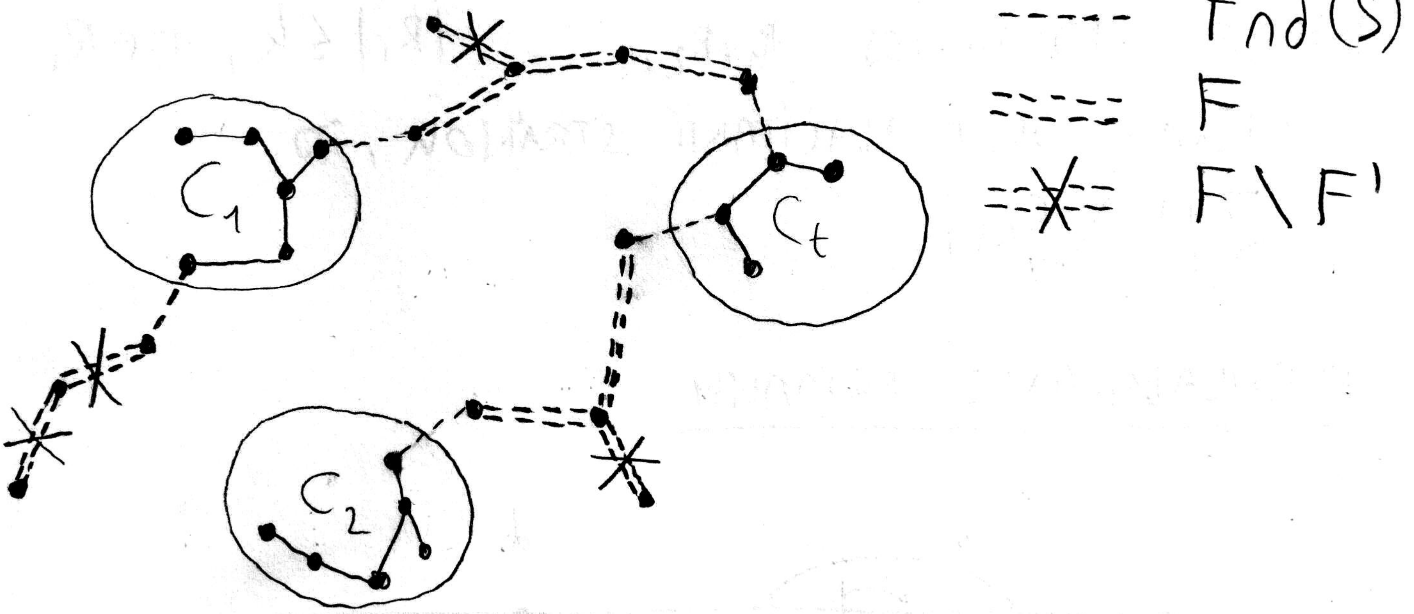
$$= \sum_S |F' \cap \delta(S)| \, y_S \overset{?}{\leq} 2 \cdot \sum_S y_S .$$

$\rightsquigarrow$ 2-APROX. ALGORITMUS.

16.04.2012 Po
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

BUDEME DOKAZOVAŤ TÚTO NEROVNOSŤ INDUKCIOU PODĽA POČTU KROKOV ALGORITMU …
STAČÍ DOKÁZAŤ PRE $\mathcal{C}$ Z KROKU ALGORITMU, ŽE
$\sum_{S \in \mathcal{C}} |F' \cap \delta(S)| \leq 2|\mathcal{C}|$.



KEĎ SKONTRAHUJEME $C_1, \dots, C_t$, POTOM
$F \setminus F'$ JE LES, LISTY SÚ IBA MEDZI $C_1, \dots, C_t$.

$$\sum \deg(C_i) \leq 2|\mathcal{C}|$$
$$\sum |F' \cap \delta(S)| = \sum \deg(C_i)$$

OZNAČME V' OSTATNÉ VRCHOLY. POTOM
$\sum \deg(C_i) + \sum_{V'} \deg(v) \leq 2|\mathcal{C} \cup V'|$ (PLATÍ PRE $\forall$ STROM)
NAVIAC $\sum_{V'} \deg(v) \geq 2|V'|$ (VNÚTORNÉ UZLY)
PO ODČÍTANÍ DOSTÁVAME POŽADOVANÚ NEROVNOSŤ. $\square$

CVIČENIA

PAGING (CACHING) PROBLEM

n ... # STRÁNOK

k ... # STRÁNOK V PAMÄTI

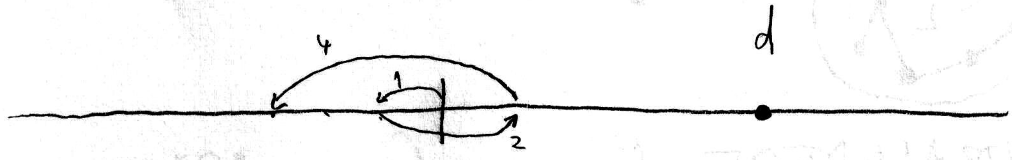
VSTUP: POSTUPNOSŤ $\{1, \dots, n\}^*$ $r_1, r_2, \dots$

VÝSTUP: POSTUPNOSŤ $R_1, R_2, \dots$ $|R_i| \leq k$, $r_i \in R_i$

MERÁM POČET NAČÍTANÍ STRÁNOK, TJ.

$\sum |R_i \setminus R_{i-1}|$.

PREHĽADÁVANIE PRIAMKY



ALG $\leq 1 + 9d$ ... NAJLEPŠÍ DET. ALG.

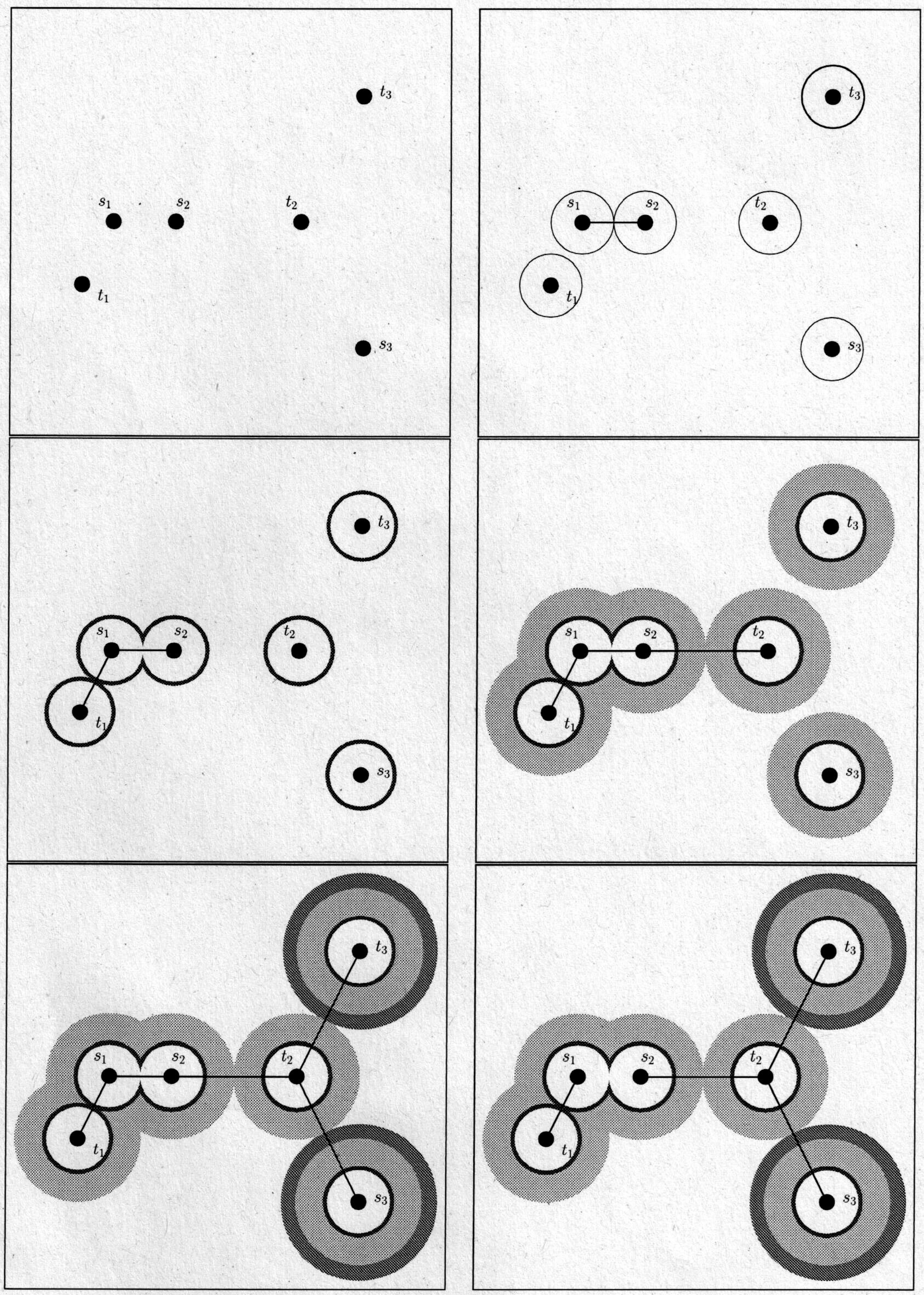


Figure 7.5: Illustration of the primal-dual algorithm for the generalized Steiner tree problem. Two edges go tight simultaneously in the last iteration before the deletion step. The deletion step removes the edge (s_1, s_2) added in the first iteration. The final set of edges is shown in the last figure.

23.04.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

ONLINE ALGORITMY

SKI RENTAL ... 2-KOMPETITÍVNY ALG. (DET.)

$\frac{e}{e-1} \approx 1.58$ - KOMPETITÍVNY PRAVD. ALG.

COW PATH ... EXIST. 9-KOMPETIT. ALG. (DET.)

ONLINE ALG. $\mathcal{A}$ JE R-KOMPETIT., KEĎ
$\exists c\ \forall I\quad \mathcal{A}(I) \leq R \cdot OPT + c$.

ALG. PRE COW PATH:

NAVŠTÍV BODY: $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$
NECH d ... POZÍCIA CIEĽA. ZREJME $OPT = |d|$.
AK $OPT \leq 1$ ... $\mathcal{A}(d) \leq 2 + OPT$
AK $OPT > 1$ ... POSLEDNÁ OTÁČKA x ... $|x| < 2OPT$
$$\mathcal{A}(d) \leq OPT + 2|x| + 2\frac{|x|}{2} + \ldots \leq 9OPT.$$

PAGING: n # STRÁNOK, k # STRÁNOK V CACHE.

VSTUP: $\{1, \ldots, n\}^* =: r = r_1 r_2 \ldots r_N$
VÝSTUP: STAV RÝCHLEJ PAMÄTI PO KAŽDOM POŽIADAVKU.
CENA: NAČÍTANIE STRÁNKY DO RÝCHLEJ PAMÄTI $= 1$

BÚNO ALG. JE LAZY: NAČÍTA VŽDY IBA POŽADOVANÚ STRÁNKU A VYHODÍ STRÁNKU IBA KEĎ MUSÍ.

ALGORITMY:

LRU ... LEAST RECENTLY USED

X LFU ... LEAST FREQUENTLY USED + AGING ...

FWF ... FLUSH WHEN FULL

FIFO ... FIRST IN FIRST OUT

VETA: LRU, FWF, FIFO SÚ k-KOMPETITÍVNE
A TO JE OPTIMÁLNE.

PRE DOLNÝ ODHAD LFU: $n = k+1$

VSTUP: $1^m 2^m \dots (k-1)^m (k, k+1)^m$

OPT ... $k+1$

LFU ... $k + 2m$

OSTATNÉ DOLNÉ ODHADY: $n = k+1$

r_i ... TÁ STRÁNKA, KT. NIE JE V RÝCHLEJ PAM.

$ALG(I) = N$

$OPT(I) \leq \frac{N}{k} + k$.

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k}$ | $\underbrace{|||||\dots|}_{k-1}|$

RÝCHLA PAMÄŤ

k-1 STRÁNOK TIETO NECHÁME V RÝCHLEJ PAM.

TÚTO STRÁNKU VYHODÍME...

HORNÝ ODHAD PRE FIFO, LRU:

KEĎ NEJAKÝ SEGMENT r MÁ $\leq k$ RÔZNYCH STRÁNOK
$\Rightarrow$ V ŇOM MÁ FIFO, LRU $\leq k$ CHÝB.

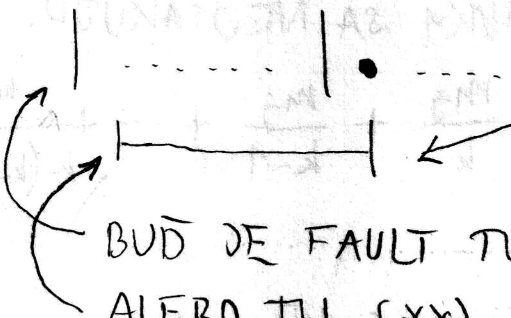
23.04.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

FWF : SEGMENT r MEDZI DVOMA VYPRÁZDNENIAMI MÁ $\leq k$ RÔZNYCH STRÁNOK A $\leq k$ CHÝB.

ROZDELME r NA FÁZE (U FWF ZAČIATOK FÁZE JE POŽIADAVOK, KT. VYPRÁZDNI CACHE ... |•....|•....
U FIFO, LRU FÁZE SÚ MAXIMÁLNE SEGMENTY S NAJVIAC k STRÁNKAMI ||||||||||||||||||||||...)

OPT $\geq$ # FÁZÍ. ALG(I) $\leq k \cdot \#\underset{\text{CELÝCH}}{\text{FÁZÍ}} + k$



AK NEBOL FAULT V (*), POTOM PRVOK • NIE JE V CACHE.

BUĎ JE FAULT TU (*)
ALEBO TU (**)

$\square$

PRAVDEPODOBNOSTNÝ ALG. MARK:
NA ZAČIATKU $\forall$ STRÁNKY V CACHE ... OZNAČENÉ
POŽIADAVOK r_i : AK r_i JE V CACHE, OZNAČÍM.
AK r_i NIE JE V CACHE, POTOM:
- AK JE VŠETKO OZNAČENÉ, ZMAŽEM ZNAČKY.
- VYHODÍM NÁHODNÚ NEOZNAČENÚ STRÁNKU.

<u>VETA</u>: MARK JE $2H_k$-KOMPETITÍVNY.
AK $n = k+1$, JE H_k-KOMPETITÍVNY.

OZNAČÍME FÁZE ... ZMAZANIE ZNAČIEK $\Rightarrow$
1. POŽIADAVOK FÁZE.

OPT $\geq$ # FÁZÍ.

m_j ... # NOVÝCH STRÁNOK V j-TEJ FÁZE.
NOVÉ = NEPOŽADOVANÉ V $(j-1)$-TEJ FÁZE.

ZREJME $m_j \geq 1$ ... PRVÝ POŽIADAVOK JE NOVÝ

NOVÉ   STARÉ
| • o o o • o o o • • o o ... o |

MARK JE NAJHORŠÍ, KEĎ $\forall$ NOVÉ POŽIADAVKY PREDCHÁDZAJÚ STARÉ. + POŽIADAVKY SA NEOPAKUJÚ

CENA V j-TEJ FÁZE: $m_j + \frac{m_j}{k} + \frac{m_j}{k-1} + \dots + \frac{m_j}{k-(k-m_j-1)}$
$\leq H_k m_j$.

OPT MÁ $\geq m_{j+1}$ CHÝB VO FÁZACH $(j+1)$, j.

OPT $\geq m_1 + m_3 + m_5 + \dots$
OPT $\geq m_2 + m_4 + m_6 + \dots$

2OPT $\geq \sum m_j$, MARK $\leq H_k \sum m_j \leq 2 H_k$ OPT.

PRE $n = k+1 \Rightarrow m_j = 1$, MARK $\leq H_k$ # FÁZÍ

OPT $\geq$ # FÁZÍ $\Rightarrow$ MARK $\leq H_k$ OPT. $\square$

30.04.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALGORITMY

<u>MARK</u> : $\leq 2H_k$ - KOMPETITÍVNY

$\leq H_k$ - KOMPETITÍVNY PRE $n = k+1$

EXISTUJE H_k - KOMPETITÍVNY PRAVD. ALGORITMUS ...

<u>VETA</u>: NEEXISTUJE R - KOMPETITÍVNY PRAVD. ALGORITMUS PRE CACHING PRE $R < H_k$.

<u>DŮKAZ</u>. UVAŽUJME $n = k+1$. PREDPOKLADAJME, ŽE POZNÁME STAV PAMÄTI (TJ. CACHE)

NECH a_0 NIE JE V RÝCHLEJ PAMÄTI NA ZAČIATKU FÁZE:

$$\ldots \overbrace{\| a_0 | a_1 \, a_0 | a_2 \, a_1 \, a_0 | \ldots | \underbrace{a_{k-1} \, a_{k-2} \ldots a_0}_{\text{PODFÁZA}} \|}^{\text{FÁZA}}$$

a_1 ... STRÁNKA S MAXIMÁLNOU PRAVDEPODOBNOSŤOU MIMO CACHE

OPT = # FÁZÍ.

CHCEME SPOČÍTAŤ # CHÝB ALGORITMU.

$$\ldots | a_2 \, a_1 \, a_0 | a_3 \, a_2 \, a_1 \, a_0 | \ldots$$

POZRIEME SA NA DISTRIBÚCIU PODFÁZE j: $|a_j \ldots a_0|$

$p_i = P[a_i \text{ NIE JE V CACHE}]$, $\sum p_i = 1$

$\bar{p} := p_0 + \ldots + p_{j-1}$

PLATÍ $p_j \geq \frac{1-\bar{p}}{n-j}$ (PRETOŽE a_j MÁ NAJVÄČŠIU PRAVD., ŽE NEBUDE V CACHE)

$\Rightarrow P[\text{FAULT V PODFÁZI } j] \geq \bar{p} + p_j \geq \frac{1}{n-j}$.

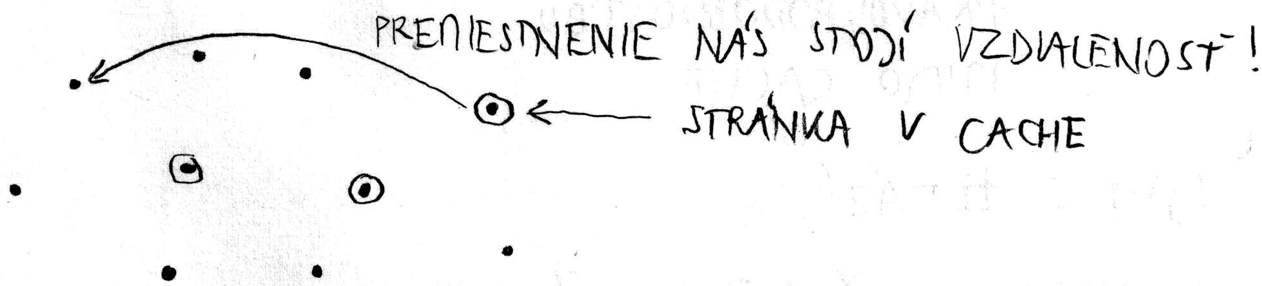
EŠTE POTREBUJEME ZABEZPEČIŤ, ABY NA $|a_0|$ NASTAL FAULT S PRAVD. 1.

TO SA DÁ ZABEZPEČIŤ NAPR. ZDVOJENÍM POSLEDNEJ FÁZE:

$$\underbrace{|(a_{k-1} \dots a_0)^2 || a_0'}_{k+1 \text{ PRVKOV}}$$

$$E[\#\text{FAULTOV VO FÁZI}] \geq 1 + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-(n-2)} = H_k. \blacksquare$$

ZOVŠEOBECNENIE PROBLÉMU



k-SERVER PROBLÉM

MÁME DANÚ METRIKU (M, δ), k SERVEROV, POČIATOČNÚ KONFIGURÁCIU = k-TICA BODOV Z M

VSTUP: $r_1, r_2, \dots, r_N \in M$

VÝSTUP: $A_1, \dots, A_N$ ... KONFIGURÁCIE

30.04.2012 Ⓜ.
PETER ČERNO

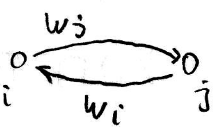
NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALGORITMY

CIEĽ: $\min \sum_{i=1}^{N} \delta(A_{i-1}, A_i)$

BUNO: ALG JE LENIVÝ, TJ. A_{i-1}, A_i SA LÍŠIA V JEDNOM BODE

PRÍKLAD: $\delta(x,y) = 1$ ... CACHING PROBLEM

PRÍKLAD: VÁŽENÉ STRÁNKOVANIE, TJ. PRI PAGE FAULT NA STRÁNKU i PLATÍME w_i.

POZOR! NEJEDNÁ SA O METRIKU:  $w_i \neq w_j$

SPRAVÍME Z TOHO METRIKU:

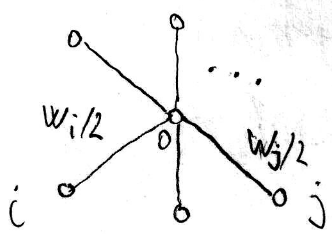
PRI NAČÍTANÍ i A VYHODENÍ j PLATÍME: $\frac{w_i + w_j}{2}$.

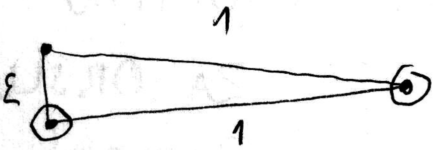
ROZDIEL BUDE IBA V ADITÍVNEJ KONSTANTE.

PRÍKLAD: STROMOVÉ METRIKY.

GRAFOVÁ METRIKA ... DANÝ GRAF G, $\delta(u,v)$ = DĹŽKA NAJKRATŠEJ CESTY.

TOTO ZOVŠEOBECŇUJE VÁŽENÉ STRÁNKOVANIE



PRÍKLAD: $k=2$, METRIKA: 

TOTO ZOVŠEOBECŇUJE SKI RENTAL.

VETA: PRE $k=2$ OPTIMÁLNY KOMPETITÍVNY POMER JE 2 PRE DET. ALG. A $\frac{e}{e-1}$ PRE $|M|=3$ & PRAVD.

(*) VETA: PRE DET. ALGORITMY A ĽUBOVOĽNÚ (M, δ) T.Ž. $|M| \geq k+1$ JE KOMP. POMER $\geq k$.

HYPOTÉZA: k-SERVER PROBLEM - EXISTENCIA k-KOMP. ALGORITMU.

VETA: WFA (WORK FUNCTION ALG.) JE $(2k-1)$-KOMPETITÍVNY, k-KOMPETITÍVNY PRE $n=k+1$.

(**) VETA: PRE STROMOVÉ METRIKY EX. k-KOMP. ALG.

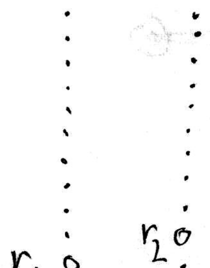
VETA: EXISTUJE $\log^{O(1)} n$-KOMP. PRAVD. ALG. PRE VÁŽENÉ STRÁNKOVANIE.

DÔKAZ (*). NECH $|M|=k+1$. KONFIGURÁCIU BUDEME ZNAČIŤ PODĽA CHÝBAJÚCEHO BODU.

POČIATOČNÁ KONFIGURÁCIA ... r_1

POŽIADAVKY ... r_{i+1} ... BOD, KT. CHÝBA V KONFIGURÁCII ALG PO OBSLÚŽENÍ r_i

CENA ALGORITMU:



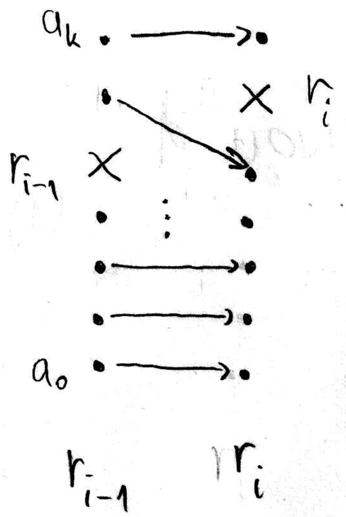
ZA OBSLÚŽENIE POŽIADAVKU r_i ZAPLATÍ $\delta(r_{i+1}, r_i)$.

TJ. CENA $= \sum_{i=1}^{N} \delta(r_{i+1}, r_i)$.

30.04.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

BUDEME DEFINOVAŤ k ALGORITMOV TAK, ŽE V KAŽDOM KROKU i SÚ VŠETKY V k RÔZNYCH KONFIGURÁCIACH, TJ. V $M \setminus \{r_i\}$.



CENA k RIEŠENÍ DOHROMADY ZA OBSLÚŽENIE r_i

$$\delta(r_{i-1}, r_i)$$

CENA ZA POČ. KONF.

$$\text{CELKOM: } \sum_{i=2}^{N} \delta(r_{i-1}, r_i) + C$$

$$\leq ALG + C$$

$\Rightarrow$ EXISTUJE RIEŠENIE S CENOU $\leq \frac{ALG}{k} + C'$.

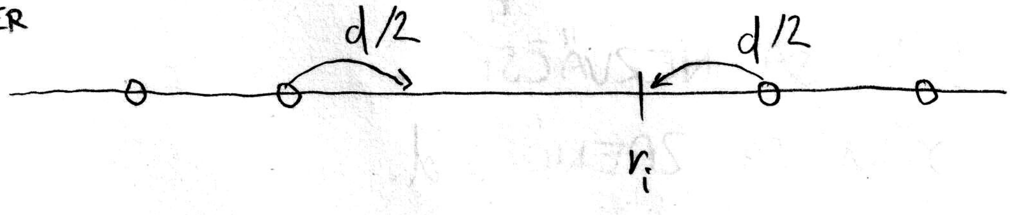
$\Rightarrow$ ALG NIE JE LEPŠÍ NEŽ k-KOMPET. $\square$

<u>DÔKAZ</u> (**). UVAŽUJME METRIKU M ... PRIAMKU

<u>ALG.</u> VEZMI 2 NAJBLIŽŠIE SERVERY K r_i

(DC) A PRIBLÍŽ ICH K POŽIADAVKU

=DOUBLE COVER



KEĎ r_i JE VÄČŠÍ / MENŠÍ NEŽ VŠETKY POZÍCIE SERVEROV $\Rightarrow$ OBSLÚŽIM IBA NAJBLIŽŠÍ. (POZOR! ALG. NIE JE LAZY).

$S = \{s_1 \dots s_k\}$ ... SERVERY ALG. DC.

$A = \{a_1 \dots a_k\}$ ... SERVERY PROTIVNÍKA ADV.

P ... CENA MINIM. PÁROVANIA $A - S$.

DEFINUJME: $\Phi := k.P + \sum_{i<j} d(s_i, s_j)$.

KAŽDÝ KROK ROZDELÍME NA 2 ...

$A \to A'$ ... (A' OBSAHUJE r_i) S CENOU d

POTOM $\Phi(S, A') - \Phi(S, A) \leq k.d$. (1)

(ZMENÍ SA JEDINE ZLOŽKA $k.P$)

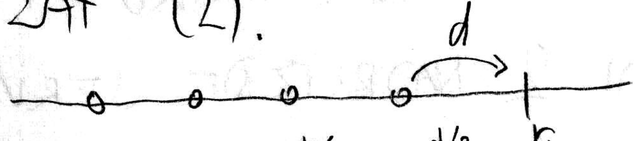
$S \to S'$ ... (S' OBSAHUJE r_i)

POTOM $\Phi(S', A') - \Phi(S, A') \leq -d$. (2)

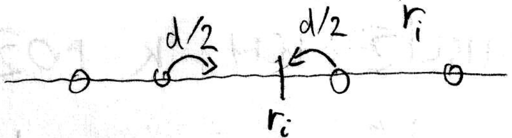
$\Phi(S_N, A_N) - \Phi(S_0, A_0) \leq k.ADV - DC$

$\Rightarrow DC \leq k.ADV + C$.

ZOSTÁVA DOKÁZAŤ (2).

V PRÍPADE 

TO FUNGUJE.

UVAŽUJME PRÍPAD 

.

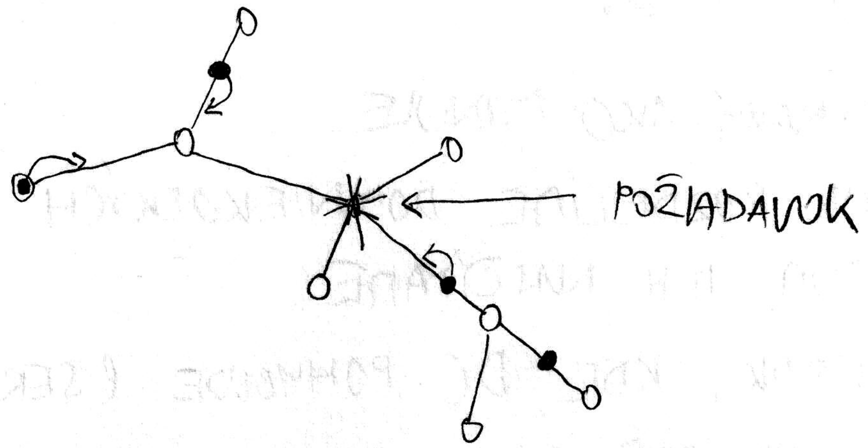
ZLOŽKA $k.P$ SA NEZVÄČŠÍ ...

DRUHÁ ZLOŽKA SA ZMENÍ O d.

07.05.2012 M.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

k-SERVER ALG. PRE STROMY



DC (DOUBLE COVER): KAŽDÝ SERVER SA POHYBUJE SMEROM K r_i POKIAĽ MEDZI NÍM A r_i NIE JE INÝ SERVER.

VETA: DC JE k-KOMPETITÍVNY.

DÔKAZ. $\Phi(A,S) = k \cdot d(A,S) + \sum_{i<j} d(s_i, s_j)$.

$S = \{s_1, \dots, s_k\}$ ... POZÍCIA ALG. DC. (NÁŠ ALG.)

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ... POZÍCIA OFF-LINE RIEŠENIA.

$d(A,S)$ ... $\sum$ VZDIALENOSTÍ PRE MIN. PÁROVANIE.

ŤAH ROZDELÍME NA 2 ČASTI:

$$(A,S) \xrightarrow[(1)]{} (\underset{\ni r_i}{A'}, S) \xrightarrow[(2)]{} (\underset{\ni r_i}{A'}, \underset{\ni}{S'}).$$

PRE (1): $\Phi(A',S) - \Phi(A,S) \leq k\, d(A,A')$, [KROK PROTIVNÍKA]

PRE (2): $\Phi(A',S') - \Phi(A',S) \leq -d(S,S')$. [NÁŠ KROK]

KEĎ SČÍTAME CEZ $\forall$ KROKY, DOSTANEME:

$$\Phi_{\text{POSLEDNÝ}} - \Phi_0 \leq k \cdot OPT - DC.$$

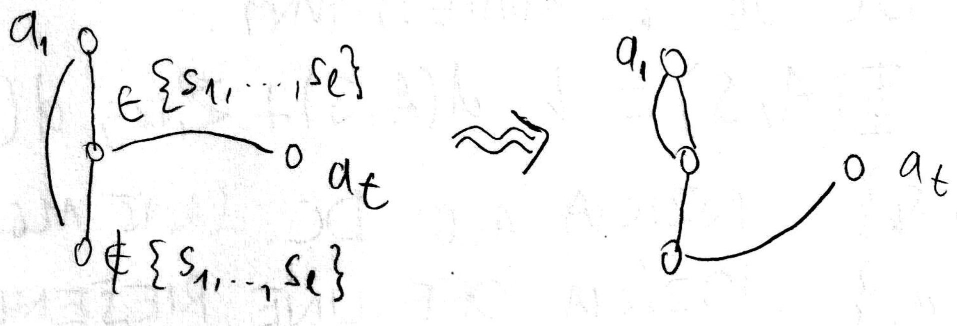
$$\Rightarrow DC \leq k \cdot OPT + \Phi_0 \leftarrow \text{ADITÍVNA KONŠTANTA}$$

DÔKAZ (1) JE ROVNAKÝ AKO MINULE.

DÔKAZ (2): KROK ROZDELÍME DO NIEKOĽKÝCH PODFÁZ, A POTOM ICH NASČÍTAME.

ANALYZUJEME KROK, KDE DC POHYBUJE ℓ SERVERMI. PREDPOKLADAJME, ŽE POŽIADAVOK JE SERVER a_1 A MY POHYBUJEME SERVERMI $s_1, \dots, s_\ell$. PREDPOKLADAJME, ŽE V MIN. PÁROVANÍ JE a_1 SPÁROVANÝ S NEJAKÝM SERVEROM Z $\{s_1, \dots, s_\ell\}$

INAK



$$d(A', S') \leq d(A', S) + (\ell-2)d.$$

$$\sum_{i<j} d(s_i', s_j') = \sum_{i<j} d(s_i, s_j) - (k-\ell)(\ell-2)d - \binom{\ell}{2} 2d.$$

$$\Phi(A', S') - \Phi(A', S) \leq k(\ell-2)d - k(\ell-2)d + \ell(\ell-2)d - \ell(\ell-1)d = \underline{\underline{-\ell d}}$$

$\blacksquare$

07.05.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

DEF. WORK FUNCTION:

$\omega_\sigma(C) \overset{def}{:=}$ MIN CENA RIEŠENIA, KT. OBSLÚŽI σ A SKONČÍ V C.

σ: POST. n POŽIADAVKOV
C: k BODOV Z M

POZOROVANIE: POVEDZME, ŽE CHCEME $\omega_{\sigma r}(C)$.

(1) $\omega_{\sigma r}(C) = \omega_\sigma(C)$, AK C OBSAHUJE r.

(2) $\omega_{\sigma r}(C) = \min_{x \in C} \left\{ \omega_{\sigma r}(C \setminus \{x\} \cup \{r\}) + d(x,r) \right\}$.

POZOROVANIE: OPTIMÁLNA CENA $= \min_C \omega_\sigma(C)$.

WFA (WORK FUNCTION ALGORITHM).

V KONFIGURÁCII $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ NA POŽIADAVKU r POHNI SERVEROM s_i T.Ž.:

$$\omega_{\sigma r}(S \setminus \{s_i\} \cup \{r\}) + d(s_i, r)$$

JE MINIMÁLNA.

VETA: WFA JE $(2k-1)$-KOMPETITÍVNY.

OTVORENÝ PROBLÉM: WFA JE k-KOMPETITÍVNY.

ROZVRHOVANIE S RÝCHLOSŤAMI

MÁME m POČÍTAČOV S RÝCHLOSŤAMI $s_1 \geq \ldots \geq s_m$.

INŠTANCIA: n ÚLOH VEĽKOSTI $p_1, \ldots, p_n$.

VÝSTUP: ROZKLAD $\{1, \ldots, n\}$ NA $I_1, \ldots, I_m$.

CIEĽ: MIN. DĹŽKU ROZVRHU ...

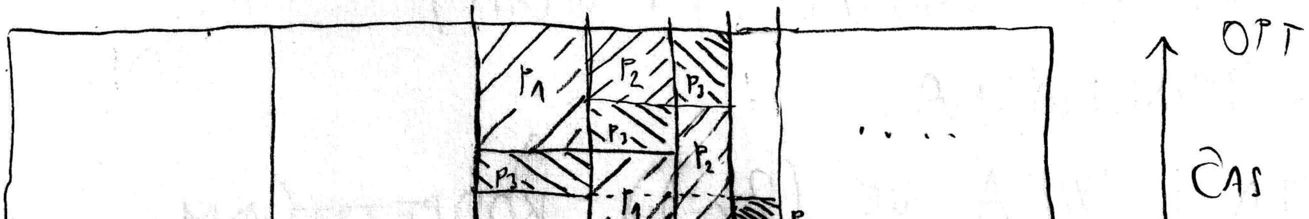
$$\min_{\{I_1, \ldots, I_m\}} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j \in I_i} p_j / s_i .$$

INÁ VARIANTA: PREEMPTÍVNE ROZVRHOVANIE

ÚLOHU MÔŽEME ROZDELIŤ, KAŽDÁ ČASŤ MÔŽE BEŽAŤ NA INOM POČÍTAČI, ALE NESMÚ SA PREKRÝVAŤ!!

PREDPOKLAD: POZNÁME OPTIMUM

VETA: KEĎ POZNÁME OPT, JE MOŽNÉ OPTIMÁLNE RIEŠENIE SKONŠTRUOVAŤ ONLINE.



... TREBA UVAŽOVAŤ POČÍTAČE S „PREMENLIVOU RÝCHL."

PROBLÉM: OPT NEPOZNÁME.

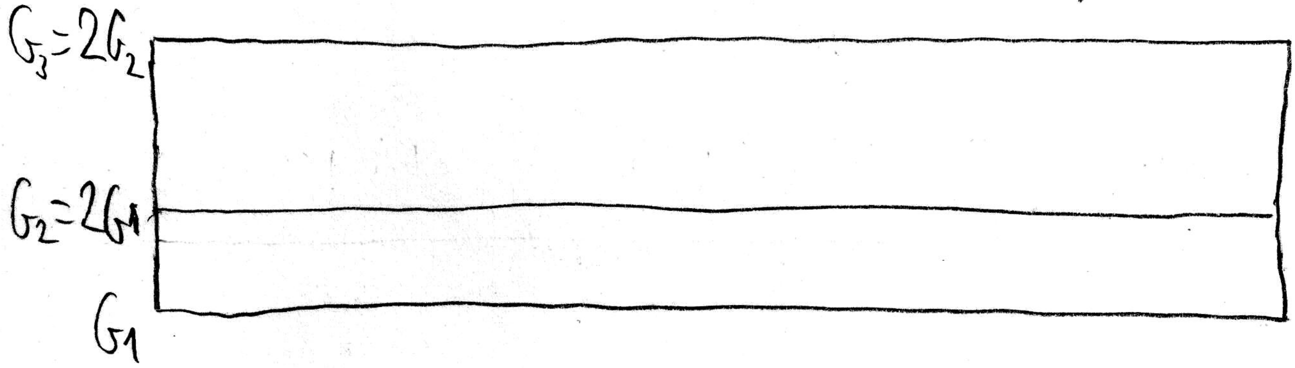
07.05.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

ALG. VO FÁZE $i=1$ ODHADNEME OPTIMUM AKO $G_1 := p_1/s_1$.

ROZVRHUJEME V ČASOVOM INTERVALE $(G_i, 2G_i)$ PREDCHÁDZAJÚCIM ALG. PRE OPT $= G_i$.

AK SA ZASEKNEME, $G_{i+1} := 2G_i$; $i := i+1$.



ANALÝZA: PO ROZVRHNUTÍ p_n JE $G_k \le 2\,\mathrm{OPT}$.

$\Rightarrow$ DĹŽKA ROZVRHU JE $2G_k \le 4 \cdot \mathrm{OPT}$.

VETA: ALG. JE 4-KOMPETITÍVNY ALG. PRE PREEMPTÍVNE ROZVRHOVANIE S RÝCHLOSŤAMI.

PRAVDEPODOBNOSTNÝ ALGORITMUS: $r := \ldots$

$G_1 := p_1/s_1 \cdot r^x$, KDE $x \in_R (0,1)$.

...

VETA: PRE NEPREEMPTÍVNE ROZVRHOVANIE EXISTUJE 8-KOMP. ALG. NAJLEPŠÍ JE (ZATIAĽ) 5,8-KOMP. DET. ALG. A 4,3-KOMP. PRAVD. ALG.

14.05.2012 M.
Peter Černo

NDMI018 Aproximační a online alg.

Preemptívne rozvrhovanie s rýchlosťami

Pravdepodobnostný algoritmus:

$G := \frac{p_1}{s_1} \cdot r^{\alpha}$ $\quad \alpha \in_R (0,1)$ unif.

Rozvrhujeme v časovom intervale dĺžky G

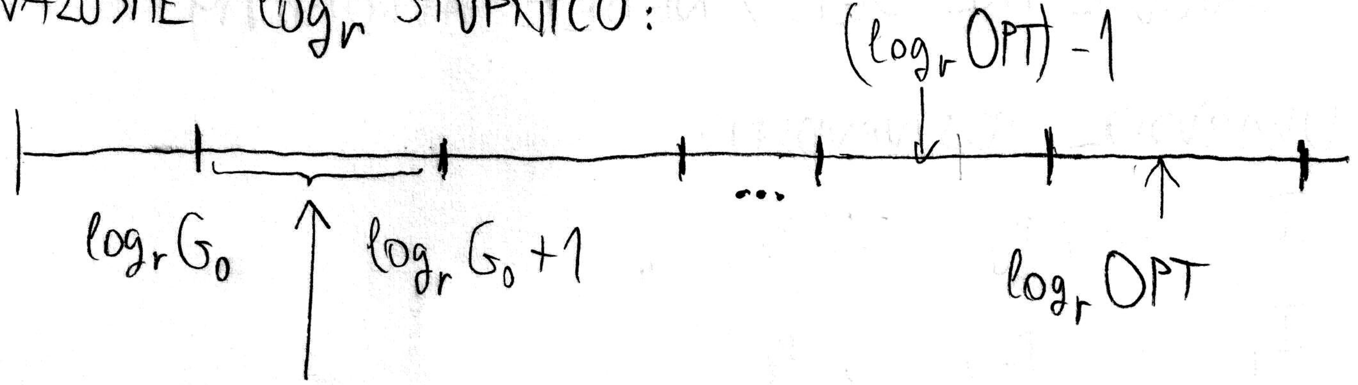
Keď už to nejde, zvolíme nové $G := r \cdot G$.

Keď G je posledná hodnota, potom istotne $G \leq r \cdot OPT$. Chceme spočítať distribúciu tohto posledného G v závislosti na α.

Predstavme si logaritmickú stupnicu pre čas.

Označme $G_0 := \frac{p_1}{s_1}$, $G_1 := \frac{p_1}{s_1} \cdot r^{\alpha}$ ...

Uvažujme $\log_r$ stupnicu:



$\log_r G_1$ je uniformne v tomto intervale

$\log_r G_k = \log_r G_0 + (k-1) + \alpha$

$\log_r G = \log_r OPT + \beta$

$E[G] \leq OPT \cdot E[r^{\beta}]$ $\quad \beta \in_R (0,1)$ unif.

$$ALG \leq G\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\dots\right) = G\frac{1}{1-\frac{1}{r}} = G\frac{r}{r-1}$$

$$\Rightarrow E[ALG] \leq E[G]\cdot\frac{r}{r-1} \leq OPT\frac{r}{r-1}\int_0^1 r^{\beta}d\beta =$$

$$= OPT\frac{r}{r-1}\cdot\frac{r-1}{\ln r}$$

$\Rightarrow$ ALG. JE $\frac{r}{\ln r}$-KOMPETITÍVNY.

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{\ln r}\right] = \frac{\ln r - r\frac{1}{r}}{\ln^2 r} = 0 \Rightarrow \ln r = 1 \Rightarrow \underline{\underline{r=e}}$$

$\Rightarrow$ ALG. JE e-KOMPETITÍVNY.

<u>VETA</u>: NEEXISTUJE LEPŠÍ NEŽ 2-KOMP. ALG. PRE ROZVRHOVANIE S RÝCHLOSŤAMI A MINIM. DĹŽKY ROZVRHU.

[FUNGUJE PRE PREEMPTÍVNE / NEPREEMPT. ROZVRH.
FUNGUJE PRE DET. / NEDET. ALGORITMY.]

UVAŽUJME POSTUPNOSTI:

$I = \dots, p_j, \dots, p_1$

$I_t = \dots, p_j, \dots, p_t$

VEZMIME ROZVRH PRE INŠTANCIU I

$T_t \overset{def.}{:=}$ NAJVÄČŠÍ ČAS UKONČENIA ÚLOHY Z I_t.
(POSLEDNEJ)

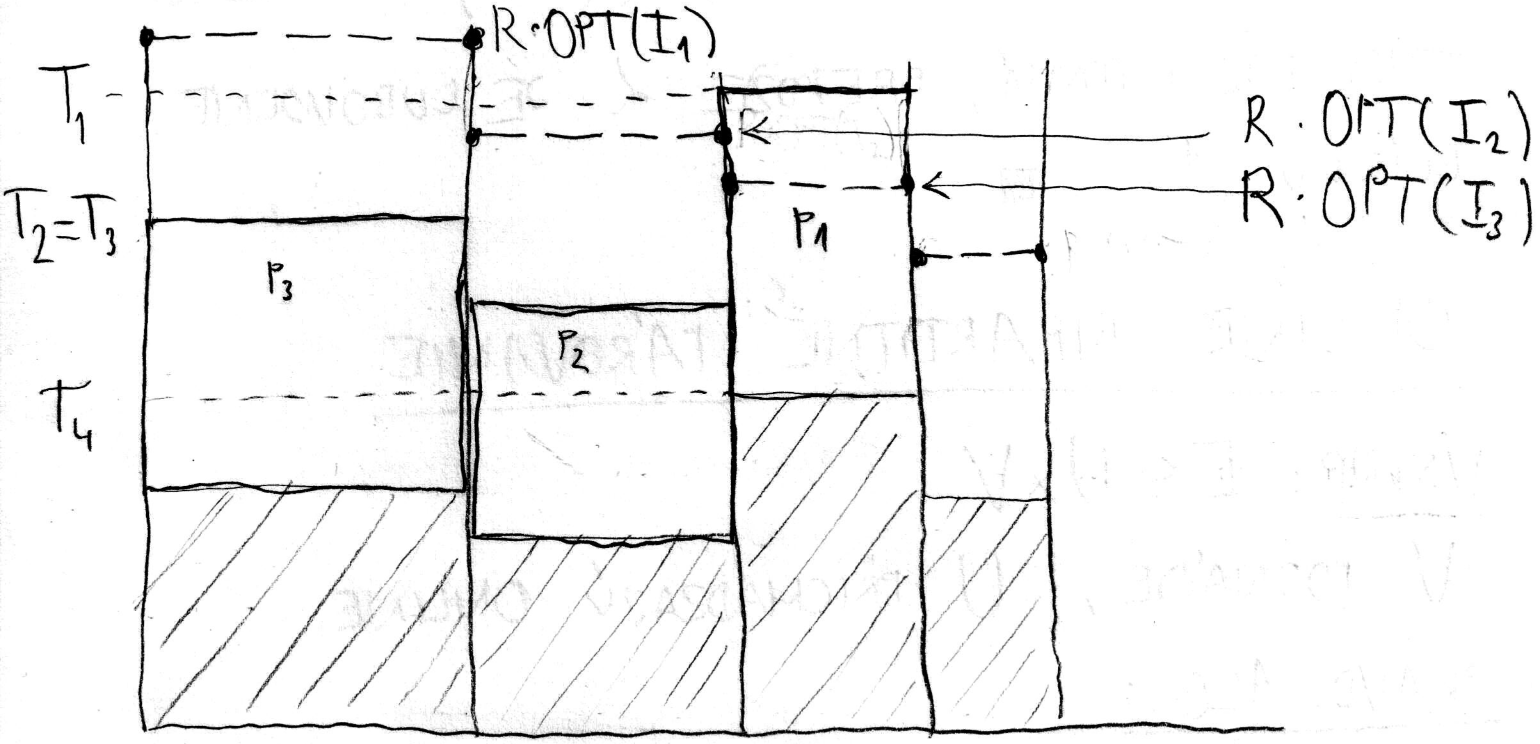
14.05.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

AK JE ALG R-KOMPETITÍVNY $\Rightarrow$

$$T_t \leq R \cdot OPT(I_t)$$

PRE PRAVD. ALGORITMY: $E[T_t] \leq R . OPT(I_t)$.



OZNAČME $P = \sum p_j$.

PRE KOMPETITÍVNY ALG. PLATÍ:

$$P \leq \sum_{i=1}^{m} s_i E[T_i] \leq R \sum_{i=1}^{m} s_i OPT(I_i).$$

PRE DOLNÝ ODHAD UVAŽUJME NEKONEČNÚ INSTANCIU: $s_i := \alpha^i$, $\alpha := 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ MALÉ

$$p_j := \alpha^j$$

$OPT_1 = 1.$

$OPT_{i-1} = \alpha^{i-1}$

...

$P = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

PLATÍ:

$$R \geq \frac{P}{\sum_i s_i \, OPT(I_i)} = \frac{\alpha/(1-\alpha)}{\alpha/(1-\alpha^2)} = \underline{\underline{1+\alpha}}$$

TÝM SME HOTOVÍ, PRETOŽE α JE ĽUBOVOĽNE BLÍZKO 1. ■

ONLINE BIPARTITNÉ PÁROVANIE

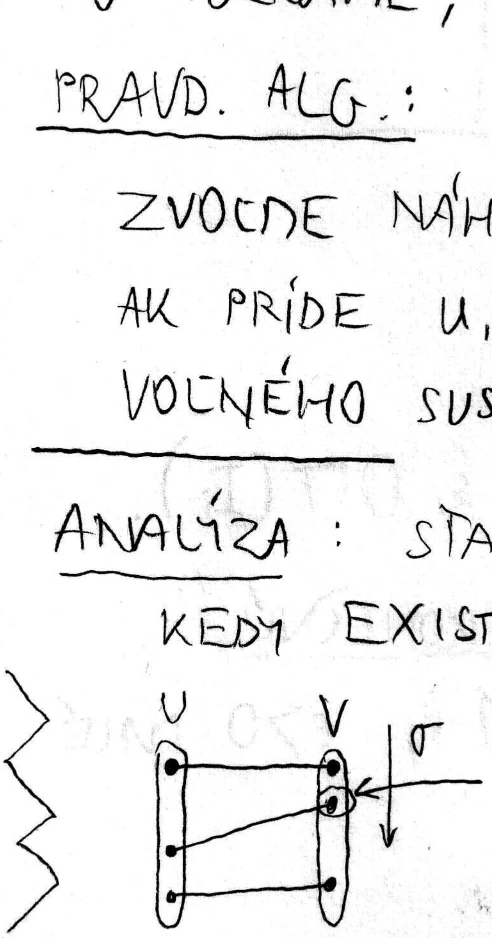
VSTUP: $E \subseteq U \times V$

V POZNÁME, U PRICHÁDZAJÚ ONLINE

PRAVD. ALG.:

ZVOLÍME NÁHODNÚ PERMUTÁCIU σ MN. V
AK PRÍDE u, VYBERIE SI PRVÉHO VOĽNÉHO SUSEDA PODĽA σ.

ANALÝZA: STAČÍ SA ZAOBERAŤ IBA PRÍPADOM, KEDY EXISTUJE PERFEKTNÉ PÁROVANIE:



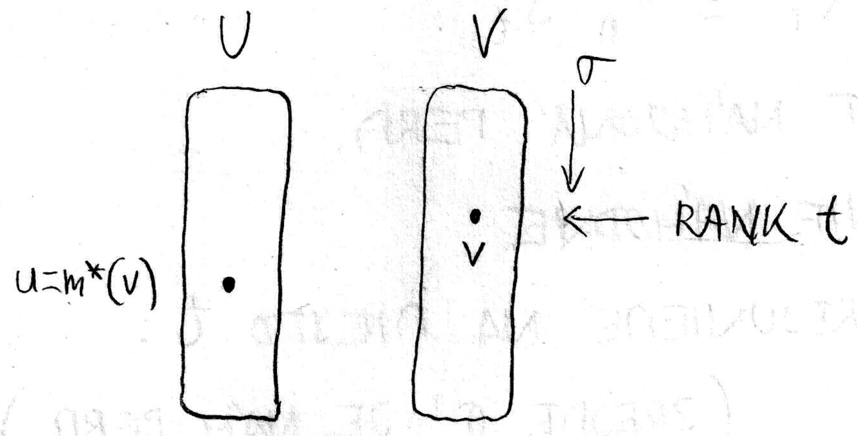
NECH VRCHOL v NESPÁROVANÝ V OPT ... VYPUSTÍM v $\Rightarrow$ PRE $\forall \sigma$ SA MI VÝSTUP IBA ZHORŠÍ.

14.05.2012 Po
Peter Černo

NDMI018 Aproximační a online alg.

Označme: m^* ... perfektné párovanie.
$m^*(v)$ ... partner v v m^*.

Lemma: Pokiaľ alg. nespáruje v, potom $u = m^*(v)$ je spárovaný s v', ktoré je v σ pred v'.



$x_t := P_\sigma$[v vrchol σ-ranku t je spárovaný]

$S_t := E$[# spárovaných vrcholov medzi prvými t vrcholmi]

$S_0 := 0$, $S_t = x_1 + \ldots + x_t$.

P[nespárujeme $u = m^*(v)$, kde v má rank t, s vrcholom v] $\leq$ P[$u = m^*(v)$ je už spárovaný] $\not\leq$ S_{t-1}/n

Pozor! V tejto úvahe je chyba!

LEMMA : σ' PERMUTÁCIA, $u = m^*(v)$

σ_i VZNIKNE ZO σ' PRESUNUTÍM v NA RANK i.
KEĎ v JE NESPÁROVANÝ V $ALG(\sigma')$,
POTOM u JE V $ALG(\sigma_i)$ SPÁROVANÝ
S VRCHOLOM RANKU t = RANK v V σ'.

$\Rightarrow$ LEMMA : $1 - x_t \leq \frac{1}{n} S_t$.

DÔKAZ. NECH σ JE NÁHODNÁ PERM.

VEZMIME $v \in_R V$ UNIF. NÁHODNE
σ' ... σ, KDE v PRESUNIEME NA MIESTO t.
UVAŽUJME $ALG(\sigma')$ (ZREJME σ' JE NÁH. PERM.)
$P[v$ JE NESPÁROVANÉ$] = 1 - x_t$. (PODĽA DEF. x_t CEZ σ')
$\leq \frac{S_t}{n}$. (x_t MÔŽEME POČÍTAŤ CEZ σ A CEZ σ'). ■

$$1 - x_t \leq \frac{1}{n} S_{t-1} + \frac{x_t}{n}$$
$$1 - \frac{1}{n} S_{t-1} \leq x_t \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$1 + S_{t-1} \leq S_t \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_t \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} S_{t-1} \geq$$
$$\geq \dots \geq \underbrace{n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n\right)}_{S_n}$$

KOMPETITÍVNY POMER $\frac{S_n}{n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow 1 - \frac{1}{e}$. ■

PROBLÉM : KONVERGENCIA ZO ZLEJ STRANY :-(

21.05.2012 M.
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

NP-ŤAŽKOSŤ APROXIMÁCIE

PRÍKLAD: OBECNÝ TSP JE NP-ŤAŽKÉ APROXIMOVAŤ

PRÍKLAD: C-APROX. FAREBNOSTI $\Rightarrow$ $\sqrt{C}$-APROX. FAREBNOSTI

PRÍKLAD: BINPACKING ... NP-ŤAŽKÉ, @ OPT = 2.

PRÍKLAD: ROZVRHOVANIE SO ZÁVISLOSŤAMI, —||— ...

L-REDUKCIE ... REDUKCIE, KT. ZACHOVÁVAJÚ APROX.

Π ŤAŽŠÍ NEŽ Π'

$I \xrightarrow{ALG_1} I'$

$A \xleftarrow{ALG_2} A'$ ... RIEŠENIE I'

DEF. Π, Π' ... OPTIMALIZAČNÉ PROBLÉMY

L-REDUKCIA: DVOJICA POL. ALG. A DVOJICA PARAMETROV a A b T. Ž.:

(1) ALG.1 SPOČÍTA I' Z I
ALG.2 SPOČÍTA A.. RIEŠENIE I Z A'.. RIEŠENIE I'.

(2) $OPT(I') \leq a \cdot OPT(I)$ ... TOTO OBMEDZUJE ALG.1

(3) $|OPT(I) - A| \leq b \cdot |OPT(I') - A'|$.

VETA : Π, Π' ... MAXIMALIZAČNÉ PROBLÉMY,
Π' ... R - APROX. ALG. A EXIST. L-RED. (a, b),
POTOM Π MÁ $(1 - ab(1-R))$- APROX. ALG. $(R<1)$

PRE MINIMALIZAČNÉ PROBLÉMY ... $(1+ab(R-1))$.

DÔKAZ. $A = OPT(I) + |OPT(I) - A| \leq$

$\leq OPT(I) + b\,|OPT(I') - A'|$

$A' \leq R \cdot OPT(I')$

$\leq OPT(I) + b \cdot (R-1)\, OPT(I')$. ∎

L-REDUKCIE PREVÁDZAJÚ (F)PTAS → (F)PTAS

... AK $R = 1+\varepsilon$, POTOM $1 + ab(R-1) = 1 + \varepsilon'$.

PCP VETA & GAP PRESERVING REDUCTION

$PCP_{c,s}(r, q)$ ... TRIEDA JAZYKOV, KT.
MÔŽEME VERIFIKOVAŤ PRAVD. ALG. KT.
(1) POUŽÍVA r NÁHODNÝCH BITOV
(2) ČÍTA q BITOV Z DÔKAZU
(3) $(\forall x \in L)(\exists \pi) : P[ALG.(x, \pi)\ ACC] \geq c$.
(4) $(\forall x \notin L)(\forall \pi) : P[ALG.(x, \pi)\ ACC] \leq s$.

PCP VETA : $NP \subseteq PCP_{1,\frac{1}{2}}(O(\log n), O(1))$.
(1992)

21.05.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

DÔSLEDOK: AK $P \neq NP$, POTOM MAX-SAT NEMÁ PTAS.

UVAŽUJME FORMULU $\varphi_{r,x}$ V CNF T.Z.
$\varphi_r(\pi) = 1 \iff ALG(x, \pi)$ PRIJME ...

DEFINUJME $\varphi := \bigwedge_r \varphi_r$.

AK $x \in L$, POTOM $\varphi \in SAT$.

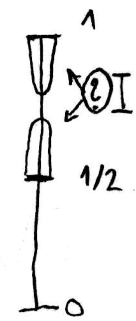
AK $x \notin L$, POTOM PRE $\forall \pi$ φ MÁ ASPOŇ POLOVICU φ_r NESPLNENÝCH FORMULÍ.

$|\varphi_r| \leq 2^q$ ... POČET POUŽITÝCH BITOV Z DÔKAZU

$\Rightarrow |\varphi| \leq R \cdot 2^q$. ∎

VETA (HASTAD, 1995): $(\forall \varepsilon)$ $NP \subseteq PCP_{1-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon}(O(\log n), 3)$
A VERIFIKAČNÝ ALG. ROZHODUJE NA ZÁKLADE PARITY PREČÍTANÝCH BITOV.

DÔSLEDOK. NECH I JE SÚSTAVA LIN. ROVNÍC NAD GF(2), KDE KAŽDÁ ROVNICA MÁ ≤ 3 PREM., POTOM JE NP-ŤAŽKÉ ROZHODNÚŤ, ČI MAX. # SPLNITEĽNÝCH ROVNÍC JE $\geq 1-\varepsilon$ / $\leq \frac{1}{2}+\varepsilon$.



DÔSLEDOK. JE NP-ŤAŽKÉ $\left(\frac{7}{8}+\varepsilon\right)$-APROX. MAX-E3-SAT.

KAŽDÚ ROVNICU S ≤ 3 PREMENNÝMI NAD $GF(2)$ VIEME NAPÍSAŤ AKO φ... E3-CNF SO 4 KLAUZ.

PRÍKLAD: $x+y \equiv 0 \pmod 2$

$$\underbrace{(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)}$$

$$(x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \ \ldots$$

n ROVNÍC $\rightsquigarrow$ $4n$ KLAUZULÍ

OPT $\rightsquigarrow$ $3n + \mathrm{OPT}$

k SPLNENÝCH $\rightsquigarrow$ $3n + k$ SPLNENÝCH. ▨

LABEL COVER

... TOTO VYNECHÁME.

UNIQUE GAMES CONJECTURE

UGC: JE DANÉ k ... KONŠTANTA. (# FARIEB).

JE DANÝ GRAF G A PERMUTÁCIA $\pi_{u,v}$

PRE KAŽDÚ HRANU uv. ($\equiv$ PODMIENKA PRE FARBY)

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k)$: JE NP-ŤAŽKÉ ROZLÍŠIŤ

INŠTANCIE UGC T. Ž.

$\begin{cases} \geq 1-\varepsilon & \text{PODMIENOK JE SPLNITEĽNÝCH,} \\ \leq \varepsilon & \text{PODMIENOK JE SPLNITEĽNÝCH.} \end{cases}$

21.05.2012 Mo
PETER ČERNO

NDMI018 APROXIMAČNÍ A ONLINE ALG.

EKVIVALENTNÉ VERZIE UGC

(1) Π_{uv} SÚ LINEÁRNE PODMIENKY:
$(\ell(u) = \ell(v) + p_{uv} \pmod{k})$

(2) G JE BIPARTITNÝ $\subseteq U \times V$,
$(\forall u_1, u_2 \in U)(\deg(u_1) = \deg(u_2))$.